Problemes d'Àlgebra II.

Grau de Física

Agustí Reventós[1]

2015

[1]Jo només els he resolt. La majoria d'enunciats provenen dels apunts Cedó-Herbera que seguiu a teoria, però també hi ha problemes de procedència diversa. Els de formes hermítiques provenen de Wolfgang Pitsch.

Índex

Capítol 1

Espai dual

1. Proveu que $\omega_1(x,y,z) = x - iy - iz$, $\omega_2(x,y,z) = 2x - z$, $\omega_3(x,y,z) = iz - x$ formen una base de $(\mathbb{C}^3)^*$. Expresseu $\omega(x,y,z) = x$ en coordenades respecte d'aquesta base.

Solució: Primer mètode. *Escrivim*

$$\omega = \lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2 + \nu\,\omega_3$$

i hem de calcular λ, μ, ν. *Per a això apliquem l'anterior igualtat successivament als vectors de* $\mathbb{C}^3$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *i* $(0,0,1)$ *Tenim*

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda + 2\mu - \nu \\ 0 &= -i\lambda \\ 0 &= -i\lambda - \mu + i\nu \end{aligned}$$

Per tant $\lambda = 0$, $\mu = \dfrac{i}{2i-1}$, $\nu = \dfrac{1}{2i-1}$.

Segon mètode. *Utilitzarem la fórmula general*

$$M(f,B,V)(v)_B = (f(v))_V$$

que diu que la matriu de l'aplicació lineal f *respecte de les bases* B *(base de sortida) i* V *(base d'arribada),* $M(f,B,V)$*, aplicada a la matriu columna formada per les components del vector* v *respecte la base* B

$$(v)_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ens dóna justament la matriu columna formada per les components del vector $f(v)$ respecte de la base V

$$(f(v))_V = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}.$$

Un cas particular important és quan $f = id$, ja que llavors tenim

$$M(id, B, V)(v)_B = (v)_V. \tag{1.1}$$

La matriu $M(id, B, V)$ s'anomena matriu del canvi de base, ja que aplicada a les components de v respecte de la base B ens dóna les components del mateix v respecte de la base$V$.
En el problema que ens ocupa podem considerar que tenim tres bases: la base canònica de $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ amb $c_1 = (1, 0, 0)$, $c_2 = (0, 1, 0)$, $c_3 = (0, 0, 1)$; la seva base dual $\mathcal{C}^* = (c_1^*, c_2^*, c_3^*)$; i la base $B = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.
El que ens demana el problema és justament la matriu columna

$$(\omega)_B$$

formada per les components de ω respecte de la base B, que per la fórmula (1.1) es pot calcular com

$$M(id, \mathcal{C}^*, B)(\omega)_{\mathcal{C}^*} = (\omega)_B. \tag{1.2}$$

Observem que la matriu $(\omega)_{\mathcal{C}^*}$ és molt fàcil de calcular, ja que ω és exactament igual a c_1^* (val 1 sobre c_1 i 0 sobre c_2 i c_3). Per tant

$$(\omega)_{\mathcal{C}^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per altra banda, és fàcil veure que en permutar les bases a la matriu del canvi de base, la matriu s'inverteix. És a dir

$$M(id, \mathcal{C}^*, B) = M(id, B, \mathcal{C}^*)^{-1}$$

L'avantatge de fer això és que aquesta segona matriu és immediata ja que identifiquem $x = c_1^*$, $y = c_2^*$ i $z = c_2^*$. Així

$$M(id, B, \mathcal{C}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -i & 0 & 0 \\ -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

Calculem la seva inversa (per exemple escrivint MatrixInverse a Maple[1]*)*

$$M(id, B, \mathcal{C}^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{i} & 0 \\ \frac{i}{2i-1} & 0 & \frac{1}{2i-1} \\ \frac{1}{2i-1} & -\frac{1}{i} & \frac{2}{2i-1} \end{pmatrix}$$

Aplicant la fórmula (1.2) *tenim*

$$(\omega)_B = M(id, \mathcal{C}^*, B)(\omega)_{\mathcal{C}^*} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{i} & 0 \\ \frac{i}{2i-1} & 0 & \frac{1}{2i-1} \\ \frac{1}{2i-1} & -\frac{1}{i} & \frac{2}{2i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i}{2i-1} \\ \frac{1}{2i-1} \end{pmatrix}$$

Equivalentment,

$$\omega = 0 \cdot \omega_1 + \frac{i}{2i-1} \cdot \omega_2 + \frac{1}{2i-1} \cdot \omega_3$$

d'acord amb el resultat obtingut pel primer mètode.

2.

Expresseu $\omega(x, y, z, t) = 2x - y - t$ en coordenades respecte de la base dual de la base canònica de $\mathbb{R}^4$. Trobeu la base dual de la base $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ amb

$$v_1 = (1, 0, 1, 1),\ v_2 = (1, 0, 1, 2),\ v_3 = (1, 0, 0, 1),\ v_4 = (1, 1, 0, 0)$$

i les coordenades de ω en aquesta base.

Solució: *Si denotem per $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ la base canònica de $\mathbb{R}^4$, la seva base dual $\mathcal{C}^*$ s'identifica amb les coordenades dels vectors, i.e, $x = c_1^*$, $y = c_2^*$, $z = c_3^*$, $t = c_4^*$. Per tant, directament*

$$(\omega)_{\mathcal{C}^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Equivalentment, $\omega = 2c_1^* - c_1^* - c_4^*$.
Base dual. Primer mètode. *Busquem quatre elements $\omega_i, i = 1, 2, 3, 4$ del dual tals que*

$$\omega_i(v_j) = \delta_{ij}.$$

[1]

$>$ with(LinearAlgebra):

$> M :=<< 1, -i, -i > | < 2, 0, -1 > | < -1, 0, i >>$

$> M^{-1} := MatrixInverse(M);$

Escrivim

$$\omega_i = \sum_k a_{ki} c_k^*$$

Aplicant als dos membres d'aquesta igualtat als vectors v_k *tenim els sistemes d'equacions següents:*
Per $i = 1$.

$$\begin{aligned}
(a_{11}c_1^* + a_{21}c_2^* + a_{31}c_3^* + a_{41}c_4^*)(1,0,1,1) &= 1\\
(a_{11}c_1^* + a_{21}c_2^* + a_{31}c_3^* + a_{41}c_4^*)(1,0,1,2) &= 0\\
(a_{11}c_1^* + a_{21}c_2^* + a_{31}c_3^* + a_{41}c_4^*)(1,0,0,1) &= 0\\
(a_{11}c_1^* + a_{21}c_2^* + a_{31}c_3^* + a_{41}c_4^*)(1,1,0,0) &= 0
\end{aligned}$$

És a dir

$$\begin{aligned}
a_{11} + a_{31} + a_{41} &= 1\\
a_{11} + a_{31} + 2a_{41} &= 0\\
a_{11} + a_{41} &= 0\\
a_{11} + a_{21} &= 0
\end{aligned}$$

Obtenim $a_{11} = 1$, $a_{21} = -1$, $a_{31} = 1$, $a_{41} = -1$. *És a dir,* $\omega_1 = (1,-1,1,-1)$.
Per $i = 2$.

$$\begin{aligned}
(a_{12}c_1^* + a_{22}c_2^* + a_{32}c_3^* + a_{42}c_4^*)(1,0,1,1) &= 0\\
(a_{12}c_1^* + a_{22}c_2^* + a_{32}c_3^* + a_{42}c_4^*)(1,0,1,2) &= 1\\
(a_{12}c_1^* + a_{22}c_2^* + a_{32}c_3^* + a_{42}c_4^*)(1,0,0,1) &= 0\\
(a_{12}c_1^* + a_{22}c_2^* + a_{32}c_3^* + a_{42}c_4^*)(1,1,0,0) &= 0
\end{aligned}$$

És a dir

$$\begin{aligned}
a_{12} + a_{32} + a_{42} &= 0\\
a_{12} + a_{32} + 2a_{42} &= 1\\
a_{12} + a_{42} &= 0\\
a_{12} + a_{22} &= 0
\end{aligned}$$

Obtenim $a_{12} = -1$, $a_{22} = 1$, $a_{32} = 0$, $a_{42} = 1$. *És a dir,* $\omega_2 = (-1,1,0,1)$.
Per $i = 3$.

$$\begin{aligned}
(a_{13}c_1^* + a_{23}c_2^* + a_{33}c_3^* + a_{43}c_4^*)(1,0,1,1) &= 0\\
(a_{13}c_1^* + a_{23}c_2^* + a_{33}c_3^* + a_{43}c_4^*)(1,0,1,2) &= 0\\
(a_{13}c_1^* + a_{23}c_2^* + a_{33}c_3^* + a_{43}c_4^*)(1,0,0,1) &= 1\\
(a_{13}c_1^* + a_{23}c_2^* + a_{33}c_3^* + a_{43}c_4^*)(1,1,0,0) &= 0
\end{aligned}$$

És a dir

$$\begin{aligned} a_{13} + a_{33} + a_{43} &= 0 \\ a_{13} + a_{33} + 2a_{43} &= 0 \\ a_{13} + a_{43} &= 1 \\ a_{13} + a_{23} &= 0 \end{aligned}$$

Obtenim $a_{13} = 1$, $a_{23} = -1$, $a_{33} = -1$, $a_{43} = 0$. *És a dir,* $\omega_3 = (1, -1, -1, 0)$.
Per $i = 4$.

$$\begin{aligned} (a_{14}c_1^* + a_{24}c_2^* + a_{34}c_3^* + a_{44}c_4^*)(1, 0, 1, 1) &= 0 \\ (a_{14}c_1^* + a_{24}c_2^* + a_{34}c_3^* + a_{44}c_4^*)(1, 0, 1, 2) &= 0 \\ (a_{14}c_1^* + a_{24}c_2^* + a_{34}c_3^* + a_{44}c_4^*)(1, 0, 0, 1) &= 0 \\ (a_{14}c_1^* + a_{24}c_2^* + a_{34}c_3^* + a_{44}c_4^*)(1, 1, 0, 0) &= 1 \end{aligned}$$

És a dir

$$\begin{aligned} a_{14} + a_{34} + a_{44} &= 0 \\ a_{14} + a_{34} + 2a_{44} &= 0 \\ a_{14} + a_{44} &= 0 \\ a_{14} + a_{24} &= 1 \end{aligned}$$

Obtenim $a_{14} = 0$, $a_{24} = 1$, $a_{34} = 0$, $a_{44} = 0$. *És a dir,* $\omega_4 = (0, 1, 0, 0)$.
Base dual. Segon mètode. *Volem trobar* V^*. *Això equival a trobar* $M(id, V^*, \mathcal{C}^*)$. *Tenim*

$$M(id, V^*, \mathcal{C}^*) = M(id, \mathcal{C}, V)^t = (M(id, V, \mathcal{C})^{-1})^t$$

Però

$$M(id, V, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Maple ens diu que

$$(M(id, V, \mathcal{C})^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les columnes ens donen les components de $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ *respecte de la base dual de la canònica, que coincideixen òbviament amb les obtingudes pel primer procediment.*

3. Sigui f l'automorfisme de $\mathbb{R}^2$ que té com a matriu associada en la base canònica la matriu

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sigui $\omega \in (\mathbb{R}^2)^*$ definida per $\omega(x, y) = x + y$. Trobeu les coordenades de ω en la base dual de $(f(c_1), f(c_2))$, on (c_1, c_2) és la base canònica de $\mathbb{R}^2$.

Solució: Primer mètode. *Posem, per simplificar la notació,* $u_1 = f(c_1) = \sqrt{2}\, c_1$ *i* $u_2 = f(c_2) = c_1 + \sqrt{2}\, c_2$.
Escrivim ω *en funció de la base dual* u_1^*, u_2^*. *Tenim*

$$\omega = a u_1^* + b u_2^*$$

i obtenim $a = \omega(u_1) = \omega((\sqrt{2}, 0)) = \sqrt{2}$, *i* $b = \omega(u_2) = \omega((1, \sqrt{2})) = 1 + \sqrt{2}$.
Si volem trobar explícitament la base dual (u_1^*, u_2^*) *(cosa que el problema no demana) procedim així:*

$$\begin{aligned} u_1^*(u_1) &= 1 \\ u_1^*(u_2) &= 0 \\ u_2^*(u_1) &= 0 \\ u_2^*(u_2) &= 1 \end{aligned}$$

Posem $u_1^* = a_{11} c_1^* + a_{21} c_2^*$, *i* $u_2^* = a_{12} c_1^* + a_{22} c_2^*$.
Tenim

$$\begin{aligned} (a_{11} c_1^* + a_{21} c_2^*)(\sqrt{2}\, c_1) &= 1 \\ (a_{11} c_1^* + a_{21} c_2^*)(c_1 + \sqrt{2}\, c_2) &= 0 \\ (a_{12} c_1^* + a_{22} c_2^*)(\sqrt{2}\, c_1) &= 0 \\ (a_{12} c_1^* + a_{22} c_2^*)(c_1 + \sqrt{2}\, c_2) &= 1 \end{aligned}$$

que equival a

$$\begin{aligned} a_{11}\sqrt{2} &= 1 \\ a_{11} + a_{21}\sqrt{2} &= 0 \\ a_{12}\sqrt{2} &= 0 \\ a_{12} + a_{22}\sqrt{2} &= 1 \end{aligned}$$

Per tant $a_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = -\dfrac{1}{2}$, $a_{22} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. *La base dual demanada, escrita respecte de la base dual de la base canònica, és* $u_1^* = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2})$, $u_2^* = (0, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$.

Segon mètode. *Sigui* $\mathcal{C}$ *la base canònica de* $\mathbb{R}^2$ *i* $B = (f(c_1), f(c_2)) = (\sqrt{2}c_1, c_1 + \sqrt{2}c_2)$. *Ens demanen*

$$(\omega)_{B^*}$$

Sabem

$$M(id, \mathcal{C}^*, B^*)(\omega)_{\mathcal{C}^*} = (\omega)_{B^*}$$

Clarament

$$(\omega)_{\mathcal{C}^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i

$$M(id, \mathcal{C}^*, B^*) = M(id, B, \mathcal{C})^t = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^t$$

Per tant

$$(\omega)_{B^*} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Si volem trobar explícitament la base dual (u_1^*, u_2^*) *(cosa que el problema no demana) procedim així:*

$$M(id, B^*, \mathcal{C}^*) = M(id, \mathcal{C}, B)^t = (M(id, B, \mathcal{C})^{-1})^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

La primera columna està formada per les coordenades de u_1^*, *i la segona columna està formada per les coordenades de* u_2^* *(respecte de* $\mathcal{C}^*$*).*

4. Sigui $V = \mathbb{R}_2[x]$ l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals de grau més petit o igual que 2, $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$. Es defineixen les aplicacions lineals sobre V següents:

$$f_1(p(x)) = \int_0^1 p(s)ds, \qquad f_2(p(x)) = \int_0^2 p(s)ds, \qquad f_3(p(x)) = \int_0^{-1} p(s)ds$$

(a) Demostreu que (f_1, f_2, f_3) és una base de V^*. Doneu la base de V respecte de la qual aquesta és la seva dual.

(b) Demostreu que, donat $a \in \mathbb{R}$ qualsevol, els polinomis $1, x - a, (x - a)^2$ formen una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Calculeu les coordenades de f_1, f_2, f_3 en la base dual de $(1, x - a, (x - a)^2)$

(c) Siguin r_1, r_2, r_3 tres nombres reals diferents i definim $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in (\mathbb{R}_2[x])^*$ per $\omega_i(p(x)) = p(r_i)$, per a $i = 1, 2, 3$. Demostreu que formen una base de $(\mathbb{R}_2[x])^*$ i trobeu la base de $\mathbb{R}_2[x]$ de la qual és base dual.

Solució: Solució apartat (a). *Denotem* $\mathcal{C}$ *la base* $(1, x, x^2)$ *de* V, *i per* $\mathcal{C}^*$ *la seva dual. Abans de res mirem quines són les coordenades de* f_1, f_2, f_3 *respecte de* $\mathcal{C}^*$.

Les coordenades de f_1 respecte $\mathcal{C}^*$ són $f_1(1), f_1(x), f_1(x^2)$. Només heu de pensar $f_1 = a1^* + bx^* + c(x^2)^*$ i calcular a, b, c.

$$\begin{aligned} f_1(1) &= \int_0^1 1\ ds = 1 \\ f_1(x) &= \int_0^1 x\ ds = 1/2 \\ f_1(x^2) &= \int_0^1 x^2\ ds = 1/3 \end{aligned}$$

Anàlogament les coordenades de f_2 respecte $\mathcal{C}^*$ són $f_2(1), f_2(x), f_2(x^2)$.

$$\begin{aligned} f_2(1) &= \int_0^2 1\ ds = 2 \\ f_2(x) &= \int_0^2 x\ ds = 2 \\ f_2(x^2) &= \int_0^2 x^2\ ds = 8/3 \end{aligned}$$

Finalment les coordenades de f_3 respecte $\mathcal{C}^*$ són $f_3(1), f_3(x), f_3(x^2)$.

$$\begin{aligned} f_3(1) &= \int_0^{-1} 1\ ds = -1 \\ f_3(x) &= \int_0^{-1} x\ ds = 1/2 \\ f_3(x^2) &= \int_0^{-1} x^2\ ds = -1/3 \end{aligned}$$

Resumint, si denotem per F la base (f_1, f_2, f_3) de V^* tenim

$$M(id, F, \mathcal{C}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/3 & 8/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Busquem ara una base B de V tal que $B^* = F$. Equivalentment,

$$M(id, B^*, \mathcal{C}^*) = M(id, F, \mathcal{C}^*).$$

Així

$$M(id, B, \mathcal{C}) = M(id, \mathcal{C}^*, B^*)^t = (M(id, B^*, \mathcal{C}^*,)^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 2 & 8/3 \\ -1 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Maple diu

$$M(id, B, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & -1/6 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Així $B = (1 + x - (3/2)x^2, -(1/6) + (1/2)x^2, -(1/3) + x - (1/2)x^2)$.

Solució apartat (b). *Sigui* C_a *la base* $(1, (x-a), (x-a)^2)$. *Les coordenades de* f_1 *respecte* C_a^* *són*

$$\begin{aligned} f_1(1) &= \int_0^1 ds = 1 \\ f_1(x-a) &= \int_0^1 (x-a)ds = (1/2) - a \\ f_1((x-a)^2) &= \int_0^1 (x-a)^2 ds = (3a^2 - 3a + 1)/3 \end{aligned}$$

etc.

Solució apartat (c). *Veiem que són linealment independents. Suposem*

$$a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 = 0,$$

i ho apliquem a $1, x, x^2$.

$$\begin{aligned} 0 &= a + b + c \\ 0 &= ar_1 + br_2 + cr_3 \\ 0 &= ar_1^2 + br_2^2 + cr_3^2 \end{aligned}$$

Com[2]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)(r_3 - r_1)(r_3 - r_2) \neq 0$$

el sistema només admet la solució $a = b = c = 0$, *i per tant,* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *són linealment independents.*

Ara busquem $B = (v_1, v_2, v_3)$ *base de* V *tal que* $B^* = \Omega$ *on* Ω *és la base* $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Primer mètode. *El primer vector de* B *és un polinomi* $v_1 = a + bx + cx^2$ *tal que*

$$\begin{aligned} \omega_1(v_1) &= 1 \\ \omega_2(v_1) &= 0 \\ \omega_3(v_1) &= 0 \end{aligned}$$

És a dir,

$$\begin{aligned} a + br_1 + cr_1^2 &= 1 \\ a + br_2 + cr_2^2 &= 0 \\ a + br_3 + cr_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

[2] $F_i \longrightarrow F_i - r_1 F_{i-1}$.

Resolent el sistema obtenim

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 \\ 0 & r_2 & r_2^2 \\ 0 & r_3 & r_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 \\ 1 & r_2 & r_2^2 \\ 1 & r_3 & r_3^2 \end{vmatrix}} = \frac{r_2 r_3}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}$$

Anàlogament

$$b = -\frac{r_2 + r_3}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}$$
$$c = \frac{1}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}$$

Anàlogament trobaríem els altres dos vectors v_2, v_3 de la base B.
Segon mètode. *Tenim*

$$M(id, B, \mathcal{C}) = M(id, \mathcal{C}^*, B^*)^t = M(id, \mathcal{C}^*, \Omega)^t = (M(id, \Omega, \mathcal{C}^*)^{-1})^t$$

Però

$$M(id, \Omega, \mathcal{C}^*) = \begin{pmatrix} \omega_1(1) & \omega_2(1) & \omega_3(1) \\ \omega_1(x) & \omega_2(x) & \omega_3(x) \\ \omega_1(x^2) & \omega_2(x^2) & \omega_3(x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{pmatrix}$$

Maple diu

$$\begin{aligned} M(id, B, \mathcal{C}) &= \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 \\ 1 & r_2 & r_2^2 \\ 1 & r_3 & r_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{r_2 r_3}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} & \frac{r_1 r_3}{(r_2 - r_3)(r_2 - r_1)} & \frac{r_1 r_2}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} \\ -\frac{r_2 + r_3}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} & -\frac{r_1 + r_3}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} & -\frac{r_1 + r_2}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} \\ \frac{1}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} & \frac{1}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} & \frac{1}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observem que la primera columna coincideix amb les coordenades de v_1 que hem trobat pel primer mètode.

5. Proveu que les aplicacions lineals

$$\begin{array}{rccc} \phi_i : & \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p(x) & \mapsto & p^{(i)}(a) \end{array}$$

per $a \in \mathbb{R}$ fixat, variant $0 \leq i \leq n$, formen una base de $(\mathbb{R}_n[x])^*$. De quina base de $\mathbb{R}_n[x]$ és base dual?

Solució: Primer mètode. *Tot polinomi de grau n es pot escriure com (Taylor):*

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$$

amb

$$a_i = \frac{p^{(i)}(a)}{i!} = \frac{\phi_i(p(x))}{i!} \tag{1.3}$$

Els coeficients a_i són (es poden interpretar com) la base dual de

$$1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$$

ja que

$$((x-a)^i)^*(p(x)) = a_i, \tag{1.4}$$

Comparant (1.3) *i* (1.4) *tenim*

$$\phi_i = i!\ ((x-a)^i)^*$$

i per tant[3]

$$\phi_i = \left(\frac{(x-a)^i}{i!}\right)^*.$$

Aquest darrer pas ens el podem estalviar ja que podem escriure directament

$$p(x) = \phi_0(p(x)) + \phi_1(p(x))\frac{(x-a)}{1!} + \phi_2(p(x))\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + \phi_n(p(x))\frac{(x-a)^n}{n!}$$

i, pels comentaris anteriors, ja es veu directament que la base $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ és la base dual de la base

$$\left(\frac{(x-a)^0}{0!}, \frac{(x-a)^1}{1!}, \frac{(x-a)^2}{2!}, \ldots, \frac{(x-a)^n}{n!}\right)$$

Segon mètode. *Busquem una base B de $\mathbb{R}_n[x]$ tal que $B^* = \Phi$, on Φ denota la base de $(\mathbb{R}_n[x])^*$ donada per $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$. Diem $\mathcal{C}_a$ la base de $\mathbb{R}_n[x]$ donada per $(1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n)$. La igualtat $B^* = \Phi$ implica*

$$M(id, B^*, \mathcal{C}_a^*) = M(id, \Phi, \mathcal{C}_a^*).$$

Estudiem aquesta segona matriu. La seva i-èssima columna està formada per les components de ϕ_i respecte de $\mathcal{C}_a^*$. Si posem

$$\phi_i = \sum_k a_{ki}((x-a)^k)^*$$

tenim

$$a_{ki} = \phi_i((x-a)^k) = k!\ \delta_{ik}$$

Per tant

[3] Si (e_i^*) és la base dual de la base (e_i), llavors $(\dfrac{e_i^*}{\lambda_i})$ és la base dual de la base $(\lambda_i e_i)$.

$$M(id, \Phi, \mathcal{C}_a^*) = \begin{pmatrix} 0! & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1! & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2! & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n! \end{pmatrix}$$

Com que

$$M(id, B, \mathcal{C}_a) = M(id, \mathcal{C}_a^*, B^*)^t = (M(id, B^*, \mathcal{C}_a^*)^{-1})^t$$

tenim

$$M(id, B, \mathcal{C}_a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n!} \end{pmatrix}$$

Per tant la base buscada B està donada per

$$(\frac{1}{0!}(x-a)^0, \frac{1}{1!}(x-a)^1, \frac{1}{2!}(x-a)^2, \ldots, \frac{1}{n!}(x-a)^n).$$

6. Sigui $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + t = 0\}$. Demostreu que

$$S^{inc} = \{\omega \in (\mathbb{R}^4)^*; \omega(x, y, z, t) = \lambda(x + y + z + t), \text{per a un cert } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Solució: *La notació S^{inc}, on S és un subespai vectorial de E, denota el subespai incident a S, és a dir aquell subespai vectorial de E^* format pels elements ω tals que $\omega(v) = 0$, per a tot $v \in S$. Sempre es compleix que $\dim S + \dim S^{inc} = \dim E$. En el nostre cas doncs $\dim S^{inc} = 1$, ja que clarament $\dim S = 3$ (una restricció entre les 4 variables x, y, z, t). Si definim $\omega(x, y, z, t) = x + y + z + t$, és clar que $\omega \in S^{inc}$ ja que els elements de S compleixen justament $x + y + z + t = 0$. Per tant, $S^{inc} = \langle \omega \rangle$.*

7. Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $f(x, y, z) = (x + y + z, y - 2z)$ doneu la dimensió i una base de Ker $(f)^{inc} \subset (\mathbb{R}^3)^*$. Indicació: no cal fer càlculs.

Solució: *x, y, z són elements del dual.*

8. Demostreu que l'aplicació dual d'una aplicació lineal injectiva és exhaustiva.

Solució: *El rang de la matriu per files és igual al rang de la matriu per columnes. I les columnes generen la imatge.*

9. Sigui $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + t = 0, 2x - t = 0\}$. Calculeu S^{inc}.

Solució: *Resolent el sistema veiem que* $S = \langle(1, -3, 0, 2), (0, -1, 1, 0)\rangle$. *Si* $\omega = ax+by+cz+dt$ *(pensant ara* x, y, z, t *com la base dual de la canònica) ha de ser*

$$\begin{aligned} a - 3b + 2d &= 0 \\ -b + c &= 0 \end{aligned}$$

Això implica

$$\omega = (3b - 2d)x + by + bz + dt = b(3x + y + z) + d(-2x + t).$$

Per tant

$$S^{inc} = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$$

amb $\omega_1 = 3x + y + z, \omega_2 = -2x + t$.

10. Calculeu el subespai incident a

$$E = \langle(1, 1, 1), (0, 1, -1)\rangle \subset \mathbb{R}^3$$

i el subespai incident a

$$F = \langle x + y - z, x - y - z\rangle \subset (\mathbb{R}^3)^*$$

Solució: *Denotem* x, y, z *la base dual de la base canònica de* $\mathbb{R}^3$. *Tota* $\omega \in (\mathbb{R}^3)^*$ *es pot escriure com* $\omega = ax + by + cz$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Imposem* $\omega(1, 1, 1) = \omega(0, 1, -1) = 0$ *i obtenim*

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ b - c &= 0 \end{aligned}$$

Per tant, $a = -2b$, *i* $b = c$. *Això vol dir*

$$E^{inc} = \langle -2x + y + z \rangle$$

Anàlogament

$$F^{inc} = \{v \in (\mathbb{R}^3)^{**}; v(x+y-z) = v(x-y-z) = 0\}$$

Per la identificació entre un espai i el seu bidual tenim

$$F^{inc} = \{v \in \mathbb{R}^3; (x+y-z)(v) = (x-y-z)(v) = 0\}$$

Això implica, posant $v = (v_1, v_2, v_3)$, *que*

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 - v_3 &= 0 \\ v_1 - v_2 - v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Per tant, $v_1 = v_3$ *i* $v_2 = 0$. *Això vol dir*

$$F^{inc} = \langle (1,0,1) \rangle$$

11. Considereu la base de $\mathbb{R}^4$ donada per $e_1 = (1,1,1,1)$, $e_2 = (0,1,1,1)$, $e_3 = (0,0,1,1)$, $e_4 = (0,0,1,-1)$. Sigui $(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ la seva base dual. Expresseu les aplicacions x, y, z, t en funció d'aquesta base.

Solució: Primer mètode. *Només hem d'escriure*

$$x = ae_1^* + be_2^* + ce_3^* + de_4^* +$$

i calcular a, b, c, d.

$$\begin{aligned} a &= x(e_1) = \textit{primera coordenada de } e_1 = 1 \\ b &= x(e_2) = \textit{primera coordenada de } e_2 = 0 \\ c &= x(e_3) = \textit{primera coordenada de } e_3 = 0 \\ d &= x(e_4) = \textit{primera coordenada de } e_4 = 0 \end{aligned}$$

Anàlogament procediríem per a y, z, t.
Segon mètode *Sabem que* $\mathcal{C}^* = (x, y, z, t)$ *és la base dual de la base canònica. Denotem* $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. *Llavors el que ens demana el problema és justament* $M(id, \mathcal{C}^*, B^*)$. *Tenim*

$$M(id, \mathcal{C}^*, B^*) = M(id, B, \mathcal{C})^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Observem com la primera columna d'aquesta matriu coincideix amb les components de x *clacu-lades anteriorment.*

12. Considereu $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in (\mathbb{R}_2[x])^*$ donades per

$$\begin{aligned} \omega_1(p(x)) &= p(1) \\ \omega_2(p(x)) &= p'(1) \\ \omega_3(p(x)) &= \int_0^1 p(s)ds \end{aligned}$$

Expresseu $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ en termes de la base dual de $(1, x, x^2)$. Calculeu la base dual de la base $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Solució: *Si posem* $\omega_1 = a1^* + bx^* + c(x^2)^*$ *tenim*

$$\begin{aligned} a &= \omega_1(1) = 1 \\ b &= \omega_1(x) = 1 \\ c &= \omega_1(x^2) = 1 \end{aligned}$$

Anàlogament, si posem $\omega_2 = a1^* + bx^* + c(x^2)^*$ *tenim*

$$\begin{aligned} a &= \omega_2(1) = 0 \\ b &= \omega_2(x) = 1 \\ c &= \omega_2(x^2) = 2 \end{aligned}$$

I si posem $\omega_3 = a1^* + bx^* + c(x^2)^*$ *tenim*

$$\begin{aligned} a &= \omega_3(1) = 1 \\ b &= \omega_3(x) = 1/2 \\ c &= \omega_3(x^2) = 1/3 \end{aligned}$$

Així $\omega_1 = (1, 1, 1)$, $\omega_2 = (0, 1, 2)$, $\omega_1 = (1, 1/2, 1/3)$.
Per trobar la base dual Ω^* *posem* $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ *i tenim*

$$M(id, \Omega^*, \mathcal{C}) = M(id, \mathcal{C}, \Omega^*)^{-1} = (M(id, \Omega, \mathcal{C}^*)^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & 3 \\ 6 & -2 & -6 \\ -3 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

És a dir, $\omega_1^* = -2 + 6x - 3x^2$, $\omega_2^* = (1/2) - 2x + (3/2)x^2$, $\omega_3^* = 3 - 6x + 3x^2$.

13. Sigui $B = ((1, -1, 1), (0, 2, 3), (0, 1, -1))$ una base de $\mathbb{R}^3$. Expresseu la seva base dual en termes de la base dual de la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

Solució:

$$\begin{aligned} M(id, B^*, \mathcal{C}^*) &= M(id, \mathcal{C}, B)^t = (M(id, B, \mathcal{C})^{-1})^t \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/5 & 3/5 \\ 0 & 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La base dual buscada és doncs la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ *donada per* $(x, (1/5)y+(1/5)z, x+(3/5)y-(2/5)z)$

14. Siguin $B = \{(1,-1,1),(0,2,3),(0,1,-1)\}$ i $V = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,1,-1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Expresseu la base B^* en termes de la base V^*. Expresseu també la forma $x+y+z$ en coordenades en la base B^*.

Solució: *Per escriure les fórmules de canvi de base entre dues bases donades sovint és millor passar d'una a l'altre a través de la canònica. Utilitzant que la matriu de la composició d'aplicacions és la matriu producte de les matrius d'aquestes aplicacions tenim*

$$M(id, V, B) = M(id, \mathcal{C}, B) \cdot M(id, V, \mathcal{C})$$

Com sempre és millor referir-ho tot a la canònica, escrivim

$$\begin{aligned} M(id, V, B) &= M(id, B, \mathcal{C})^{-1} \cdot M(id, V, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 2/5 & 0 \\ 6/5 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I la matriu demanada és

$$M(id, B^*, V^*) = M(id, V, B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 6/5 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment

$$(\omega)_{B^*} = M(id, \mathcal{C}^*, B^*)(\omega)_{\mathcal{C}^*} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

És a dir $\omega = (1,-1,1)^* + 5(0,2,3)^*$.

15. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per $f(x,y,z) = (2x+y, x-y+z, x-z)$, i considerem la base $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Trobeu la matriu de f^* respecte de la base $\mathcal{B}^*$.

Solució: *Ens demanen* $M(f^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{B}^*)$. *Sabem que*

$$M(f^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{B}^*) = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})^t.$$

Per la fórmula del canvi de base

$$\begin{aligned} M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) &= M(\mathcal{B}, \mathcal{C})^{-1} M(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) M(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per tant

$$M(f^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{B}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Capítol 2

Permutacions

1. Calculeu el signe d'un cicle de longitud r.

Solució: *Si* $\sigma = (a_1, \ldots, a_n)$ *llavors*

$$\sigma = (a_1, a_2) \circ \cdots \circ (a_{n-1}, a_n)$$

i per tant $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-1}$, *ja que tenim una descomposició de* σ *en producte de* $n-1$ *transposicions.*

2. Calculeu el signe de la permutació $\sigma = (1, 3, 2, 5) \circ (4, 6)$.

Solució: *Com*

$$\sigma = (1, 3) \circ (3, 2) \circ (2, 5) \circ (4, 6)$$

tenim una descomposició de σ *en producte de* 4 *transposicions i per tant* $\epsilon(\sigma) = (-1)^4 = 1$.

3. Donada una permutació $\sigma \in S_n$ diem que té **ordre** m si m és el mínim enter més gran que 0 tal que $\sigma^m =$Id.

(a) Demostreu que si σ és una permutació i si per a uns $s, t \geq 1$ amb $s > t$ es compleix $\sigma^s = \sigma^t$ aleshores $\sigma^{s-t} = \text{Id}$. Justifiqueu que per a tota permutació té sentit parlar del seu ordre.

(b) Calculeu l'ordre de les permutacions $\sigma_1 = (1,2,3) \circ (7,5)$ i $\sigma_2 = (1,2) \circ (2,5,4)$.

(c) Demostreu que si una permutació σ té ordre m aleshores $\sigma^{mk} = \text{Id}$, per a tot $k \geq 1$. Calculeu

$$\sigma_2^{1475} \ \text{ i } \ (\ (2,5) \circ \sigma_1\ )^{123}.$$

Solució: *(a) Apliquem σ^{-1} als dos costats de la igualtat $\sigma^s = \sigma^t$, t vegades.*
Per veure que té sentit parlar de l'ordre d'una permutació només hem d'observar que el conjunt S_n de permutacions de n elements té un número finit d'elements ($n!$). Això vol dir que a la successió infinita $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \ldots$, hi ha elements repetits. És a dir, existeixen s, t amb $\sigma^s = \sigma^t$, i pels comentaris anteriors hem acabat.

(b) σ_1 ja està donada com producte de cicles disjunts. Aplicant el problema 6, ordre de σ_1 és $3 \cdot 2 = 6$.
Si no el volem aplicar només hem d'anar fent

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= (1,2,3) \circ (7,5) \\
\sigma_1^2 &= (1,3,2) \\
\sigma_1^3 &= (7,5) \\
\sigma_1^4 &= (1,2,3) \\
\sigma_1^5 &= (1,3,2) \circ (7,5) \\
\sigma_1^6 &= id
\end{aligned}$$

Com que σ_2 no està donada com producte de cicles disjunts, el primer que fem és escriure-la així

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

i ara perseguir cicles. És a dir, mirar les successives imatges del 1, etc. Tindrem $\sigma_2 = (1,2,5,4)$, per tant té ordre 4.

(c) Com $1475 = 4 \cdot 368 + 3$ tenim

$$\sigma_2^{1475} = \sigma_2^{4 \cdot 368 + 3} = (\sigma_2^4)^{368} \circ \sigma_2^3 = (id)^{368} \circ \sigma_2^3 = \sigma_2^3 = (1,4,5,2).$$

4. Demostreu que per a tota parella $\sigma, \tau \in S_n$, les permutacions σ i $\tau^{-1}\sigma\tau$ tenen el mateix signe i el mateix ordre.

Solució: *Suposem que σ descompon com a producte de r transposicions. Si τ descompon com a producte de k transposicions, llavors també τ^{-1} descompon com a producte de k transposicions (les mateixes en ordre oposat), i per tant $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$ descompon com a producte de $r + 2k$ transposicions. Com $(-1)^r = (-1)^{r+2k}$ hem acabat.*

5. (a) Podem tenir a S_9 un element d'ordre 21? (b) Quins són els ordres dels elements de S_7? (c) Quin és l'ordre màxim d'un element de S_8?

Solució: *(a) A S_9 no hi ha cap element d'ordre 21. En efecte, si $\sigma \in S_9$ i la tenim descomposta en producte de cicles disjunts, és clar que la suma de les longituds d'aquests cicles és menor o igual a 9, ja que aquests cicles estan format pels números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ i un mateix número no es pot repetir en cicles disjunts. A més, el m.c.m. d'aquestes longituds ha de ser igual a 21. Com $21 = 3 \cdot 7$ la única manera que podem tenir números més petits de 9 amb m.c.m igual a 21 és agafant un cicle d'ordre 3 i un altre d'ordre 7. Com $3 + 7 > 9$ aquest dos cicles no poden ser disjunts.*

(b) Permutacions que són iguals a un únic cicle: aquest cicle pot ser d'ordre 1,2,3,4,5,6,7 (per cicle d'ordre 1 entenem la identitat). Permutacions que són igual al producte de dos cicles: pot ser $5 + 2$ (ordre 10), $4 + 3$ (ordre 12). Permutacions que són igual al producte de tres cicles: pot ser $2 + 2 + 2$ (ordre 2), $3 + 2 + 2$ (ordre 6). No hi ha més casos. La resposta és doncs, 1,2,3,4,5,6,7,10,12.

(c) Per exemple, $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5) \circ (6, 7, 8)$ té ordre 15 $(5 \cdot 3)$. De fet, tota permutació que descompongui en producte disjunt d'un cicle d'ordre 5 amb un cicle d'ordre 3 tindrà ordre 15. És fàcil veure 15 és el número més gran que es pot obtenir calculant el m.c.m. de números ≤ 8.

6. Demostreu que si $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ són cicles disjunts de S_n i

$$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_r$$

aleshores l'ordre de σ és el mínim comú múltiple de les longituds dels cicles $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$.

Solució: *Només s'ha d'observar que, per ser disjunts, tenim*

$$\sigma^k = \sigma_1^k \circ \cdots \circ \sigma_r^k$$

i que per poder tenir $\sigma^k = id$, ha de ser $\sigma_i^k = id$ per a tot $i = 1, \ldots, r$. Per tant k és múltiple de tots els ordres i hem acabat.

7. Considerem S_n amb $n \geq 2$.

(a) Trobeu totes les permutacions parells i totes les senars de S_3.

(b) Compteu quantes permutacions parells i quantes senars hi ha a S_4.

(c) Considerem una llista

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$$

de permutacions de S_n diferents i amb el mateix signe.

Prenem una transposició τ i formem la llista

$$\tau\sigma_1, \tau\sigma_2, \ldots, \tau\sigma_t.$$

Vegeu que a aquesta darrera llista totes les permutacions són diferents i tenen signe contrari a les de la llista anterior.

(d) Proveu que a S_n hi ha tantes permutacions parells com senars.

Solució: *a) Parells:* $id, (1,2,3), (1,3,2)$. *Senars:* $(1,2), (1,3), (2,3)$.

b) Parells (12): $id; (1,2,3), (1,2,4), (1,3,2), (1,3,4), (1,4,2), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3);$
$(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)$

Senars (12): $(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4);$
$(1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3), (1,4,3,2).$

c) Obvi.

d) Conseqüència de l'apartat anterior. Siguin $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ totes les permutacions parells. Llavors $\tau\sigma_1, \ldots, \tau\sigma_m$ són imparells i són totes les imparells, ja que donada una permutació imparell ϵ, $\tau\epsilon$ seria parell i per tant igual a una dels σ_i anteriors. Així $\tau\epsilon = \sigma_i$, d'on $\epsilon = \tau\sigma_i$.

8.

Considereu les dues permutacions de S_{10} següents:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 1 & 8 & 2 & 7 & 9 & 10 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = (8,1,7,2) \circ (5,2)$$

(a) Calculeu σ_1^2, $\sigma_1 \circ \sigma_2$ i σ_2^{-1}, i descomponeu-les en producte de cicles disjunts.

(b) Descomponeu-les en producte de transposicions i calculeu el signe de cadascuna d'elles.

(c) Calculeu $((3,4) \circ \sigma_2)^{41}$

Solució: *a) Observem que* $\sigma_1 = (1,5,7,10,4,2) \circ (3,8,6,9)$ *i que* $\sigma_2 = (1,7,2,5,8)$. *Ara és fàcil veure que* $\sigma_2^{-1} = (1,8,5,2,7)$ *i* $\sigma_1 \circ \sigma_2 = (1,10,4,2,7) \circ (3,8,5,6,9)$.

b) $\sigma_1 = (1,5) \circ (5,7) \circ (7,10) \circ (10,4) \circ (4,2) \circ (3,8) \circ (8,6) \circ (6,9)$. *Signe* 1. $\sigma_2 = (1,7) \circ (7,2) \circ (2,5) \circ (5,8)$. *Signe* 1.

c) $(3,4) \circ \sigma_2 = (3,4) \circ (1,7,2,5,8)$. *Per tant, l'ordre (m.c.m. dels ordres) és* 10. *Així*

$$((3,4) \circ \sigma_2)^{41} = ((3,4) \circ \sigma_2)^{40} \circ ((3,4) \circ \sigma_2) = (3,4) \circ (1,7,2,5,8)$$

9.

Resoleu les equacions de S_5 (o digueu que no tenen solució) següents:

(a) $(1,4,2) \circ \sigma \circ (1,4,2)^{-1} = (1,3)$.

(b) $\sigma \circ (2,1,4)^{34} = (2,3) \circ (3,1,4,5)$.

(c) $\sigma \circ (3,4,1) \circ \sigma^{-1} = (3,4)$.

Solució: *a)* $\sigma = (1,4,2)^{-1} \circ (1,3) \circ (1,4,2) = (1,2,4) \circ (1,3) \circ (1,4,2) = (2,3)$.

b) $\sigma = (2,3) \circ (3,1,4,5) \circ (2,1,4)^{-1}$ *(observem que* $(2,1,4)^{34} = (2,1,4)^{3\cdot 11+1} = (2,1,4)$*). Així* $\sigma = (2,3) \circ (3,1,4,5) \circ (1,2,4) = (1,3) \circ (2,5)$

c) No té solució, ja que a l'esquerra hi ha un cicle d'ordre 3 *(conjugar no canvia l'ordre) i a la dreta un d'ordre* 2.

Capítol 3

Determinants

1. Suposant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

trobeu

$$a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad d) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$$

Solució: *Si multipliquem una fila per un número, el determinant queda multiplicat per aquest número. Si canviem la fila F_i per F_i més una combinació lineal de les altres files, el determinant no canvia. Així que tenim a) -5; b) 10; c) 5; d) 10.*

2. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Demostreu que

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\text{traça } A)\lambda + \det A$$

Solució: *Trivial.*

3. Trobeu els valors de λ per als quals $\det(A) = 0$, amb

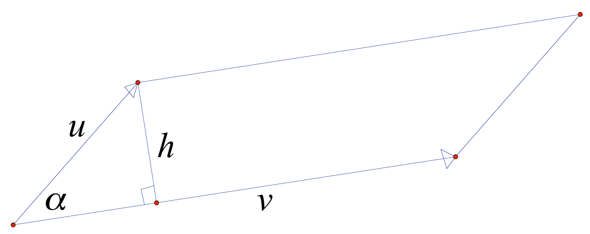
$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \quad i \quad A = \begin{pmatrix} \lambda - 6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

Solució: *En el primer cas les arrels són $\lambda = 2$ i $\lambda = 3$. En el segon cas les arrels són $\lambda = 6$, $\lambda = 2$ però aquesta segona arrel és arrel doble.*

4. Siguin $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ dos vectors de $\mathbb{R}^2$. Demostreu que l'àrea del paral·lelogram que generen està donada per

$$\text{Àrea} = \left| \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right|$$

Solució: *L'àrea del paral·lelogram és igual a la longitud de la base per l'altura.*



Així doncs

$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= |v| \cdot h = |v||u| \sin\alpha = |v||u|\sqrt{1 - \left(\frac{u \cdot v}{|v||u|}\right)^2} \\ &= \sqrt{|u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2} = \sqrt{(u_1v_2 - u_2v_1)^2} = \left| \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right|. \end{aligned}$$

5. Siguin (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) tres punts diferents de $\mathbb{R}^2$. Proveu que l'equació de la recta que passa per (a_1, a_2), (b_1, b_2) i l'àrea del triangle que formen els tres punts vénen donats respectivament per:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad A = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}|.$$

Solució: *El primer determinant igualat a zero és una equació lineal en x i en y. Per tant és una recta. A més és evident que si canviem x, y per a_1, a_2 el determinant és zero (dues files iguals). Per tant la recta passa per (a_1, a_2). Idem per b_1, b_2.*
En el segon determinant, si canviem F_i per $F_i - F_1$, $i = 2, 3$, tenim

$$A = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ 0 & c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}|.$$

Pel problema 4 hem acabat.

6. Proveu que

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}(a + (n-1)b),$$

on n és l'ordre de la matriu.

Solució: *Canviem C_1 per $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ i traiem $(a + (n-1)b)$ factor comú. L'anterior determinant és, doncs, igual a*

$$(a + (n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b & b \\ 1 & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

Ara canviem F_i per $F_i - F_1$, $i = 2, \ldots, n$. Obtenim així una matriu diagonal. El primer terme d'aquesta diagonal és 1 i els demés són tots iguals a $(a - b)$. Per tant el determinant d'aquesta matriu diagonal és igual a $(a - b)^{n-1}$ i hem acabat.

7. Proveu que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(a_i - a_j).$$

Solució: *Aquest determinant s'anomena determinant de Vandermonde*[1]*. Canviem* F_i *per* $F_i - a_1 F_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$. *Obtenim així que el determinant donat és igual al determinant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

Desenvolupant per la primera columna i traient factor comú a cada columna de la matriu $(n-1) \times (n-1)$ *restant tenim*

$$(a_2 - a_1) \cdot \cdots \cdot (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Per inducció hem acabat.

8. Proveu que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & \ldots & 3n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \ldots & n^2 \end{vmatrix} = 0,$$

per a tot $n > 2$.

[1] Però no apareix a cap dels 4 únics articles de Vandermonde. En el quart estudia propietats dels determinants (què passa en permutar dues files, etc.), ja coneguts per Leibniz.

Solució: *Si canviem F_2 per $F_2 - F_1$, i F_3 per $F_3 - F_2$ obtenim un determinant que té dues files iguals, i que per tant, és igual a zero.*

9. Calculeu el determinant

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & a \\ c & c & b & a \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Solució: *Fem $F_i \longrightarrow F_i - F_{i-1}$. Tenim*

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & a \\ c & c & b & a \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b-a & b-a & b-a & 0 \\ c-b & c-b & 0 & 0 \\ d-c & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Com aquesta matriu és triangular i 4×4 el seu determinant val el producte dels elements de la diagonal (secundària), i.e. $a(b-a)(c-b)(d-c)$. Ull al signe, és a dir, penseu quan val el determinant de

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Compareu amb apartat B del problema següent.

10. Calculeu els determinants següents

$$A = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ -1 & -2 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

Solució: Primer determinant. *Traiem factor comú n a cada fila*

$$A = n^n \begin{vmatrix} 1/n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2/n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ara canviem $F_i \longrightarrow F_i - F_n$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Ens queda el determinant d'una matriu triangular inferior que té a la diagonal els valors

$$(\frac{1}{n} - 1); (\frac{2}{n} - 1); \dots ; (\frac{n-1}{n} - 1); (1)$$

Així

$$A = n^n \cdot \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n^{n-1}} = (-1)^{n-1} n!$$

Segon determinant. *Només cal observar que la permutació*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

aplicada a les files transforma la matriu donada en la matriu identitat, que té determinant 1. *Per tant* $\det B =$ *signe* σ.
Per calcular el signe de σ observem que si $n = 2k$ podem descompondre σ en producte de k transposicions així:

$$\sigma = (1, n)(2, n-1) \dots (k, k+1)$$

i per tant signe $\sigma = (-1)^k$ i $\det B = (-1)^k$.
Si $n = 2k+1$ podem descompondre σ en producte de k transposicions així:

$$\sigma = (1, n)(2, n-1) \dots (k, k+2)$$

($k+1$ resta fix) i per tant signe $\sigma = (-1)^k$ i $\det B = (-1)^k$.
Tercer determinant. *Canviem F_i per $F_i + F_1$, $i = 2, \dots, n$. Queda una matriu triangular amb la diagonal formada per $1, 2, 3, \dots, n$. Per tant, $C = n!$.*

11. Una matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diu antisimètrica quan $A = -A^t$. Demostreu que el determinant d'una matriu antisimètrica d'ordre senar és zero.

Solució: *Recordeu que multiplicar una matriu per un escalar vol dir multiplicar cada element de la matriu per aquesta escalar. Així, si A és una matriu $n \times n$,*

$$\det(\lambda A) = \lambda^n A.$$

En el nostre cas tenim

$$\det A = \det(-A^t) = \det((-1)A^t) = (-1)^n \det A^t = -\det A$$

i, per tat, $\det A = 0$.

12. Trobeu tots els valors del paràmetre a per als quals el sistema d'equacions lineals següent no té solució

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 2ax + 3y + z &= 2 + a \\ ax + 3ay &= a \end{aligned}$$

Solució: *Recordem que el sistema té solució si i només si el rang de la matriu del sistema coincideix amb el rang de la matriu ampliada. El nombre d'incògnites menys aquest rang és el número de graus de llibertat (dimensió de l'espai de solucions del sistema homogeni associat).*
El determinant del sistema és

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2a & 3 & 1 \\ a & 3a & 0 \end{vmatrix} = 6a(a-1).$$

Si $a \neq 0$ *i* $a \neq 1$*, aquest determinant és diferent de* 0 *i per tant* la matriu del sistema té rang 3. *Això implica que el sistema és compatible determinat (té una única solució).*
Si $a = 0$*, la matriu del sistema té rang* 2 *i la matriu ampliada*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

també té rang 2*. Per tant el sistema és compatible indeterminat (l'espai de solucions és una recta).*
Si $a = 1$*, la matriu del sistema té rang* 2 *i la matriu ampliada*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

té rang 3*. Per tant el sistema és incompatible.*

13. Estudieu en funció de a i b quan el sistema següent és incompatible, compatible determinat o compatible indeterminat.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & a \\ ax & + & y & & & = & b \\ x & + & 2y & - & az & = & 2 \end{array} \right.$$

Solució: *El determinant del sistema és*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -a \end{vmatrix} = 3a - 2.$$

Si $a \neq 2/3$, aquest determinant és diferent de 0 *i per tant* la matriu del sistema té rang 3. *Això implica que el sistema és compatible determinat (té una única solució).*
Si $a = 2/3$, la matriu del sistema té rang 2 *i la matriu ampliada*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ a & 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & -a & 0 \end{vmatrix}$$

té rang 3 *si $b \neq 10/9$. Per tant el sistema és, en aquest cas, incompatible. En canvi si $b = 10/9$ el rang de la matriu ampliada és* 2, *i per tant el sistema és, en aquest cas, compatible indeterminat amb un grau de llibertat.*

Capítol 4

Diagonalització

1. Calculeu el polinomi característic i els vectors i valors propis asociats a cadascuna de les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució:

$$\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 4 \\ 3 & -4-x & 12 \\ 1 & -2 & 5-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x^2 - 2x.$$

Per tant els valors propis són $0, 1$ *i* 2.
Vector propi de valor propi 0. *Hem de resoldre el sistema compatible indeterminat*

$$(A - 0 \cdot I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $u = (-4, 3, 2)$ *(i qualsevol múltiple d'ell).*
Vector propi de valor propi 1. *Hem de resoldre el sistema compatible indeterminat*

$$(A - 1 \cdot I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $v = (-4, 0, 1)$ *(i qualsevol múltiple d'ell).*
Vector propi de valor propi 2. *Hem de resoldre el sistema compatible indeterminat*

$$(A - 2 \cdot I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $w = (2, 1, 0)$ *(i qualsevol múltiple d'ell).*

2. Trobeu els vectors i valors propis de l'endomorfisme $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ donat per

$$f(ax^2 + bx + c) = (c - 2a)x^2 - (8a + b)x + (2a + 6b + 5c).$$

Solució: *La matriu de* f *respecte de la base* $(1, x, x^2)$ *és*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ja que $f(1) = x^2 + 5$, $f(x) = -x + 6$, $f(x^2) = -2x^2 - 8x + 2$. *A partir d'aquí el problema continua com l'anterior.*
Concretament $\det(A - x\,I) = -x^3 + 2x^2 + 15x - 36$. *Mirant els divisors del terme independent trobem que* $\det(A - x\,I) = -(x - 3)^2(x + 4)$.

Vectors propis de valor propi 3. *Hem de resoldre el sistema compatible indeterminat*

$$(A - 3 \cdot I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $u = (-6, 8, 3)$ *(i qualsevol múltiple d'ell). És a dir,* u *és el polinomi* $3x^2 + 8x - 6$. *Tot i que el valor propi* 3 *té multiplicitat* 2 *només hi ha un vector propi (i els seus múltiples) de valor propi* 3.

Vector propi de valor propi -4. *Hem de resoldre el sistema compatible indeterminat*

$$(A + 4 \cdot I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $v = (5, -2, 1)$ *(i qualsevol múltiple d'ell). És a dir,* v *és el polinomi* $x^2 - 2x + 5$.

3. Trobeu els vectors i valors propis de l'endomorfisme $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ donat per

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}.$$

Solució: *La matriu de f respecte de la base*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A partir d'aquí el problema continua com l'anterior.
Obtenim $\det(A - x\,I) = (x-1)^2(x+1)(x+2)$.

Vectors propis de valor propi 1. *Hem de resoldre el sistema compatible indeterminat*

$$\det(A - I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $u = (2,3,1,0)$ *i* $v = (0,0,0,1)$. *És a dir, les matrius*

$$u = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vector propi de valor propi -1. *Hem de resoldre el sistema compatible indeterminat*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $u = (-2,1,1,0)$. *És a dir, la matriu*

$$u = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vector propi de valor propi -2. *Hem de resoldre el sistema compatible indeterminat*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $u = (-1, 0, 1, 0)$. *És a dir, la matriu*

$$u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Demostreu que els polinomis característics $P(x)$ de A i $Q(x)$ de A^{-1} estan relacionats per

$$Q(\lambda) = \frac{(-1)^n \lambda^n}{P(0)} P(\lambda^{-1}).$$

Indicació: Considereu la matriu $A(A^{-1} - \lambda I)$.

Solució: *Tenim*

$$\det A \cdot \det(A^{-1} - \lambda I) = \det(I - \lambda A).$$

Per tant

$$\det A \cdot Q(\lambda) = (-1)^n \det(A\lambda - I) = (-1)^n \det(\lambda(A - \lambda^{-1} I)) = (-1)^n \lambda^n P(\lambda^{-1}).$$

Com $\det A = P(0)$ *hem acabat.*

5. Determineu si les matrius següents són diagonalitzables i trobeu, quan sigui possible, la base en la que el corresponent endomorfisme diagonalitza.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solució: *El polinomi característic de A és*

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ -4 & 4-x & 0 \\ -2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = -(x-2)^3.$$

Per trobar els vectors propis de valor propi 2 *(l'únic que hi ha) fem*

$$(A-2\cdot I)\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Sabem que la dimensió de l'espai de solucions d'un sistema homogeni, d, és igual al nombre d'incògnites n menys el rang r da la matriu. És a dir, $d=n-r$. En aquest cas, doncs, $d=3-1=2$. Per tant, A no diagonalitza, ja que perquè diagonalitzés hauria de ser $d=3$.
De tota manera podem continuar jugant amb la matriu A i resoldre el sistema anterior. Obtenim que l'espai de solucions, de dimensió 2*, està generat pels vectors $u=(1,2,0)$ i $v=(0,0,1)$. Podem llavors ampliar aquests dos vectors a una base, afegint-hi un tercer vector arbitrari però linealment independent amb u i v. Per exemple prenem $w=(1,0,0)$. Llavors calculem fàcilment els coeficients a,b de la igualtat següent*

$$Aw=au+bv+cw$$

(c ha de ser forçosament igual a 2*. Obtenim $a=b=-2$).*
Si $b\neq 0$, prenem com a nova base $u, au+bv, w$ (si $a\neq 0$, prendríem com a nova base $v, au+bv, w$). llavors A en aquesta base s'escriu com

$$A'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Es diu que és la forma de Jordan de A.
Equivalentment, si diem

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ 2 & -4 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

(matriu que té per columnes les components dels vectors propis) llavors

$$P^{-1}AP=A'.$$

El polinomi característic de B és

$$\begin{vmatrix} 2-x & 6 & -15\\ 1 & 1-x & -5\\ 1 & 2 & -6-x\end{vmatrix}=-(x+1)^3.$$

Per trobar els vectors propis de valor propi -1 *(l'únic que hi ha) fem*

$$(B-(-1)\cdot I)\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -15\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

En aquest cas $d=3-1=2\neq 3$ i per tant no diagonalitza. Us podeu entretenir en trobar la forma de Jordan de B.

El polinomi característic de C és

$$\begin{vmatrix} 4-x & -5 & 2 \\ 5 & -7-x & 3 \\ 6 & -9 & 4-x \end{vmatrix} = x^2(1-x).$$

Per trobar els vectors propis de valor propi 0 fem

$$(C - 0 \cdot I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas $d = 3 - 2 = 1 \neq 3$ i per tant no diagonalitza. Us podeu entretenir en trobar la forma de Jordan de C.

El polinomi característic de D és

$$\begin{vmatrix} 5-x & -3 & 2 \\ 6 & -4-x & 4 \\ 4 & -4 & 5-x \end{vmatrix} = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Per trobar els vectors propis de valor propi 1 fem

$$(D - 1 \cdot I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $u = (1, 2, 1)$ (i qualsevol dels seus múltiples).
Per trobar els vectors propis de valor propi 2 fem

$$(D - 2 \cdot I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $v = (1, 1, 0)$ (i qualsevol dels seus múltiples).
Per trobar els vectors propis de valor propi 3 fem

$$(D - 3 \cdot I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & -7 & 4 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim $w = (1, 2, 2)$ (i qualsevol dels seus múltiples).
Així, en la base (u, v, w), la matriu D s'escriu com

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Equivalentment, si diem

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(matriu que té per columnes les components dels vectors propis) llavors

$$P^{-1}DP = D'.$$

6. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Trobeu una matriu B tal que $B^2 = A$.

Solució: *Diagonalitzarem, farem l'arrel quadrada, i desfarem el canvi. El polinomi característic de A és $x^2 - 13x + 36$. Les seves arrels són $x = 9$ i $x = 4$. El vector propi de valor propi 9 s'obté resolent*

$$\det(A - 9I)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim $u = (2, 3)$ (i qualsevol dels seus múltiples).
El vector propi de valor propi 4 s'obté resolent

$$\det(A - 4I)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim $v = (1, -1)$ (i qualsevol dels seus múltiples).
Si posem

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(matriu que té per columnes les components dels vectors propis) tenim

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$$

Així

$$P^{-1}B^2P = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$$

i per tant

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Equivalentment

$$B = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

7. Trobeu els valors de $a, b, c \in \mathbb{R}$ per als quals la matriu

$$A = \begin{pmatrix} c & 2a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & 2b & -c \end{pmatrix}$$

és diagonalitzable (sobre $\mathbb{R}$).

Solució: *El polinomi característic val $p(x) = x^3 - (c^2 + 4ab)x$. Si $c^2 + 4ab > 0$, tenim tres valors propis reals diferents ($\lambda = 0, \mu = \sqrt{c^2 + 4ab}, \nu = -\sqrt{c^2 + 4ab}$) i per tant A diagonalitza.*
Si $c^2 + 4ab = 0$, amb $b \neq 0$, només tenim el valor propi $\lambda = 0$, que dóna lloc únicament al vector propi $(\frac{a}{b}, \frac{c}{2b}, 1)$, i per tant no diagonalitza.
Si $c^2 + 4ab = 0$, amb $b = 0$ (i, per tant $c = 0$), tenim dos casos: $a \neq 0$ en que A no diagonalitza i $a = 0$, en que $A = 0$.
Si $c^2 + 4ab < 0$ només tenim un valor propi real ($\lambda = 0$) i per tant no diagonalitza sobre $\mathbb{R}$.

8. Definim les aplicacions de $\mathbb{R}_2[x]$ a $\mathbb{R}$ següents:

$$\omega_1(p(x)) = 3\int_{-1}^{1} p(s)ds, \qquad \omega_2(p(x)) = 3\int_{-1}^{1} sp(s)ds, \qquad \omega_3(p(x)) = -15\int_{-1}^{1} s^2p(s)ds.$$

És $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$? Sigui

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ & p(x) & \mapsto & \omega_1(p(x)) + \omega_2(p(x))x + \omega_3(p(x))x^2. \end{array}$$

Demostreu que φ és una aplicació lineal bijectiva. Diagonalitza φ^n per atot $n \geq 1$? Trobeu l'expressió de l'aplicació φ^n.

Solució: *La matriu de φ respecte de la base $1, x, x^2$ és*

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -10 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

la qual admet els valors propis diferents $2, 4, -4$, i per tant diagonalitza.

9. Sigui

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (x, 3x-y-2z, -6x+6y+6z) \end{array}$$

(a) Demostreu que f és una aplicació lineal, i trobeu la seva matriu en la base canònica (diguem-n'hi A).

(a) Trobeu el polinomi característic de f i factoritzeu-lo. Quins són els valors propis de f ?

(b) Calculeu els subespais propis corresponents a cada valor propi de f.

(c) Existeix alguna base de $\mathbb{R}^3$ formada exclusivament per vectors propis de f? Diagonalitza f?

(d) Calculeu la matriu de f en la base de vectors propis de l'apartat anterior i relacioneu-la amb la matriu A del primer apartat.

Solució: *a) És fàcil veure que* $f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x,y,z)+f(x',y',z')$ *i que* $f(\lambda(x,y,z)) = \lambda f(x,y,z)$. *La matriu en la base canònica és*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

b) El polinomi característic és

$$\det(A - x\, I) = -(x-1)(x-2)(x-3).$$

Per tant els valors propis són $1, 2$ *i* 3.
c) Vector propi de valor propi $\lambda = 1$. *Resolent* $\det(A-I)\vec{v} = \vec{0}$ *obtenim* $u = (2,-3,6)$ *(i tots els seus múltiples).* Vector propi de valor propi $\mu = 2$. *Resolent* $\det(A-2I)\vec{v} = \vec{0}$ *obtenim* $v = (0,-2,3)$ *(i tots els seus múltiples).*Vector propi de valor propi $\nu = 3$. *Resolent* $\det(A-3I)\vec{v} = \vec{0}$ *obtenim* $w = (0,-1,2)$ *(i tots els seus múltiples).*
d) f *diagonalitza en la base de vectors propis* (u,v,w).
e) Si diem P *a la matriu que té per columnes les components de* u, v, w *respecte de la base canònica tenim*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

i es compleix que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Donada

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

calculeu A^{1438} i $\lim_{n\to\infty} A^n$.

Solució: *El polinomi característic* $\det(A - x\ I)$ *és igual a* $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$*. Les seves arrels són* $\lambda = 1$ *i* $\mu = \frac{1}{2}$*. El vector propi de valor propi 1 és* $u = (2,3)$*. El vector propi de valor propi* $\frac{1}{2}$ *és* $v = (1,2)$*. Si diem* P *a la matriu que té per columnes les components de* u, v *respecte de la base canònica tenim*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Llavors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Equivalentment,

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

I per tant,

$$A^{1438} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{1438} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^{1438}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aquest producte de matrius es pot escriure com

$$A^{1438} = \begin{pmatrix} 4-3a & -2+2a \\ 6-6a & 4a-3 \end{pmatrix}, \qquad \textit{amb} \quad a = \frac{1}{2^{1438}}$$

Finalment

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

11. Estudieu la diagonalització sobre $\mathbb{R}$ i sobre $\mathbb{C}$, dels endomofismes representats per les matrius següents, referides a la base canònica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 17 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & -7 & -20 \\ 0 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 2+i & -i & i \\ -2i & 2 & -2i \\ -i & -i & 2-i \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solució: *Fem els dos últims casos. El polinomi característic de E és*

$$\begin{vmatrix} 2+i-x & -i & i \\ -2i & 2-x & -2i \\ -i & -i & 2-i-x \end{vmatrix} = -x^3 + 6x^2 - 16x + 16 = -(x-2)(x-(2+2i))(x-(2-2i)).$$

Per tant, diagonalitza sobre $\mathbb{C}$ i no sobre $\mathbb{R}$.
El polinomi característic de F és

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ -1 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^4 + 1$$

Per tant, diagonalitza sobre $\mathbb{C}$ (x^4+1 té 4 arrels complexes diferents) i no sobre $\mathbb{R}$.

12. Sigui $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Demostreu que l'endomofisme f de $\mathbb{R}^3$ donat per $f(x,y,z) = (-x-3y, -3x-y+2z, 2z)$ deixa E invariant, és a dir $f(E) \subset E$. Calculeu una base de E i la matriu de la restricció $f_{|E}$ de f a E en aquesta base. Calculeu tots els endomorismes de $\mathbb{R}^3$ que siguin diagonalitzables, que deixin E invariant i que coincideixin amb f sobre E.

Solució: *Prenem $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ (en aquest ordre) com base B de E. Llavors*

$$M(f_E, B, B) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Completem B a la base $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ amb $e_3 = (0,0,1)$. Llavors tota F que coincideixi amb f sobre E és tal que

$$M(F, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & a \\ -3 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

per a certs $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Els valors propis d'aquesta matriu són $2, -4, c$. Així, si $c \neq 2$ i $c \neq 4$, qualsevol F donada per la matriu anterior és diagonalitzable, deixa E invariant i coincideix amb f sobre E
Suposem ara $c = 2$ i calculem els vectors propis de F. Tenim

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & a \\ -3 & -3 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq b$, aquest sistema només admet la solució $w = (1, -1, 0)$ (i els seus múltiples). No tenim prou vectors propis i la matriu no diagonalitza.
Si $a = b$, el sistema admet les solucions (i els seus múltiples)

$$\begin{aligned} u &= (-1, 1, 0) \\ v &= (a/3, 0, 1) \end{aligned}$$

i tenim dos vectors propis linealment independents, que juntament amb el vector propi corresponent al valor propi -4 ens donen els tres vectors propis que fan que la matriu diagonalitzi.
Suposem ara $c = -4$ i calculem els valors propis de F. Tenim

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & a \\ -3 & 3 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq -b$, aquest sistema només admet un vector solució (i els seus múltiples). No tenim prou vectors propis i la matriu no diagonalitza.
Si $a = -b$, el sistema admet dos vectors solucions linealment independents (i els seus múltiples), que juntament amb el vector propi corresponent al valor propi 2 ens donen els tres vectors propis que fan que la matriu diagonalitzi.
Resumint, les aplicacions buscades tenen, respecte de la base canònica, la forma

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & a \\ -3 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad c \neq 2, -4$$

O bé

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & a \\ -3 & -1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -3 & a \\ -3 & -1 & -a \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

13. Sigui $f : V \longrightarrow V$ un endomorisme. Siguin B_1, B_2 bases de V. Demostreu que $\det M(f, B_1) = \det M(f, B_2)$. (Això permet definir el determinant d'un endomorisme com $\det f = \det M(f, B_1)$).

Solució: *Fórmula del canvi de base.*

14. Siguin E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i $f : E \longrightarrow E$ un endomorfisme. Proveu que:

(a) $\dim E$ senar $\Rightarrow f$ té almenys un valor propi.

(b) $\dim E$ parell i $\det f < 0 \Rightarrow f$ té almenys dos valors propis diferents.

(c) Hi ha exemples en què $\dim E$ és parell i f no té valors propis.

Solució:

(a) El característic és d'ordre senar. I tot polinomi d'ordre senar té almenys una arrel real.

(b) Si les 4 arrels del característic fossin complexes, serien conjugades dos a dos, de manera que el característic seria de la forma

$$[(x-a)^2+b^2][(x-c)^2+d^2]$$

i el terme independent seria positiu. Per tant, almenys dues arrels són reals. Si fos una arrel real doble, el característic seria de la forma

$$[(x-a)^2+b^2](x-c)^2$$

i el terme independent seria positiu. Per tant, les dues arrels reals han de ser diferents.

(c) Un gir de $\mathbb{R}^2$ de centre l'origen i angle α amb $0 < \alpha < 2\pi$.

15. Estudieu segons els valors dels paràmetres a i b la diagonalització dels endomorismes de $\mathbb{R}^3$ que, en la base canònica, tenen les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a-b & b & -1 \\ -b & a-b & -1 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Solució: *El polinomi característic de la matriu A és*

$$\begin{vmatrix} a-x & b & 0 \\ b & a-x & b \\ 0 & b & a-x \end{vmatrix} = (a-x)^3 - 2b^2(a-x).$$

Traient factor comú $(a-x)$ veiem que les arrels del característic són $a, a \pm \sqrt{2}b$. Si $b \neq 0$, aquests tres valors són diferents i per tant A diagonalitza. Si $b = 0$, $A = a\ id$, de manera que també diagonalitza.
El polinomi característic de la matriu B és

$$\begin{vmatrix} a-x & b & 0 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)(a-x)(-1-x).$$

Per tant, si $a \neq \pm 1$, el característic té tres arrels diferents i B diagonalitza.
Si $a = 1$, el valor propi 1 és doble. Calculem els vectors propis corresponents.

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim que $u = (1,0,0)$ i $v = (0,0,1)$ són vectors propis linealment independents de valors propi 1. Per tant (recordem que són independents amb el el vector propi de valor propi -1), B diagonalitza.
Si $a = -1$, el valor propi -1 és doble. Calculem els vectors propis corresponents.

$$\begin{pmatrix} -1 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim que $u = (1,0,0)$ és l'únic vector propi de valor propi 1. Per tant, B no diagonalitza.
El polinomi característic de la matriu C és

$$\begin{vmatrix} a-b-x & b & -1 \\ -b & a-b-x & -1 \\ 0 & 0 & a^2-x \end{vmatrix} = (a^2-x)((a-b-x)^2+b^2)$$

Com el segon factor és suma de quadrats, si $b \neq 0$ la única arrel del característic és $x = a^2$ i per tant C no diagonalitza. Si $b = 0$, les arrels del característic són $x = a^2$ i $x = a$ (doble). Si $a = 1$ tenim una arrel triple.
Calculem, quan $b = 0$, els vectors propis de valor propi a. Obtenim $u = (1,0,0,)$ i $v = (0,1,0)$, i per tant (recordem que són independents amb el el vector propi de valor propi a^2 si $a \neq 1$), C diagonalitza.
Si $b = 0$ i $a = 1$, tenim només dos vectors propis independents i C no diagonalitza.

16. Quins valors poden prendre a i d per tal que les matrius següents representin el mateix endomorfisme de $\mathbb{C}^2$?

$$\begin{pmatrix} a & -8 \\ 5 & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$$

Solució: *Per que les matrius representin el mateix endomorfisme és condició necessària (no suficient) que tinguin la mateixa traça i el mateix determinant.*
Per tant

$$\begin{aligned} a+d &= 4i \\ ad+40 &= -4 \end{aligned}$$

Per tant, a, d són les arrels de l'equació de segon grau

$$x^2 - 4ix - 44 = 0$$

Obtenim

$$\begin{aligned} a &= 2i + \sqrt{40} \\ d &= 2i - \sqrt{40} \end{aligned}$$

En aquest cas aquesta condició no és suficient, ja que l'endomorfisme $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ que té per matriu, respecte de la base canònica,

$$\begin{pmatrix} 2i+\sqrt{40} & -8 \\ 5 & 2i-\sqrt{40} \end{pmatrix}$$

té un únic vector propi de valor propi $2i$.

17. Quins valors poden prendre a i d per tal que les matrius següents representin el mateix endomorfisme de $\mathbb{C}^2$?

$$\begin{pmatrix} a & -8 \\ 5 & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$$

Solució: *Per que les matrius representin el mateix endomorfisme és condició necessària (no suficient) que tinguin la mateixa traça i el mateix determinant.*
Per tant

$$\begin{aligned} a+d &= 0 \\ ad+40 &= 4 \end{aligned}$$

Per tant, a, d són les arrels de l'equació de segon grau

$$x^2 - 36 = 0$$

Obtenim $a = 6$, $d = -6$ (o al revés). En aquest cas aquesta condició és suficient, ja que l'endomorfisme $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ que té per matriu, respecte de la base canònica,

$$\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

té dos vectors propis linealment independents, de valor propi respectivament $2i$ i $-2i$.

18. Considerem l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ donat per

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y-z-t, x-y+z-t, x-y-z+t).$$

Calculeu $f^{100}(1,0,-1,-1)$

Solució: *La matriu associada a f respecte de la base canònica de $\mathbb{R}^4$ és*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomi característic és

$$p_f(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-x & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 1 \\ 2-x & 1-x & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & -2+x & 1-x \end{vmatrix}$$

(Hem canviat la columna 1, C_1, per $C_1 + C_2$, i la columna 3, C_3, per $C_3 - C_4$). Traiem $(2-x)$ factor comú a les columnes 1 i 3. Tenim

$$(2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix}$$

(Canviem la fila 2, F_2, per $F_2 - F_1$). Desenvolupant per la primera columna obtenim

$$p_f(x) = (x-2)^3(x+2)$$

Vectors propis de valor propi 2. *Resolem el sistema*

$$(A - 2id)\vec{v} = \vec{0} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenim una única equació $x = y+z+t$. Assignant a (y,z,t) els valors de la base canònica obtenim tres vectors propis de valor propi 2 linealment independents.

$$\begin{aligned} u &= (1,1,0,0) \\ v &= (1,0,1,0) \\ w &= (1,0,0,1) \end{aligned}$$

Vector propi de valor propi -2. *De manera anàloga obtenim que l'únic (i els seus múltiples) vector propi de valor propi -2 és*

$$p = (-1, 1, 1, 1).$$

Ara escrivim el vector donat $(1, 0, -1, 1)$ com a combinació lineal dels vectors propis

$$(1, 0, -1, 1) = au + bv + cw + dp$$

Apliquem f^{100} a aquesta igualtat i obtenim

$$f^{100}(1, 0, -1, 1) = a2^{100}u + b2^{100}v + c2^{100}w + d(-2)^{100}p$$

Com 100 és parell, podem treure factor comú 2^{100} i tenim

$$f^{100}(1, 0, -1, 1) = 2^{100}(1, 0, -1, 1).$$

(No ens ha calgut calcular els coeficients $a, , b, c, d$. I tampoc ens ha calgut l'expressió concreta de u, v, w, només hem usat que hi ha tres vectors propis de valor propi 2 linealment independents).

19. Sigui $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ l'endomorfisme definit per

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + b + (a + b)x + (a - b + 2c + d)x^2 + (2a + b + c + 2d)x^3.$$

(a) Calculeu la matriu de f respecte de la base $(1, x, x^2, x^3)$

(b) Trobeu el polinomi característic de f i factoritzeu-lo. Quins són els valors popis de f?

(c) Calculeu els subespais propis corresponents a cada valor propi de f.

(d) És f diagonalitzable?

(e) Calculeu $f^{1000}(x^2)$

Solució: *(a) Matriu associada:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2-x & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

Observeu que aquest determinant es pot calcular 'per blocs', és a dir pensant que la matriu està formada per 4 matrius quadrades 2×2.

$$\begin{aligned} p_f(x) &= \left| \begin{array}{cc|cc} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 2-x & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2-x \end{array} \right| = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= x(x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

Per tant, els valors propis de f són $0, 1, 2, 3$.
(c) Resolem els sistemes $(A - \lambda id)\vec{v} = \vec{0}$, per a $\lambda = 0, 1, 2, 3$ i obtenim

$$\begin{aligned} u &= (1, -1, -1, 0), && \textit{vector propi de valor propi } 0, \\ v &= (0, 0, 1, -1), && \textit{vector propi de valor propi } 1, \\ w &= (1, 1, -3, 0), && \textit{vector propi de valor propi } 2, \\ t &= (0, 0, 1, 1), && \textit{vector propi de valor propi } 3. \end{aligned}$$

(d) Sí, ja que té 4 vectors propis independents.
(e) Una manera de procedir és la següent. Escrivim $x^2 = 0 + 0x + 1x^2 + 0x^3$ en funció de la base de vectors propis.

$$(0, 0, 1, 0) = a(1, -1, -1, 0) + b(0, 0, 1, -1) + c(1, 1, -3, 0) + d(0, 0, 1, 1) \tag{4.1}$$

Així

$$\begin{aligned} f(0, 0, 1, 0) &= b(0, 0, 1, -1) + c\,2(1, 1, -3, 0) + d\,3(0, 0, 1, 1) \\ f^2(0, 0, 1, 0) &= b(0, 0, 1, -1) + c\,2^2(1, 1, -3, 0) + d\,3^2(0, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

etc.
De (4.1) *obtenim $a = c = 0$, $b = d = 1/2$. I aplicant* f^{1000} *a aquesta mateixa igualtat obtenim*

$$f^{1000}(x^2) = \frac{1}{2}(0, 0, 1, -1) + \frac{1}{2}3^{1000}(0, 0, 1, 1) = \frac{1 + 3^{1000}}{2}x^2 + \frac{-1 + 3^{1000}}{2}x^3.$$

Capítol 5

Formes bilineals

1. Siguin $u = (3, 1, 2), v = (0, 1, 1)$ i $w = (-1, -1, 0)$ vectors de $\mathbb{R}^3$.

(a) Comproveu que formen una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Trobeu, respecte de la base canònica de $\mathbb{R}^3$, la matriu del producte escalar per al qual els vectors u, v i w formen una base ortonormal.

(c) Expliqueu com es calcula aquest producte escalar per a dos vectors expressats en coordenades respecte de la base canònica.

(d) Trobeu una base del subespai ortogonal a $(1, 0, 0)$ per a aquest producte escalar.

Solució: *(a) Exercici.*
(b) Primer mètode. *Sigui M la matriu buscada. Les condicions*

$$u^tMu = 1, u^tMv = 0, u^tMw = 0, v^tMv = 1, v^tMw = 0, w^tMw = 0$$

s'escriuen més còmodament en llenguatge matricial (només recordeu com es multipliquen matrius) com

$$P^tMP = I$$

on

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(matriu que té per columnes les components dels vectors donats).
Aïllant M,

$$M = (PP^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & -3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) Segon mètode. *Si ja es coneix la fórmula del canvi de base que relaciona la matriu d'un producte esclar* $\mathbf{T}$ *respecte d'una base* B, $M(\mathbf{T}, B)$, *i la matriu del mateix producccte escalar* $\mathbf{T}$ *respecte d'una altra base* C, $M(\mathbf{T}, C)$:

$$M(B, C)^t M(\mathbf{T}, C) M(B, C) = M(\mathbf{T}, B),$$

només hem d'aplicar-la agafant com C *la base canònica i com* B *la base* (u, v, w). *Llavors* $M(B, C)$ *i* $M(\mathbf{T}, C)$ *són les matrius* P *i* M *considerades en el primer mètode de solució,* $M(\mathbf{T}, B)$ *ha de ser la matriu identitat, i per tant, la fórmula del canvi de base es redueix a la fórmula ya considerada en el primer mètode*

$$P^t M P = I.$$

(c) Per multiplicar $u = (u_1, u_2, u_3)$ *per* $v = (v_1, v_2, v_3)$ *respecte aquest nou producte escalar hem de fer el producte matricial*

$$u \bullet v = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 & -3/8 \\ -1/8 & 7/8 & -3/8 \\ -3/8 & -3/8 & 7/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

(d) Els vectors $u = (x, y, z)$ *d'aquest subespai compleixen que*

$$u \bullet (1, 0, 0) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 & -3/8 \\ -1/8 & 7/8 & -3/8 \\ -3/8 & -3/8 & 7/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

És a dir, $3x - y - 3z = 0$. *Una base d'aquest subespai és, per exemple,* $v = (1/3, 1, 0)$, $w = (1, 0, 1)$.

2. Considereu el producte escalar de $\mathbb{R}^4$ definit per la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Descomponeu el vector $v = (1, 3, -1, 4)$ com a suma de dos vectors, un pertanyent al subespai F, generat per $w_1 = (2, 1, 0, 1)$ i $w_2 = (0, 3, 1, 1)$, i l'altre ortogonal a F .

Solució: *Calculem primerament* $F^\perp$. *Un vector* $u = (x, y, z, t)$ *pertany a* $F^\perp$ *si i només si*

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3x + 3y + z + 2t = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3x + 6y + 2z + 3t = 0$$

Resolent el sistema format per aquestes dues equacions obtenim que una base de $F^\perp$ està formada per $w_3 = (0, -1, 3, 0)$ i $w_4 = (-1, -1, 0, 3)$.
Ara descomponem v a $F \oplus F^\perp$.

$$(1, 3, -1, 4) = a(2, 1, 0, 1) + b(0, 3, 1, 1) + c(0, -1, 3, 0) + d(-1, -1, 0, 3).$$

Obtenim

$$a = \frac{65}{73}, \quad b = \frac{56}{73}, \quad c = -\frac{43}{73}, \quad d = \frac{57}{73},$$

Per tant, el vector donat v és suma dels vectors

$$\frac{1}{73}(130, 233, 56, 121) \in F$$

i

$$\frac{1}{73}(-57, -14, -129, 171) \in F^\perp.$$

3. Trobeu una base de $\mathbb{R}^3$ que sigui ortonormal respecte del producte escalar T donat respecte de la base canònica per

$$M(T; C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Solució: *Utilitzarem Gram-Schmidt a partir de la base canònica (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. Prenem $u_1 = e_1 = (1, 0, 0)$. Aquest vector ja és directament de norma 1 respecte del producte escalar donat, ja que l'entrada $(1, 1)$ de la matriu és 1. Prenem ara*

$$u_2 = \frac{e_2 - \lambda u_1}{|e_2 - \lambda u_1|}$$

amb

$$\lambda = \langle e_2 | u_1 \rangle = \langle e_2 | e_1 \rangle = 0,$$

la darrera igualtat perquè el terme $(1, 2)$ de la matriu donada és 0. Per tant

$$u_2 = \frac{e_2}{|e_2|} = \frac{1}{\sqrt{\langle e_2 | e_2 \rangle}}(0, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0),$$

la darrera igualtat perquè el terme $(2,2)$ *de la matriu donada és* 2. *Posem ara*

$$u_3 = \frac{e_3 - \lambda u_1 - \mu u_2}{|e_3 - \lambda u_1 - \mu u_2|}$$

amb

$$\lambda = \langle e_3|u_1\rangle = \langle e_3|e_1\rangle = 2,$$

la darrera igualtat perquè el terme $(1,3)$ *de la matriu donada és* 2. *Anàlogament*

$$\mu = \langle e_3|u_2\rangle = \langle e_3|\frac{1}{\sqrt{2}}e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle e_3|e_2\rangle = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

la darrera igualtat perquè el terme $(2,3)$ *de la matriu donada és* -3.
Així

$$u_3 = \frac{e_3 - 2u_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}u_2}{|e_3 - 2u_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}u_2|} = \frac{e_3 - 2e_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}e_2}{|e_3 - 2e_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}e_2|} = \frac{(-2,3/2,1)}{|(-2,3/2,1)|}$$

Per calcular la norma que apareix en el denominador de la darrera expressió fem

$$|(-2,3/2,1)| = \sqrt{\begin{pmatrix} -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{3/2}.$$

Per tant, $u_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-2,3/2,1)$.

4. Sigui E l'espai vectorial real dels polinomis de grau inferior a 2. Definim, per a tot $p(x), q(x) \in E$:

$$\varphi(p(x), q(x)) = \int_0^2 p(s)q(s)ds.$$

(a) Demostreu que φ és una forma bilineal simètrica sobre E.

(b) Quina és la matriu de φ respecte de la base $(1, x, x^2)$?

(c) Defineix φ un producte escalar?

(d) Trobeu una base ortonormal respecte de φ.

(e) Trobeu una base del subespai ortogonal a $2x + 1$ respecte de φ.

Solució: *(a) Exercici.*

(b)

$$\begin{aligned}
\varphi(1,1) &= \int_0^2 dx = 2\\
\varphi(1,x) &= \int_0^2 x\,dx = 2\\
\varphi(1,x^2) &= \int_0^2 x^2\,dx = 8/3\\
\varphi(x,x) &= \int_0^2 x^2\,dx = 8/3\\
\varphi(x,x^2) &= \int_0^2 x^3\,dx = 4\\
\varphi(x^2,x^2) &= \int_0^2 x^4\,dx = 32/5
\end{aligned}$$

Per tant la matriu de φ respecte de la base $(1, x, x^2)$ és

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8/3 \\ 2 & 8/3 & 4 \\ 8/3 & 4 & 32/5 \end{pmatrix}$$

(c) És clar que

$$\varphi(p(x), p(x)) \geq 0.$$

I que val el signe igual si i només si $p(x) = 0$.
En general, un criteri per saber si φ és definida positiva és mirar si els determinants dels menors centrats a la diagonal són positius. En el nostre cas aquests menors són

$$|2| > 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8/3 \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 8/3 \\ 2 & 8/3 & 4 \\ 8/3 & 4 & 32/5 \end{vmatrix} > 0$$

Com tots tres són positius, φ és un producte escalar.
(d) Utilitzarem Gram-Schmidt. Prenem

$$e_1 = \frac{x^2}{||x^2||} = \frac{x^2}{\sqrt{\varphi(x^2, x^2)}} = \frac{x^2}{\sqrt{32/5}}.$$

Busquem ara λ tal que $x + \lambda e_1$ sigui ortogonal a e_1.

$$\varphi(x + \lambda e_1, e_1) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{32}}\varphi(x, x^2) + \frac{5\lambda}{32}\varphi(x^2, x^2) = 0.$$

Deduïm

$$\lambda = -\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{32}}.$$

En particular

$$x + \lambda e_1 = x - \frac{5}{8}x^2$$

Per calcular la norma d'aquest polinomi fem

$$\varphi(x - \frac{5}{8}x^2, x - \frac{5}{8}x^2) = \frac{1}{6}$$

Prenem com a segon vector de la base ortonormal que estem buscant

$$e_2 = \frac{x - (5/8)x^2}{\sqrt{1/6}} = \sqrt{6}x - \frac{5\sqrt{6}}{8}x^2$$

Per trobar el tercer vector de la base, primerament trobem λ i μ tals que el vector

$$1 + \lambda e_1 + \mu e_2$$

sigui ortogonal a e_1 i a e_2. Imposem

$$\varphi(1 + \lambda e_1 + \mu e_2, e_1) = \varphi(1, e_1) + \lambda = 0$$

i obtenim $\lambda = -\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$
Imposem

$$\varphi(1 + \lambda e_1 + \mu e_2, e_2) = \varphi(1, e_2) + \mu = 0$$

i obtenim $\mu = -\frac{\sqrt{6}}{3}$
Així

$$1 + \lambda e_1 + \mu e_2 = 1 - 2x + \frac{5}{6}x^2.$$

Per calcular la norma d'aquest polinomi fem

$$\varphi(1 - 2x + \frac{5}{6}x^2, 1 - 2x + \frac{5}{6}x^2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8/3 \\ 2 & 8/3 & 4 \\ 8/3 & 4 & 32/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \frac{2}{9}$$

Prenem finalment (dividint el polinomi per l'arrel quadrada de 2/9)

$$e_3 = \frac{3}{\sqrt{2}}(1 - 2x + (5/6)x^2).$$

(d) Un vector $(a, b, c) = a + bx + cx^2$ és ortogonal a $2x + 1$ respecte de φ si

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8/3 \\ 2 & 8/3 & 4 \\ 8/3 & 4 & 32/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 6a + (22/3)b + (32/3)c = 0$$

Posant primer $b = 1$ i $c = 0$, i després $b = 0$ i $c = 1$ (per assegurar-nos d'obtenir vectors linealment independents) obtenim com a base de l'espai ortogonal buscat

$$\begin{aligned} u &= (-22, 18, 0) = -22 + 18x, \\ v &= (-32, 0, 18) = -32 + 18x^2. \end{aligned}$$

5. Sigui (e_1, e_2, e_3) una base arbitrària d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E. Proveu que existeix un únic producte escalar de E que fa que aquesta base sigui ortonormal. Quin és aquest producte en el cas en que $E = \mathbb{R}^3$ i $e_1 = (1, 1, 2), e_2 = (2, 3, 0)$ i $e_3 = (1, 0, -1)$?

Solució: *Un producte escalar queda totalment determinat donant el seu valor sobre una base. Si imposem $\mathbf{T}(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $\mathbf{T}$ queda unívocament determinat.*
Primer mètode. *Si denotem per M la matriu d'aquest producte escalar respecte de la base (e_1, e_2, e_3), les condicions d'ortonormalitat*

$$e_i M e_j^t = \delta_{ij}$$

es resumeixen en el producte matricial

$$P^t M P = I, \quad \textit{on } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$M = (PP^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 7 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 46 & -33 & 4 \\ -33 & 29 & -5 \\ 4 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

El producte buscat és el que, respecte de la base canònica, té associat aquesta matriu M.
Segon mètode. *Apliquem la fórmula del canvi de base*

$$M(B, C)^t M(\mathbf{T}, C) M(B, C) = M(\mathbf{T}, B),$$

amb C la base canònica, i B la base (e_1, e_2, e_3). Com $M(B, C) = P$, $M(\mathbf{T}, C) = M$ i $M(\mathbf{T}, B) = I$, estem en al cas anterior.

6. Sigui $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'aplicació definida per $\phi((x, y), (z, t)) = xz - yt$.

(a) És ϕ una forma bilineal sobre $\mathbb{R}$? És simètrica?

(b) Quin és el conjunt de vectors isòtrops?

(c) Si existeix una base de vectors isòtrops, doneu la matriu de ϕ en aquesta base.

Solució: *(a) Conserva el producte per escalars:* $\phi(\lambda(x, y), (z, t)) = \phi((\lambda x, \lambda y), (z, t)) = \lambda xz - \lambda yt = \lambda\phi((x, y), (z, t))$.

També conserva la suma

$$\begin{aligned}\phi((x,y)+(x',y'),(z,t)) &= \phi((x+x',y+y'),(z,t)) = (x+x')z-(y+y')t \\ &= \phi((x,y),(z,t))+\phi((x',y'),(z,t))\end{aligned}$$

Anàlogament procediríem per a la segona component. És clarament simètrica.

(b) El vector $v=(x,y)$ és isòtrop si $\phi((x,y),(x,y))=0$, és a dir $x^2-y^2=0$. Equivalentment, $y=\pm x$ (les dues bisectrius).

(c) Prenem, com a base de vectors isòtrops, $u=(1,1)$ i $v=(1,-1)$. Sabem $\phi(u,u)=\phi(v,v)=0$. Calculem $\phi(u,v)$.

$$\phi((1,1),(1,-1)) = 1\cdot 1 - 1\cdot(-1) = 2.$$

Per tant, la matriu de ϕ en la base $B=(u,v)$ és

$$M(\phi,B)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Trobeu una base ortonormal, respecte del producte escalar ordinari de $\mathbb{R}^3$, respecte de la qual la forma bilineal φ donada per

$$M(\varphi,\mathcal{C})=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalitzi.

Solució: *Apliquem el teorema espectral. Els valors propis del polinomi característic de la matriu donada són 0 i 2. Els vectors propis normalitzats corresponents són $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ i $v=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. Aquesta és la base buscada.*

8. Donada

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trobeu $P\in O(3)$ i D diagonal tals que $A=P^tDP$.

Solució: *Apliquem el teorema espectral. Calculem els zeros del polinomi característic i obtenim $-1,1,3$. Els vectors propis normalitzats corresponents són $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $v=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ i $w=(0,1,0)$. Per tant*

$$Q^tAQ=D$$

amb

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i $Q \in O(3)$. La matriu P buscada és $P = Q^t$.

9. Considerem les formes bilineals ϕ_1 i ϕ_2 sobre $\mathbb{R}$ donades, respecte de la base canònica, per les matrius següents:

$$M(\phi_1, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M(\phi_2, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Classifiqueu, segons la llei d'inèrcia o teorema de Silvester, aquestes formes bilineals i digueu si són definides positives. Si no són definides positives, doneu un subespai de dimensió màxima on sí siguin definides positives.

(b) Hi ha vectors isòtrops? Quins són?

Solució: *Estudiarem només ϕ_1, ja que els càlculs són anàlegs per a ϕ_2.*
(a) Pel teorema espectral, sabem que ϕ_1 diagonalitza en una base ortonormal formada pels vectors propis (normalitzats) de l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M(f, \mathcal{C}) = M(\phi_1, \mathcal{C})$.
Busquem, doncs, els valors i vectors propis d'aquesta matriu. Polinomi característic

$$\begin{vmatrix} -1-x & -1 & -1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 - x^2 + 3x + 3 = -(x+1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}).$$

Siguin u, v, w els vectors propis normalitzats de valors propis, respectivament, $-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$. Llavors, el teorema espectral ens diu que, denotant per B la base (u, v, w),

$$M(\phi_1, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Denotant per B' la base $B' = (u, \dfrac{v}{\sqrt{\sqrt{3}}}, \dfrac{w}{\sqrt{\sqrt{3}}}) = (u, 3^{-1/4}v, 3^{-1/4}w)$ tenim

$$M(\phi_1, B') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Així ϕ_1 no és definida positiva (hi ha vectors, com per exemple u, tals que $\phi_1(u, u) < 0$). Sobre el subespai $\langle v \rangle$ és definida positiva. No pot haver-hi cap subespai de dimensió 2 on ϕ_1 sigui definida positiva (conseqüència del teorema espectral).

Sense utilitzar el teorema espectral. *El primer pas consisteix en canviar de base de manera que la matriu en la nova base sigui del tipus*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Per a això prenem la base següent:

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 \\ e_2' &= e_2 + \langle e_2|e_1\rangle e_1 = (-1,1,0) \\ e_3' &= e_3 + \langle e_3|e_1\rangle e_1 = (-1,0,1) \end{aligned}$$

ja que $\langle e_2|e_1\rangle = \langle e_3|e_1\rangle = -1$. *Observem que* e_2' *i* e_3' *s'han alegit de manera que* $\langle e_1'|e_2'\rangle = \langle e_1'|e_3'\rangle = 0$.
La matriu de ϕ_1 *en aquesta base* $B_1 = (e_1', e_2', e_3')$ *és*

$$M(\phi_1, B_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara prenem com a nova base B_2 *la donada per*

$$\begin{aligned} e_1'' &= e_1' \\ e_2'' &= e_2' = (-1,1,0) \\ e_3'' &= e_3' - \langle e_3'|e_2'\rangle e_2' = (1,-2,1) \end{aligned}$$

ja que $\langle e_3'|e_2'\rangle = 2$. *Observem que* e_3'' *s'ha alegit de manera que* $\langle e_2'|e_3''\rangle = 0$.
Llavors

$$M(\phi_1, B_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

La abse és diferent que amb el primer mètodfe, la matriu també, però l'índex (dimensió del subnespai màxim on ϕ_1 *és definida positiva menys dimensió del subnespai màxim on* ϕ_1 *és definida negativa) no.*

(b) Un vector (x,y,z) *és isòtrop si*

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Fent aquest producte de matrius obtenim

$$-x^2 - 2xy - 2xz + 2yz = 0$$

Això és una quàdrica (zeros d'un polinomi de segon grau en tres variables). Podem afinar més així.

Hem vist que en una certa base ortonormal B' tenim

$$M(\phi_1, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El vectors isòtrops ara es calculen posant

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -X^2 + Y^2 - Z^2 = 0.$$

(X, Y, Z són les coordenades respecte de la base B).
El conjunt dels vectors isòtrops forma, doncs, un con $Y^2 = X^2 + Z^2$, amb vèrtex l'origen i eix $< v >$.
Nota: Per classificar una forma bilineal en tenim prou en saber quants valors propis positius i negatius té l'endomorfisme associat. Per a això no ens cal resoldre el polinomi característic, cosa que pot ser molt complicada si és de grau superior a 3, sinó que en tenim prou en contar els canvis de signe entre els coeficients consecutius. Això és conseqüència del resultat següent.

Teorema (Teorema de Descartes)**.** *El nombre d'arrels positives r^+ d'un polinomi de coeficients reals, comptades amb la seva multiplicitat, és més petit o igual que el nombre v de canvis de signe de coeficients no nuls consecutius ($r^+ \leq v$).*
Si totes les arrels del polinomi són reals, llavors $r^+ = v$.

Corol·lari. *El nombre de valors propis positius d'una matriu real simètrica és igual al nombre de canvis de signe de coeficients no nuls consecutius del seu polinomi característic.*

Demostració. Conseqüència del teorema de Descartes i del fet que els valors propis d'una matriu real simètrica són nombres reals.

10. A $\mathbb{R}^3$ considerem l'aplicació bilineal T que en la base canònica té la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Justifiqueu que T és un producte escalar, calculeu l'ortogonal a $\langle(1, 1, 1)\rangle$ i trobeu-ne una base ortonormal.

Solució: *Els determinants*

$$2; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \det A$$

són positius, per tant, per un criteri ben conegut, T és definit positiu.

Per calcular l'ortogonal posem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Obtenim $3x + 3y + 4z = 0$. *Aquest és el pla ortogonal a* $\langle (1,1,1) \rangle$. *Una base és* $u = (1,-1,0)$, $v = (4,0,-3)$.
Mètode de Gram-Schmidt. Prenem

$$e_1 = \frac{u}{|u|}$$

La norma de u *val*

$$|u| = \sqrt{T(u,u)} = 1.$$

Per tant $e_1 = u$. *Ara prenem*

$$e_2 = \frac{v - T(v,e_1)e_1}{|v - T(v,e_1)e_1|}$$

Però $T(e_1, v) = 7$. *Així*

$$e_2 = \frac{v - e_1}{|v - e_1|} = \frac{(-3,7,-3)}{|(-3,7,-3)|} = \frac{(-3,7,-3)}{\sqrt{T((-3,7,-3),(-3,7,-3))}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,7,-3).$$

11. Sigui $B = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ i T el producte escalar que fa que aquesta base sigui ortonormal. Doneu la matriu de T en la base canònica i calculeu l'angle entre els vectors $u = (1,0,0)$ i $v = (0,1,0)$

Solució: *Per la fórmula del canvi de base*

$$M(T,B) = P^t M(T,C) P$$

amb

$$P = M(B,C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com volem que $M(T,B) = I$, *tenim*

$$M(T,C) = (PP^t)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'angle α *compeix*

$$\cos\alpha = \frac{T(u,v)}{\sqrt{T(u,u)} \cdot \sqrt{T(v,v)}} = \frac{-1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -1/3.$$

Capítol 6

Formes hermítiques

1.

Siguin A, B dues matrius hermítiques. Demostreu:

1. Els elements de la diagonal de A i B són reals.
2. $A + B$ és hermítica, i si A, B són definides positives, llavors $A + B$ és definida positiva.
3. Si $AB = BA$ llavors AB és hermítica.

Solució: *1. Les matrius hermítiques compleixen*

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}.$$

Si prenem $i = j$ veiem que els elements de la diagonal coincideixen amb els zeus conjugats, i per tant, són reals.
2. $A + B$ és hermítica ja que

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = \bar{a}_{ji} + \bar{b}_{ji} = \overline{a_{ji} + b_{ji}} = \overline{(A + B)}_{ji}.$$

Per veure que $A+B$ és definida positiva hem de veure que per a tot $x \in \mathbb{C}^n$, pensat com a vector columna, on n és l'ordre de la matriu, compleix,

$$x^t(A + B)\bar{x} \geq 0$$

Però,

$$x^t(A + B)\bar{x} = x^t A\bar{x} + x^t B\bar{x} \geq 0,$$

per set les dues definides positives. A més, si

$$x^t(A + B)\bar{x} = 0$$

ha de ser $x^t A\bar{x} = 0$ *i per tant* $x = 0$, *per ser* A *definida positiva.*
3.

$$(\overline{AB})^t = (\overline{A}\,\overline{B})^t = \overline{B}^t\overline{A}^t = BA = AB.$$

2. Considereu les formes hermítiques de $\mathbb{C}^3$ donades, respecte de la base canònica, per les matrius següents:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu matrius P_1, P_2 invertibles, i D_1, D_2 diagonals, amb $P_i^{-1}A_iP_i = D_i$. Decidiu, per a cadascuna d'elles, si la forma hermítica és definida positiva.

Solució: *Resolem només el cas* A_1. *El polinomi característic de* A_1 *és* $-x^3+12x^2-45x+50$. *Les arrels són* $5, 5, 2$. *Els vectors propis corresponents són* $u = (i, 1, 0), v = (-i, 0, 1), w = (-i, 1, -1)$. *Per tant,*

$$P^{-1}A_1P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

amb

$$P = \begin{pmatrix} i & -i & -i \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per ser els elements de la diagonal positius, la matriu és definida positiva.
De fet, per Gram-Schmit, podem prendre una base ortonormal a $\langle u, v\rangle$. *Per exemple,* $e_1 = (\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-i, 1, 2)$. *Ara l'ampliem amb* w *normalitzat (*w *és automàticament ortogonal a* $\langle u, v\rangle$*) i tenim la nova base* e_1, e_2, e_3 *amb* $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-i, 1, -1)$.
Si denotem

$$U = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{6}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

es compleix que $UU^* = I$ *i que* $U^*A_1U = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$
Ara és clar que

$$x^tA_1\bar{x} = x^tUDU^*\bar{x} = y^tD\bar{y} > 0,$$

amb $\bar{y} = U^*\bar{x}$.

3. Considerem el producte escalar ordinari $\langle | \rangle$ a $\mathbb{R}^n$. Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu simètrica tal que, per a tot $v \in \mathbb{R}^n$, si $v \neq 0$, $\langle Av|v \rangle > 0$. Proveu els següents fets:

1. Existeix una matriu ortogonal P tal que $P^{-1}AP = P^T AP = D$, on D és una matriu diagonal amb tots els coeficients de la diagonal positius.
2. Existeix una matriu B que compleix $B^2 = A$ i $AB = BA$ (indicació: troba C tal que $C^2 = D$).

Solució: *1. Pensem A com un segon producte escalar Φ a $\mathbb{R}^n$. El teorema espectral ens diu que existeix una base $\mathcal{B}$ ortonormal respecte del primer producte escalar en la que el segon diagonalitza. Aquesta base està formada pels vectors propis de A. Així, dient D a aquesta matriu diagonal, tenim*

$$D = M(\Phi, \mathcal{B}) = P^t M(\Phi, \mathcal{C})P = P^t AP,$$

on $P = M(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ és la matriu del canvi de base entre bases ortonormals i és, per tant, una matriu ortogonal.
Com $P^t = P^{-1}$, A i D tenen els mateixos valors propis. Això vol dir que els elements λ_i de la diagonal de D compleixen $Av_i = \lambda_i v_i$, on els v_i són els vectors propis.
Així

$$0 < \langle Av_i, v_i \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$$

que implica $\lambda_i > 0$.
2. Només hem d'agafar $B = PCP^{-1}$ amb $C^2 = D$ (C és diagonal i els elements de la seva diagonal són les arrels quadrades dels elements de la diagonal de D, que ja hem vist que són positius).
Així

$$B^2 = PC^2P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

4. Siguin A, B dues matrius hermítiques definides positives amb $AB = BA$. En aquest cas se sap que existeix una matriu unitaria P tal que $P^{-1}AP$ i $P^{-1}BP$ són diagonals. Demostreu que la matriu hermítica AB és definida positiva.

Solució: *Denotem*

$$P^{-1}AP = D_1, \quad P^{-1}BP = D_2$$

amb D_1, D_2 diagonals definides positives. Recordem que P unitaria vol dir $PP^* = I$, on $P^* = \bar{P}^t$.
Llavors

$$x^t AB\bar{x} = x^t PD_1D_2P^{-1}\bar{x}.$$

Posem $\bar{y} = P^{-1}\bar{x}$. *Llavors, com que l'inversa de la transposta és la transporta de l'inversa,*

$$y^t = (\bar{P}^{-1}x)^t = x^t(\bar{P}^t)^{-1} = x^t P,$$

i per tant

$$x^t AB\bar{x} = y^t D_1 D_2 \bar{y} > 0.$$

5. Sigui V un $\mathbb{C}$-espai vectorial, amb un producte hermític $\langle | \rangle$ definit positiu. Sigui $A : V \longrightarrow V$ lineal. Demostreu que si $\langle Av, v\rangle = 0$ per a tot $v \in V$, llavors $A = 0$, és a dir, $Av = 0$ per a tot $v \in V$.

Solució: *Aplicant la hipòtesi a la suma de dos vectors arbitraris* $v + w$ *(polarització) obtenim*

$$\langle Aw, v\rangle + \langle Av, w\rangle = 0, \quad \forall v, w \in V.$$

Canviem v *per* iv *i obtenim*

$$-i\langle Aw, v\rangle + i\langle Av, w\rangle = 0$$

Simplificant i *i sumant el resultat a la igualtat anterior obtenim*

$$2\langle Av, w\rangle = 0.$$

Si ara pensem que w *és qualsevol vector d'una base ortonormal, veiem que totes les components de* Av *respecte d'aquesta base ortonormal són zero, i per tant* $Av = 0$ *per a tot* $v \in V$.
NOTA: Si en lloc de considerar $\mathbb{C}$*-espais vectorials considerem* R*-espais vectorials podem tenir una aplicació lineal no nul·la tal que* $\langle Av, v\rangle = 0$, *per a tot* $v \in V$. *Per exemple, a* $\mathbb{R}^2$*amb el producte escalar ordinari, prenem* $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *donada per* $A(x, y) = (y, -x)$. A *és lineal, no nul·la, i en canvi* $\langle Av, v\rangle = 0$ *per a tot* $v \in \mathbb{R}^2$.

6. Sigui V un $\mathbb{C}$-espai vectorial, amb un producte hermític $\langle | \rangle$ definit positiu. Sigui $A : V \longrightarrow V$ lineal. Demostreu que A és hermític si i només si $\langle Av, v\rangle \in \mathbb{R}$ per a tot $v \in V$.

Solució: *Suposem primer que* A *és hermític. Llavors*

$$\langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \overline{\langle Av, v\rangle},$$

i per tant $\langle Av, v\rangle \in \mathbb{R}$.
Recíprocament, si $\langle Av, v\rangle \in \mathbb{R}$, *tenim*

$$\langle Av, v\rangle = \overline{\langle Av, v\rangle} = \langle v, Av\rangle = \langle A^* v, v\rangle,$$

la última igualtat és la definició de A^*, *operador conjugat de* A. *Per tant,* $\langle (A - A^*)v, v\rangle = 0$, *per a tot* $v \in V$, *i, pel problema anterior,* $A - A^* = 0$, *és a dir,* $A = A^*$ *que és la definició de que* A *sigui hermític.*

Capítol 7

Espais afins Euclidians

1.	Trobeu les equacions paramètriques i cartesianes de les varietats lineals de $\mathbb{R}^4$ següents. (a) La generada pels punts $A = (1, -1, 2, 2), B = (3, -2, 2, 1), C = (0, 1, 3, 2)$ i $D = (-1, 1, 1, 0)$. (b) L'hiperplà que passa pel punt $P = (2, 1, 0, 0)$ i és paral·lel a l'hiperplà $\Pi : x - y - z - t = 0$. (c) El pla que conté la recta $r : x = y = z = 1$ i és paral·lel a la recta $s : x - y - z = 1, x - t = -1, y - t = 2$.

Solució: *a) La varietat lineal demanada és*

$$A + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle,$$

és a dir,

$$(1, -1, 2, 2) + \langle (2, -1, 0, -1), (-1, 2, 1, 0), (-2, 2, -1, -2) \rangle$$

o bé

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda - \mu - 2\nu \\ y &= -1 - \lambda + 2\mu + 2\nu \\ z &= 2 + \mu - \nu \\ t &= 2 - \lambda - 2\nu \end{aligned}$$

que són les equacions paramètriques demanades.
Per eliminar λ, μ, ν podem resoldre el sistema format per les tres primeres equacions i substituir els valors a la quarta. Concretament

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \\ z - 2 \end{pmatrix}$$

Equivalentment, calculant la inversa, tenim

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}$$

Deduïm $7\lambda = 4x+y+x-5$, $7\nu = 2x+4y-3z+8$. *Substituint a la quarta equació* $t = 2-\lambda-2\nu$ *obtenim*

$$8x + 9y - 5z + 7t - 3 = 0.$$

b) Només hem de posar $x - y - z - t = a$ *i determinar* a *per la condició* $P \in \Pi$. *És a dir,* $2-1-0-0 = a$. *L'hiperplà demanat és doncs* $x - y - z - t = 1$.
c) Els vectors directors de les rectes són també vectors directors del pla. Observem que $r : (1,1,1,0) + t(0,0,0,1)$, *i* $s : (-1,2,-4,0) + t(1,1,0,1)$. *Per trobar* s *hem resolt els sistema prenent* t *com a paràmetre. Per tant el pla buscat és*

$$(1,1,1,0) + \lambda(1,1,1,0) + \nu(1,1,0,1).$$

Nota: podem canviar $(1,1,1,0)$ *per qualsevol punt de* r.

2. Sigui $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per $\varphi(x,y,z) = (x+2y+z, y-z, x+9z)$. És bijectiva? a) Calculeu la imatge i la antiimatge del pla $2x + y - z = 1$.
b) Calculeu la imatge i la antiimatge de la recta $(x,y,z) = (0,2,-1) + a(1,-1,0)$.

Solució: *a)*
Imatge. Primer mètode. *Transformarem un punt i un vector. El pla donat es pot escriure com*

$$X = P + \langle u, v \rangle$$

amb $P = (1,1,2)$, $u = (1,-2,0)$, $v = (0,1,1)$. *Llavors,* $\varphi(P) = (5,-1,19)$, $\varphi(1,-2,0) = (-3,-2,1)$, $\varphi(0,1,1) = (3,0,9)$.
El pla imatge és doncs

$$X = (5,-1,19) + \langle (-3,-2,1), (3,0,9) \rangle.$$

Equivalentment,

$$\begin{aligned} x &= 5 - 3\lambda + 3\mu \\ y &= -1 - 2\lambda \\ z &= 19 + \lambda + 9\mu \end{aligned}$$

que, eliminant els paràmetres (la segona equació ens dóna directament λ *en funció de* y*, i entre la primera i tercera eliminem* μ*), dóna* $3x - 5y - z = 1$.
Imatge. Segon mètode. *Escriurem el pla com*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1. \tag{7.1}$$

L'aplicació φ *transforma el punt de coordenades* (x, y, z) *en el punt de coordenades* (x', y', z') *donades per*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

on

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Substituint (7.2) *en* (7.1) *veiem que l'equació lineal satisfeta per* x', y', z' *és*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 1.$$

Com que

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & -18 & -3 \\ -1 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

substituint obtenim

$$3x' - 5y' - z' = 1.$$

a) Antiimatge. *Busquem un pla*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1,$$

(com que el terme independent no és zero, ja que els plans per l'origen van a plans per l'origen, el podem suposar igual a 1*), tal que en transformar-lo per* φ *(tal com ho acabem de fer a l'apartat anterior)*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 1$$

ens doni

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 1.$$

Comparant aquestes fórmules veiem que ha de ser

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

o, equivalentment,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

El pla buscat és doncs $x + 5y - 8z = 1$.
b) Imatge. *Escriurem la recta com intersecció de plans, ja que el mètode anterior ens va bé per transformar plans.*
Eliminant a *del sistema*

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= 2 - a \\ z &= -1 \end{aligned}$$

veiem que la recta donada és intersecció dels plans $x = 2 - y$ *i* $z = -1$. *Els escrivim com*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1.$$

Per tant, les equacions lineals satisfetes per x', y', z' *són*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 2; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -1.$$

Substituint M^{-1} *pel seu valor obtenim*

$$4x' - 5y' - z' = 6, \qquad -x' + 2y' + z' = -6.$$

La recta donada com intersecció d'aquest dos plans és la recta buscada. Si resolem aquest sistema obtenim la recta

$$r : (3, 3, -9) + a(-1, -1, 1).$$

b) Antiimatge. *Busquem plans*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2; \qquad \begin{pmatrix} e & f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1$$

tals que les seves imatges siguin respectivament

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1.$$

Tal com hem vist a la segona part de l'apartat a) això vol dir que ha de ser

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} e & f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

És a dir, $x+3y=2$ i $x+9z=-1$. Resolent aquest sistema podem escriure la recta antiimatge com

$$(0, 2/3, -1/9) + x(1, -1/3, -1/9),$$

o, equivalentment

$$(-1, 1, 0) + \lambda(9, -3, -1).$$

3. Calculeu les altures del tetraedre de $\mathbb{R}^4$ que té per vèrtexs els punts $A = (2, 0, 1, 1), B = (1, 0, 3, -1), C = (0, 0, 1, 1)$, i $D = (-1, 1, 0, 1)$.

Solució: *El*[1] *pla BCD és el pla*

$$B + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \rangle.$$

és a dir, està format per aquells punts $X = (x, y, z, t)$ tals que

$$X = B + \lambda e_1 + \mu e_2, \qquad e_1 = \overrightarrow{BC} = (-1, 0, -2, 2),\ e_2 = \overrightarrow{BD} = (-1, 1, -1, 0).$$

Si denotem $H = \langle e_1, e_2 \rangle$ llavors $H^\perp = \langle e_3, e_4 \rangle$ amb $e_3 = (-2, -1, 1, 0)$, $e_4 = (2, 2, 0, 1)$.
Llavors descomponem el vector $\overrightarrow{BA} = (1, 0, -2, 2)$ a la suma directa $\mathbb{R}^4 = H \oplus H^\perp$.
Per a això resolem els sistema

$$(1, 0, -2, 2) = a(-1, 0, -2, 2) + b(-1, 1, -1, 0) + c(-2, -1, 1, 0) + d(2, 2, 0, 1).$$

Obtenim $a = 1, b = c = -2/3, d = 0$.
L'altura relativa a A, h_A, és la distància entre el punt A i el pla $B + H$, i és, per tant igual a la norma del vector de $H^\perp$

$$c(-2, -1, 1, 0) + d(2, 2, 0, 1) = -2/3(-2, -1, 1, 0)$$

És a dir, $h_A = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.
Les demés altures es troben de manera anàloga.

[1] Recordem que la distància entre les subvarietats lineals $L_1 = P + E$ (P punt, E subespai vectorial) i $L_2 = Q + F$ (Q punt, F subespai vectorial) és la component normal del vector $\overrightarrow{PQ}$ descompost a $(E + F) \oplus (E + F)^\perp$.

4. Sigui V el pla de $\mathbb{R}^4$ definit per les equacions $x - z - t = 1, x - y - z = 1$. Calculeu
a) la distància del punt $P = (-3, 1, 2, 0)$ a V.
b) La distància entre V i la recta r definida per les equacions $x = y = 1, t = 0$.

Solució: *a) Resolem el sistema*

$$\begin{aligned} x - z - t &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

posant z i t com a variables independents, i obtenim que l'espai de solucions d'aquest sistema homogeni és el subespai vectorial de dimensió 2, H, donat per

$$H = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1) \rangle$$

Com que una solució particular del sistema no homogeni

$$\begin{aligned} x - z - t &= 1 \\ x - y - z &= 1 \end{aligned}$$

és, per exemple, $(x, y, z, t) = (2, 0, 1, 0) = Q$, el pla V esta donat per $V : Q + H$. Per calcular la distància del punt P al pla V descomponem el vector $\overrightarrow{QP}$ a la suma directa $\mathbb{R}^4 = H \oplus H^\perp$. Hem de trobar, doncs, $H^\perp$. Observem que $(x, y, z, t) \in H^\perp$ si i només si

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \cdot (1, 0, 1, 0) &= 0 \\ (x, y, z, t) \cdot (1, 1, 0, 1) &= 0 \end{aligned}$$

Prenent z i t com variables independents obtenim que l'espai de solucions d'aquest sistema homogeni és el subespai vectorial de dimensió 2,

$$H^\perp = \langle (-1, 1 - 1, 0), (0, -1, 0, 1) \rangle.$$

Ara ja podem descompondre $\overrightarrow{QP}$:

$$(5, -1, -1, 0) = a(1, 0, 1, 0) + b(1, 1, 0, 1) + c(-1, 1, 1, 0) + d(0, -1, 0, 1).$$

Resolent obtenim $c = -13/5$, $d = -4/5$ (els valors de a i b no ens calen).
La distància demanada és doncs

$$d(P, V) = |c(-1, 1, 1, 0) + d(0, -1, 0, 1)| = \frac{1}{5}\sqrt{13^2 + 9^2 + 13^2 + 4^2}.$$

b) La recta r es pot escriure com $(1, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0)$. El subespai vectorial suma de H i $\langle (0, 0, 1, 0) \rangle$ és

$$F = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0) \rangle,$$

que té dimensió 3.
El vector $(x, y, z, t) \in F^{\perp}$ *si i només si*

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \cdot (1, 0, 1, 0) &= 0\\(x, y, z, t) \cdot (1, 1, 0, 1) &= 0\\(x, y, z, t) \cdot (0, 0, 1, 0) &= 0\end{aligned}$$

Resolent obtenim

$$F^{\perp} = \langle (0, 1, 0, -1) \rangle.$$

Ara prenem $Q = (2, 0, 1, 0) \in V$ *i* $R = (1, 1, 0, 0) \in r$ *i descomponem* $\overrightarrow{QR}$ *a* $F \oplus F^{\perp}$.

$$(-1, 1, -1, 0) = a(1, 0, 1, 0) + b(1, 1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 1, 0, -1).$$

Obtenim $d = 1/2$ *(els valors de* a, b, c *no ens calen). La distància buscada és doncs*

$$d(V, r) = |d(0, 1, 0, -1)| = |(0, 1/2, 0, -1/2)| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Divertimento. *La distància (al quadrat) entre un punt genèric de* V *i un punt genèric de* r *està donada per la funció*

$$D(\lambda, \mu, z) = d^2((1, 1, z, 0), (2 + \lambda + \mu, \mu, 1 + \lambda, \mu)) = (1 + \lambda + \mu)^2 + (\mu - 1)^2 + (1 + \lambda - z)^2 + \mu^2.$$

Resolent els sistema en derivades parcials

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial \lambda} &= 0\\\frac{\partial D}{\partial \mu} &= 0\\\frac{\partial D}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

obtenim $z = -1/2$, $\lambda = -3/2$, $\mu = 1/2$. *Substituint aquests valors a* $D(\lambda, \mu, z)$ *obtenim el mateix resultat que anteriorment.*

5. Trobeu la distància i la perpendicular comuna entre les rectes $L_1 = (1, 2, 3) + \langle (1, 0, 0) \rangle$ i $L_2 = (0, 0, 0) + \langle (0, 2, 4) \rangle$ de l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^3$.

Solució: *Denotem* $P = (1, 2, 3), F = \langle (1, 0, 0) \rangle, Q = (0, 0, 0), G = \langle (0, 2, 4) \rangle$, *de manera que* $L_1 = P + [F]$ *i* $L_2 = Q + [G]$. *Llavors*

$$F + G = \langle (1, 0, 0), (0, 2, 4) \rangle.$$

Com que som a $\mathbb{R}^3$, podem calcular $(F+G)^\perp$ simplement fent el producte vectorial de $(1,0,0)$ i $(0,2,4)$. En general, podem escriure els vectors de $(F+G)^\perp$ de manera genèrica, per exemple (α,β,γ), i imposar ara que sigui perpendicular a $(1,0,0)$ i $(0,2,4)$. Tenim

$$(F+G)^\perp = \langle(0,4,-2)\rangle.$$

Ara escrivim

$$\overrightarrow{PQ} = u+v, \quad u \in (F+G), v \in (F+G)^\perp.$$

Concretament,

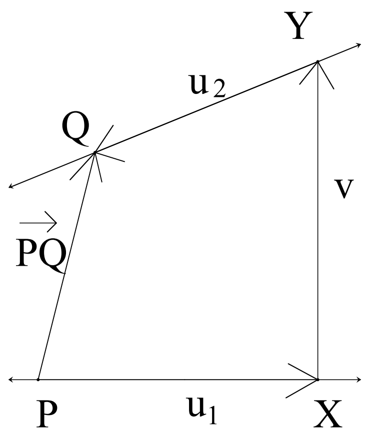
$$\overrightarrow{PQ} = (-1,-2,-3) = \lambda(1,0,0) + \mu(0,2,4) + \nu(0,4,-2) \in (F+G) \oplus (F+G)^\perp.$$

Deduïm $\lambda = -1, \mu = -\frac{4}{5}, \nu = -\frac{1}{10}$. En particular,

$$d(L_1,L_2) = |-\frac{1}{10}(0,4,-2)| = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Per trobar els punts X, Y que realitzen aquesta distància mínima, recordem que $X = P+u_1, Y = Q-u_2$ amb $u_1 \in F$, $u_2 \in G$ i $v \in (F+G)^\perp$, tals que

$$\overrightarrow{PQ} = u_1 + u_2 + v.$$



En el nostre cas, doncs, $u_1 = \lambda(1,0,0) = (-1,0,0)$ i $u_2 = \mu(0,2,4) = (0,-\frac{8}{5},\frac{-16}{5})$. Per tant,

$$\begin{aligned} X &= (1,2,3) + (-1,0,0) = (0,2,3), \\ Y &= (0,0,0) - (0,-\frac{8}{5},\frac{-16}{5}) = (0,\frac{8}{5},\frac{16}{5}). \end{aligned}$$

Clarament, $d(X,Y) = \frac{\sqrt{5}}{5}$. $\diamond$

6. Trobeu la distància i la perpendicular comuna entre els plans L_1 i L_2 de l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^4$, donats per

$$\begin{aligned} L_1 &= (0,1,2,3) + \langle (1,0,0,0),(2,6,-1,0)\rangle, \\ L_2 &= (0,0,0,0) + \langle (0,2,4,1),(2,6,-1,0)\rangle. \end{aligned}$$

Solució: *Denotem* $P = (0,1,2,3), Q = (0,0,0,0), F = \langle (1,0,0,0),(2,6,-1,0)\rangle, G = \langle (0,2,4,1),(2,6,-1,0)\rangle$.
Així $L_1 = P + [F], L_2 = Q + [G]$,

$$F + G = \langle (1,0,0,0),(2,6,-1,0),(0,2,4,1)\rangle,$$

i

$$(F+G)^\perp = \langle (0,1,6,-26)\rangle.$$

Ara escrivim

$$\overrightarrow{PQ} = u + v, \quad u \in (F+G), v \in (F+G)^\perp.$$

Concretament,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (0,-1,-2,-3) \\ &= \lambda(1,0,0,0) + \mu(0,2,4,1) \\ &+ \nu(2,6,-1,0) + \delta(0,1,6,-26). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Trobem $\lambda = -40/713, \mu = -449/713, \nu = 20/713, \delta = 65/713$.
En particular,

$$d(L_1,L_2) = |\frac{65}{713}(0,1,6,-26)| = \frac{65}{\sqrt{713}}.$$

Per trobar els punts X, Y *que realitzen aquesta distància mínima, recordem que* $X = P + u_1, Y = Q - u_2$ *amb* $u_1 \in F$, $u_2 \in G$ *i* $v \in (F+G)^\perp$, *tals que*

$$\overrightarrow{PQ} = u_1 + u_2 + v.$$

Una possibilitat, no pas la única ja que $F \cap G \neq \overrightarrow{0}$, *és, comparant amb la fórmula (7.3), prendre*

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda(1,0,0,0) + \mu(0,2,4,1) = \frac{1}{713}(-40,-898,-1796,-449) \\ u_2 &= \nu(2,6,-1,0) = \frac{1}{713}(40,120,-20,0). \end{aligned}$$

Així,

$$\begin{aligned} X &= P + u_1 = \frac{1}{713}(-40,-185,-370,1690), \\ Y &= Q - u_2 = \frac{1}{713}(-40,-120,20,0). \end{aligned}$$

Clarament, $d(X,Y) = \frac{65}{\sqrt{713}}$. $\diamond$

7.

Siguin els punts $A = (1,-2,1)$, $B = (0,1,2)$, $C = (1,3,4)$ de l'espai afí euclidià estàndard.

a) Expresseu la recta que dóna l'alçada del triangle ABC des del punt C com a intersecció de dos plans.

b) Trobeu el punt D a AB tal que CD és l'alçada.

c) Quina és la longitud de l'alçada.

Solució: *Rectes per* C *amb vector director en el pla* $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$*:*

$$r : C + \lambda v, \qquad v = a(0,-5,-3) + b(-1,-2,-2)$$

amb $a, b \in \mathbb{R}$. *Imposem que sigui perpendicular a la recta* AB.

$$\langle(-b, -5a-2b, -3a-2b), (-1,3,-1)\rangle = 0.$$

Obtenim $a = -7, b = 18$. *Així* $r : (1,3,4) + \lambda(-18,-1,-15)$. *Eliminant* λ *entre la primera i la segona equació obtenim* $x - 18y + 53 = 0$; *i eliminant-la entre la segona i la tercera equació tenim* $z - 15y + 41 = 0$. *La intersecció d'aquests dos plans és justament* r.
El punt D *el podem trobar tallant les rectes* r *i* $s : A + \mu\overrightarrow{AB}$. *És a dir,*

$$(1,3,4) + \lambda(-18,-1,15) = (1,-2,1) + \mu(-1,3,1).$$

Obtenim $\lambda = 1/11$ *i per tant*

$$D = \frac{1}{11}(-7,32,29).$$

La distància entre els punts C *i* D *és doncs*

$$|CD| = \frac{1}{11}\sqrt{18^2 + 1^1 + 15^2}.$$

Aquesta distància es pot trobar directament descomponent el vector $\overrightarrow{CA}$ *a la suma directa*

$$\mathbb{R}^3 = \langle(1,-3,-1)\rangle \oplus \langle(1,-3,-1)\rangle^{\perp}$$

Posem

$$\overrightarrow{CA} = (0,5,3) = \lambda(1,-3,-1) + \mu(3,1,0) + \nu(0,-1,3).$$

Obtenim $\mu = 6/11$ *i* $\nu = 5/11$. *Per tant, la distància entre el punt* C *i la recta* AB *és*

$$|CD| = |\mu(3,1,0) + \nu(0,-1,3)| = |\frac{1}{11}(18,1,15)|.$$