El *Saggio* de Beltrami

Agustí Reventós

31 Maig 2022, aula C1-017

1 Presentació

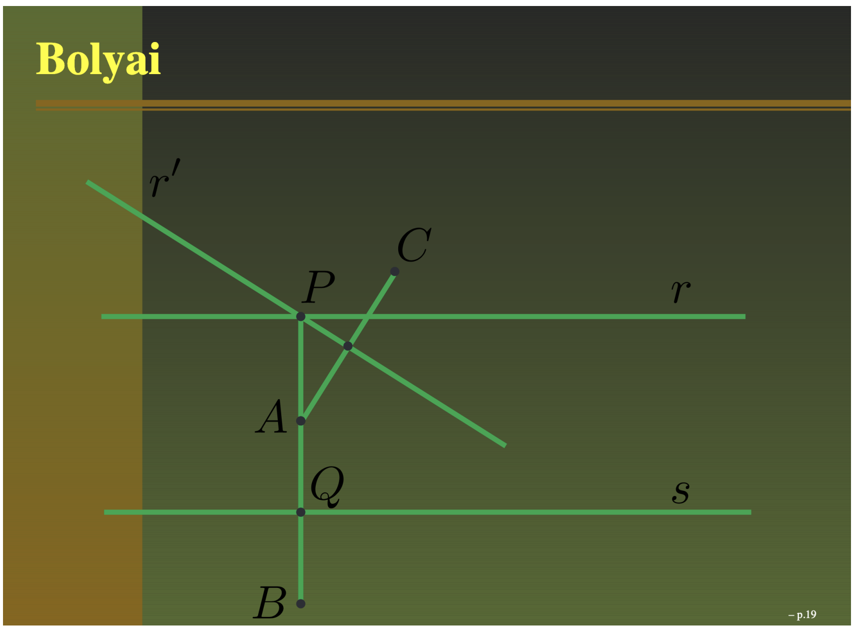
Vull parlar en aquesta darrera classe de la relació de Beltrami amb el tema de les GNE. Com hi va anar a parar i la importància dels seus treballs. Perquè es considera que els seus treballs tanquen definitivament el problema obert feia 2000 anys sobre el cinquè postulat d'Euclides.

2 GNE

Intentaré resumir molt ràpidament un tema tant llarg i important. Com sabeu es tractava de demostrar el cinquè postulat d'Euclides a partir dels altres 4.

> Si una línia recta és tallada per dues línies rectes de manera que els angles interiors del mateix costat sumin menys de dos rectes, i si aquestes dues línies rectes es prolonguen indefinidament, llavors es tallen en el costat on estan aquests angles que sumen menys de dos rectes.

Se'n van donar moltes demostracions, totes assumint coses equivalents al cinquè postulat. Per exemple Farkas Bolyai assumeix, sense demostració, que tres punts no alineats determinen una circumferència,[1] i dóna la prova següent. *Demostració de Farkas Bolyai.*



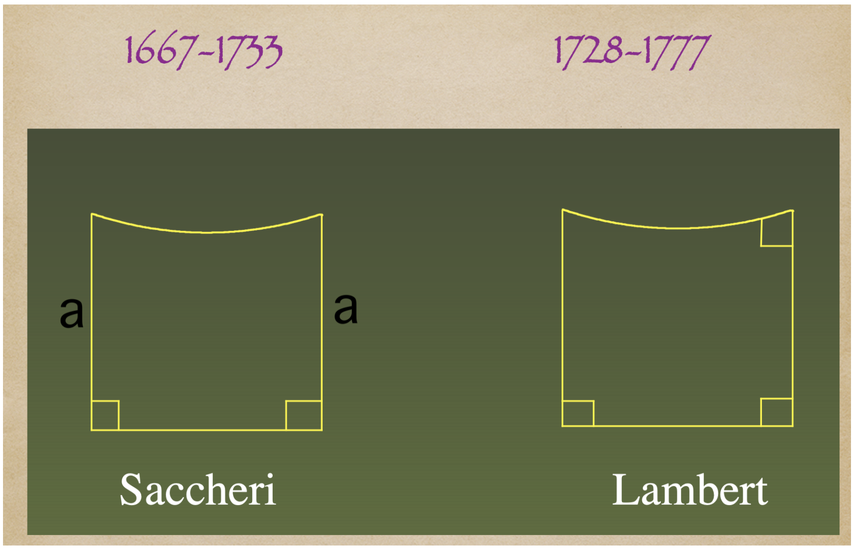
[1] Llibre IV, Proposició 5 dels Elements.

Prenem A entre P i Q i fem el simètric C respecte r' (la recta que hem de demostrar talla s) i el simètric B del mateix A respecte s. Considerem el cercle determinat per A, B, C. El centre pertany a la intersecció de les rectes r' i s (mediatrius de cordes), per tant es tallen.

Per exemple, Legendre a cada nova edició del seu treball *Eléments de géométrie*, que va ser llibre de text durant més de 100 anys, en donava una nova prova.

2.1 Saccheri i Lambert

Dos treballs molt importants en aqurst camp són els de Saccheri i Lambert. Saccheri Construeix un quadrilàter amb angles rectes a la base i es pregunta si els angles superiors són aguts o obtusos. I Lambert construeix rectangle amb tres angles rectes i es pregunta si el quart angle és agut o obtús.



Saccheri. *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia.* 1733. Rebutja l'hostil hipòtesi de l'angle agut perquè obté resultats que repugnen la natura de la línia recta.

Lambert: *Theorie der Parallellinien.* 1760. *M'inclino a pensar que la hipòtesi de l'angle agut és certa en alguna esfera de radi imaginari.*

I abans diu : el més impactant és que en aquesta hipòtesi tindríem una mesura absoluta de longitud sobre cada recta, d'àrea sobre cada superfície i de volum per cada espai físic.

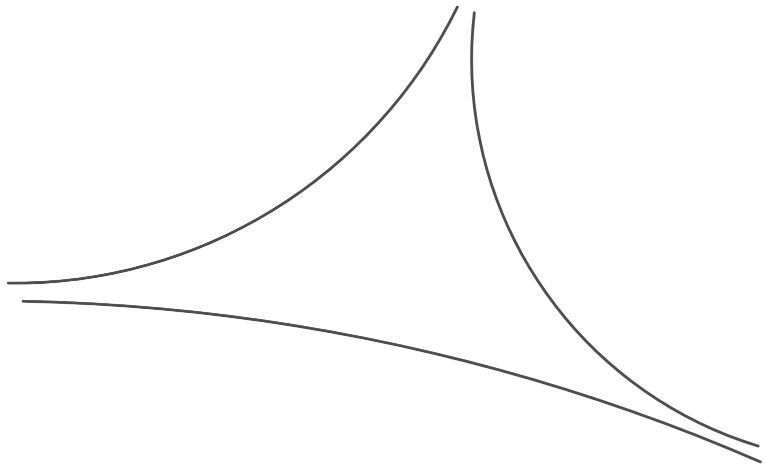
I després de comentar resultats 'estranys' (taules e logaritmes infinites,...) diu: Però tots aquests arguments dictats per amor i odi no tenen cabuda ni a la geometria ni ala ciència. *Ho veig com una cr´tica velada a Saccheri.*

Gauss

Carta a Olbers 1816.

> Seria desitjable que la geometria euclidiana no fos certa ja que llavors tindríem una unitat de mesura universal a priori, per exemple, podríem agafar com unitat el costat del triangle equilàter d'angle $59°, 59'59''.999$

Carta a Olbers 1819.

> Puc resoldre tots els problemes de geometria astral un cop una constant C està donada. Per exemple
>
> 
>
> $$\text{limes area trianguli plani} = \frac{\pi CC}{[\ln(1+\sqrt{2})]^2}$$

Carta a Gerling 1832.

> Et comento que he llegit aquests dies un petit treball d'un hongarès, sobre geometries no euclidianes, que conté totes les meves idees i resultats, desenvolupats molt elegantment. L'autor és un jove oficial austríac, fill d'un amic de la meva joventut, que vaig conèixer el 1798, amb qui havia parlat del tema, però aleshores les meves idees no havien arribat a la maduresa i formació d'ara. Tinc aquest jove geòmetra com un dels genis més grans.

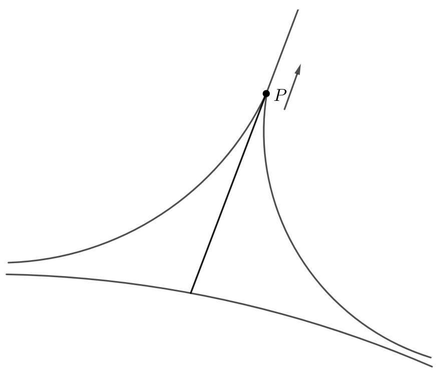
Carta a Farkas 1832.

> És, per tant, una agradable sorpresa per mi, i estic molt satisfet, que sigui justament el fill del meu vell amic qui m'hagi precedit de manera tan remarcable.

Aquesta carta acaba amb set seccions on Gauss demostra el teorema del defecte.

SECCIÓ I Existeixen triangles ideals.

Són triangles amb angles zero. Conseqüència de que hi hagin para l.leles per l'esquerra i per la dreta.



SECCIÓ II Tenen àrea finita.

Li diu t a a questa àrea i no fa més comentaris més que un peu de pàgina per dir que això s'hauria d'escriure bé. Però aquesta t és justament el valor que li dóna a Olbers !

$$t = \frac{\pi CC}{[\ln(1+\sqrt{2})]^2}.$$

Ja hem comentat que veurem més endavant d'on surt aquesta expressió.

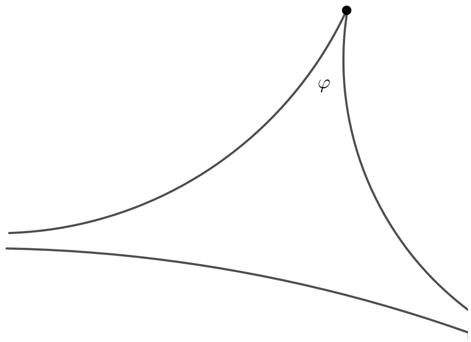
SECCIÓ III L'àrea depèn de l'angle

Escriu[2]

$$a = f(\pi - \varphi)$$

d'aquesta manera

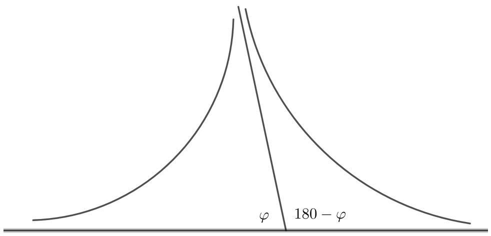
$$f(0) = [\text{àrea del triangle quan } \varphi = \pi]{=}0$$



SECCIÓ IV TEOREMA

$$f(\varphi) + f(\pi - \varphi) = t$$

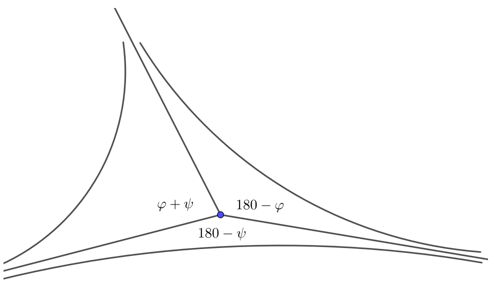
Obvi.



SECCIÓ V TEOREMA

$$f(\varphi) + f(\psi) + f(\pi - \varphi - \psi) = t$$

Obvi.



[2]Faig trampa ja que Gauss escriu 180 graus i no pi radians, però llavors quan posteruorment es parla del defecte s'hauria de dir "defecte sobre 180 si mesurem en graus on dfecet sobre π si mesurem en radians.

SECCIÓ VI Corol·lari

$$f(\varphi)+f(\psi)=f(\varphi+\psi)$$

Demostració.

$$f(\varphi)+f(\psi)=t-f(\pi-\varphi-\psi)=f(\varphi+\psi). \quad \square$$

Això vol dir que f és lineal i per tant de la forma $f(\varphi)=a\varphi$ i podem determinar la constant a posant $f(\pi)=\pi\cdot a=t$ (en el dibuix de la secció III es veu que quan φ tendeix a zero el triangle es va acostant al triangle ideal d'àrea t).

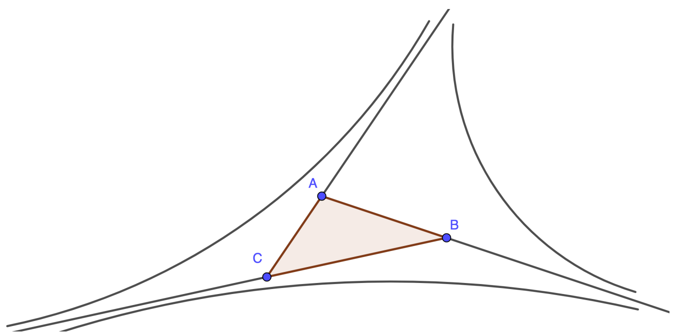
Per tant

$$f(\varphi)=\frac{t}{\pi}\varphi$$

SECCIÓ VIITEOREMA L'àrea d'un triangle ABC és

$$\text{Àrea}=\frac{t}{\pi}(\pi-A-B-C)=\frac{t}{\pi}\cdot\text{Defecte}.$$

Demostració. Considera el triangle ABC dintre d'un triangle ideal com indica la figura.



Comenta que dues rectes que es tallen tenen una paral·lela comuna (la demostració pot ser delicada però la idea intuïtiva és passar al límit la paral·lela des d'un punt exterior com hem fet abans).

Tos els triangles ideals tenen la mateixa àrea perquè l'àrea depèn dels angles.

Diguem Z a làrea del triangle ABC. Clarament

$$Z+f(A)+f(B)+f(C)=t.$$

Per tant

$$Z+\frac{t}{\pi}(A+B+C)=t$$

i així

$$Z=\frac{t}{\pi}(\pi-(A+B+C))=\frac{t}{\pi}.\text{DEFECTE}.$$

3 Bolyai

Janos va neixer a va el 1802 a Kolozsvár, Transilvania, però de seguida van anara a Marosvàsàrhely, TirguMures (Rumania). Abans havia estat par d'Hungria

Va estar a punt d'anar a estudiar amb Gauss a Gottingen però la carta de Farkas era impresentable i no consta que Gauss la contestés. Va estar a l'exèrcit ja que va estudiar a l'escola d'Enginyers i era la situació natural a l'època.

Carta de János al seu pare, 1823.

He descobert coses tan superbes que jo mateix estic atònit, i significaria una vergonya eterna deixar-ho perdre per sempre; si vostè, apreciat pare, les veu, les reconeixerà; ara no puc dir més:

del no-res he creat un món nou i diferent!

El fills no fan gaire cas als seus pares. Però l'advertència[3] del pare fou premonitòria i János va patir molt tota la seva vida per la falta de reconeixement a la seva obra.

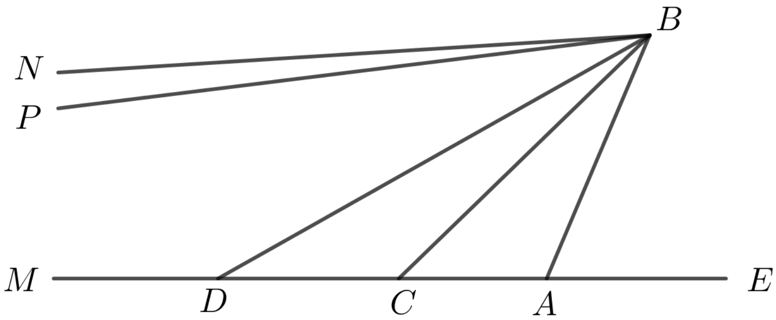
Publica l'*Appendix* en el llibre del seu pare *Tentamen Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae ..Introducendi.* 1832.

Horoesfera i horocicle

El que permet desenvolupar el seu treball a János és pensar a l'espai, no només el pla, i el descobriment i ús genial dels horocicles (que consten en notes no publicades de Guss).

Comença amb la definició de semirectes paral·leles.

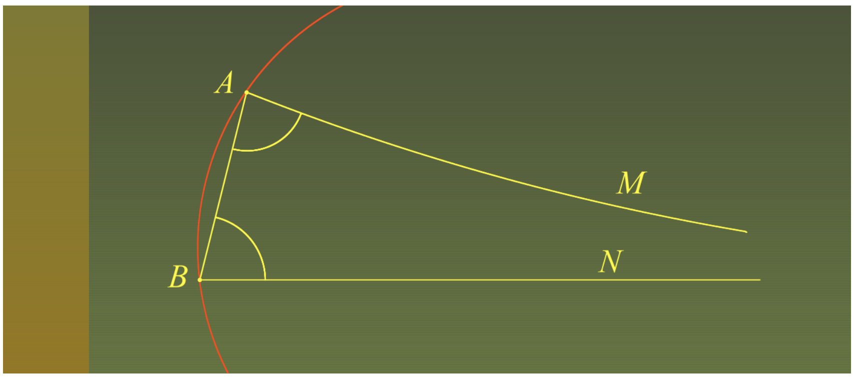
Definició 1: Si la semirecta $\overrightarrow{AM}$ no és tallada per la semirecta $\overrightarrow{BN}$, situada en el mateix pla, però és tallada per qualsevol altra semirecta $\overrightarrow{BP}$ (a la regió angular ABN), direm que $\overrightarrow{BN}$ és paral·lela a $\overrightarrow{AM}$ i ho indicarem per $BN \parallel\!| AM$.



Definició 2: L'*horoesfera* **F** determinada per $\overrightarrow{AM}$ és el conjunt format pel punt A i *tots* els punts B tals que si $BN \parallel\!| AM$ es compleixi que $BN \simeq AM$.

L'*horocicle* **L** determinat per $\overrightarrow{AM}$ és la intersecció de l'horoesfera determinada per $\overrightarrow{AM}$ amb un pla qualsevol que contingui la recta AM.

La notació $BN \simeq AM$ vol dir que els angles $\angle ABN$ i $\angle BAM$ són iguals.



[3]Deixa les paral·lles tranquiles, abjura d'elles com d'una xarla indecent, et treuran, com a mi, tot el temps, salut tranquil·litat i felicitat de la teva vida.

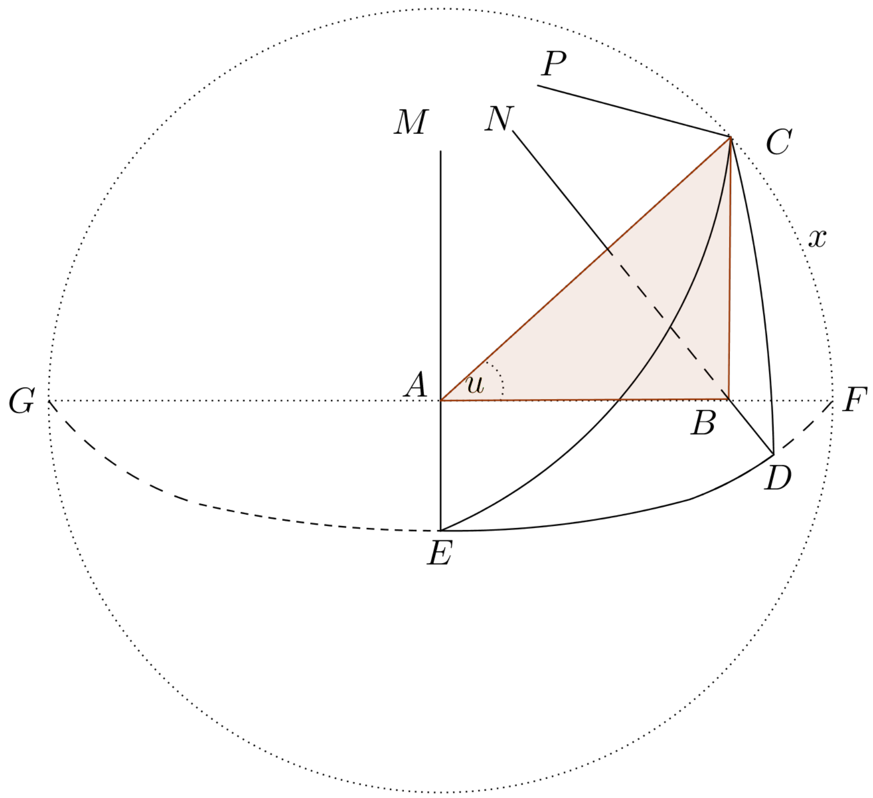
En el cas euclidià seria un pla ortogonal a BN (o a qualsevol paral·lela a ella).

Llavors veu que la geometria de l'horoesfera, on les rectes són els horocicles, és euclidiana.

I demostra teoremes projectant sobre l'horoesfera. Per exemple,

Teorema del sinus

Teorema 1: En qualsevol triangle, les circumferències amb radi igual als costats són entre elles com els sinus dels angles oposats.[4]



Demostració. En efecte, suposem $\measuredangle ABC = \pi/2$, i considerem $\overrightarrow{AM}$ perpendicular al pla ABC del triangle. Considerem també les semirectes $\overrightarrow{BN}$ i $\overrightarrow{CP}$ paral·leles a $\overrightarrow{AM}$; tindrem $CAB \perp AMBN$, i així (ja que $CB \perp BA$) $CB \perp AMBN$, i consegüentment $CPBN \perp AMBN$.

Suposem que l'horoesfera d'eix $\overrightarrow{CP}$ talla les rectes BN, AM en D i E respectivament, i a les bandes $CPBN, CPAM, BNAM$ en els horocicles $\widehat{CD}, \widehat{CE}, \widehat{DE}$. Llavors, pel que hem comentat al final de la secció §20 sobre l'angle entre horocicles, $\measuredangle CDE$ és igual a l'angle entre els plans NDC i NDE, i per tant $\measuredangle CDE = \pi/2$; anàlogament $\measuredangle CED = \measuredangle CAB$. Però com que la geometria de l'horoesfera és euclidiana (§21), en el triangle de costats horocíclics $\triangle CDE$ (suposant sempre aquí radi = 1)

$$\widehat{EC} : \widehat{DC} = 1 : \sin DEC = 1 : \sin CAB.$$

[4] Observeu que això és el que diu el teorema del sinus euclidià:

$$\frac{\sin A}{2\pi a} = \frac{\sin B}{2\pi b} = \frac{\sin C}{2\pi c}$$

També (per §21) i observant que la circumferència sobre l'horoesfera de centre E i radi horocíclic EC coincideix amb la circumferència de centre A i radi AC (en girar perpendicularment a AM) i que la circumferència sobre l'horoesfera de centre D i radi horocíclic DC coincideix amb la circumferència de centre B i radi BC (en girar perpendicularment a BN) tenim

$$\widehat{EC} : \widehat{DC} = \bigcirc\widehat{EC} : \bigcirc\widehat{DC} = \bigcirc AC : \bigcirc BC \quad (\S 18);$$

i així,

$$\bigcirc AC : \bigcirc BC = 1 : \sin CAB;$$

ara el teorema és evident per a cada triangle. □

Angle de paral·lelisme

Una de les fórmules més importants de l'Apèndix (que Gauss segur coneixia) és la de l'angle de paral·lelisme.

Concretament l'angle que forma la perpendicular a una recta. traçada des d'un punt exterior a distància x d'aquesta recta amb la paral·lela a aquesta reta pel punt és

$$\Pi(x) = 2 \arctan e^{-x/R}$$

on R és una certa constant.

També demostra la fórmula de l'àrea del triangle

$$\text{Àrea} = R^2 \text{DEFECTE}$$

Recordem que segons la carta a Olbers l'àrea t del triangle ideal és

$$t = \frac{\pi CC}{[\ln(1+\sqrt{2})]^2} \tag{1}$$

de manera que ha de ser

$$R = \frac{C}{\ln(1+\sqrt{2})}$$

Mirem d'on surt. Prenem C tal que

$$\Pi(C) = \pi/4.$$

Aquesta és la idea que hi ha quan Gauss diu que hi ha una unitat de mesura a priori: els angles tenen unitat de mesura a priori i degut a la fórmula de l'angle de paral·lelisme aquesta unitat es transporta a longituds. I és 'raonable' agafar una longitud associada a un angle simple (recordem que no pot agafar $\pi/2$).

De

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan e^{-C/R}$$

deduïm[5]

$$R = \frac{C}{\ln(1+\sqrt{2})}$$

[5] $\tan(\pi/8) = -1+\sqrt{2}$, i per tant $1/\tan(\pi/8) = 1+\sqrt{2} = e^{C/R}$

i per tant l'equació (1) diu

$$t = \pi R^2$$

d'acord amb (**??**)

Hem descobert doncs quina unitat de mesura tenia Gauss al cap quan va escriure a Olbers!

Darrera línia de l'Appendix. *Faltaria encara, per completar enterament les nostres investigacions, demostrar la impossibilitat de decidir (sense recórrer a alguna hipòtesi) si és el sistema Σ o algun dels sistemes S (i quin) el que té lloc realment. Això és el que reservarem per a una ocasió més favorable.*

4 Beltrami

L'edició de les obres completes de Beltrami comença amb una ressenya biogràfica feta per Luigi Cremona. Fem-ne un breu resum.

Eugenio Beltrami va néixer a Cremona el 16 de novembre de 1835. El seu pare va participar als moviments polítics del 48 i es va haver d'exiliar, motiu pel qual el seu avi patern, reconegut pels seus gravats en pedra, els mantenia a la seva mare i a ell.

Estudia Matemàtiques a la Universitat de Pavia (1853-56), però abandona els estudis abans de fer els exàmens finals per llicenciar-se. L'expulsen del col·legi on s'ospedava acusat de promoure desordres en contra del rector. Això, junt amb la la mort de l'avi, va fer que Beltrami es veies obligat a deixar la vida universitària i es posés a treballar.

Descobreix aquests anys la seva veritable vocació i refà del tot la seva educació científica, estudiant pel seu compte les diferents disciplines matemàtiques. La seva intenció de trobar una feina com a professor d'ensenyament secundari, més afí a la seva vocació, es veu obstaculitzada per no haver fet els exàmens de la llicenciatura. Va ser gràcies a dues memòries que va publicar als Annali di Matematica, que Brioschi (llavors secretari general del Ministeri d'Instrucció)[6] es va fixar en ell i va fer que l'anomenessin per decret professor extraordinari d'àlgebra complementària i Geometria Analítica a la Universitat de Bologna, l'any 1862.

Per aquesta època sembla que s'està estudiant el *Disquisitiones* de Gauss, ja que en una carta al Professor B. Tortolini, *Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie* li dóna una fórmula simple per calcular els radis de curvatura d'una superfície.

Un any més tard, E. Betti li ofereix la càtedra de geodèsica a la universitat de Pisa a la que s'incorpora l'any 1864.

Els anys a Pisa el porten a l'estudi de les superfícies segons les directrius de Gauss i especialment en la teoria matemàtica de les cartes esfèriques. Durant aquests temps, la seva amistat amb Betti es fa més estreta i té la oportunitat de freqüentar Riemann, que havia fixat allà la seva residència per qüestions de salut. Tots dos personatges seran una gran influència per ell.

4.1 Beltrami i la Geometria no euclidiana

La relació de Beltrami amb la geometria no euclidiana apareix en el *Saggio* on estudia el cas de dimensió 2 (i diu que els resultats no es poden generalitzar a dimensions superiors)

[6]El famós viatge de Brioschi, Casorati i Betti a Gottingen considerat com els inicis de la connexió de la matemàtica italiana amb Europa.

i en *Teoria Fondamentale*, on generlaitza els resultats del *Saggio* a dimensions superiors. Es veu clarament la ma de Riemann que va pssar un temps a Italia per raons de salut (Beltrami retroba fómules donades per Riemann sense demostració en la seva famosa lectura sobre els fonaments de la geometria) per poder passar els resultats del pla a dimensions arbitràries.

Començarem comentant primer l'article precursor del *Saggio*, el *Riportare i punti di una superficie sopra un piano* [A29]

Ricerche di analisi applicata alla geometría

En aquest article de 1864 Beltrami generalitza a superfícies els *paràmetres diferencials* de Lamé. Avui no parlarem de Lamé ni dels seus paràmetres, només per tenir una idea diguem que si denotem per E, F, G els coeficients de la primera forma fonamental d'una superfície en coordenades u, v i $\Phi = \Phi(u, v)$ és una funció sobre aquesta superfície (sobre l'espai de paràmetres), l'expressió

$$\Delta_1 \Phi = \frac{E(\frac{\partial \Phi}{\partial v})^2 - 2F\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + G(\frac{\partial \Phi}{\partial u})^2}{EG - F^2} \tag{2}$$

és un *paràmetre diferencial de primer ordre.*

Que aquesta expressió sigui un paràmetre diferencial vol dir que és invariant en front dels canvis de coordenades sobre la superfície.

Però comento aquest article per que en ell apareix la fórmula per a les geodèsiques que després utilitza en el Riportare, [A29], i que va ser la base del model de Beltrami de la geometria no euclidiana en el *Saggio*, [A31].

Aquesta fórmula és (el terme de la dreta és la curvatura geodèsica que actualment s'escriu usant símbols de Christoffel)

$$\begin{aligned} 0 &= (EG - F^2)(du\, d^2 v - dv\, d^2 u) \\ &+ (Edu + Fdv)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)du^2 + \frac{\partial G}{\partial u}du\, dv + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2\right] \\ &- (Fdu + Gdv)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv^2 + \frac{\partial E}{\partial v}du\, dv + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2\right] \end{aligned} \tag{3}$$

Càlcul de la curvatura geodèsica

Repeteixo el càlcul que segur que heu fet a teoria per trobar una fórmula per a la curvatura geodèsica. Suposo conegut que

$$k_g = \det(\nu, \gamma', \gamma'')$$

manera curta d'expressar que la curvatura de la corba $\gamma(s)$ (parametritzada per l'arcarc) és

$$k_g(s) = \det(\nu(\gamma(s)), \gamma'(s), \gamma''(s))$$

on ν és el vector unitari normal a la superfície.

Sigui (U, φ) una parametrització de la superfície i posem $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$. Llavors tenim

$$\gamma'(s) = \varphi_u u' + \varphi_v v'$$

amb $\varphi_u = \varphi_u(u(s), v(s))$, etc. Per tant,

$$\begin{aligned}
\gamma''(s) &= \frac{d}{ds}(\varphi_u u' + \varphi_v v') \\
&= \varphi_u u'' + \varphi_v v'' + \varphi_{uu} u'^2 + 2\varphi_{uv} u' v' + \varphi_{vv} v'^2. \\
&= \varphi_u u'' + \varphi_v v'' + (\Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + e\nu) u'^2 + 2(\Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + f\nu) u' v' \\
&+ (\Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + g\nu) v'^2 \\
&= \varphi_u(u'' + \Gamma^1_{11} u'^2 + 2\Gamma^1_{12} u' v' + \Gamma^1_{22} v'^2) \\
&+ \varphi_v(v'' + \Gamma^2_{11} u'^2 + 2\Gamma^2_{12} u' v' + \Gamma^2_{22} v'^2) \\
&+ \nu(e u'^2 + 2 f u' v' + g v'^2)
\end{aligned} \tag{4}$$

amb $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(u(s), v(s))$, etc.

Òbviament Beltrami no utillitza la notació de símbols de Christoffel que s'introduiren més tard.

Escriurem doncs

$$\gamma''(s) = A\varphi_u + B\varphi_v + C\nu, \tag{5}$$

amb

$$\begin{aligned}
A &= u'' + u'^2\Gamma^1_{11} + 2u'v'\Gamma^1_{12} + v'^2\Gamma^1_{22} \\
B &= v'' + u'^2\Gamma^2_{11} + 2u'v'\Gamma^2_{12} + v'^2\Gamma^2_{22} \\
C &= II(\gamma', \gamma')
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
k_g &= \det(\nu, \gamma', \gamma'') = \det(\nu, u'\varphi_u, B\varphi_v) \\
&+ \det(\nu, v'\varphi_v, A\varphi_u) \\
&= (u'B - v'A)\det(\nu, \varphi_u, \varphi_v)
\end{aligned}$$

Per resultats que heu vist a teoria aquesta fórmula es pot escriure com

$$k_g = \sqrt{EG - F^2}(u'B - v'A) \tag{6}$$

Per tant una corba és geodèsica si i només si $u'B - v'A = 0$.

Si organitzem el terme $u'B - v'A$ en funció de $u'^3, u'^2 v', u' v'^2, v'^3$ tenim

$$\begin{aligned}
u'B - v'A &= u'^3(\Gamma^2_{11}) \\
&+ v'^3(-\Gamma^1_{22}) \\
&+ u'^2 v'(2\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}) \\
&+ u' v'^2(\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12}) \\
&+ u' v'' - v' u''
\end{aligned} \tag{7}$$

Aquestes són les equacions que obté Beltrami a *Ricerche di analisi applicata alla geometría* que usarà en el *Riportari* i com a conseqüènia en el *Saggio*.

Riportare i punti di una superficie sopra un piano

A l'article *Risoluzione del problema: "Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette "*, es preocupa de les cartes geogràfiques, és a dir, dels mapes. Comenta que normalment es fan conservant angles o relacions d'àrea. Però que per segons quin tipus de problema relacionats amb la distància sembla més natural considerar aplicacions que portin geodèsiques a rectes, com passa amb la projecció central de l'esfera.

Aquest problema havia estat detalladament proposat per Lagrange el 1779 a *Sur la construction des cartes géographiques*, [A327]. Diu Lagrange:

> Au reste des Cartes géographiques construites d?après cette projection auraient le grand avantage que tous les lieux de la Terre, qui sont situés dans un même grand cercle du globe, se trouveraient placés en ligne droite dans la Carte; en sorte que, pour avoir le plus courte chemin d?un lieu de la Terre a l?autre, il n?y aurait qu?à joindre ces deux lieux dans la Carte par une ligne droite.

A continuació redueix el problema proposat a resoldre un sistema de quatre equacions en derivades parcials que involucren els coeficients de la mètrica.

Comença observant que si l'element de longitud que estem buscant és

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

on (u, v) són les coordenades desconegudes respecte de les quals les geodèsiques són rectes, amb $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$ i $G = G(u, v)$, llavors els coeficients de $u'^3, u'^2v', u'v'^2, v'^3$ de la fórmula (3) de les geodèsiques, que hem recordat a la pàgina 10, han de ser zero.

Això es així ja que si acceptem com hipòtesi que una corba $(u(s), v(s))$ és geodèsica si i només si existeix una relació lineal entre $u(s)$ i $v(s)$, és a dir, $au + bv + c = 0$, això vol dir que l'equació de les geodèsiques es reduiex a $u'v'' - v'u'' = 0$. En efecte, derivant dos cops $au + bv + c = 0$ veiem que ha de ser $u'v'' - v'u'' = 0$ o $a = b = 0$, ja que el determinat del sistema

$$\begin{aligned} au' + bv' &= 0 \\ au'' + bv'' &= 0 \end{aligned}$$

s'ha d'anul·lar. Integrant llavors l'equació $u'v'' - v'u'' = 0$, que equival a

$$\frac{u''}{u'} = \frac{v''}{v'},$$

obtenim $\ln u' = \ln kv'$ i per tant $u = kv + c$.

Per tant, perquè l'equació de les geodèsiques (3) es redueixi a $u'v'' - v'u'' = 0$ s'han d'anular els coeficients de $u'^3, u'^2v', u'v'^2, v'^3$, com hem dit abans. Això és degut a que l'equació de les geodèsiques que provè d'igualar a zero l'equació (7), usant que $u'^3 = k^3v'^3, u'^2v' = k^2v'^3, u'v'^2 = kv', v'^3 = v'^3$, es transforma en un polinomi de trerer grau en k que com ha des ser 0 per tota k implica que els coeficients són zero.

Concretament amb la notació de la fórmula (7)

$$u'B - v'A = \left[\Gamma^2_{11}k^3 + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11})k^2 + (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^2_{12})k - \Gamma^2_{22}\right] v'^3$$

Concretament, Beltrami escriu

$$\begin{aligned}
E(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v})-\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} &= 0\\
E\frac{\partial G}{\partial u}+F(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v})-F\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} &= 0,\\
G\frac{\partial E}{\partial v}+F(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u})-F\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} &= 0,\\
G(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u})-\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} &= 0.
\end{aligned}$$

que no són més que les fórmules (7) explicitant el valor dels símbols de Christoffel.

Amb moltes dificultats i moltíssima astúcia Beltrami és capaç de resoldre aquest sistema d'equacions en derivades parcials.[7]

$$\boxed{\begin{aligned}
E &= \frac{R^2(v^2+a^2)}{(u^2+v^2+a^2)^2}\\
F &= \frac{-R^2uv}{(u^2+v^2+a^2)^2}\\
G &= \frac{R^2(u^2+a^2)}{(u^2+v^2+a^2)^2}
\end{aligned}}$$

Veu ara que aquesta mètrica té curvatura constant $1/R^2$. I acaba l'article dient:[8]

> «Le sole superficie suscettibili di essere rappresentate sopra un piano, in modo che ad ogni punto corrisponda un punto e ad ogni linea geodetica una linea retta, sono quelle la cui curvatura è dovunque costante (positiva, negativa o nulla). Quando questa curvatura costante è nulla, la legge di corrispondenza non differisce dall'ordinaria omografia. Quando non è nulla, questa legge è riducibili alla projezione centrale nella sfera ed alle sue transformazioni omografiche».
>
> *Les úniques superfícies que es poden representar en un pla, de manera que cada punt correspon a un punt i a cada recta geodèsica una recta, són aquelles la curvatura de les quals és constant a tot arreu (positiva, negativa o zero). Quan aquesta*

[7] Per que ens fem una idea comença observant que les equacions primera i quarta es poden escriure com

$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{F}{\sqrt{E}})=\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E}),\quad \frac{\partial}{\partial v}(\frac{F}{\sqrt{G}})=\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G})$$

que equival a dir que les formes

$$\frac{1}{\sqrt{E}}(Edu+Fdv),\frac{1}{\sqrt{G}}(Fdu+Gdv),$$

són diferencials exactes, etc etc.

[8] La'rticle comença dient *Les meves investigacions m'han conduït a reconèixer que el problema (de Lagrange) no admet una solució general i que el cas de la projecció central de l'esfera és essencialment l'únic cas en que es pot fer això. La singularitat d'aquest resultat (la curvatura constant) em va semblar capaç de justificar la publicació de les meves investigacions encara que s'ha demostrat que és impossible assolir plenament el propòsit per al qual es van iniciar.*

curvatura constant és zero, la llei de correspondència no difereix de l'homografia ordinària. Quan no és zero, aquesta llei és reductible a la projecció central en l'esfera (projectar l'esfera sobre un pla des del centre de l'esfera) i a les seves transformacions homogràfiques.

I sense cap comentari sobre geometria no euclidiana. [9]

És en el *Saggio* on observa que aquesta mètrica el porta a la geometria hiperbòlica només canviant les dues constants que hi apareixen, R i a, per Ri i ai respectivament, és a dir, canviant R^2 per $-R^2$ i a^2 per $-a^2$.

Observem que en canviar a^2 per $-a^2$ el denominador només està definit a l'interior (o exterior) del disc de radi a, és el disc de Beltrami, model clàssic de la geometria no euclidiana.

Textual del *Saggio*, final de la Nota 1, que comentem a continuació:

> «Ma siccome i valori delle costanti R ed a sono realmente arbitrari, così è lecito supporli anche immaginarî, se conviene. Ed infatti cambiando quelle costanti in$R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, l'elemento lineare risultante corrisponde ad una superficie di curvatura costante negativa $-1/R^2$, le cui linee geodetiche non cessano di essere, come nel caso precedente, rappresentate nel piano da linee rette, e quindi date da equazioni lineari rispetto ad u, v».

> *Però com que els valors de les constants R i a són realment arbitraris, és lícit suposar-los imaginaris si és convenient. I de fet canviant aquestes constants en $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, l'element lineal resultant correspon a una superfície de curvatura negativa constant $-1/R^2$, les línies geodèsiques de la qual no deixen d'estar, com en el cas anterior, representades en el pla per rectes, i per tant donades per equacions lineals respecte a u, v.*

El Saggio

Potser l'article més important de Beltrami, i un dels més citats, és el conegut com el *Saggio*, pel seu títol *Saggio di interpetrazione della geometria non-euclidea*. Comença comentant que les noves idees de les geometries no euclidianes s'estan imposant en el món matemàtic. Cita a Gauss i comenta que de les cartes de Gauss es desprèn l'acceptació total per part d'aquest a les idees de Lobachevsky. Tal era l'autoritat matemàtica de Gauss: si ell ho acceptava no calia pas continuar discutint.

A continuació fa l'error de pensar que tot el que ell ha fet en aquest article en dimensió 2 no es pot generalitzar a dimensió superior. Diu: «Crediamo d'aver raggiunto questo intento per la parte planimetrica di quella dottrina, ma crediamo impossibili raggiungerlo in quanto al resto». És curiós que la dimensió tres explícitament no apareix pas a la versió italiana.[10]

Passem a comentar breument les sis seccions d'aquest article.

Secció I. Comença dient que el criteri fonamental de les demostracions de la Geometria Elemental consisteix en la *superposició de figures iguals*.Tot i que ell no ho diu això fa pensar directament en Klein i els seus grups de moviments[11]. Parla de geometria esfèrica per

[9]Carta D'Ovidio (profe de Peano): és precisament per aquesta via que he entrat sense voler-ho i quasi sense saber-ho, en les doctrines de Lobatxevski[...]. 1872.

[10]A la famosa traducció de Hoüel diu: «Mais il nous semble impossible d'y parvenir dans le cas de trois dimensions».

[11]Beltrami va mantenir molt bona relació amb Felix Klein. A l'article de Rossana Tazzioli, es reprodueixen 3 cartes de Beltrami a Klein dels anys 1883, 1885 i 1888, que tot i ser doncs molt posteriors al Saggio es veu en elles que ja hi havia una relació previa entre ells i les seves famílies.

remarcar l'existència de geometries no-euclidianes. Comenta que el principi de superposició porta a considerar superfícies de curvatura constant. Compara la situació dels pols de l'esfera (que no determinen una única geodèsica) amb lamsituació en curvatura constant negativa. Es pregunta explícitament si en aquestes superfícies pot passar que dos punts no determinin un única geodèsica. I diu: «Questa quistioni non è, per quel ch'io sappia, ancora stata esaminata».

Secció II. Comença amb la fórmula de la mètrica de curvatura constant negativa

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)du^2 + 2uv\,du\,dv + (a^2 - u^2)dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2},$$

i remet al lector a una nota al final de l'article on explica que aquesta mètrica prové del problema de desenvolupar una superfície sobre un pla de tal manera que les geodèsiques vagin a parar a línies rectes. Diu explícitament que les geodèsiques d'aquest disc són les cordes del *cercle límit.* Calcula la distància ρ d'un punt (u, v) a l'origen del disc $(0,0)$:

$$\rho = \frac{R}{2} \ln \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}}. \tag{8}$$

Per això només cal substituir a l'anterior expressió de ds^2

$$\begin{aligned} u &= r\cos(\mu) \\ v &= r\sin(\mu) \\ du &= \cos(\mu)dr \\ dv &= \sin(\mu)dr \end{aligned}$$

que prové de posar (u, v)en polars, amb μ constant.

Substitució directa dóna

$$ds^2 = R^2 \frac{a^2}{(a^2 - r^2)^2}$$

que integrant dóna

$$\rho = d((0,0),(u,v)) = \int_0^r R \frac{a}{a^2 - x^2} dx = \frac{R}{2} \ln \frac{a + r}{a - r} \tag{9}$$

com dèiem a (8).

Observem que (9) es pot escriure com

$$r = a(\tanh \frac{\rho}{R}) \tag{10}$$

També calcula la longitud de la circumferència. Per a això repeteix el canvi a polars anteriors però suposant ara r constant.

$$\begin{aligned} u &= r\cos(\mu) \\ v &= r\sin(\mu) \\ du &= -r\sin(\mu)d\mu \\ dv &= r\cos(\mu)d\mu \end{aligned}$$

que substituint dóna

$$ds^2 = R^2 \frac{r^2}{a^2 - r^2} d\mu^2$$

equivalentment, substituint el valor de r en funció de ρ

$$ds^2 = R^2 \sinh^2(\frac{\rho}{R}) d\mu^2$$

i, per tant, la longftud de la circumferència de radi ρ és

$$L = 2\pi R \sinh(\frac{\rho}{R}).$$

Acaba veient que a l'interior del disc amb aquesta mètrica dos punts qualssevol determinen una única geodèsica responent així a la pregunta que ell mateix s'havia formulat a la Secció I. Pregunta molt important ja que vol dir que l'axiomàtica d'Euclides (dos punts determinen una única recta) s'aplica aquí millor que a l'esfera.

Secció III. Estudia els triangles geodèsics. Acaba fent referència a la carta de Gauss a Schumaker, de 12 de juliol de 1831, en la que li diu que el semiperímetre d'un cercle no euclidià de radi ρ està donat per

$$\frac{1}{2}\pi k(e^{\rho/k} - e^{-\rho/k}),$$

on k és una constant. Explica que Gauss diu que aquesta constant pot ser determinada per l'experiència però que des del seu punt de vista no és altre cosa que el radi de la seva superfície pseudo-esfèrica.

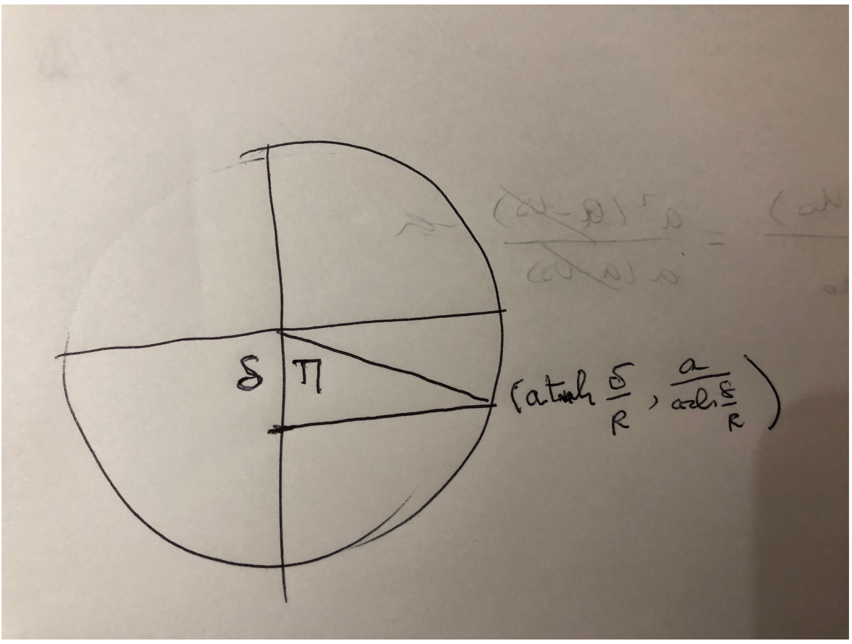
Secció IV. Angle de paral·lelisme. Primer demostra [Ho fa en la Nota II, al final de l'article] que existeix una isometria del disc que porta un punt (u_0, v_0) (coordenades euclidianes) al $(0,0)$. Per això observa que simplement per rotacions, que són clarament isometries, pot porta aquest punt al $(u_0, 0)$. Després veu, amb arguments intel·ligents, que l'aplicació

$$(u, v) \longrightarrow \left(\frac{a^2(u - u_0)}{a^2 - uu_0}, \frac{a\sqrt{a^2 - u_0^2}\, v}{a^2 - uu_0} \right)$$

és la isometria buscada. Observem que efectivament $(u_0, 0) \longrightarrow (0,0)$ i que la bora queda fixa $(a, 0) \longrightarrow (a, 0)$. És un càlcul veure que és isometria.

Això permet calcular l'angle de paral·lelisme suposant que el punt exterior a la recta des del qual es tracen les paral·leles és el $(0,0)$.

Prenem com geodèsica la recta $y = a\tanh(\frac{\delta}{R})$ és a dir la geodèsica a distància hiperbòlica δ de l'origen (fórmula (10)).



Aquesta recta talla la circumferència $x^2 + y^2 = a^2$ en un punt d'abscissa[12]

$$x = \sqrt{a^2 - a^2 \tanh^2(\frac{\delta}{R})} = \frac{a}{\cosh(\frac{\delta}{R})}$$

Ara observem que la paral·lela hiperbòlica a la geodèsica donada és la recta $y = mx$ amb m determinada per la condició de que aquesta recta ha de passar pel punt de l'infinit que acabem de trobar $(a\tanh(\frac{\delta}{R}), \frac{a}{\cosh(\frac{\delta}{R})})$

Això diu directament (el model no és conforme però a l'origen sí)

$$\tan\Pi = \frac{1}{\sinh(\frac{\delta}{R})}$$

amb $\Pi = \Pi(\delta)$ l'angle de paral·lelisme que és la fórmula donada ja per Gauss, Lobatchevski i Bolyai per a l'angle del paral·lelisme.

També es pot escriure com

$$\Pi = 2\arctan e^{-\delta/R}.$$

Només s'ha de saber la formula de la tangent de l'angle meitat:

$$\tan(\frac{\Pi}{2}) = \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2(\Pi)}}{\tan\Pi}$$

que substituint dóna

$$\tan(\frac{\Pi}{2}) = \cosh(\delta/R) - \sinh(\delta/R) = e^{-\delta/R}.$$

Fa trigonometria i obté les mateixes fórmules que Lobachevsky. Per exemple, per a un triangle de costats a, b, c i angles oposats A, B, C obté

$$\cos A \cos\Pi(a)\cos\Pi(c) + \frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)} = 1,$$

[12]Einstein el 1949 parlant del seu treball de 1908 (justificar els anys que varen passar): No és fàcil lliurar-se de la idea de que les coordenades han de tenir un significat mètric immediat.

on $\Pi(a)$ és l'angle de paral·lelisme de a, etc. Diu: «Il risultati precedenti ci sembrano manisfestare pienamente la corrispondenza vigente fra planimetria non-euclidea e la geometria pseudoesfèrica». És a dir, que pels seus mètodes (geometria pseudoesfperica) s'arriba al mateix lloc que pel mètode axiomàtic de Lobachevsky (planimetria no euclidiana).

Per reforçar aquesta coincidència encara més calcula pels seus mètodes l'àrea d'un triangle i troba, com ha de ser, que és el defecte pel radi al quadrat.

Troba també la fórmula de l'angle de paral·lelisme i diu que coincideix amb la obtinguda per Battaglini.

Secció V. Estudia les circumferències geodèsiques. Les utilitza per introduir les coordenades polars geodèsiques (ρ, φ), respecte de les quals la mètrica de la Secció 2 s'escriu com

$$ds^2 = d\rho^2 + (R \sinh \frac{\rho}{R})^2 \, d\varphi^2.$$

A continuació observa que, com li passa a Lobachevsky, *tres punts no alineats poden no determinar una circumferència.* Introdueix així els *horocicles*, trajectòries ortogonals a feixos de geodèsiques paral·leles. Calcula la seva equació considerant punts ideals, és a dir, punts exteriors al disc model.

Secció VI. Comença insistint en un fet que és ja evident: *Da quanto precede ci sembra confermata in ogni parte l'annunciata interpetrazione della planimetria non-euclidea per mezzo delle superficie di curvatura costante negativa.* I insisteix en el seu error sobre la dimensió 3: *La natura stessa di questa interpetazione lascia facilmente prevedere che non ne può esistere una analoga, egualmente reale, per la stereometria non-euclidea.* En un altre punt més endavant diu que no pretén provar que això sigui absolutament impossible sinó que només diu que li sembla molt inversemblant: *dicimo solo che la cosa ci sembra molto improbabile.*

La intervenció de Riemann es veu molt clarament en l'article següent.

Teoria Fondamentale degli spazii di curvatura costante

Beltrami comença dient que aquesta memòria *Teoria Fondamentale degli spazii di curvatura costante*, és fruit del seu treball sobre geodèsiques expressables com equacions lineals, i del treball de Riemann *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen.* No dóna interpretacions geomètriques sinó només construccions analítiques. Comença dient que si considerem sobre la semiesfera

$$x^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2, \quad x > 0,$$

la mètrica[13]

$$ds^2 = R\frac{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{x},$$

llavors les geodèsiques tenen equacions lineals. De fet són seccions de la semiesfera amb plans verticals. Si projectem sobre l'equador obtenim el model 'disc', que vol dir que sobre el disc $x_1^2 + \cdots + x_n^2 < a^2$ hi tenim la mètrica que s'obté eliminat x entre les dues equacions anteriors. Com diu Stillwell, Beltrami no fa aquesta restricció al disc presumiblement perquè porta als mateixos resultats obtinguts el 1868.

[13]Avui coneguda com mètrica de Poincaré

Troba la distància ρ entre els punts de coordenades $(x_1,\ldots,x_n)$ i $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ (la $n+1$ coordenada queda determinada per l'equació de l'esfera)

$$\cosh\frac{\rho}{R}=\frac{a^2-x_1x_1^0-\cdots-x_nx_n^0}{\sqrt{(a^2-x_1^2-\cdots-x_n^2)(a^2-x_1^{0^2}-\cdots-x_n^{o^2})}}. \tag{11}$$

Per projecció estereogràfica de l'hemisferi nord de l'esfera sobre el seu pla tangent horitzontal obté unes noves coordenades respecte de les quals la mètrica s'escriu com

$$ds=\frac{\sqrt{d\xi_1^2+\cdots+d\xi_n^2}}{1-\frac{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}{4R^2}}$$

i diu que aquesta forma d'escriure la mètrica és la donada per Riemann, sense demostració, a la seva famosa memòria.

Aquesta mètrica és la que posteriorment tothom coneix com mètrica de Poincaré del disc, però aquest article de Beltrami és de 14 anys abans. Com diu Stillwell, potser Beltrami és la baula perduda entre Riemann i Poincaré.

Dóna encara un altre canvi de coordenades per obtenir expressions enunciades sense demostració per Riemann i que corresponen al model semiespai. Després de consideracions generals sobre la possibilitat de sobreposar figures, punt clau de la geometria Euclidiana, diu: «Si può verificare che la teoria di Lobatschewski coincide, salvo nei nomi, colla geometria dello spazio a tre dimensioni di curvatura costante negativa». Proposa anomenar *pseudoesfèrica* a la geometria no Euclidiana.

En el comentari que fa Stillwell d'aquest treball a diu: "Per una de les injustícies de la nomenclatura tan freqüents en matemàtiques, els tres models — que apropiadament s'haurien de dir Riemann-Beltrami, Liouville-Beltrami[14] i Cayley-Beltrami — es coneixen usualment com el model disc de Poincaré, el semiplà de Poincaré i el model disc de Klein."

[14]Liouville ja havia considerat el 1850 una mètrica de curvatura constant, en dimensió 2. De fet, construeix la pseudoesfera fent girar la tractiu. .