

## Geometría inversiva<sup>1</sup>

por

**A. Reventós Tarrida**

Presentamos una de estas herramientas tan potentes de que dispone la matemática, que nos permiten resolver problemas que, sin ellas, serían muy difíciles. Con las inversiones resolveremos el ‘porisma’ de Steiner y el problema de Apolonio. Además veremos que las inversiones están presentes en muchos sitios, a menudo de una manera injustamente olvidada, como por ejemplo en variable compleja, cónicas, geometría proyectiva, etc.

### 1 INTRODUCCIÓN

La carrera de Matemáticas es parecida al aprendizaje de un oficio. Pongamos por ejemplo un carpintero. Antes de realizar un trabajo, el carpintero debe reflexionar y planificar lo que debe hacer y pensar en la mejor manera de hacerlo. Pero posteriormente, en la fase de ejecución, necesitará herramientas adecuadas que le ayuden en la realización del proyecto, como grandes sierras, etc. En matemáticas pasa algo similar, hay una parte teórica de reflexión y planificación pero posteriormente hemos de usar herramientas poderosas, y para ello, evidentemente, primero hay que conocerlas. Durante la carrera de Matemáticas se nos enseñan diversas de estas herramientas, como por ejemplo, técnicas de integración y derivación, combinatoria, cálculo matricial, etc.

En este artículo presentamos una de estas herramientas: las inversiones. Intentaremos destacar su gran utilidad así como su presencia, a veces oculta, en diversas partes de la matemática. Después de unas secciones dedicadas a recordar definiciones y propiedades más notables, secciones 2 y 3, veremos su relación con la geometría proyectiva y las cónicas en las secciones 4 y 5.

Las inversiones nos permiten hablar de una distancia ‘natural’ entre circunferencias, secciones 8 y 9. Es decir que podremos pensar cada circunferencia como un punto de un cierto espacio en el que hay una distancia, ¡qué será justamente hiperbólica! Esto lo haremos en la sección 13.

Consideraremos además problemas, como el de Apolonio en la sección 11, muy famosos y complicados en su día, del que se dieron demostraciones

---

<sup>1</sup>Conferencia pronunciada el 6.2.02 en el marco de las “Trobades UAB - Secundària”, organizadas por Gregori Guasp Balaguer, a quien agradezco la invitación. Agradezco también a Gil Solanes Farrés, que participó en la conferencia con proyecciones de dibujos con Sketchpad, y a Eduardo Gallego Gómez, su colaboración en la preparación de estas notas.

realmente brillantes (la de Gergonne se puede encontrar por ejemplo en [8]) que, exagenerado un poco, se resuelven fácilmente con un par de inversiones. Veremos que esto sucede también en el llamado porisma de Steiner, en la sección 10.

En problemas de construcciones geométricas como los anteriores sucede a menudo que el método analítico (el que utiliza coordenadas en el plano, introducido independientemente por Descartes y Fermat), imprescindible y tan potente en multitud de ocasiones, se complica mucho o esconde el porqué de las cosas detrás de cálculos mas o menos complicados. No queremos ser tan radicales como J. Steiner, que despreciaba el método analítico, pero sí queremos hacer propaganda a favor del método sintético, basado en razonamientos puramente geométricos, por su poder y belleza y porque normalmente enseña el porqué profundo de las cosas.

La importancia de las inversiones en el marco de la geometría euclidiana queda superado por la importancia de éstas en el marco de la geometría hiperbólica. En efecto, en este caso las inversiones son ¡ni mas ni menos que los *movimientos!* Tal vez sea por este motivo que el tema de las inversiones resurge actualmente debido al interés por la geometría hiperbólica en la geometría actual; sobre todo a partir de los trabajos de W. P. Thurston, ver por ejemplo [13].

Hablando de geometría y movimientos no podemos dejar de comentar el punto de vista de F. Klein. Recordemos muy brevemente que para F. Klein, en su programa de Erlangen, cada geometría es el estudio de las propiedades de las figuras invariantes por un “grupo de movimientos”.

Por ejemplo la geometría euclidiana es el estudio de las propiedades de las figuras invariantes por transformaciones que conservan la distancia euclidiana usual. Estas transformaciones se llaman movimientos euclidianos. Análogamente, la geometría hiperbólica no es mas que el estudio de las propiedades de las figuras invariantes por cierto tipo de inversiones. Estas transformaciones se llaman movimientos hiperbólicos y se estudian en la sección 13. Si se consideran todas las inversiones se obtiene la llamada geometría inversiva, comentada en la sección 12.

Una de las propiedades fundamentales de las inversiones es que conservan ángulos, es decir son aplicaciones conformes. ¡Pero ésta es también la propiedad fundamental de las aplicaciones holomorfas! Por tanto las inversiones aparecen de manera natural en variable compleja, como se comenta en la misma sección 12.

## CONTENIDOS

1	INTRODUCCIÓN	39
2	INVERSIONES: UNA HERRAMIENTA PODEROSA	42
3	PROPIEDADES DE LAS INVERSIONES	43
3.1	INVERSOR DE PEAUCELLIER . . . . .	50
4	INVERSIONES Y GEOMETRÍA PROYECTIVA	51
5	INVERSIONES Y CÓNICAS	52
6	EL CONO COMO INVERSOR APROXIMADO	54
7	INVERSIÓN QUE PONE CONCENTRÍCAS A DOS CIRCUNFERENCIAS DADAS	55
7.1	PUNTOS MÁGICOS . . . . .	57
8	PRODUCTO INVERSIVO DE CIRCUNFERENCIAS	58
9	DISTANCIA INVERSA ENTRE CIRCUNFERENCIAS	60
9.1	DISTANCIA INVERSIVA EN FUNCIÓN DE LOS RADIOS Y DISTANCIA ENTRE CENTROS. RELACIÓN DISTANCIA-PRODUCTO . . . . .	61
10	PORISMA DE STEINER	62
10.1	PORISMA DE STEINER EN EL CASO $n = 3$ . . . . .	64
10.2	PORISMA DE STEINER EN EL CASO $n = 3$ . . . . .	66
11	EL PROBLEMA DE APOLONIO	67
11.1	CIRCUNFERENCIA TANGENTE A DOS CIRCUNFERENCIAS DADAS Y QUE PASA POR UN PUNTO DADO . . . . .	68
11.2	EL PROBLEMA DE APOLONIO, CONSTRUCCIÓN FINAL . . . . .	69
12	GEOMETRÍA INVERSIVA	70
12.1	SIMETRÍA EUCLIDIANA COMO INVERSIÓN RESPECTO UNA CIRCUNFERENCIA POR EL PUNTO DEL INFINITO . . . . .	73
13	GEOMETRÍA HIPERBÓLICA	74
13.1	DISTANCIA ENTRE CIRCUNFERENCIAS: PUNTO DE VISTA HIPERBÓLICO	75

## 2 INVERSIONES: UNA HERRAMIENTA PODEROSA

DEFINICIÓN 1 Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ . Una inversión respecto  $\mathcal{C}$  es la transformación del plano que envía cada punto  $A$  al punto  $A'$  de la semirrecta  $OA$  tal que

$$OA \cdot OA' = r^2.$$

En vez de decir *inversión respecto una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$*  se habla también directamente de inversión de centro  $O$  y radio  $r$ , o inversión de centro  $O$  y potencia  $r^2$ .

La notación '*semirrecta  $OA$* ' quiere decir la semirrecta de origen  $O$  que contiene  $A$ . Para no cargar la notación y evitar confusiones con la expresión ' *$OA$* ' explicitaremos en cada caso si nos referimos a la *semirrecta  $OA$*  o a la *recta  $OA$* . Cuando el contexto asocia a esta notación ' *$OA$* ' un valor numérico nos referimos a la distancia entre los puntos  $O$  y  $A$ .

Observemos que la definición tiene sentido sólo cuando  $A \neq O$ , es decir que la podemos pensar como una transformación biyectiva del plano menos  $O$ . En otros contextos es mejor pensar que la imagen de  $O$  es el punto del infinito, pero esto supone introducir previamente este punto del infinito.

Obsérvese también que, de manera evidente, todo punto de la región interior a  $\mathcal{C}$  tiene por imagen un punto de la región exterior a  $\mathcal{C}$  y recíprocamente. Los puntos de  $\mathcal{C}$  son fijos.

La composición de una inversión con una simetría central respecto al centro de la circunferencia de inversión se conoce, en algunos textos, como inversión de potencia negativa.

## CONSTRUCCIÓN 2 Construcción geométrica de la inversión.

Sea  $A$  un punto interior a  $\mathcal{C}$ , como en la figura 1. Sea  $T$  uno de los puntos de la intersección de  $\mathcal{C}$  con la perpendicular a la recta  $OA$  desde  $A$ . En particular  $OT = r$ . Entonces el punto  $A'$ , intersección de la recta  $OA$  con la tangente a  $\mathcal{C}$  desde  $T$ , es el inverso de  $A$ . En efecto, los triángulos  $\triangle OAT$  y  $\triangle OTA'$  son semejantes, por ser rectángulos con un ángulo común, por tanto

$$\frac{OA}{r} = \frac{r}{OA'},$$

es decir  $OA \cdot OA' = r^2$ , como queríamos.

De hecho, es el teorema del cateto aplicado al triángulo rectángulo  $\triangle OTA'$ .

Si  $A$  es exterior, vale la misma construcción pero empezando por  $A'$  en vez de por  $A$ .

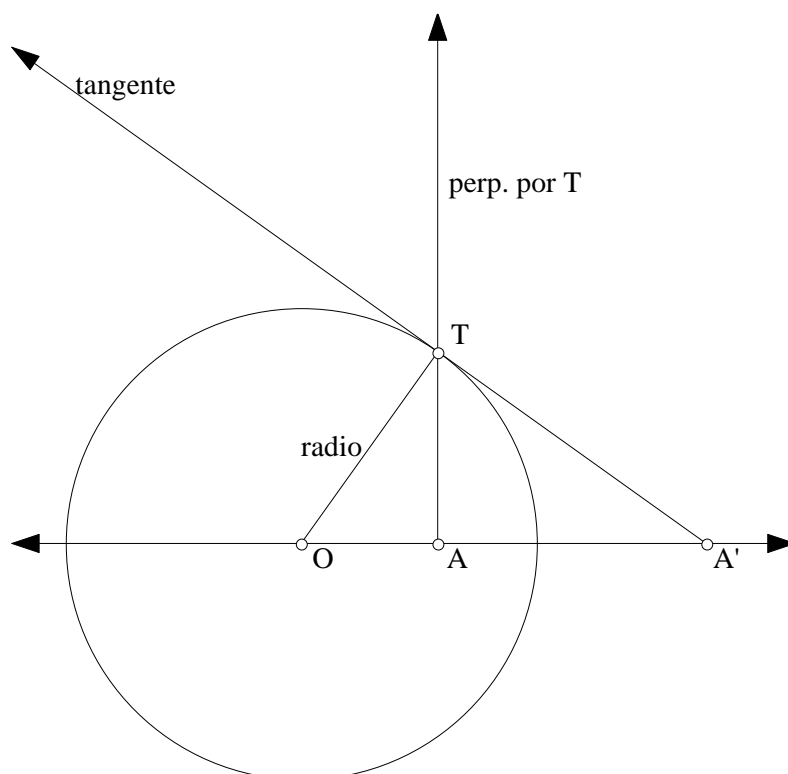


Fig. 1. Construcción de la inversión.

### 3 PROPIEDADES DE LAS INVERSIONES

Es claro que si  $A'$  es el inverso de  $A$  entonces  $A$  es el inverso de  $A'$ . De manera que tenemos

**PROPIEDAD 3** *Las inversiones son involutivas. Es decir, si  $\varphi$  es una inversión, entonces  $\varphi^2 = Id$ .*

Por *ángulo entre dos circunferencias* entendemos el ángulo que forman las tangentes a cada una de ellas en uno de los puntos de intersección, o equivalentemente el ángulo entre los radios en este punto. Es sabido que dos circunferencias o no se cortan, o tienen un punto en común o tienen dos puntos en común. En esta caso la definición de ángulo que acabamos de dar no depende de cual de los dos puntos comunes se considere. Si tienen un solo punto en común se llaman circunferencias tangentes y su ángulo es cero.

PROPIEDAD 4 Sean  $A$  y  $A'$  puntos inversos respecto a  $\mathcal{C}$ , y sea  $\mathcal{C}'$  cualquier circunferencia que pase por  $A$  y  $A'$ . Entonces  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  son ortogonales.

*Demostración.* Sea  $P$  uno de los puntos de intersección de  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$ , como en la figura 2. Por ser  $A$  y  $A'$  inversos respecto  $\mathcal{C}$  tenemos

$$OA \cdot OA' = OP^2,$$

donde  $O$  es el centro de  $\mathcal{C}$ . Ahora bien,  $OA \cdot OA'$  es la potencia de  $O$  respecto  $\mathcal{C}'$ , con signo positivo por ser  $O$  exterior a  $\mathcal{C}'$ . Por lo tanto,

$$OA \cdot OA' = OT^2,$$

donde  $T$  es el punto de intersección de la tangente a  $\mathcal{C}'$  desde  $O$  con  $\mathcal{C}'$ . Esto implica  $T \in \mathcal{C}$ , y por lo tanto el radio  $OT$  de  $\mathcal{C}$  coincide con la tangente a  $\mathcal{C}'$  desde  $O$ . Así, las circunferencias son ortogonales.  $\square$

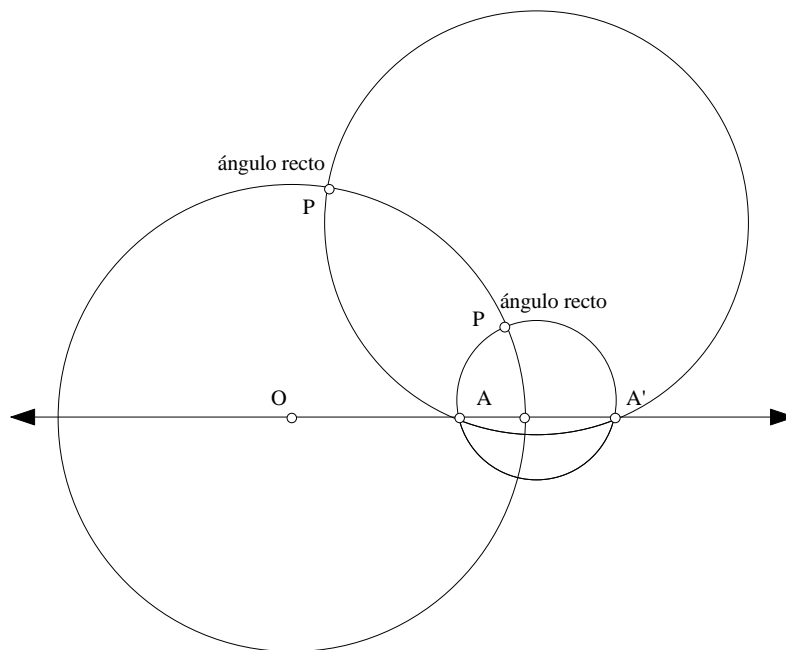


Fig. 2. Circunferencias ortogonales.

PROPIEDAD 5 Sean  $A'$  y  $B'$  puntos inversos respectivamente de  $A$  y  $B$  por una inversión respecto una circunferencia  $\mathcal{C}$  de centro  $O$ . Entonces

$$\angle OAB = \angle OB'A' \quad \text{y} \quad \angle OBA = \angle OA'B'.$$

En particular los puntos  $A, B, A'$  y  $B'$  son concíclicos, es decir están sobre una circunferencia.

*Demostración.* Es suficiente observar que la relación

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$$

se puede escribir como

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'},$$

y por lo tanto los triángulos  $\triangle OAB$  y  $\triangle OB'A'$ , que tienen un ángulo en común, son semejantes, ver figura 3. Así, los ángulos correspondientes son iguales, como queríamos demostrar.

Observemos que en particular tenemos

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Para ver que los puntos  $A, B, A'$  y  $B'$  están sobre una circunferencia, observemos que los ángulos  $\angle A'AB$  y  $\angle A'B'B$  son suplementarios, ya que  $\angle OAB = \angle A'B'B$ . Entonces, por la propiedad de los ángulos inscritos a una circunferencia, aplicada a la circunferencia determinada por  $A, A', B$ , ha de ser  $B' \in \mathcal{C}$ .  $\square$

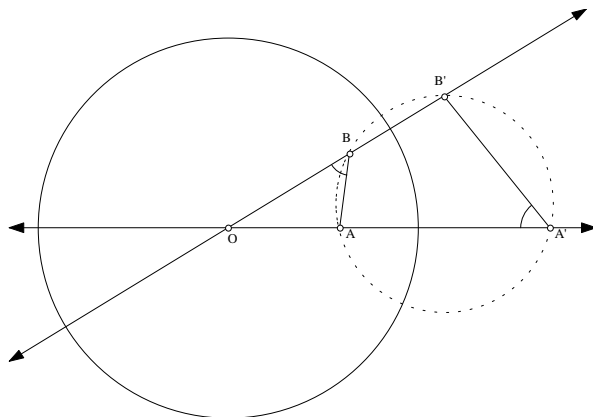


Fig. 3. Puntos concíclicos.

*Observaciones:*

- Por la propiedad 4, la circunferencia de inversión y la circunferencia determinada por  $A, A', B, B'$  son ortogonales.
- Si sabemos que por una inversión de centro  $O$ , un punto  $A$  se transforma en un punto  $A'$ , con  $O, A, A'$  conocidos, entonces podemos construir fácilmente el transformado de cualquier otro punto  $B$ , como intersección de la recta  $OB$  con la circunferencia determinada por  $A, A', B$ .
- Cualquier circunferencia que pase por un punto  $A$  y por su inverso  $A'$ , es invariante. Es decir, se transforma en ella misma por la inversión.

PROPIEDAD 6 *Las inversiones transforman circunferencias y/o rectas en circunferencias y/o rectas, según pasen o no por el centro de inversión. Concretamente:*

- a) *La imagen de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por este centro.*
- b) *La imagen de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que tampoco pasa por él.*
- c) *La imagen de una circunferencia que pasa por el centro de inversión, es una recta que no pasa por el centro.*
- d) *La imagen de una recta que pasa por el centro de inversión es ella misma.*

*Demostración.* Recordemos que el centro de inversión no tiene imagen y que, por tanto, cuando hablamos por ejemplo de la imagen de una circunferencia que pasa por el centro de inversión, queremos decir la imagen de todos los puntos de esta circunferencia menos el centro de inversión.

a) Sea  $s$  una recta que no pasa por el centro de inversión y sea  $A$  el pie de la perpendicular desde  $O$  a  $s$ , ver figura 4. Sea  $X$  un punto arbitrario de  $s$  y sean  $A'$  y  $X'$  respectivamente los inversos de  $A$  y  $X$ . Por la propiedad 5,  $\angle OAX = \angle OX'A'$ , y como el ángulo  $\angle OAX$  es recto,  $X'$  pertenece a la circunferencia de diámetro  $OA'$ . Como  $X$  es cualquiera, esto demuestra que la imagen de  $s$  está incluida en esta circunferencia. Análogamente se puede ver que cualquier punto de esta circunferencia tiene su inverso sobre  $s$ , excepto  $O$  que no tiene imagen.



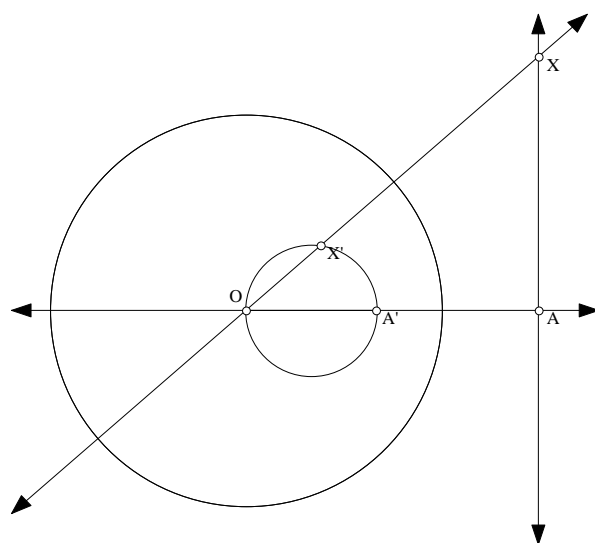


Fig. 4. Inversión de una recta.

b) Consideremos una circunferencia  $\mathcal{C}$  que no pasa por el centro de inversión. Sean  $A, B$  los puntos en que esta circunferencia corta a la recta que une su centro con el centro de inversión. Sean  $A', B'$  los inversos de estos puntos, como en la figura 5.

Tomamos un punto arbitrario  $X$  de  $\mathcal{C}$ . Por la propiedad 5 tenemos  $\angle XBA = \angle OX'B'$  y  $\angle XAB = \angle A'X'X$ . Como el ángulo  $\angle AXB$  es recto, por ser  $AB$  diámetro, ha de ser  $\angle A'X'B'$  recto, y  $X'$  pertenece a la circunferencia de diámetro  $A'B'$ . Como  $X$  es arbitrario, todo punto de  $\mathcal{C}$  tiene la imagen sobre esta circunferencia; y recíprocamente.

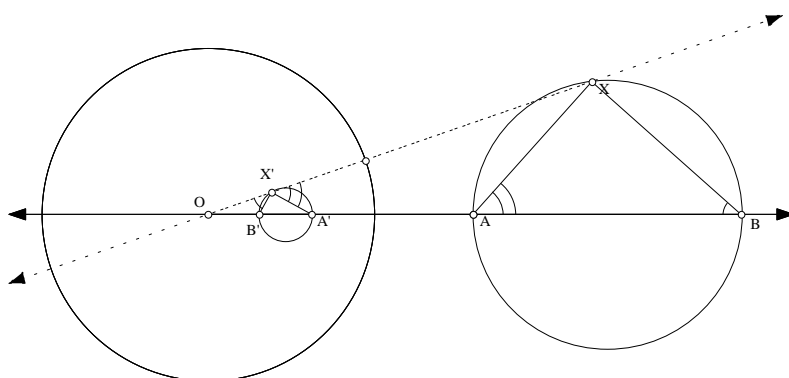


Fig. 5. Inversión de una circunferencia.

Observemos, no obstante, que el centro de la primera circunferencia no va a parar al centro de la segunda.

c) y d) son ahora consecuencia inmediata de ser las inversiones involutivas.  $\square$

PROPIEDAD 7 *Las inversiones conservan los ángulos.*

*Demostración.* Aceptaremos la idea intuitiva de que la tangente es la posición límite de las secantes.

Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia (o una recta), y sea  $A \in \mathcal{C}$ . Como la recta que pasa por  $A$  y por el centro de inversión  $O$  es fija, es suficiente demostrar que el ángulo entre esta recta y  $\mathcal{C}$  en el punto  $A$ , es el mismo que el ángulo entre esta recta y la inversa  $\mathcal{C}'$  de  $\mathcal{C}$  en el punto  $A'$  inverso de  $A$ .

Sea  $X$  un punto arbitrario de  $\mathcal{C}$  y sea  $X' \in \mathcal{C}'$  su inverso. Sea  $Y$  el punto de intersección de las rectas  $AX$  y  $A'X'$  (depende pues de  $X$ ). Sabemos, por la propiedad 5, que

$$\angle OX'A' = \angle OAX.$$

A partir de aquí tenemos, ver figura 6,

$$\angle OA'X' + \angle AOX = \angle YAO = \pi - \angle XAO$$

Por otra parte consideraremos que el ángulo entre la recta  $OA$  y la tangente por  $A$  es el ángulo adyacente al ángulo límite de  $\angle OAX$  cuando  $X$  se aproxima a  $A$ . Este ángulo se transforma por la inversión en el ángulo límite de  $\angle OA'X'$  cuando  $X'$  tiende a  $A'$ .

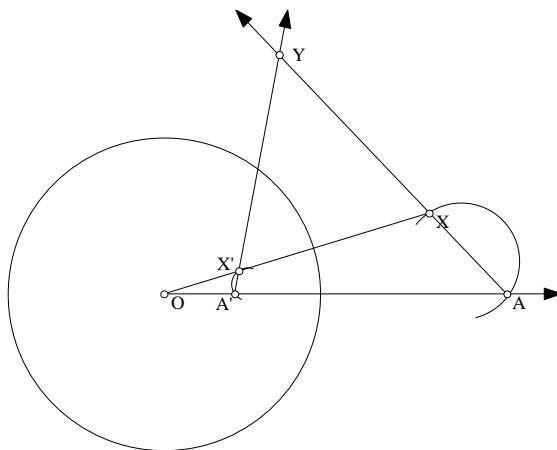


Fig. 6. Los ángulos se conservan.

Tomando límites, cuando  $X$  tiende a  $A$ , en la anterior igualdad tenemos

$$\lim_{X \rightarrow A} \angle OA'X' + \lim_{X \rightarrow A} \angle AOX = \lim_{X \rightarrow A} (\pi - \angle XAO),$$

es decir

$$\lim_{X \rightarrow A} \angle OA'X' = \lim_{X \rightarrow A} (\pi - \angle XAO).$$

Pero el segundo término es el ángulo entre la recta  $OA$  y la tangente a  $\mathcal{C}$  que hemos considerado y el primer término es la imagen de este ángulo por la inversión, es decir el ángulo entre la recta  $OA$  y la tangente a  $\mathcal{C}'$ , como queríamos.  $\square$

**DEFINICIÓN 8** *Dados cuatro puntos arbitrarios  $A, B, C, D$  del plano, definimos la razón doble generalizada por la fórmula:*

$$[A, B, C, D] = \frac{AC/BC}{AD/BD}.$$

Observemos que si están alineados la razón doble generalizada coincide con la razón doble, excepto por el signo.

Tenemos el siguiente resultado:

**PROPIEDAD 9** *Las inversiones conservan la razón doble generalizada.*

*Demostración.* Consideremos la inversión de centro  $O$  y radio  $r$ , y denotemos por  $A', B', C', D'$  respectivamente los transformados de los puntos  $A, B, C, D$ .

Tenemos

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AC}{OA} \cdot \frac{OA}{AD} = \frac{A'C'}{OC'} \cdot \frac{OD'}{A'D'}$$

por la propiedad 5.

Pero igualmente

$$\frac{BC}{BD} = \frac{B'C'}{OC'} \cdot \frac{OD'}{B'D'},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} [A, B, C, D] &= \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{A'C'}{OC'} \cdot \frac{OD'}{A'D'} \cdot \frac{OC'}{B'C'} \cdot \frac{B'D'}{OD'} = \\ &= \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'} = [A', B', C', D'] \end{aligned}$$

como queríamos.  $\square$

## 3.1 INVERSOR DE PEAUCELLIER

Se pueden encontrar en la literatura diversos artefactos que realizan inversiones y a pesar de que hoy día las realizamos con programas de ordenador es interesante recordar al menos uno. Expliquemos brevemente el inversor de Peaucellier, representado en la figura 7. Ver el inversor de Hart por ejemplo en [3].

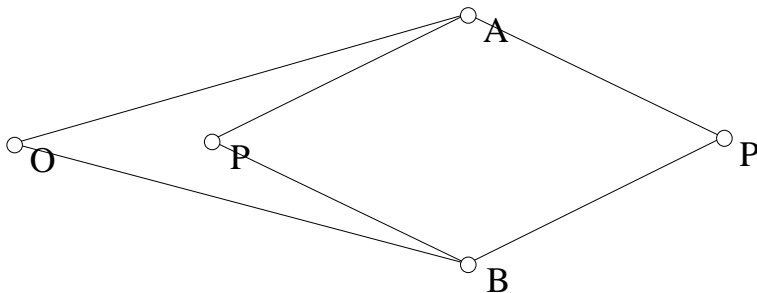


Fig. 7. Inversor de Peaucellier.

El punto  $O$  se fija al papel y en los puntos  $P$  y  $P'$  hay dos lápices. Por construcción tenemos  $PA = PB = P'A = P'B$  y  $OA = OB$  (imaginamos varillas rígidas). Cuando dibujamos con  $P$ ,  $P'$  dibuja la figura inversa y recíprocamente. Esto es consecuencia de que

$$OP \cdot OP' = OA^2 - PA^2$$

y que este segundo término es constante (igual al radio al cuadrado de la circunferencia de inversión). La igualdad es consecuencia de que los puntos  $O, P, P'$  están alineados, y ambos términos representan la potencia de  $O$  respecto la circunferencia de centro  $A$  y radio  $AP$ .

No podemos dibujar cualquier figura ya que no podemos llegar al infinito.

## 4 INVERSIONES Y GEOMETRÍA PROYECTIVA

Aprovechando el dibujo que ilustra la propiedad 5,

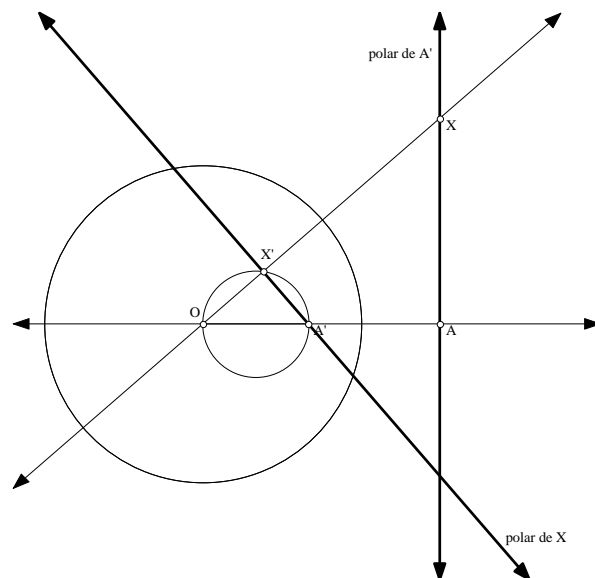


Fig. 8. Polaridad.

y recordando que la *polar* de  $A'$  respecto la circunferencia de inversión es la perpendicular a la recta  $OA'$  por el punto  $A$  inverso de  $A'$ , ver figura 8, tenemos que *la polar de todo punto  $X$  de la polar de  $A'$  pasa por  $A'$* . Es consecuencia de que el ángulo  $\angle OX'A'$  es recto, para todo  $X$ . Se dice que  $A'$  es el *polo* de la correspondiente recta polar.

Estamos acostumbrados a que las aplicaciones lleven puntos a puntos y rectas a rectas pero tenemos aquí una aplicación que lleva puntos a rectas y rectas a puntos, en el sentido de que hace corresponder a cada punto su polar y a cada polar su polo. Además, esta aplicación es tal que transforma la frase

*Los puntos  $P$  están sobre la recta  $r$ .*

en

*Las rectas polares de  $P$  se cortan en el punto polo de  $r$ .*

Esto es el principio de dualidad propio de la geometría proyectiva plana, que nos dice que si un enunciado que hace referencia a puntos, rectas y a relaciones de inclusión entre ellos es cierto, también es cierto el enunciado que se obtiene cambiando puntos por rectas, rectas por puntos y el sentido de la relación de inclusión.

Observemos que si antes teníamos que introducir un punto del  $\infty$  para tener imagen del centro de inversión, ahora, como los puntos y las rectas son equivalentes, tendremos que introducir una recta del infinito, la polar del centro de inversión. Podemos pensar que el plano proyectivo es el plano completado con la recta del infinito.

## 5 INVERSIONES Y CÓNICAS

Las cónicas se presentan de diversas formas: secciones de un cono; lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias a un punto (foco) y a una recta (directriz) es constante; lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma (diferencia) de distancias a dos puntos dados (focos) es constante, etc. Compruebe el lector la equivalencia de estas definiciones. Ver por ejemplo [9].

También se puede definir cónica como *la polar recíproca de una circunferencia*. Concretamente tenemos:

**TEOREMA 10** *Una cónica es el lugar geométrico de los polos de las tangentes a una circunferencia.*

*Demostración.* Fijamos una circunferencia de inversión de centro  $O$  y radio arbitrario, y consideramos una segunda circunferencia de centro  $A$  y radio arbitrario.

Por cada punto  $M$  de la segunda circunferencia trazamos la tangente y consideramos su *polo*. Por construcción, el polo de la tangente es el punto  $P'$  situado sobre la perpendicular por  $O$  a la tangente y tal que  $OP \cdot OP' = k^2$ , donde  $P$  es el punto de intersección de la tangente con su perpendicular por  $O$ . Sea  $N$  el punto de intersección de la tangente con la recta  $OA$  y  $N'$  su inverso. Ver figura 9.

Queremos demostrar que cuando  $M$  se mueve en la circunferencia el punto  $P'$  describe una cónica. La polar  $d$  de  $A$  será la directriz, y el centro  $O$  el foco.

En efecto, por la propiedad 5, las rectas  $P'N'$  y  $OA$  son perpendiculares. Por tanto  $P'Q = N'O + OA'$  donde  $Q$  es el pie de  $P'$  sobre  $d$ . Como  $OA \cdot OA' = k^2$  y  $ON \cdot ON' = k^2$  tenemos

$$\frac{P'O}{P'Q} = \frac{\frac{k^2}{OP}}{\frac{k^2}{ON} + \frac{k^2}{OA}} = \frac{ON \cdot OA}{OP(ON + OA)}$$

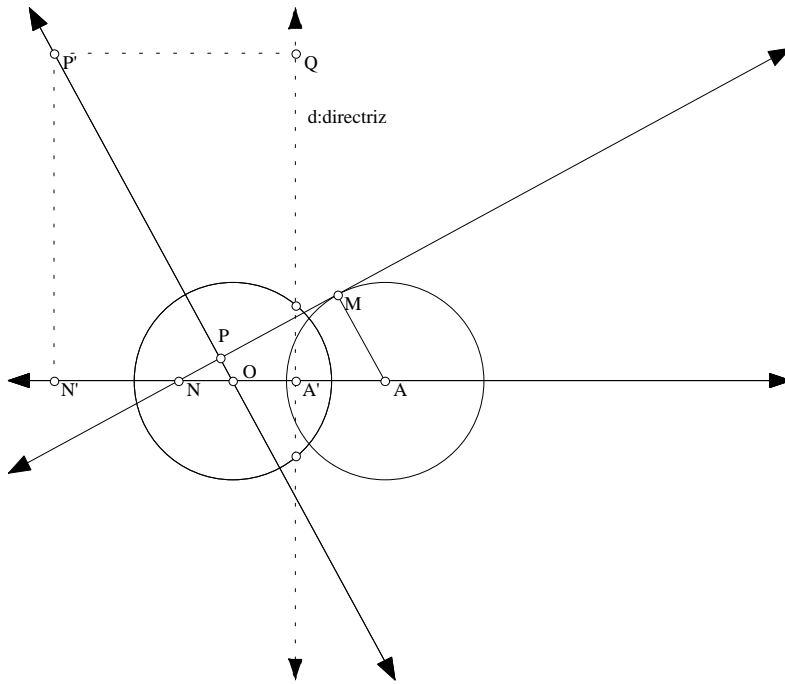


Fig. 9. Polar recíproca.

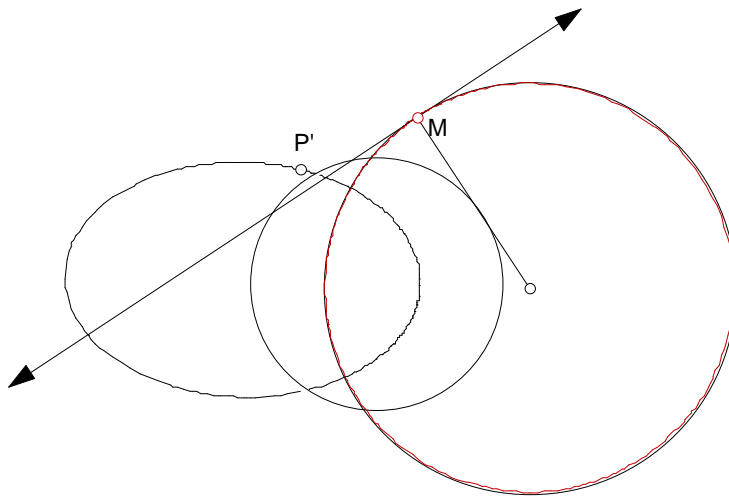


Fig. 10. Cónicas.

Pero, por Tales,

$$\frac{NA}{NO} = \frac{NM}{NP} = \frac{AM}{OP},$$

de manera que

$$\frac{P'O}{P'Q} = \frac{OA}{OP(NA/ON)} = \frac{OA}{OP(AM/OP)} = \frac{OA}{AM} = e$$

que es constante. Esta constante

$$e = \frac{\text{distancia entre centros}}{\text{radio}}$$

se llama *excentricidad*. Por tanto, si  $O$  es interior a la circunferencia de centro  $A$  y radio  $AM$  tenemos  $e < 1$  y se trata de una elipse, que es el caso de la figura 10, si es exterior tenemos  $e > 1$  y se trata de una hipérbola y si pertenece a ella tenemos  $e = 1$  y se trata de una parábola.  $\square$

## 6 EL CONO COMO INVERSOR APROXIMADO

Supongamos que tenemos un cono tal que su superficie es un espejo. Si miramos desde un punto situado cerca del vértice y en su vertical veremos las figuras de la base del cono deformadas. Concretamente tendremos el siguiente esquema, ver figura 11, que usa tan solo la ley física de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

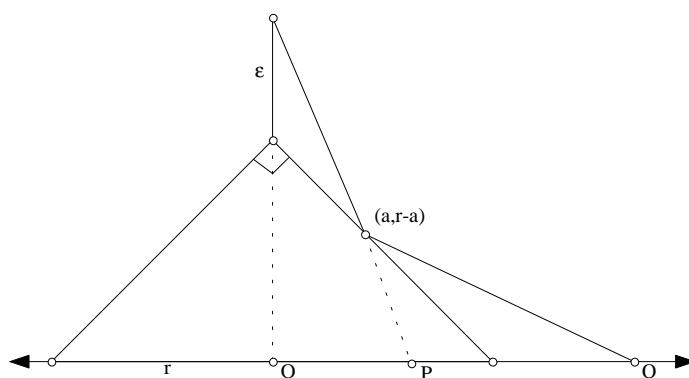


Fig. 11. Inversor aproximado.



Si denotamos por  $r$  el radio de la base del cono,  $\epsilon$  la distancia vertical entre el ojo y el vértice del cono, y  $a$  un parámetro que hace que el punto  $(a, r - a)$  se mueva por la generatriz del cono  $x + y = r$ , y suponemos que el ángulo del cono en el vértice es recto, entonces cálculos elementales demuestran que

$$OP = \frac{a(r + \epsilon)}{a + \epsilon}, \quad OQ = \frac{ra + (r - a)\epsilon}{a},$$

donde  $P$  es la imagen aparente de  $Q$ .

Por tanto

$$OP \cdot OQ = \frac{r + \epsilon}{a + \epsilon}(ra + \epsilon(r - a)) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} r^2,$$

es decir que cuando  $\epsilon$  tiende a cero  $Q$  tiende al inverso de  $P$ .

Si la superficie del cono no realiza la inversión exactamente cabe preguntarse qué forma debe tener un espejo para que realice la inversión exactamente. En *Math. Intelligencer*, Vol. 24, invierno 2002, los profesores G. T. Cargo, J. E. Graver y J. L. Troutman de la Universidad de Siracusa en Nueva York, demuestran que no existe un tal espejo pero encuentran aproximaciones bastante buenas habiendo patentado alguno de estos espejos.

## 7 INVERSIÓN QUE PONE CONCENTRÍCAS A DOS CIRCUNFERENCIAS DADAS

Sean  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_1$  dos circunferencias no concéntricas, de manera que la primera está contenida en la región acotada determinada por la segunda. Si hacemos una inversión con centro un punto cualquiera  $P \in \mathcal{C}_1$  la pareja de circunferencias se transforman respectivamente en una circunferencia  $\mathcal{C}'_2$  y una recta  $\mathcal{C}'_1$ , ver figura 12.

Dibujamos a continuación dos circunferencias ortogonales a la vez a  $\mathcal{C}'_1$  y  $\mathcal{C}'_2$ . Para ello tomamos  $T, T' \in \mathcal{C}'_2$  con la precaución de que no pertenezcan al diámetro de  $\mathcal{C}'_2$  perpendicular a  $\mathcal{C}'_1$ . Sean  $U$  y  $U'$  respectivamente los puntos de intersección con  $\mathcal{C}'_1$  de las tangentes a  $\mathcal{C}'_2$  por  $T$  y  $T'$ , ver figura 13.

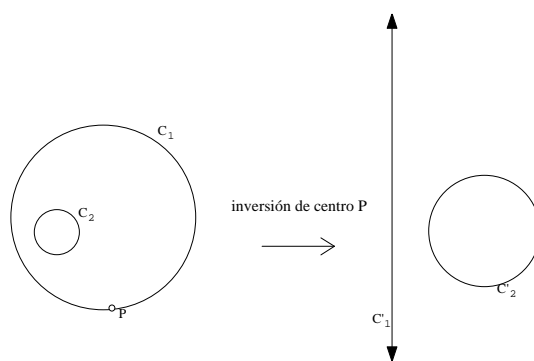


Fig. 12. Primer paso.

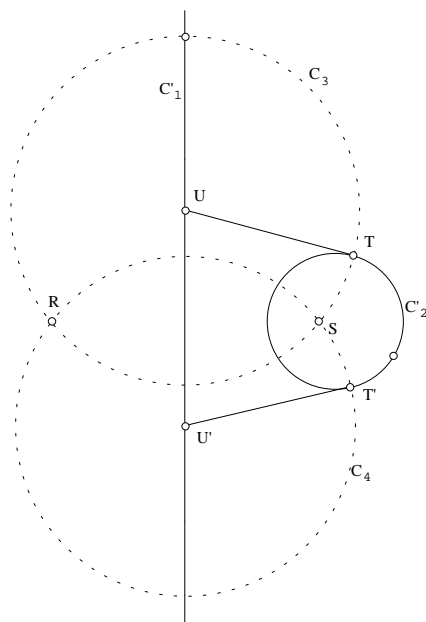


Fig. 13. Segundo paso.

Entonces las circunferencias  $\mathcal{C}_3$  (de centro  $U$  y radio  $UT$ ) y  $\mathcal{C}_4$  (de centro  $U'$  y radio  $U'T'$ ) son ortogonales a  $\mathcal{C}'_1$  y  $\mathcal{C}'_2$  y se cortan en dos puntos  $R$  y  $S$ .

Ahora ya es claro que cualquier inversión de centro  $R$  transforma  $\mathcal{C}'_1$  y  $\mathcal{C}'_2$  en dos circunferencias concéntricas  $\mathcal{C}''_1$  y  $\mathcal{C}''_2$ . En efecto,  $\mathcal{C}_3$  y  $\mathcal{C}_4$  pasan a ser rectas  $\mathcal{C}'_3$  y  $\mathcal{C}'_4$  que se cortan en un punto  $S'$  imagen de  $S$ . La recta  $\mathcal{C}'_1$  se transforma en una circunferencia por  $R$  ortogonal a  $\mathcal{C}'_3$  y  $\mathcal{C}'_4$ . Por tanto, el punto  $S'$  de intersección de  $\mathcal{C}'_3$  y  $\mathcal{C}'_4$  es su centro, ver figura 14.

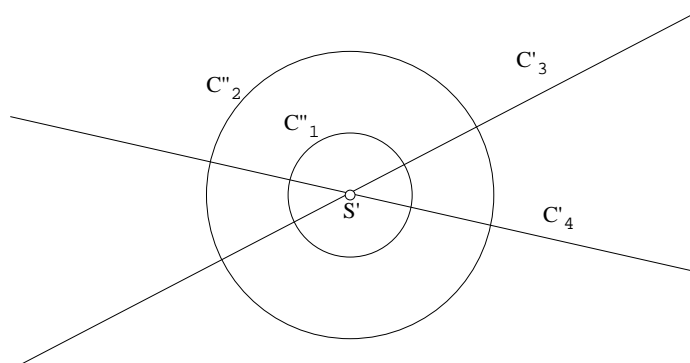


Fig. 14. Tercer paso.

Análogamente  $\mathcal{C}'_2$  se transforma en una circunferencia ortogonal a  $\mathcal{C}'_3$  y  $\mathcal{C}'_4$ . Por tanto, el punto de intersección de  $\mathcal{C}'_3$  y  $\mathcal{C}'_4$  es su centro. Así pues las transformadas  $\mathcal{C}''_1$  y  $\mathcal{C}''_2$  de  $\mathcal{C}'_1$  y  $\mathcal{C}'_2$  son circunferencias concéntricas, como queríamos.

### 7.1 PUNTOS MÁGICOS

Hay un resultado que dice que todas las circunferencias ortogonales a dos circunferencias dadas pasan por dos puntos fijos, determinados por las dos circunferencias, a los que llamaremos puntos mágicos, ver figura 15. Consultar por ejemplo [1], pag. 251. Tal vez sería más adecuado llamarlos puntos de Apolonio.

A partir de este resultado podemos simplificar la anterior construcción diciendo:

*La inversión en uno de sus puntos mágicos pone dos circunferencias cualesquiera concéntricas.*

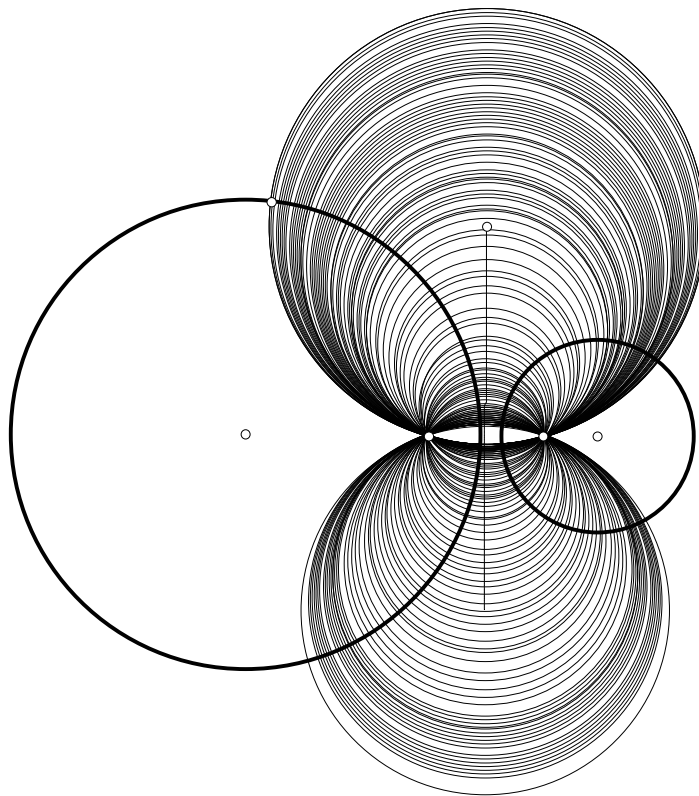


Fig. 15. Puntos mágicos.

## 8 PRODUCTO INVERSIVO DE CIRCUNFERENCIAS

Supongamos que las circunferencias  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  se cortan formando en uno de los puntos de intersección (y por tanto también en el otro) un ángulo  $\alpha$ , ver figura 16. Entonces definimos

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \cos \alpha$$

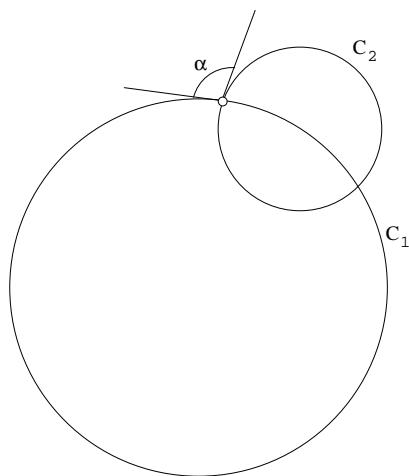


Fig. 16. Ángulo entre dos circunferencias.

Si las ecuaciones de las circunferencias dadas son

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : (x - a)^2 + (y - b)^2 &= R^2 \\ \mathcal{C}_2 : (x - c)^2 + (y - d)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

un pequeño cálculo nos dice que

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{rR}(ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2)). \quad (1)$$

El segundo término de esta igualdad tiene sentido tanto si las circunferencias se cortan como si no se cortan. Por tanto podemos tomar la anterior expresión (1) como definición de producto inversivo de dos circunferencias cualesquiera  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ .

Cuando  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  se cortan es claro que  $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$  es invariante por inversiones, ya que los ángulos se conservan. Pero se produce el siguiente hecho, casi milagroso, sobre todo si no conociésemos los números complejos:

**TEOREMA 11** *El número  $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$  definido por la ecuación (1) es invariante por inversiones, tanto si las circunferencias se cortan como si no se cortan.*

Es fácil ver que

**TEOREMA 12** *Si  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son dos circunferencias concéntricas de radios  $R$  y  $r$ , tenemos*

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}\right).$$

Observemos finalmente que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 < 1 &\iff \text{se cortan} \\ \mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 &\iff \text{son tangentes} \\ \mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 > 1 &\iff \text{no se cortan}\end{aligned}$$

## 9 DISTANCIA INVERSA ENTRE CIRCUNFERENCIAS

La distancia entre circunferencias concéntricas de radios  $r, R$  se define como

$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \left| \ln \frac{R}{r} \right|.$$

De esta manera, dadas tres circunferencias concéntricas con  $s \leq r \leq R$  tenemos

$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) + \delta(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) = \ln \frac{R}{r} + \ln \frac{r}{s} = \ln \frac{R}{s} = \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3)$$

que es una propiedad que se ha de esperar de cualquier función distancia sobre “puntos alineados”.

**DEFINICIÓN 13** Si  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son dos circunferencias arbitrarias se define su distancia por

$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \delta(\varphi\mathcal{C}_1, \varphi\mathcal{C}_2)$$

donde  $\varphi$  es una inversión que las pone concéntricas.

Se ve fácilmente que esta definición no depende de la inversión o composición de inversiones usadas para poner concéntricas las dos circunferencias dadas.

En efecto, si  $\varphi$  y  $\Psi$  son composiciones de inversiones que ponen concéntricas las dos circunferencias dadas entonces  $\Phi = \varphi \circ \Psi^{-1}$  es una composición de inversiones que lleva circunferencias concéntricas de radios  $r' \leq R'$  a circunferencias concéntricas de radios  $r \leq R$ . (No decimos que  $r$  vaya a  $r'$ ).

Pero el producto de circunferencias concéntricas, que es invariante por inversiones, vale

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right)$$

de manera que la igualdad

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \Phi\mathcal{C}_1 * \Phi\mathcal{C}_2,$$

implica

$$\frac{r}{R} + \frac{R}{r} = \frac{r'}{R'} + \frac{R'}{r'},$$

que es una igualdad del tipo

$$x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$$

que implica  $x = y$  o  $x = \frac{1}{y}$  y por tanto

$$\left| \ln \frac{R}{r} \right| = \left| \ln \frac{R'}{r'} \right|.$$

Como

$$\delta(\varphi\mathcal{C}_1, \varphi\mathcal{C}_2) = \left| \ln \frac{R}{r} \right|$$

y

$$\delta(\Psi\mathcal{C}_1, \Psi\mathcal{C}_2) = \left| \ln \frac{R'}{r'} \right|$$

la definición de distancia no depende de la inversión o composición de inversiones que se usen para poner las circunferencias concéntricas.

9.1 DISTANCIA INVERSIVA EN FUNCIÓN DE LOS RADIOS Y DISTANCIA ENTRE CENTROS. RELACIÓN DISTANCIA-PRODUCTO

Supongamos  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ , dos circunferencias no concéntricas, de manera que la primera está contenida en la región acotada determinada por la segunda. Queremos calcular la distancia inversiva  $\delta$  entre  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  sin necesidad de ponerlas concéntricas, es decir directamente a partir de sus radios y la distancia entre los centros. Sean  $A, B, C, D$  puntos sobre un diámetro común como se indica en la figura 17:

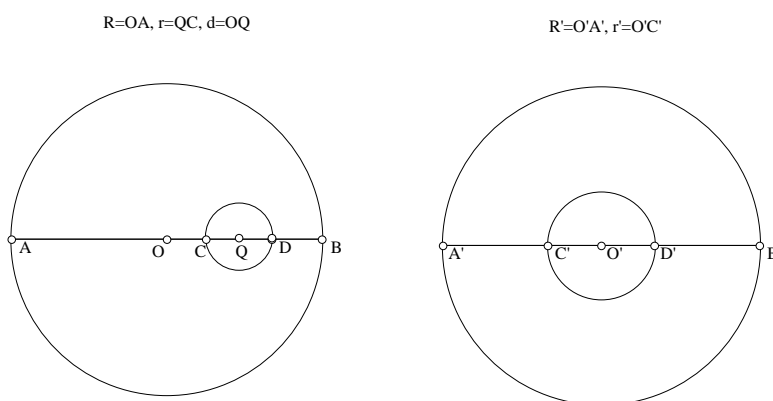


Fig. 17. Distancia inversiva.

Los radios y la distancia son entonces  $R = OA, r = QC, \rho = OQ$ . Tenemos

$$\begin{aligned} (A, B, C, D) &= \frac{AC/BC}{AD/BD} = \frac{(AO + OQ - CQ)/(AO - OQ + CQ)}{(AO + OQ + CQ)/(AO - OQ - CQ)} = \\ &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \end{aligned}$$

donde

$$\gamma = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}$$

Si por una inversión ponemos las circunferencias concéntricas, el diámetro va al diámetro y los puntos  $A, B, C, D$  van a los puntos  $A', B', C', D'$ , como se indica en la figura 17. Los nuevos radios son entonces  $R' = O'A', r' = O'C'$  y en particular la distancia inversiva es

$$\delta = \ln \frac{R'}{r'}$$

Tenemos

$$(A', B', C', D') = \frac{A'C'/B'C'}{A'D'/B'D'} = \frac{(R' - r')/(R' + r')}{(R' + r')/(R' - r')} = \frac{\cosh \delta - 1}{\cosh \delta + 1}$$

Como la razón doble es invariante por inversiones podemos igualar las dos expresiones anteriores y obtenemos  $\cosh \delta = \gamma$ , es decir

$$\cosh \delta = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}$$

Con la notación de la sección 8 tenemos  $\rho^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2$ , que substituyendo en la anterior fórmula y comparando con la fórmula (1) de la misma sección 8, nos dice

TEOREMA 14 *Sea  $\delta$  la distancia inversiva entre  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ . Entonces*

$$\cosh \delta = \mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$$

## 10 PORISMA DE STEINER

Un primer ejemplo donde se ve el poder de las inversiones es el llamado porisma de Steiner. Dadas dos circunferencias no concéntricas, una interior a la otra, se quiere saber si hay una cadena de circunferencias cada una de ellas tangente a la anterior y a la posterior y tangentes todas ellas a las dos circunferencias dadas, ver figura 18.



Este problema o bien no tiene solución, o bien tiene infinitas soluciones. Esta situación se describe diciendo que tenemos un “porisma”, en este caso el porisma de Steiner.

El matemático suizo Jacob Steiner (1796-1863) cultivó la geometría sintética en su estado más puro, y se decía que aborrecía el método analítico que consideraba como una muleta para los geoméricamente débiles. Parece que a Steiner le gustaba especialmente la configuración anterior formada por dos circunferencias, una interior a la otra, con una cadena de circunferencias cada una de ellas tangente a la anterior y a la posterior y tangentes todas ellas a las dos circunferencias dadas, y que demostró diversas propiedades de esta configuración.

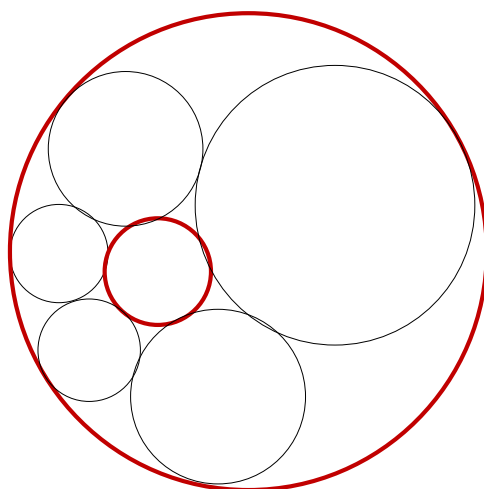


Fig. 18. Cadena de Steiner.

Usando inversiones podemos demostrar fácilmente el siguiente resultado de Steiner, que podemos encontrar en [7],

**TEOREMA 15** *Dos circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  admiten una cadena de circunferencias tangentes si y sólo si*

$$C_1 * C_2 = 1 + 2 \tan^2 \frac{\pi}{n}$$

*para un cierto  $n$ , que es el número de circunferencias de la cadena.*

Empecemos estudiando el caso concéntrico.

**LEMA 16** *Dos circunferencias concéntricas de radios  $R$  y  $r$  admiten una cadena de  $n$  circunferencias tangentes si y sólo si*

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \frac{R - r}{R + r}$$

*Demostración.* Si una tal cadena existe se forman triángulos rectángulos como indica la figura 19, y el resultado es evidente.  $\square$

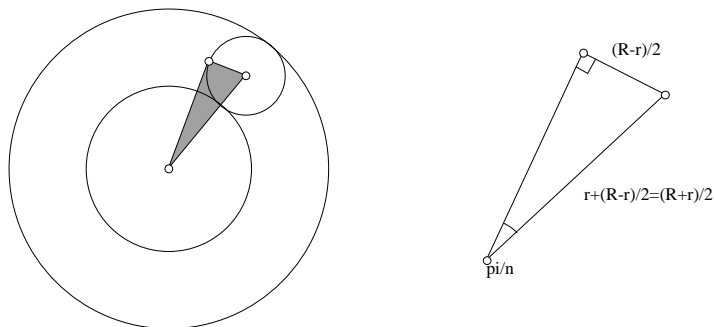


Fig. 19. Steiner concéntrico.

Observemos que despejando en la última expresión obtenemos

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}. \quad (2)$$

*Demostración del teorema.* Sea  $\varphi$  una inversión que pone las dos circunferencias dadas concéntricas. Tenemos

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \varphi \mathcal{C}_1 * \varphi \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right)$$

donde  $R, r$  son los radios de las circunferencias concéntricas (no los radios de  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ ). Substituyendo el valor obtenido anteriormente en la fórmula (2) para  $r/R$  obtenemos

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{n},$$

como queríamos.  $\square$

### 10.1 PORISMA DE STEINER EN EL CASO $n = 3$

Un resultado muy interesante de Descartes, que aparece en una carta a la princesa Isabel de Bohemia, de 1641, hace referencia a las llamadas posteriormente circunferencias (o círculos) de Soddy, y que representan un caso particular de Steiner con  $n = 3$ . Concretamente, dados tres puntos se pueden considerar siempre tres circunferencias con centro en estos puntos y tangentes entre ellas. Si  $a, b, c$  son las distancias entre estos puntos, los radios de las circunferencias son  $p - a, p - b, p - c$  con  $2p = a + b + c$ . Existen entonces dos circunferencias tangentes a las tres circunferencias anteriores. Estas circunferencias no se cortan y se llaman circunferencias de Soddy, ver figura 20.

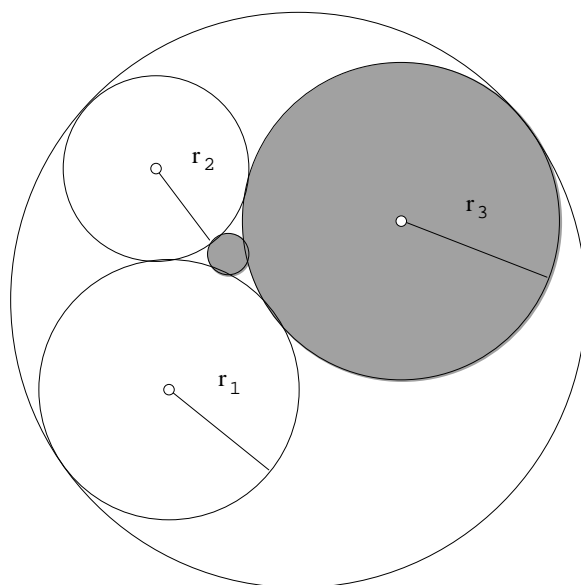


Fig. 20. Circunferencias de Soddy.

Si  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  son los radios de las tres circunferencias tangentes, denotemos

$$k_i = \frac{1}{r_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

sus curvaturas. Denotemos por  $k_4$  bien el inverso del radio de la circunferencia tangente interior, o bien, menos el inverso del radio de la circunferencia tangente exterior. Entonces Descartes demuestra que se cumple, ver [3],

$$2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2.$$

Observemos que las inversiones, por ejemplo la que pone las circunferencias de Soddy concéntricas, no conservan las distancias y por lo tanto tampoco las curvaturas pero en cambio siempre se cumple que el cuadrado de la suma es el doble de la suma de los cuadrados de dichas curvaturas.

Sir Frederic Soddy fue premio Nobel de Química en 1921 por sus trabajos sobre isótopos. Redescubrió el resultado de Descartes y lo generalizó a 5 esferas en dimensión tres. Ilusionado escribió en *Nature*, Vol. 137, pag. 1021, (1936), el siguiente verso llamado *El beso preciso* y que podemos encontrar en [3]:<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Cuatro círculos se van a besar/ los más pequeños son los más curvados/ la curvatura es justamente el inverso de/ la distancia desde el centro/ aunque su fascinación dejó mudo a Euclides/ no hay necesidad de la regla del pulgar/ ya que curvatura cero es una línea recta/ y la curvatura cóncava tiene signo menos/ la suma de los cuadrados de las cuatro curvaturas/ es la mitad del cuadrado de su suma.

Four circles to the kissing come  
 the smaller are the benter  
 the bend is just the inverse of  
 the distance from the center  
 though their intrigue left Euclid dumb  
 there's now no need for rule of thumb  
 since zero bend's a dead straight line  
 and concave bends have minus sign  
*the sum of the squares of all four bends  
 is half the square of their sum.*

(Soddy, 1936)

### 10.2 PORISMA DE STEINER EN EL CASO $n = 3$

Es interesante el caso  $n = 4$  ya que la configuración que aparece, ver figura 21,

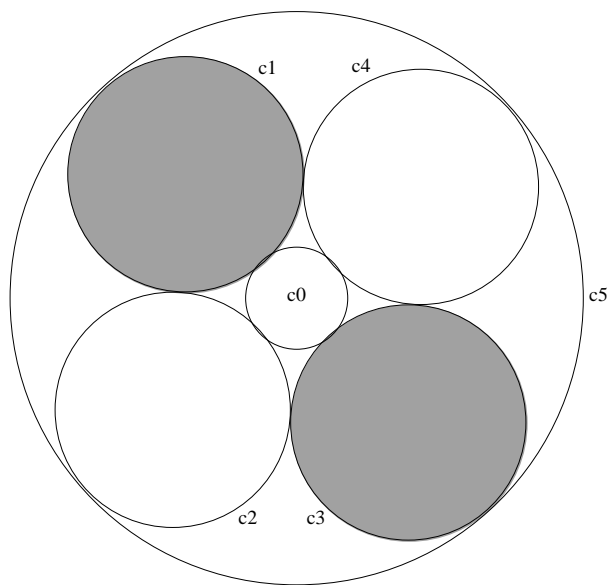


Fig. 21. Steiner con  $n = 4$ .

es transitiva en el sentido de que el papel jugado por  $\mathcal{C}_0$  y  $\mathcal{C}_5$  es el mismo que el jugado por  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_3$  o por  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_4$ . En efecto, una inversión que ponga  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_3$  concéntricas transforma las demás circunferencias en tangentes interiores

comunes. En particular

$$\delta = d(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_5) = d(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3) = d(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4) = 2 \ln \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 \ln(1 + \sqrt{2}).$$

### 10. 3 TABLA RESUMEN

Como la relación entre producto y distancia es

$$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \cosh \delta$$

tenemos

Concéntricas	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}\right)$
Steiner	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 + 2 \tan^2 \frac{\pi}{n}$
Steiner n=3 (Soddy)	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 7, \quad \cosh \frac{\delta}{2} = 2$
Steiner n=4	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 3, \quad \cosh \frac{\delta}{2} = \sqrt{2}$
Incírculo, Circuncírculo	$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2 = 1 + \frac{r}{2R}, \quad \sinh \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{R}}$

## 11 EL PROBLEMA DE APOLONIO

Otro problema donde se ve el poder de las inversiones es el problema de Apolonio, que consiste en construir todas las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas. Cada una de estas circunferencias podrá ser en principio interior o exterior a la circunferencia tangente que buscamos de manera que tenemos  $2^3 = 8$  posibles soluciones. Veremos que genéricamente hay ocho soluciones, que pueden ser menos en función de la posición relativa de las tres circunferencias iniciales.

Apolonio de Perga ( $\simeq 260-170a.c.$ ) estudió y resolvió el anterior problema en su obra *De Tactionibus* que lamentablemente se perdió. François Viète (1540 – 1603), o Vieta, trató de recuperar esta obra y volvió a resolver el problema de construir una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas, estudiando separadamente los diez casos posibles. Posteriormente, de manera independiente, Gauss, Gergonne y Petersen resolvieron el problema general. La demostración de Gergonne se puede encontrar por ejemplo en [8].

### 11.1 CIRCUNFERENCIA TANGENTE A DOS CIRCUNFERENCIAS DADAS Y QUE PASA POR UN PUNTO DADO

Supondremos conocido que dadas dos circunferencias exteriores hay cuatro tangentes, dos exteriores y dos interiores. Las exteriores dejan las circunferencias a un mismo lado y las interiores las dejan una a cada lado. Son fáciles de construir, ver figura 22, y por ejemplo [8], pag. 82.

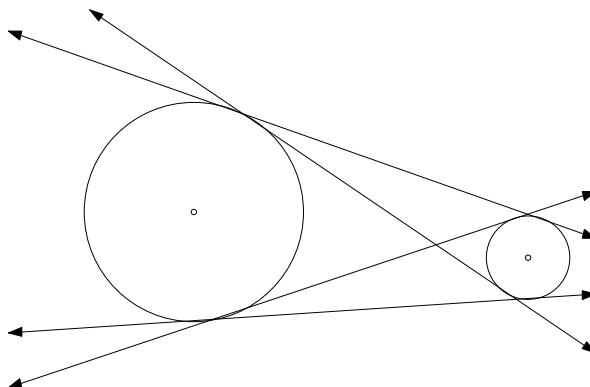


Fig. 22. Tangentes comunes a dos circunferencias.

A continuación haremos una inversión de la anterior figura. Supondremos que el centro no pertenece ni a las circunferencias ni a las tangentes. Las cuatro rectas tangentes se transforman en cuatro circunferencias que pasan por el centro de inversión y que son tangentes a las transformadas de las dos circunferencias dadas, ver figura 23.

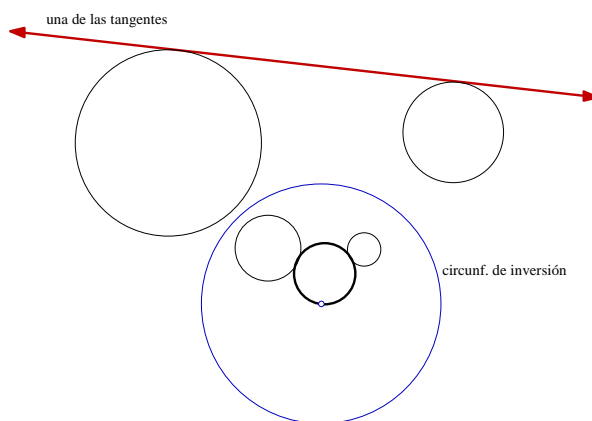


Fig. 23. Inversión de las tangentes comunes.

Como las inversiones son involutivas, los anteriores comentarios nos dicen que para construir una circunferencia que pase por un punto dado  $P$  y sea tangente a dos circunferencias dadas  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  hemos de proceder así:

- Hacemos una inversión  $\varphi$  de centro  $P$  y radio arbitrario.
- Construimos las cuatro rectas tangentes a  $\varphi(\mathcal{C}_1)$  y  $\varphi(\mathcal{C}_2)$ .
- Aplicamos  $\varphi$ .

Ver figura 24.

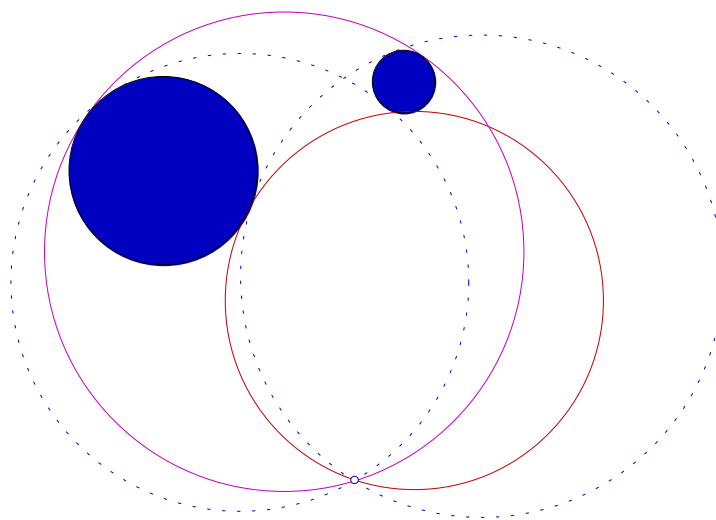


Fig. 24. Caso particular de Apolonio.

## 11.2 EL PROBLEMA DE APOLONIO, CONSTRUCCIÓN FINAL

Construimos ahora una de las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ .

Supongamos que los radios respectivos cumplen  $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ . Construimos a continuación  $\mathcal{C}'_2$  y  $\mathcal{C}'_3$  con el mismo centro respectivamente que  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  y radios  $r_3 - r_1$  y  $r_2 - r_1$ .

Construimos, a partir de los comentarios de la sección anterior, una de las circunferencias que pasa por el centro  $O_1$  de  $\mathcal{C}_1$  y es tangente a  $\mathcal{C}'_2$  y  $\mathcal{C}'_3$ . Hay cuatro posibilidades, pero sólo nos interesan dos.

La primera es cuando la circunferencia que construimos  $\mathcal{C}$  es tal que  $\mathcal{C}'_2$  y  $\mathcal{C}'_3$  son exteriores a ella. Sea  $O$  su centro y  $R$  su radio. Entonces la circunferencia de centro  $O$  y radio  $R - r_1$  es la circunferencia buscada tangente a  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$ , ver figura 25.

La segunda posibilidad es cuando la circunferencia que construimos  $\mathcal{C}$  es tal que  $\mathcal{C}'_2$  y  $\mathcal{C}'_3$  son interiores a ella. Entonces la circunferencia de centro  $O$  y radio  $R + r_1$  es la circunferencia buscada tangente a  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$ .

Así hemos construido dos de las circunferencias buscadas. Las ocho soluciones provienen de que esta construcción se puede hacer tomando  $\mathcal{C}'_2$  y  $\mathcal{C}'_3$  de radios  $r_3 \pm r_1$  y  $r_2 \pm r_1$ .

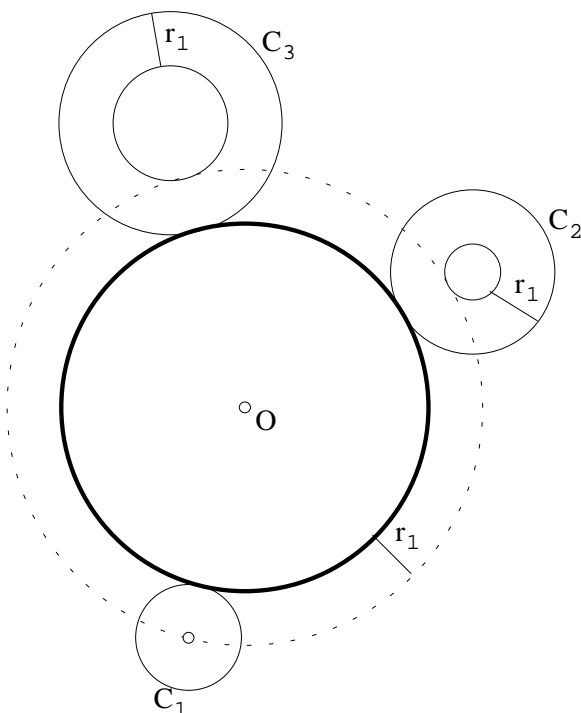


Fig. 25. Problema de Apolonio.

## 12 GEOMETRÍA INVERSIVA

Recordemos muy brevemente que desde el punto de vista de F. Klein cada geometría es el estudio de las propiedades de las figuras invariantes por un “tipo de movimientos”.

Por ejemplo la geometría euclidiana es el estudio de las propiedades de las figuras invariantes por transformaciones que conservan la distancia euclidiana usual. Estas transformaciones se llaman movimientos euclidianos.

Análogamente:

**DEFINICIÓN 17** *La geometría inversiva es el estudio de las propiedades de las figuras invariantes por inversiones.*



Para ser un poco más precisos tendríamos que decir que la geometría inversiva *plana* es el estudio de las propiedades de las figuras del plano invariantes por inversiones. Pero recordemos que las inversiones no son propiamente transformaciones del plano, ya que el centro de inversión no tiene imagen.

Para evitar esto lo que se hace es completar el plano con un punto, llamado punto del infinito. Si identificamos el plano euclídeo con el plano complejo  $\mathbb{C}$  y adjuntamos un punto, obtenemos un conjunto  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  llamado *plano completado*, y ahora sí que las inversiones son transformaciones de  $\hat{\mathbb{C}}$ , es decir toda inversión  $\varphi$  se puede pensar como  $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . El centro de inversión va al punto  $\infty$ .

Para ser más precisos, lo que se hace en realidad es definir *circunferencia generalizada* en  $\hat{\mathbb{C}}$  como una circunferencia ordinaria en  $\mathbb{C}$  o una recta unión el punto  $\infty$ . Entonces una inversión generalizada del plano completado es una inversión respecto una circunferencia generalizada, es decir, o bien una inversión respecto una circunferencia ordinaria (cuyo centro va al punto  $\infty$ ) o una simetría respecto una recta (y entonces el punto  $\infty$  queda fijo). En la sección siguiente 12.1 se ve con detalle porqué las simetrías son de hecho inversiones.

La geometría del conjunto  $\hat{\mathbb{C}}$  cuando los movimientos que se consideran son las inversiones se conoce también como *geometría conforme*, ya que la propiedad más característica de las inversiones es que conservan ángulos.

Una manera de pensar  $\hat{\mathbb{C}}$  es como la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 1, ya que tenemos una biyección entre la esfera menos el polo norte y el plano  $\mathbb{C}$ , identificado de manera natural con el plano  $z = 0$  del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ , vía la proyección estereográfica, figura 26, y por tanto, pensando que el polo norte va al punto  $\infty$ , tenemos una biyección entre toda la esfera  $\mathbb{S}^2$  y  $\hat{\mathbb{C}}$ .

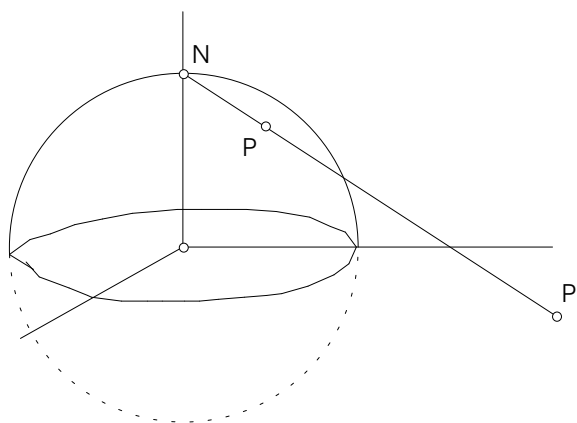


Fig. 26. Proyección estereográfica.

Es interesante observar que *la proyección estereográfica es una inversión*.

En efecto, todo punto  $P$  de la esfera de centro el origen de coordenadas  $O$  y radio 1, distinto del polo norte  $N$ , tiene por imagen el punto  $P'$  intersección de la recta  $NP$  ( $N =$  polo norte) con el plano  $\mathbb{C} : \{z = 0\}$ . Al polo norte  $N$  se le asigna el punto del infinito  $\infty$  que se adjunta a  $\mathbb{C}$ . Entonces tenemos:

$$\frac{1}{NP'} = \text{sen} \angle OP'N = \cos \angle ONP' = \frac{NP}{2},$$

es decir

$$NP \cdot NP' = 2$$

y por tanto la proyección estereográfica es una inversión respecto la esfera de centro en el polo norte  $N$  y radio  $\sqrt{2}$ .

En particular las circunferencias de  $\mathbb{S}^2$  que no pasan por el polo norte  $N$  tienen como imagen circunferencias de  $\mathbb{C}^2$ , y las que pasan por  $N$  tienen como imagen rectas, y en esta transformación se conservan los ángulos. Observemos que ahora hablamos de inversiones respecto a esferas mientras que en estas notas sólo hemos definido inversiones respecto a circunferencias, pero todo funciona igual.

Cuando se estudia la esfera desde éste punto de vista se habla de la *esfera de Riemann* (como conjunto de puntos es la esfera pero los *movimientos* son las transformaciones que provienen de las inversiones del plano vía la proyección estereográfica).

Algunos resultados de geometría conforme son los siguientes, ver por ejemplo [1], pag. 242:

TEOREMA 18 (Transitividad respecto a ternas de puntos) *Dados tres puntos  $A, B, C$  y tres puntos más  $A', B', C'$  de  $\hat{\mathbb{C}}$  existe una única composición de inversiones que lleva  $A$  a  $A'$ ,  $B$  a  $B'$  y  $C$  a  $C'$ .*

En particular olvidémonos de hablar de distancia entre puntos, ya que dos parejas de puntos cualesquiera son equivalentes desde el punto de vista de las inversiones y por tanto todos los puntos estarían a la misma distancia entre ellos.

Como consecuencia inmediata tenemos:

TEOREMA 19 *Dadas dos circunferencias, siempre podemos pasar de una a la otra por una composición de inversiones.*

Nos referimos a circunferencias generalizadas (circunferencias ordinarias y rectas ordinarias unión el punto  $\infty$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ ).

Observemos el paralelismo entre el siguiente teorema, [11], pag. 106, y el teorema fundamental de la geometría afín o proyectiva, ver por ejemplo [9], pags. 54, 204.

TEOREMA 20 (Teorema fundamental de la geometría inversiva) *Toda biyección que conserva circunferencias es composición de inversiones.*

De nuevo hablamos de circunferencias generalizadas y de biyección de  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Relacionado con la variable compleja recordemos:

TEOREMA 21 *Toda biyección analítica de  $\hat{\mathbb{C}}$  es una transformación de Möbius*

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0.$$

Ver [2], pag. 211, para precisar el concepto de biyección analítica (automorfismo) en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Según se conserven o no orientaciones se tiene, [1], pag. 238:

TEOREMA 22 *Toda composición de inversiones en  $\hat{\mathbb{C}}$  es una transformación de Möbius o una transformación de Möbius precedida de conjugación.*

De manera que cuando se estudia la esfera como variedad compleja (el proyectivo complejo  $P^1(\mathbb{C})$ ) las transformaciones que se permiten son las analíticas (holomorfas), es decir las de Möbius, mientras que cuando se estudia como variedad conforme se consideran también las composiciones de las transformaciones de Möbius con la conjugación, para tener así todas las transformaciones, tanto si conservan orientaciones como si no.

12.1 SIMETRÍA EUCLIDIANA COMO INVERSIÓN RESPECTO UNA CIRCUNFERENCIA POR EL PUNTO DEL INFINITO

Ya hemos dicho que cuando se habla de las inversiones de  $\hat{\mathbb{C}}$  se incluyen las simetrías respecto a rectas de  $\mathbb{C}$ .

Sean  $P, Q$  inversos por una inversión respecto una circunferencia  $\mathcal{C}$  de centro  $O$  y radio  $OR$ . Sabemos que  $OP \cdot OQ = OR^2$  y que la circunferencia  $r$  determinada por  $P, Q, R$  es ortogonal a la circunferencia de inversión. Denotemos por  $s$  la recta  $PQ$ , ver figura 27.

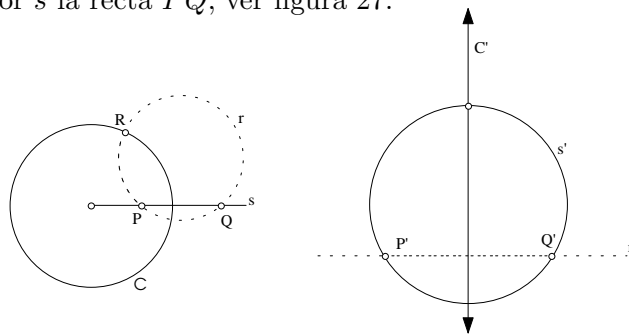


Fig. 27. Una simetría es una inversión.

Hacemos una inversión de centro  $R$ . Esquemáticamente tendremos

$$\begin{array}{lcl}
 \mathcal{C} & \longrightarrow & \text{recta } \mathcal{C}' \\
 \text{recta } PQ & \longrightarrow & \text{circunf. } s' \\
 \text{circunf. } RPQ & \longrightarrow & \text{recta } r' \\
 r \perp \mathcal{C} & \longrightarrow & r' \perp \mathcal{C}' \\
 s \perp \mathcal{C} & \longrightarrow & s' \perp \mathcal{C}' \\
 P, Q \in r \cap s & \longrightarrow & P', Q' \in r' \cap s'
 \end{array}$$

Les dos últimas afirmaciones nos dicen que  $P', Q'$  son simétricos respecto  $\mathcal{C}'$ .

Por tanto y resumiendo, módulo inversiones es lo mismo decir que dos puntos son simétricos respecto una recta que inversos respecto una circunferencia.

### 13 GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Si en lugar de considerar todas las inversiones consideramos sólo unas cuantas el teorema fundamental de la geometría conforme no se cumplirá y tendremos esperanzas de definir una distancia. Concretamente cuando hablamos del *plano hiperbólico* nos referimos al semiplano  $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$  en el que consideramos los *movimientos* dados por las inversiones respecto circunferencias de centro sobre la recta  $y = 0$  y simetrías respecto rectas  $x = cte$  (que se pueden considerar como inversiones respecto circunferencias de radio infinito). Estas rectas y circunferencias se llaman rectas hiperbólicas.

Dados dos puntos  $A, B$  se define la distancia hiperbólica entre ellos por

$$d(A, B) = |\ln(A, B, P, Q)|$$

donde  $P, Q$  son los puntos del infinito de la recta hiperbólica  $AB$ , ver figura 28.

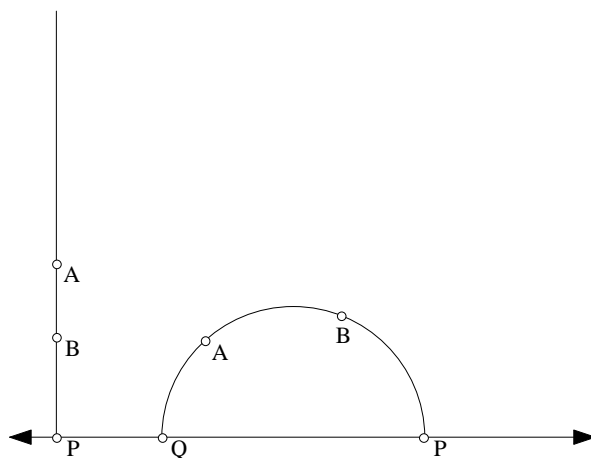


Fig. 28. Distancia hiperbólica

Si  $A, B$  pertenecen a una recta  $x = cte$  que corta  $y = 0$  en  $P$  entonces

$$d(A, B) = |\ln(A, B, P, \infty)| = |\ln(A, B, P)| = \left| \ln \frac{AP}{BP} \right|$$

Como la razón doble es invariante por inversiones esta distancia es también invariante por inversiones y por tanto objeto de estudio de la geometría hiperbólica.

De hecho toda aplicación que conserva esta distancia es composición de inversiones, ver por ejemplo [10]. Estas aplicaciones se llaman *isometrías hiperbólicas*.

Resumiendo:

**DEFINICIÓN 23** *La geometría hiperbólica es el estudio de las propiedades de las figuras del plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  invariantes por isometrías hiperbólicas.*

Hay diversos modelos para el plano hiperbólico, como el llamado *disco de Poincaré*, el modelo de Klein, el modelo hiperboloide, etc. Sin entrar en detalles digamos que hemos elegido el modelo semiplano por ser las inversiones fácilmente visualizables y constructibles en él.

### 13.1 DISTANCIA ENTRE CIRCUNFERENCIAS: PUNTO DE VISTA HIPERBÓLICO

Los especialistas en geometría hiperbólica están acostumbrados a interpretar la geometría conforme como la geometría del infinito hiperbólico.

Es debido a que, análogamente al caso de dimensión 2, el espacio hiperbólico de dimensión 3 se puede pensar como el semiespacio

$$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\},$$

en el que los *movimientos* son las inversiones respecto esferas ortogonales al plano  $z = 0$ .

El *infinito hiperbólico* se identifica así con la frontera topológica de  $\mathbb{H}^3$ , que es justamente el plano  $z = 0$  unión el punto del infinito  $\infty$ , que ya hemos comentado anteriormente que se identifica con  $\hat{\mathbb{C}}$ . Los movimientos en  $\mathbb{H}^3$ , que hemos dicho que son las inversiones respecto esferas ortogonales a la frontera  $\hat{\mathbb{C}}$ , dan lugar a inversiones en  $\hat{\mathbb{C}}$ , ya que la intersección de estas esferas con el plano  $z = 0$  son circunferencias, e inducen pues en  $\hat{\mathbb{C}}$  la geometría conforme.

La siguiente bella observación se debe uno de estos especialistas en geometría hiperbólica, concretamente a Gil Solanes.

Por definición, los planos hiperbólicos de  $\mathbb{H}^3$  (recordemos como eran las rectas de  $\mathbb{H}^2$ ) son los planos  $ax + by = c$  y las semiesferas que tienen el ecuador en  $z = 0$ . El teorema dice que si  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son dos de estos ecuadores correspondientes respectivamente a los planos hiperbólicos  $P_1, P_2$ , ver figura 29, entonces

$$d(P_1, P_2) = \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$$

donde  $d(P_1, P_2)$  es la distancia hiperbólica entre estos planos, es decir la longitud hiperbólica de la perpendicular común.

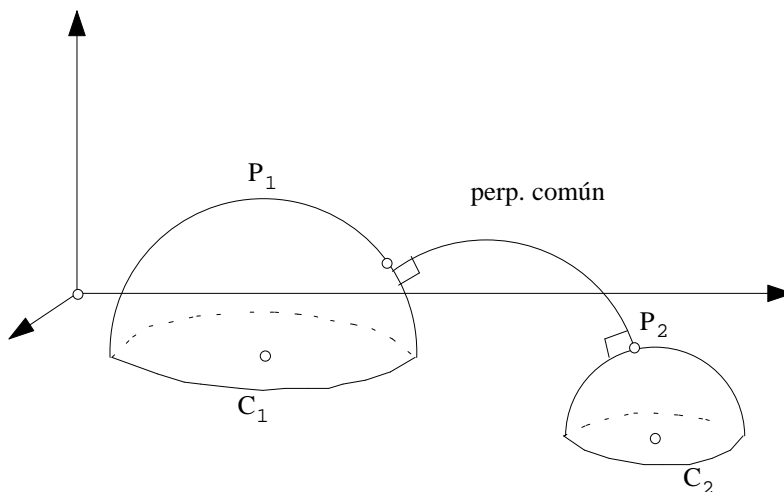


Fig. 29. Planos hiperbólicos.

TEOREMA 24 *La distancia entre circunferencias es la distancia hiperbólica entre los planos hiperbólicos que las tienen como infinito.*

*Demostración:* Sea  $\varphi$  una inversión que pone  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  concéntricas. Sea  $P$  este centro. Extendemos esta inversión del plano a una inversión de  $\mathbb{H}^3$  haciendo inversión respecto una esfera que tenga la circunferencia de inversión de  $\varphi$  como ecuador, es decir, como infinito.

Entonces

$$\delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \delta(\varphi\mathcal{C}_1, \varphi\mathcal{C}_2) = \left| \ln \frac{R}{r} \right|$$

donde  $R, r$  son los radios de  $\varphi\mathcal{C}_1$  y  $\varphi\mathcal{C}_2$ .

Pero, por otra parte, ¿cuál es la distancia hiperbólica entre los planos  $P_1, P_2$ ? La perpendicular común a  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  se transforma en la perpendicular común a  $\varphi(\mathcal{C}_1)$  y  $\varphi(\mathcal{C}_2)$  que, como son concéntricas, es un diámetro. Este diámetro corta  $\varphi(\mathcal{C}_1)$  en el punto  $A$  y  $\varphi(\mathcal{C}_2)$  en el punto  $B$ , ver figura 30.

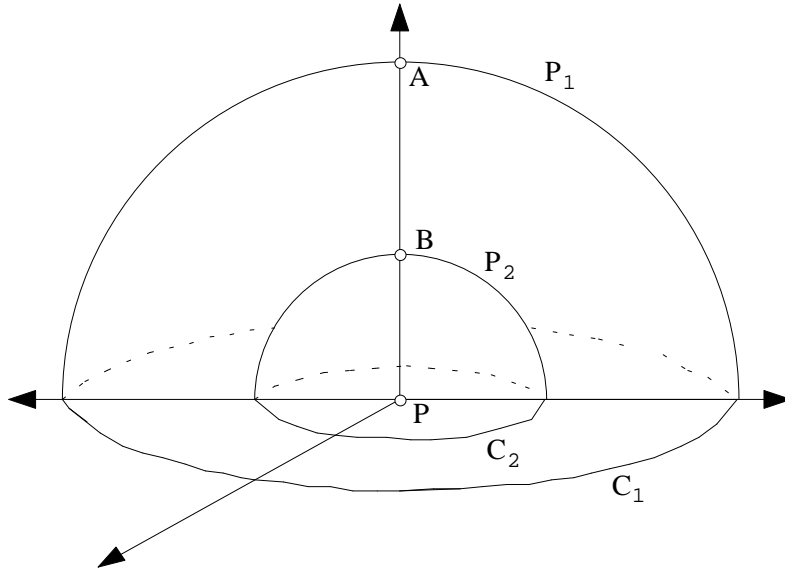


Fig. 30. Distancia entre planos hiperbólicos.

Así

$$d(P_1, P_2) = d(A, B) = \ln \frac{AP}{BP} = \ln \frac{R}{r} = \delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2),$$

como queríamos.  $\square$

Así pues, el hecho de que al calcular en la sección 9.1 la distancia entre circunferencias aparezcan cosenos hiperbólicos no es casualidad sino que nos dice que la manera natural de pensar estas cosas es desde el punto de vista de la geometría hiperbólica.

De hecho, si queremos pensar las circunferencias del plano como puntos de un cierto espacio, para hablar posteriormente de una cierta *distancia* entre ellos, nos aparece en seguida el semiespacio  $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z); z > 0\}$ , siendo  $(x, y)$  las coordenadas cartesianas del centro y  $z$  el radio (y por tanto positivo). En este conjunto que representa las circunferencias debemos introducir una distancia que queremos sea invariante por las transformaciones del plano euclídeo que conserven las circunferencias (en caso contrario no inducirían ninguna aplicación en  $\mathbb{H}^3$ ). Estas aplicaciones son las inversiones y, como es bien sabido en geometría diferencial, la métrica invariante por inversiones es la hiperbólica.

#### REFERENCIAS

- [1] D.A. BRANNAN, M.F. ESPLÉN, J.J. GRAY, *Geometry*, Cambridge University Press, 1999.
- [2] H. CARTAN, *Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*, Selecciones científicas, Torres Quevedo 7-9, Madrid, 1968.
- [3] H.S. COXETER, *Fundamentos de Geometría*, Limusa-Wiley, S.A., Méjico, 1971.
- [4] H.S. COXETER, S. L. GREITZER, *Redécouvrons la Géométrie*, Dunod, París, 1971.
- [5] M. DE GUZMÁN, *Aventuras matemáticas*, Labor, 1986.
- [6] B. HERRERA, A. REVENTÓS, *Geometría sintética*, En preparación, 2002.
- [7] B. IVERSEN, *Hyperbolic Geometry*, London Math. Soc., Student Texts 25, Cambridge University Press, 1992.
- [8] P. PUIG ADAM, *Curso de geometría métrica*, Tomo I, Euler editorial S.A., 1986.
- [9] A. REVENTÓS, *Geometría projectiva*, Colección Materials, Vol. 85, Ediciones UAB, 2000.
- [10] S. STAHL, *The Poincaré Half-Plane*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1993.
- [11] H. SCHWERDTFEGER, *Geometry of complex numbers*, Dover Publications, 1979.
- [12] A.S. SMOGORZHEVSKI, *Acerca de la geometría de Lobatchevski*, Lecciones populares de Matematicas, Editorial MIR, 1978.



- [13] W.P. THURSTON, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, 1997.

A. Reventós Tarrida  
Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
08193 Bellaterra, Barcelona  
Correo electrónico: [agusti@mat.uab.es](mailto:agusti@mat.uab.es)