Memòria sobre Geometria Diferencial real i complexa (1973)

Joan Girbau i Badó

MEMORIA SOBRE EL CONCEPTO, METODO Y FUENTES DE LA GEOMETRIA DIFERENCIAL

por

Juan Girbau Badó

Opositor a la Agregaduría de Geometría Diferencial de la Universidad Autónoma de Barcelona

Obra traduïda i comentada

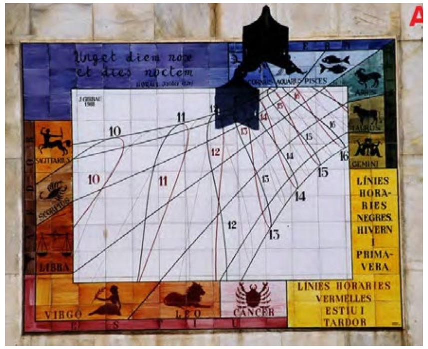
per

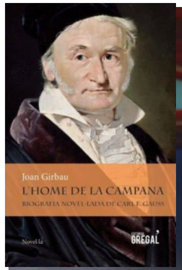
Agustí Reventós i **Sebastià Xambó**

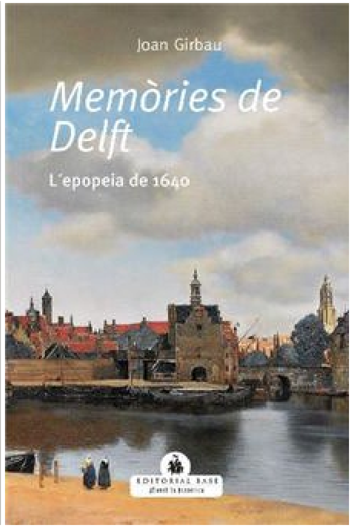
Novembre 2024

https://scm.iec.cat/publicacions/publicacions-electroniques-scm/

ÍNDEX GENERAL







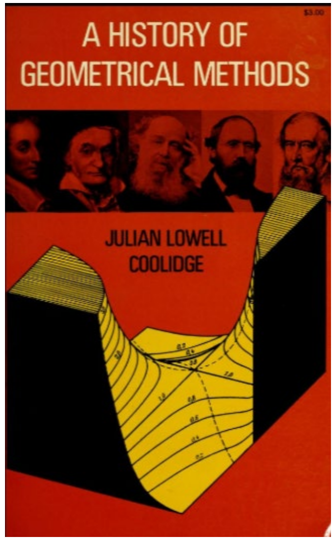
De la Introducció

La manca gairebé absoluta d’obres dedicades a la història de la Geometria Diferencial ha fet que la nostra tasca revestís gran dificultat i resultés en alguns moments aclaparadora.

Dos treballs han estat de gran utilitat:

A history of Geometrical Methods, J. L. Coolidge (1940)

Élie Cartan and his mathematical work, S. S. Chern i C. Chevalley (1952): “visió de conjunt de la immensa obra d’**Élie Cartan**”



A part d'aquests dos treballs, no hem comptat amb cap altra ajuda substancial, havent de recórrer en la majoria dels casos a la **lectura directa dels treballs originals** dels qui, al llarg dels anys, han anat forjant la geometria diferencial.

Citacions a la Part I (p 27-121*):

176 notes bibliogràfiques

$\sim$ 135 autors

25 articles publicats als *Annals of Mathemetics*

* Aquesta numeració es refereix a la de la paginació de l'arxiu pdf

Citacions a la Part II (p 135-180)

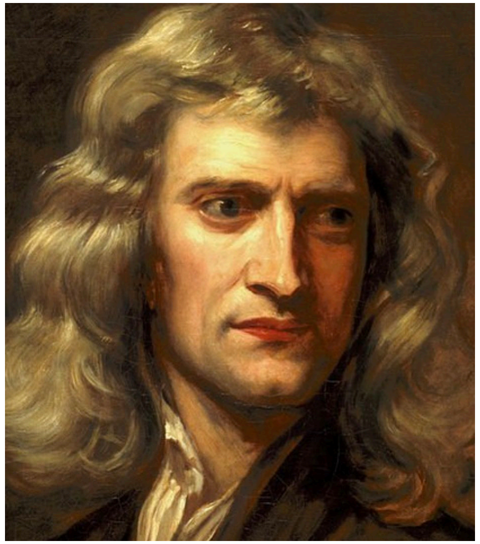
77 notes bibliogràfiques

$\sim$ 69 autors

13 articles publicats als *Annals of Mathemetics*

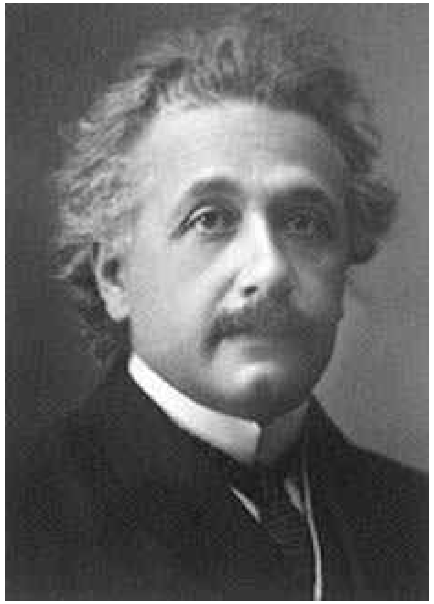
Índex I

Noms que apareixen a l'Índex de contingut I

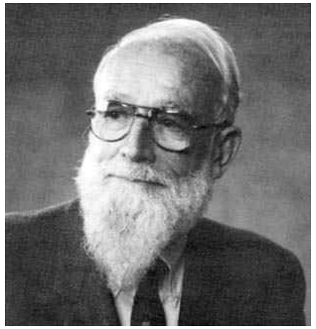



Newton, Gauss,
Riemann, Lie,
Killing, Cartan,
Einstein,
De Rham, Morse

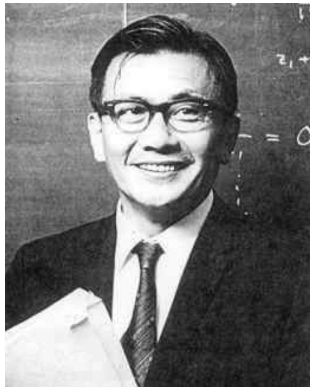




Índex II



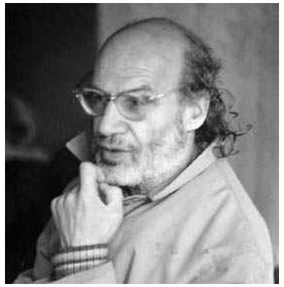
D. Spencer



K. Kodaira

F. Hirzebruch

J.-P. Serre

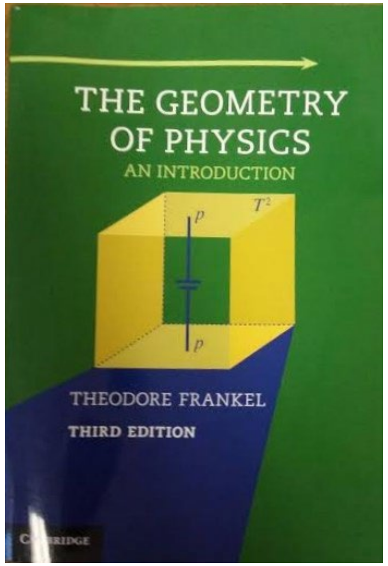


A. Grothendieck

Noms que apareixen a l’Índex de contingut II







Chern (classes de),
Kähler (varietats kählerianes),
Eckmann, Guggenheimer,
Nakano, Frankel (conjectura de).

C. Neumann, E. Levi


Música d'esferes (I)

◊10 Jean Meusnier (1785): si les curvatures principals en tots els punts d'una superfície són iguals, la superfície és un esfera o un pla.

◊14 Gauss (1827) usa l'esfera unitat, via l'*aplicació de Gauss*, per definir la curvatura en un punt, i obté una expressió analítica que li permet demostrar el *teorema egregi*.

Teorema de Heinrich Liebmann (1900):
◊29 Una superfície connexa de $\mathbb{R}^3$, tancada i amb curvatura constant positiva, és una esfera.

El títol de la citació, *Über die Krümmung*, és incomplet; ha de ser *Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung*.

Notacions

M	varietat riemanniana (C^∞) connexa [i compacte]
$n \geq 2$	dimensión de M (sovint s'escriu M^n)
g	mètrica de M.
$S_r^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$	esfera de dimensión n i radi r amb la mètrica euclidiana

$S^n = S_1^n$

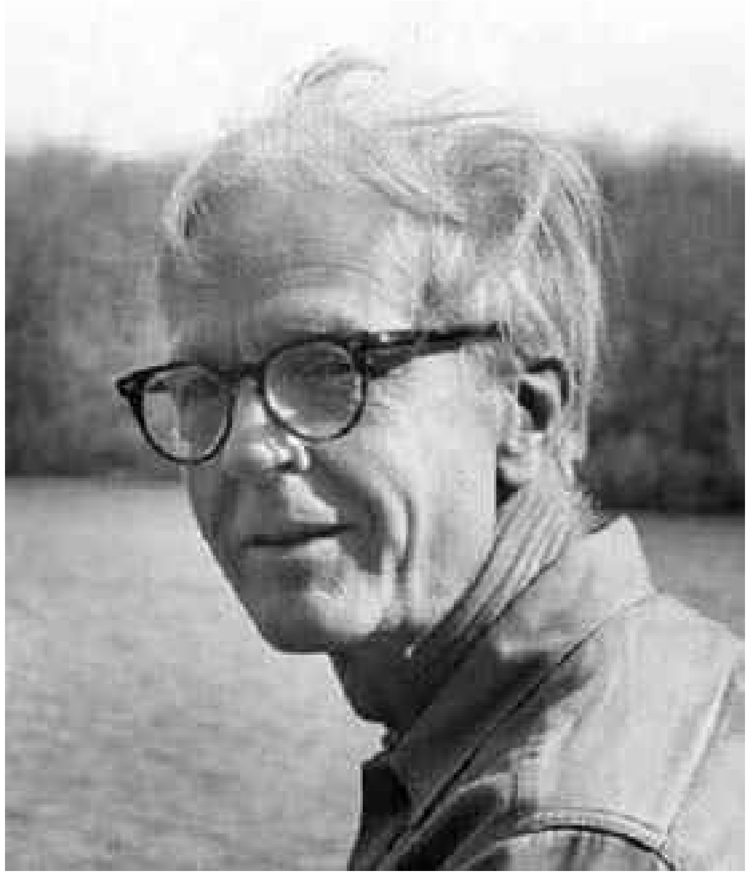
Teorema de Heinz Hopf (1926):
◊ 49 Si M és completa, simplement connexa i de curvatura constant $k^2 > 0$, és isomètrica a $S^n_{1/k}$.

Un any abans havia provat (◊ 163) que si M és completa amb curvatura seccional constant k, llavors el recobriment universal és una esfera si $k > 0$ i un espai hiperbòlic si $k < 0$.

Classes d’Stiefel-Whitney (1935-37):

Usen els fibrats de fibra esfèrica (◊ 77-80). Teorema de classificació.

Michael Stiefel



Hassler Whitney

Teorema de H. E. Rauch (1951):

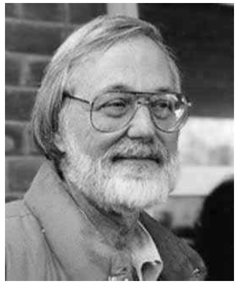
◊ 105 Si *M* és *h*-pinçada,* on *h* és l'arrel de l'equació sin $\pi\sqrt{h} = \sqrt{h}/2$ ($h \approx 3/4$), el recobriment universal de *M* és homeomorf a S^n.

Teorema de l'esfera. Si a més *M* és simplement connexa, llavors *M* és homeomorfa a una esfera.

* És a dir, existeix una constant positiva *A* tal que $Ah \leq K \leq A$, *K* la curvatura seccional.

Harry Rauch

"No sé si *h és la millor constant possible*"



Teorema de J. Milnor (1956):

◊ 117 L'esfera S^7 admet diverses estructures diferenciables diferents i no difeomorfes.

Si M és compacta, **Lichnerowicz** havia demostrat, suposant que $\mathrm{Ric}(g) - kg \geq 0$ per un cert escalar $k \geq 0$, que el primer valor propi no nul λ_1 de $\Delta f = \lambda f$ (Δ el laplacià) satisfà $\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1} k$.

(◊ 123) H. Weyl

Teorema d'Obata (1962):

◊ 124 Si $\lambda_1 = \frac{n}{n-1} k$, llavors M és isomètrica a S^n.

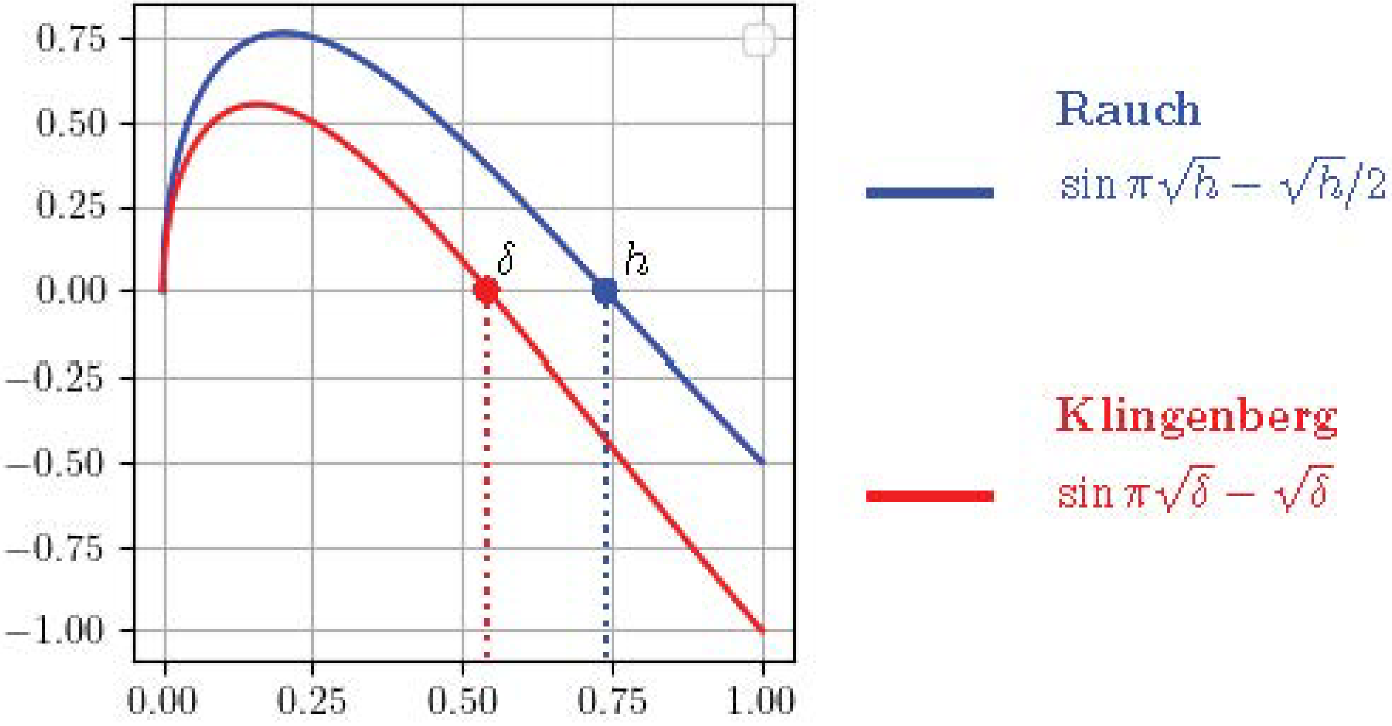
Teorema de Klingenberg (1959):

◊ 127 Si n és *parell* i M és completa, simplement connexa, i δ-pinçada, amb δ igual a l'arrel de l'equació $\sin \pi\sqrt{\delta} = \sqrt{\delta}$ $(\delta \approx 0{,}54)$, M és homeomorfa a una esfera.

No se sap si el valor de δ es pot reduir encara més.

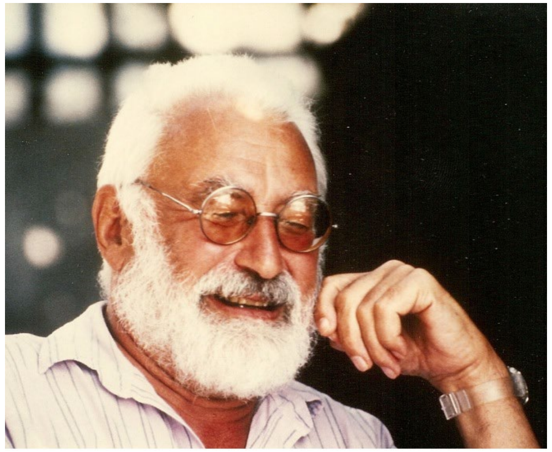
És un problema destacat decidir si un teorema similar és valid per a varietats simplement connexes de *dimensió senar*.

El mètode, molt diferent del de Rauch, es basa en aplicar la teoria de Morse.



La fita δ = 0,54 de Klingenberg seria rebaixada un any més tard independentment per Topogonov (◊ 131) i Berger (◊ 130) a qualsevol nombre k > ¼.

Berger demostraria a més que aquesta fita no es pot rebaixar mes.



Exemple de Kervaire (1960)

◊ 135 Una varietat topològica de dimensió 10 que no admet cap estructura diferenciable.

En la construcció tenen un paper destacat les esferes S^5 i S^9.

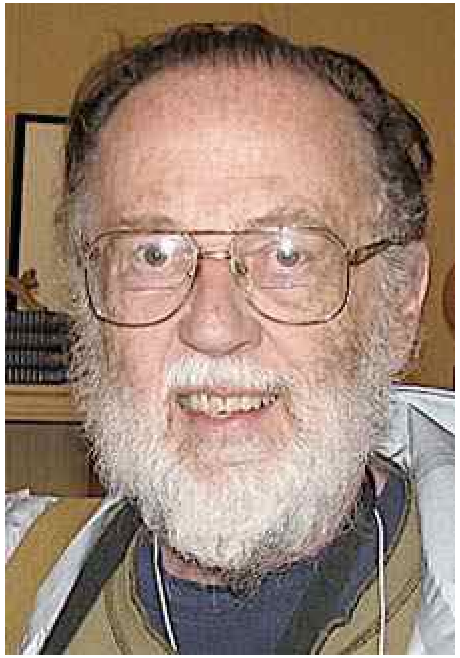
Treballs relacionats amb la conjectura de Poincaré:
«Una varietat polièdrica, compacta, simplement connexa de dimensió 3, sense vora, és necessàriament homeomorfa a l'esfera S^3»;

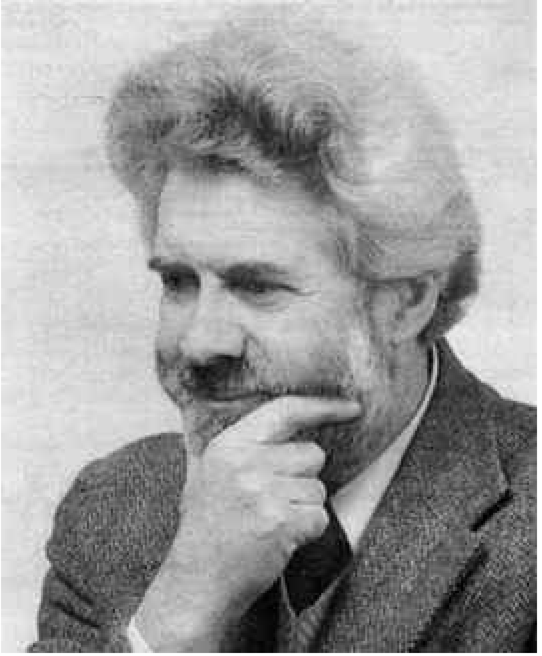
i amb les seva generalitzacions [Top-n i Dif-n]: «Una varietat M^n que tingui el mateix tipus d'homotopia que una esfera, és necessàriament homeomorfa a l'esfera S^n»

Top-($n \geq 7$): Stallings 1960 (◊ 136)

Top-($n \geq 5$): Zeeman 1961 (◊ 137);

Dif-($n \geq 4$): Smale 1961 (◊ 139); ...





Anotacions Part I: exemples

▷**9**
Fa referència al comentari de la memòria a l'article de Chern (⋄ 115)
On curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold,
(1955) en què prova que si M és completa, δ-pinçada, i $n = 2$ o 4, llavors $\chi(M)$ és positiva, i conjectura que l'afirmació és vàlida per a tot $n = 2m$ ("actualment encara no resolta, que nosaltres sapiguem").

9 (Conjectura de Chern) La conjectura no ha estat tancada. El teorema de l'esfera la implica per a varietats δ-pinçades amb δ = 1/4.
Exemples en què es compleix: esferes S^{2m} ($\chi = 2$); $P_{\mathbf{C}}^{n}$ ($\chi = n+1$); $P_{\mathbf{H}}^{n}$ ($\chi = 2(n+1)$); i $P_{\mathbf{O}}^{2}$ ($\chi = 3$).

▷**10**

Fa referència a l'article de Milnor (◊ 117)

On manifolds homeomorphic to the 7-sphere (1956).

("abans d'aquest treball no es coneixia cap exemple de varietat topològica amb dues estructures diferenciables no difeomorfes").

10 (Esferes exòtiques) Aquest treball de Milnor va donar peu a l'estudi de varietats homeomorfes però no difeomorfes, i és molt citat en la teoria del cobordisme. Juntament amb Kervaire, el propi Milnor va culminar la classificació de les esferes exòtiques el 1963:

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 77, No. 3, May, 1963

GROUPS OF HOMOTOPY SPHERES: I

BY MICHEL A. KERVAIRE AND JOHN W. MILNOR

THEOREM 1.2. *For $n \neq 3$ the group Θ_n is finite.*

(Our methods break down for the case $n = 3$. However, if one assumes the Poincaré hypothesis, then it can be shown that $\Theta_3 = 0$.)

More detailed information about these groups will be given in Part II. For example, for $n = 1, 2, 3, \cdots, 18$, it will be shown that the order of the group Θ_n is respectively:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$[\Theta_n]$	1	1	1	1	1	1	$\boxed{28}$	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16.

▷**13**

Fa referència a dos articles de Klingenberg ($\diamond$ 134)

Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positive Krümmung (1961) i *Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach oben beschränkter Krümmung* (1962) en què es prova que si M és simplement connexa de dimensió imparell i $\frac{1}{4}$-pinçada, llavors és homeomorfa a una esfera.

13 (Variant diferenciable del problema de l'esfera)

La versió diferenciable d'aquest teorema (canviar homeomorfisme per difeomorfisme) va ser provada el 2009 per Simon Brendle i Richard Schoen utilitzant la tècnica del flux de Ricci, [13].

Vegeu un article expositiu sobre aquest tema, dels dos mateixos Autors (2011), [14].

▷**14**

Així com en el cas de dimensió parell el resultat de Berger no es pot millorar, ja que els espais projectius complexos i quaterniònics constitueixen exemples de varietats $\frac{1}{4}$-pinçades no homeomorfes a una esfera, en dimensió imparell no se sap actualment si el resultat de Klingenberg pot ser o no millorat rebaixant la cota del δ-pinçament.

14 (Evolució del problema del pinçament).

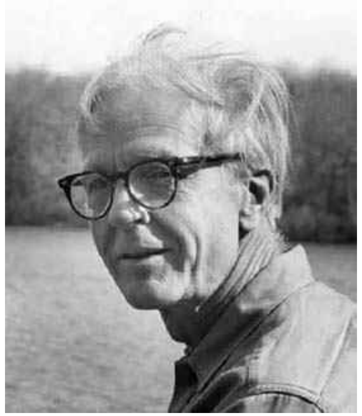
Aquesta cota del pinçament de què parla Girbau no es va poder millorar fins al 1994, quan Abresch i Meyer van demostrar a [15] que el resultat de Klingenberg era cert si

$$\frac{\delta}{\Delta} > \frac{1}{4(1+10^{-6})},$$

on $0 < \delta \leq K \leq \Delta$, K la curvatura seccional.

Música d’esferes II

Anotacions Part II, resum de ▷**2** (L’esfera S^6)



1936, Whitney va provar que tota varietat diferenciable admet una estructura de varietat analítica real (◊ 75).

1947, Eheresmann: *Sur les variétés presque complexes* (Bull Soc Math France). Noció d’estructura quasi complexa, J. Mostra que S^6 n’admet una (però no arriba a decidir si és *integrable*).

1947, Adrian Kirchhoff: usa els octonions per construir una J a S^6 (diguem-ne $\boldsymbol{j}$):

Mirem S^6 com l'esfera de radi 1 dins els octonions imaginaris (part real nul·la).

Si $x \in S^6 \subset \mathrm{Im}(\mathbf{O}) \simeq \mathbb{R}^7, T_x S^6 \simeq x^\perp$ i $\boldsymbol{j}_x\colon T_x S^6 \to T_x S^6$ és l'aplicació $v \mapsto xv$ ($\boldsymbol{j}_x^2 = -\mathrm{Id}$ ja que $x^2 = -1$).

El 1948, Hopf, per analogia amb Whitney-1936, es pregunta si una M^{2m} orientable admet una estructura complexa ($\star$ 20) .

En el mateix treball es mostra que la resposta és negativa en general, i en particular per S^4 i S^8.

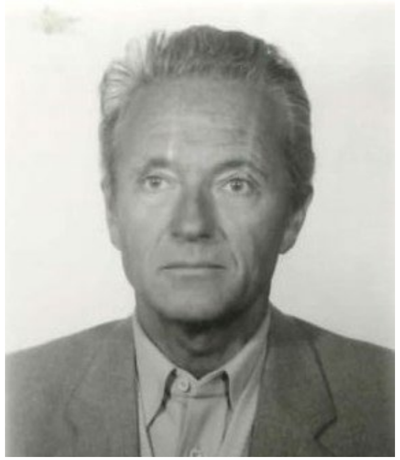
Comenta que no ha pogut determinar si valdrà el mateix per $S^{2m}, m \neq 1,2,4$ (*Problema de Hopf*).

1951, Eckman-Fröhlicher ($\star$ 3):

Si J és una estructura quasi complexa, el tensor N definit per

$$N(X,Y) = 2[JX,JY] - 2[X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y]$$

s'anomena ***tensor de torsió*** de J.



Teorema: J és integrable si i només si $N = 0$.

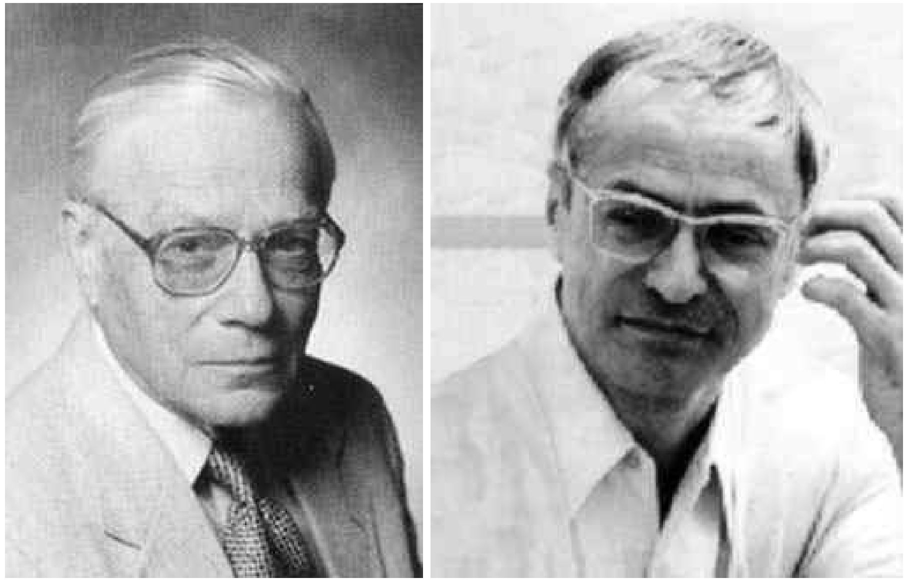
En el mateix treball proven que ***j*** no és integrable.

Independentment, també ho proven Ehresmann-Libermann-1951.

Vegeu també Newlander-Nirenberg-1957 ($\star$ 4).

(d'August Newlander no he trobat cap foto)

Teorema de Borel-Serre (1951):
($\star$ 9) S^2 i S^6 són les úniques esferes
que admeten una estructura quasi complexa.



La de S^2 és integrable (esfera de Riemann $\simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$).

L'estructura quasi complexa j de S^6
no és integrable.

1966, van de Ven ($\star$ 10) : *On the Chern numbers of certain complex and almost complex manifolds.* Dona exemples de varietats quasi complexes compactes de dimensió 4 que no admeten estructures complexes. Usa el teorema de l'índex.

Pot tenir S^6 alguna estructura quasi-complexa integrable?

Segons Alfred Adler (1969, ⋆ 8) no en té cap i a la memòria aquest resultat es dona per bo.

Alfred Adler: The Second Fundamental Form of a Kahler Metric
American Journal of Mathematics, Apr., 1967, Vol. 89, No. 2, pp. 260-274

Alfred Adler: The Second Fundamental Forms of S^6 and $P^n(C)$
American Journal of Mathematics, Vol. 91, No. 3 (Jul., 1969), pp. 657-670

THEOREM. *S^6 does not admit a complex structure.*

WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia

List of incomplete proofs

Aquesta pàgina no
Està a VIQUIPÈDIA!!

- Complex structures on the 6-sphere. In 1969 Alfred Adler published a paper in the American Journal of Mathematics claiming that the 6-sphere has no complex structure. His argument was incomplete, and this is (as of 2016) still a major open problem.

(cap referència on trobar perquè es considera un ‘argument incomplet’)

1993, Yau: *Open problems in geometry*

Problema 52: Proveu que tota varietat quasi complexa compacta de dimensió real ≥ 6 admet una estructura complexa integrable.

Encara no resolt per l'esfera S^6 (no cita Adler).

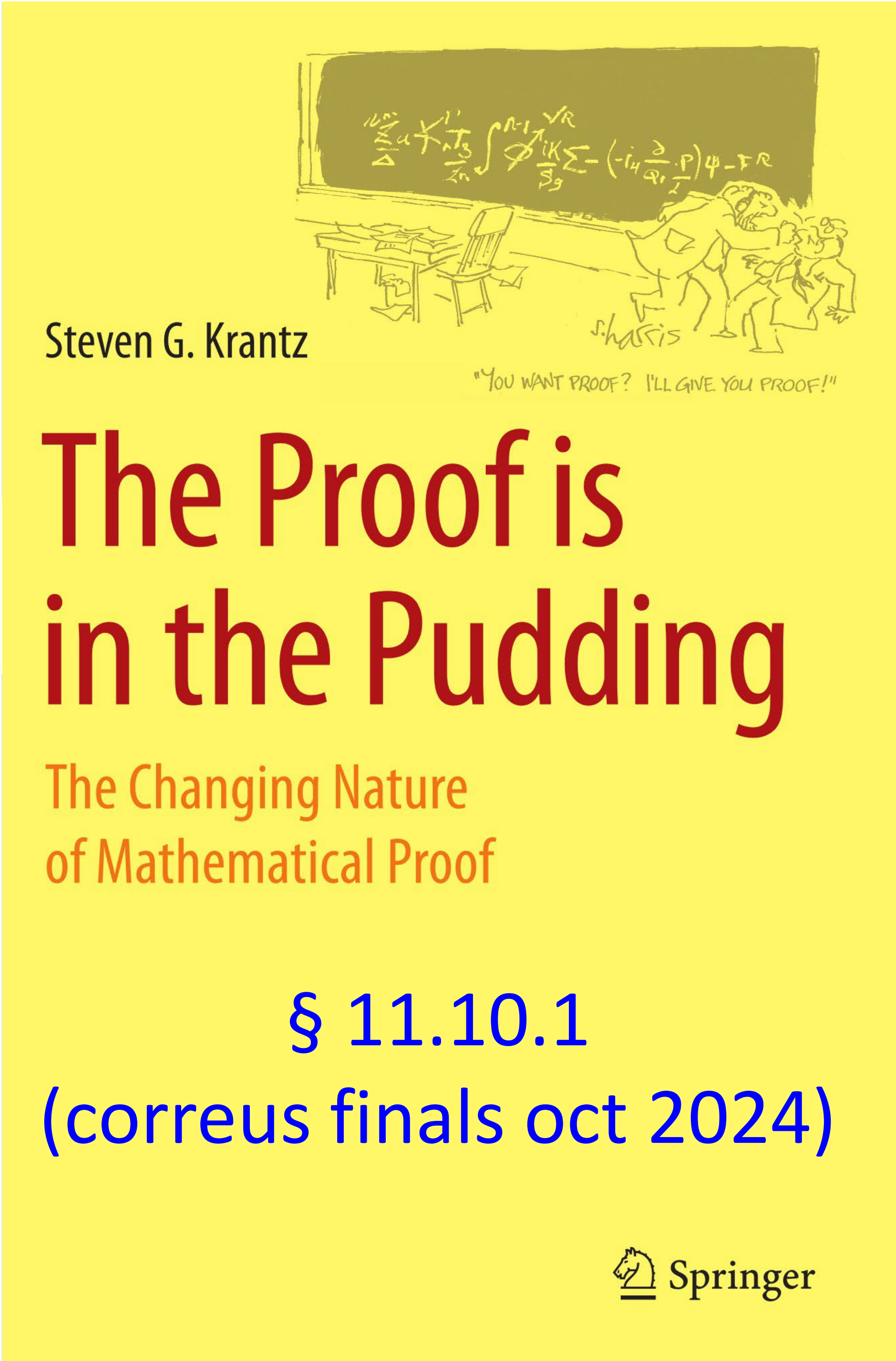
Es podria resoldre construint un flux parabòlic en l'espai de les estructures quasi complexes per deformar una estructura quasi-complexa donada en una d'integrable.

IV. Kähler geometry

52. Prove that every compact almost complex manifold with dimension ≥ 3 admits an integrable complex structure. This question is still unsolved for the six-dimensional sphere. One approach is to form a parabolic flow in the space of almost complex structures to deform an almost complex structure to an integrable one.

1987, LeBrun: *Orthogonal complex structures on* S^6 [no existeixen]
Segons alguns autors, ja ho havia demostrat Blanchard el 1953.

2003, Chern: *On the non-existence of a complex structure on the six-sphere.* Preprint [v. Bryant-2014 més avall].



§ 11.10.1
(correus finals oct 2024)

2011, Krantz. L'esfera de sis dimensions seria un exemple interessant i significatiu si de fet tingués una estructura complexa. Adler va afirmar que no en tenia cap, i va publicar el seu article en una revista de primer nivell [...] Però la gent [*sic*] no ha acceptat la seva prova [*cap referència al respecte*].

Durant 39 anys, Adler ha mantingut que la seva prova es correcta. Ara [ca 2011] esta jubilat [...] i ningú ha estat capaç de senyalar on estava l'error. Finalment, fa uns 5 anys [és a dir, ca 2006], Yum-Tong Siu, de Harvard, va escriure un article en el qual explicava precisament on estava l'error [*??*]. Però el document d'Adler no s'ha reparat mai, i fins avui ningú no sap decidir si l'afirmació es vertadera o falsa.

2014 v1, 2021 v2: Bryant: *Chern’s study of almost-complex structures on the six-sphere*.

No cita Adler-1969.

Tot i que [Chern] no va resoldre el problema (*actualment encara obert*) de determinar si existeix una estructura quasi complexa integrable a S^6, va demostrar una identitat significativa que resol la pregunta per a una classe interessant d'estructures quasi complexes a S^6.

2015, Etesi: *Complex structure on the six dimensional sphere from a spontaneous symmetry breaking*. J Math Phys 56 (21 p)

9 versions arXiv entre 2005 i 2015, v2 retirada.

Posa Adler-1969 a les referències però no en diu res en tot l'article.

2016, Atiyah: *The non-existent complex 6-sphere*, https://arxiv.org/abs/1610.09366 (8 p)
"una breu demostració de la conjectura que S^6 no té cap estructura complexa".

2018, Atiyah: *Understanding the 6-dimensional sphere*. Inclòs a ***Foundations of Mathematics and Physics One Century After Hilbert: New Perspectives*** (J. Kouneiher, ed.), pp. 129–133
Una demostració "més transparent" d'Atiyah-2016. "Utilitzo l'exemple de la l'esfera S^6 per un nova manera de veure molts problemes de la física. En el futur espero que aquestes idees proporcionin una perspectiva diferent, amb beneficis substancials en tots els àmbits".

2018, Agricola-et4: *On the history of the Hopf problem*. Differential Geometry and its Applications (9 p).

Conté informació interessant.

No cita Adler.

Sobre Etesi-2015 i Atiyah-2016: “entre els experts no hi ha consens”.

2019, Xambó: “Sir Michael Atiyah, in memoriam”, *SCM/Notícies* **45**, 47-56.

“... potser la inspiració que A. Connes va trobar a l’article *Groups of odd order* [desacreditat] per escriure *On an idea of Michael Atiyah* la trobarà algú més a l’article sobre S^6” i escriurà ...

2019, Baez: “Book review: *Foundations of Mathematics and Physics One Century After Hilbert: New Perspectives*”

Aquest ressenya reconeix el valor de diversos articles (Gromov, Connes, Witten, Penrose, Smolin, ...), i acaba així:

“Dos inconvenients del llibre són una gran quantitat d'errors tipogràfics i un article de Michael Atiyah que afirma falsament demostrar una famosa conjectura oberta, és a dir, que no existeix una estructura complexa a la 6-esfera. Una millor edició i arbitratge podria haver detectat aquests problemes.”

2022 v1, 2024 v2, S. R. Simanca (arXiv): S^6 (or any of $S^2 \times S^4$, $S^2 \times S^6$, or $S^6 \times S^6$, respectively) *is not diffeomorphic to a complex manifold*.

2024, Etesi (arXiv v6; la v1 és de 2015):
“The complex structure on the six dimensional sphere”.
A diferència d’Etesi-2015, la demostració no usa física matemàtica, però hi ha importants càlculs que no es donen explícitament per ser ‘massa complicats’.

A MathOverflow hi ha un comentari de R. Bryant a la v1: “l’afirmació bàsica d’aquest article, és a dir, que certa classe de conjugació de G_2 és una subvarietat complexa respecte a (una de les) estructures complexes invariants per l’esquerra de Samelson a G_2, es pot veure fàcilment, per càlcul directe, que és falsa”.

Resum

El Problema 52 de Yau aposta per l'existència d'una estructura complexa a S^6.

G. Etesi n'ha publicat una demostració (2015), i una altra l'octubre de 2024 (prepublicació), contestades d'una manera poc explícita fins on puc albirar.

La majoria es decanta per la no existència, i en casos particulars (com ara el cas de J orgonal) la demostració és acceptada.

Projecte

Aplicar mètodes de formalització matemàtica, per exemple amb Lean, començant preferentment pels articles Etesi-2024 i Adler-1969.

AR (10 setembre 2023)

Has tingut una idea magnífica amb la digitalització de la memòria «concepto mètodo y fuentes» (com no s'ha m'ha ocorregut a mi!?), ja que la guardo com a **incunable**.

Si et puc ajudar en la versió castellana o la catalana, si consideres que val la pena la traducció, ja m'ho diràs. Entre **bici** i **néts** encara em queda temps.

Moltes gràcies!