Memòria sobre Geometria Diferencial real i complexa (1973)

Joan Girbau i Badó

Obra traduïda i comentada

per

Agustí Reventós i **Sebastià Xambó**

Novembre 2024

Índex general

Presentació

Pròleg

Notes biogràfiques

Memòria sobre el concepte, mètode i fonts de la Geometria Diferencial

Introducció

Part I
Geometria diferencial real

Índex de la Part I

Part II
Geometria diferencial complexa

Índex de la Part II

Presentació

Joaquim Bruna

Joan Girbau i Badó (1942-2023) fou un membre destacat de la comunitat matemàtica catalana. Catedràtic de Geometria Diferencial a la Universitat Autònoma de Barcelona, membre de l'Institut d'Estudis Catalans, president de la Societat Catalana de Matemàtiques, fou una persona que tocà moltes tecles i que ha deixat una emprenta profunda en molts de nosaltres. Una nota biogràfica que trobareu en aquesta publicació us farà entendre l'abast de la seva influència i el perquè molts el considerem un petit geni la presència del qual hem tingut la sort de gaudir.

Aquesta publicació neix d'una iniciativa d'en Sebastià Xambó, un altre membre destacat de la nostra comunitat. En Joan Girbau va opositar a una plaça d'Agregat de Geometria Diferencial de la UAB l'any 1974. En aquell temps les oposicions es feien totes a Madrid, i entre altres moltes coses calia presentar, en castellà, una «Memòria sobre el concepto, método y fuentes» de la matèria que toqués, en aquest cas la Geometria Diferencial. Una de les característiques d'en Joan Girbau és que qualsevol cosa que es proposés la feia a fons i perfecte. Bé, el fet és que en realitat va escriure una història conceptual de la Geometria Diferencial, completíssima, que abasta els darrers tres-cents anys. Cal dir que aquesta memòria va servir de font d'inspiració d'altres memòries posteriors del mateix estil. Recentment, en Xambó va redescobrir aquesta memòria i en va destacar la vàlua com a llibre d'història de les Matemàtiques, tot suggerint la conveniència de publicar-la en català. Amb aquesta finalitat va engrescar en el projecte l'Agustí Reventós, segurament la persona que millor va conèixer científicament Joan Girbau.

Aquesta iniciativa ha coincidit en el temps amb un estat d'opinió dins la SCM, segons el qual cal reforçar l'edició de llibres de Matemàtiques en català. El catàleg existent al web matematiquesencatala.iec.cat mostra que hi ha molt pocs llibres de matemàtiques en català en l'àmbit universitari. Coincidint amb l'apreciació d'en Xambó sobre la vàlua de la memòria, la decisió de donar suport des de l'IEC i des de la SCM a aquesta iniciativa, publicant-la a la sèrie «Publicacions de la SCM», ha estat fàcil i immediata.

Sebastià Xambó i Agustí Reventós no solament han traduït i editat en LaTeX la memòria d'en Girbau, sinó que també han actuat com a curadors, en particular posant al dia les moltes cites de l'obra original sobre problemes oberts de l'àrea. La seva feina, feta d'una forma entusiasta i desinteressada, ha estat magnífica, i no em resta sinó expressar el nostre reconeixement en nom de la SCM.

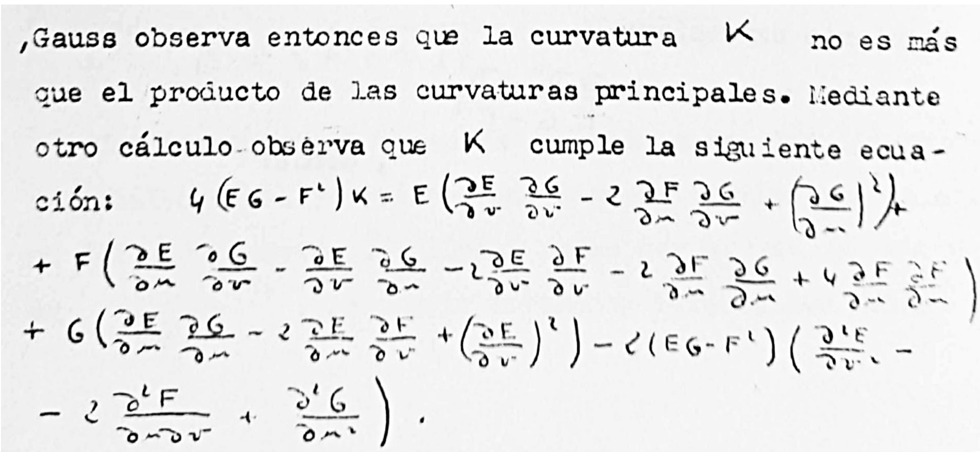
Joaquim Bruna i Floris
Delegat de l'IEC a la SCM
Editor de Publicacions de la SCM
Barcelona, novembre del 2024

Pròleg

Sebastià Xambó Descamps

Ens plau oferir el resultat d'una iniciativa que va quallar per incidències favorables de l'atzar.

Durant el curs 2022-23, vaig «salvar», ordenant llibres i papers, la memòria d'oposicions d'en Joan Girbau a una Agregaduria de Geometria Diferencial a la UAB (1973), GD en el que segueix. L'autor me n'havia donat una fotocòpia, que vaig enquadernar jo mateix (una pràctica habitual a l'època). Fullejar GD de nou va ser com reviure un període irrepetible, un temps en què l'escriptura es feia amb «màquines d'escriure» i les fórmules s'escrivien a mà, havent de tenir la previsió, en anar teclejant, de deixar-hi espais adients. Encara avui em sembla escoltar la veu d'en Girbau a la UAB explicant sovint els progressos que anava fent mentre preparava aquells materials.



,Gauss observa entonces que la curvatura K no es más que el producto de las curvaturas principales. Mediante otro cálculo observa que K cumple la siguiente ecuación:

$$4(EG-F^2)K = E\left(\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right) + F\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} + 4\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial u}\right) + G\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right) - 2(EG-F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right).$$

Figura 1: Detall de la pàgina 16 de la primera part de GD.

El juliol de 2022 s'havia celebrat l'ICM-2022, i em va impactar profundament la conferència «Combinatorics and Hodge theory», de June Huh, corresponent a la recepció de la «Medalla Fields». Per mi va ser el descobriment d'unes connexions insospitades i meravelloses, potser llargament intuïdes, entre idees matemàtiques de filiacions molt diverses.

Això m'impulsà a intentar formar-me una concepció més precisa d'aquesta xarxa de connexions, una exploració l'objecte de la qual era trobar «el discret encant de la geometria de Kähler», ja que June Huh es referia al formalisme principal de les seves contribucions a la combinatòria com a «Kähler package». I em va semblar que un excel·lent ingredient per aconseguir-la seria rellegir la GD, sobretot la segona part (dedicada a Geometria Complexa i en particular a les «varietats de Kähler»), que és la via més productiva de relacionar la geometria algebraica i la geometria complexa.

El 2023 vaig parlar del «discret encant» al Seminari de Geometria Algebraica de Barcelona (12 de febrer), i el dia 16 de juny, a la conferència «Algebraic and topological interplay of algebraic varieties», celebrada a Jaca. En previsió d'escriure un article per a les actes d'aquesta conferència, vaig decidir fer una còpia digital personal de GD i usar-la per fer-ne una versió en LaTeX. Quan ja començava a tenir algunes pàgines, el 10 de setembre de 2023 vaig escriure a l'Agustí Reventós (AR) el següent:

> He començat a digitalitzar la memòria d'en Joan Girbau per a l'agregaduria de geometria diferencial de la UAB (1973) amb la idea de dedicarhi les estones que pugui. Adjunto les primeres pàgines. Potser en podríem parlar algun dia. La possible traducció al català, si arribés a ser desitjable, la deixo per a quan s'acabi la transcripció.

Va contestar el mateix dia:

> Has tingut una idea magnífica amb la digitalització de la memòria «concepto mètodo y fuentes» (com no se m'ha ocorregut a mi!?), ja que la guardo com a incunable. Si et puc ajudar en la versió castellana o la catalana, si consideres que val la pena la traducció, ja m'ho diràs. Entre bici i nets encara em queda temps.

(Adjuntava una foto de la seva bici «Megamo» i deia que acabava de pujar a Gombrèn! Ben mirat potser no té gaire mèrit, perquè deia que la bici «va sola».)

L'endemà, nou missatge a AR amb relació al qualificatiu d'incunable:

> En revisar la memòria d'en Girbau vaig pensar més o menys el mateix i vaig decidir fer-ne una relectura aprofundida passant-la a digital.
>
> Ara tinc les dues primeres seccions de la part I. Quan en tingui unes quantes més, t'enviaré el resultat i així podrem parlar d'alguna cosa concreta.

> Encara que potser ara és prematur, també caldria pensar en si convindria posar-hi notes o comentaris, potser agrupades al final, o al final de cada secció. A més, es compleix el 50è aniversari d'aquesta memòria, i no sé si es podria pensar a incloure un capítol addicional sobre l'evolució de la GD en aquest període, encara que només fos citant bibliografia apropiada.

El dia 24 de setembre, li vaig enviar el resultat de transcriure les primeres 85 pàgines de GD. Per exemple, el retall de la Figura 1 apareixia així:

> Gauss observa entonces que la curvatura K no es más que el producto de las curvaturas principales. Mediante otro cálculo observa que K cumple la siguiente ecuación:
>
> $$\begin{aligned}4(EG-F^2)/K = {} & E(\partial_v E\partial_v G - 2\partial_u F\partial_v G + (\partial_u G)^2)\\ & + F(\partial_u E\partial_v G - \partial_v E\partial_u G - 2\partial_v E\partial_v F - 2\partial_u F\partial_u G + 4(\partial_u F)^2)\\ & + G(\partial_u E\partial_u G - 2\partial_u E\partial_v F + (\partial_v E)^2)\\ & - 2(EG-F^2)(\partial_v^2 E - 2\partial_u\partial_v F + \partial_u^2 G).\end{aligned}$$

Figura 2: Detall de la versió LaTeX de GD, pàgina 11 de la primera part.

Així vam prosseguir, on una tasca important era anar introduint les esmenes que AR m'anava enviant. Això va seguir fins a acabar la tasca la primavera de 2024, moment en què també vaig acabar l'article «Discrete Charms of Kähler Geometry» i el vaig sotmetre per a les actes de la conferència de Jaca.

D'ençà de llavors, vam decidir fer-ne una traducció al català, per si la SCM trobés adient posar-la al portal de materials digitals, i vam escriure «Anotacions dels curadors-traductors» al final de cada part. A més, AR va escriure, en paral·lel, una biografia de Joan Girbau, amb l'ajut inestimable de Jaume Girbau, el seu hereu, i de Montserrat Roura, l'esposa d'en Joan.

En resum, el que trobareu a les pàgines que segueixen és una breu semblança de Joan Girbau i, tot seguit, traduccions al català de les dues parts de la GD, cadascuna amb unes anotacions addicionals que inclouen una bibliografia i un índex. Aquestes bibliografies s'afegeixen a les referències que GD conté en forma de més de dues-centes cinquanta notes a peu de pàgina. Esperem que el resultat pugui servir per apreciar una molt distingida faceta matemàtica de Joan Girbau, ja que amb uns medis força precaris, i en un temps relativament breu, va aconseguir una instantània de la GD (real i complexa) de fa cinquanta anys que continuem trobant il·luminadora en tots els seus detalls: una proesa!

Barcelona, novembre de 2024

Joan Girbau Badó (1942-2023)
Notes biogràfiques

Agustí Reventós

En Joan Girbau va néixer a Barcelona el 14 de març de 1942, fill de Jaume Girbau i Anna Badó, fruiters. Es va casar amb la seva companya de curs Montserrat Roura l'u de juliol 1968 i van tenir 3 fills: en Jaume, l'Oriol i en Joaquim.

El 1959, quan tenia doncs 17 anys, va morir el seu pare i es va fer càrrec del negoci familiar. Era l'any en què començava la carrera de Matemàtiques, de manera que va haver de compaginar-la amb el negoci. Anava a comprar la fruita al Born a les 4 del matí i després anava a classe. Un aspecte de la seva responsabilitat és que es va fer càrrec de la plantació de pomes que tenien a Osca. Havia resultat deficitària fins aquell moment i aviat la va convertir en molt rendible. Aquest èxit no l'atribuïa a la seva gestió, que ens consta que va ser molt metòdica, sinó a la mateixa evolució del mercat.

Dels seus estudis de Matemàtiques, la família conserva una col·lecció de més de quaranta blocs apaïsats de dimensions 155 mm ×105 mm (aproximadament DIN A6), escrits a doble cara, que contenen resums de les diferents assignatures que va anar cursant durant els estudis de Matemàtiques (Figura 1).

Figura 1: Blocs de resums de les assignatures de la carrera de Matemàtiques i primera pàgina d'un bloc de Geometria diferencial.

Es va llicenciar en Ciències (Secció Matemàtiques) a la Universitat de Barcelona el 1964 amb la qualificació d'Excel·lent i Premi Extraordinari. Del 1964 al 1970 fou professor, primer Ajudant i després Adjunt, de la Universitat de Barcelona. Del 1970 al 1971 va ser becari al Collège de France, on va treballar amb el professor André Lichnerowicz. Assisteix al curs sobre Àlgebres de Lie que va impartir el professor Jacques Dixmier, del qual escriu acurades notes.

De tornada a Barcelona, llegeix la tesi el 6 de desembre de 1971 amb el títol *Algunos resultados sobre cohomologia de las variedades Kählerianas*, sota la direcció del Dr. Josep Vaquer

JUAN GIRBAU

A L G U N O S R E S U L T A D O S
S O B R E C O H O M O L O G I A
D E L A S V A R I E D A D E S
K Ä H L E R I A N A S

DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA
UNIVERSIDAD DE BARCELONA
1 9 7 1

Hemos empleado, sin ningún reparo, coordenadas en nuestros cálculos y toda suerte de índices sin preocuparnos de que tomaran una apariencia que hoy en dia se ha venido en llamar "no intrínseca". Sin embargo los resultados que obtenemos son "intrínsecos". Los cálculos son siempre pesados, pero necesarios y cada cual los hace a su manera. A fin de cuentas dice Antonio Machado que

"...la verdad es lo que es
y sigue siendo verdad
aunque se piense al revés".

No me queda sino agradecer a mis profesores José Teixidor y José Vaquer, a quienes debo gran parte de mi formación matemática, su ayuda de todo orden. Gracias a ellos entablé contacto con el profesor André Lichnerowicz, a quien agradezco sobremanera el interés que se ha tomado en mi trabajo, sus orientaciones y las conversaciones que hemos sostenido sobre Geometria de las variedades kählerianas.

Figura 2: Primera pàgina i fragment de la introducció de la tesi doctoral.

(Figura 2). Va obtenir la qualificació d'Excel·lent cum laude i va ser Premi Extarordinari de Doctorat.

El 1972 s'incorpora a la Universitat Autònoma de Barcelona com a professor agregat interí, i el 1974 com a professor agregat, la plaça per la qual va preparar la Memòria que reproduïm en les pàgines que segueixen. És nomenat catedràtic el 1976.

Pertany al grup de persones que als anys 70 i 80 van transformar, enfortir i homologar la recerca i la docència en matemàtiques que es feia a Catalunya. En aquest sentit, cal dir que va ser el fundador del grup de recerca en Geometria Diferencial de la Universitat Autònoma, un grup nombrós que actualment té un gran reconeixement internacional.

Els primers cursos de doctorat que va impartir foren (v. Figura 3): *Varietats complexes i classes de Chern* (1975-76), *Fórmula de Gauss-Bonnet-Chern* (1976-77), *Equacions en derivades parcials de tipus el·líptic* (1978-79), uns temes que havia analitzat en la Memòria recuperada en les pàgines que segueixen.

Pel seu caràcter i manera de ser, sempre ha estat el cap i referent del grup de Geometria Diferencial de l'Autònoma i les seves opinions sobre temes matemàtics i sobre temes de política universitària han estat sempre escoltades i acceptades per tothom, per la seva lògica i clarividència.

L'any 1993, amb motiu de la presentació de Joan Girbau a un premi científic, el professor Izu Vaisman, de la Universitat de Haifa, Israel, deia:

> Professor Girbau is a well known reputable specialist in Diffrential geometry who made important contributions to this field [...] He also has [played] a decisive role in the developement of a new research school in Differential Geometry in Barcelona [...] and formed there a research group whose works won an international reputation. Professor Girbau certainly merits a highest scientific recognition.

Podríem citar moltes cartes elogioses com aquesta. En posarem només una més, la del Professor André Haefliger, de la Universitat de Ginebra, Suïssa.

CURSO DE DOCTORADO

J. GIRBAU

FORMULA DE GAUSS-BONNET-CHERN

PRIMERA PARTE (Topológica)

- Fibrados orientables
- Isomorfismo de Thom
- Clase de Thom y clase de Euler de un fibrado
- Clase de Lefschetz de una variedad compacta
- Relación entre la clase de Lefschetz, la clase de Thom y la clase de Euler del fibrado tangente
- Fórmula de Gauss-Bonnet 1a. parte (la integral sobre toda la variedad de un representante de la clase de Euler del fibrado tangente coincide con la característica de Euler-Poincaré)

SEGUNDA PARTE (de Geométría Diferencial)

- Relación entre la clase de Euler tal como se ha definido en la primera parte y la curvatura.

EQUACIONS EN DERIVADES PARCIALS DE TIPUS EL.LÍPTIC

Curs de Doctorat a càrrec de J. Girbau

Objectius del curs:

Sigui (M,g) una varietat de Riemann compacta de dimensió 2. La fórmula de Gauss-Bonnet

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K \, dA$$

assegura que la curvatura K compleix les següents condicions:

(a) Si $\chi(M) > 0$, K és positiva en algún punt
(b) Si $\chi(M) = 0$, K canvia de signe a bé K=0.
(c) Si $\chi(M) < 0$, K és negativa en algún punt.

Plantegem-nos el problema invers. Donada una funció K sobre M que compleixi (a), (b) i (c), existeix una mètrica g de la qual K és curvatura? Aquest problema porta a l'estudi d'existència de solucions d'equacions del tipus $\Delta u = c - h e^u$ on c és una constant i h és una funció donada. Per tractar aquestes equacions no lineals s'ha de fer ús de gran nombre de tecniques més o menys "standard" d'equacions en derivades parcials de tipus el.líptic. Aquest curs consistirà a repassar aquestes tècniques generals sobre les equacions particulars que ens interessen.

Bibliografia fonamental.

Kazdan-Warner. Ann. of Math. 90(1974) 14-47. Ann. of Math. 90 (1974) 203-219. Ann. of Math. 101(1975) 317-331

Horari del curs

Començarà el mes de Gener. Encara no està decidit l'horari.

Bellaterra, 13-12-78

Figura 3: Anuncis de dos cursos de doctorat.

> Le Professeur Girbau a donné une impulsion décisive au développement de la Géométrie Differentielle en Catalogne dès l'année 1970, après son sejour a París [...] Gràce à la profondeur de ses travaux scientifiques et au rayonnement de sa personnalité, il a réussi à faire connaïtre en Catalogne les techniques mathématiques les plus recents et à mettre sur pied un groupe de chercheurs actifs dont les travaux sont reconnus internationalment.

Una característica d'en Girbau era la seva rigorositat. Entenia les coses molt profundament. Sobre això un dia em va dir: «Quan em capfico en una cosa no paro fins que l'entenc bé, encara que això no tingui a vegades utilitat pràctica. En el programa que et vaig passar ahir hi havia coses que no acabava de veure clares i, efectivament, la discussió de la resolució d'un sistema d'equacions s'havia de fer millor. Resumint, t'envio una altra versió del programa d'ahir que em penso que és perfecte. Fot un dibuix com jo vull que el faci!»

Va ser distingit amb la medalla Narcís Monturiol al mèrit científic i tecnològic atorgada pel Govern de la Generalitat de Catalunya el 1997. El nomenament va aparèixer al DOGC de 23/6/1998 i precisava «Per la seva tasca acadèmica, per les seves contribucions a la geometria i topologia i en particular a les varietats complexes i les foliacions holomorfes, i també per la seva activitat de promoció de la matemàtica».

Era una persona polifacètica i els seus interessos no es van limitar a la geometria diferencial, sinó que també va fer incursions a la física, especialment a la teoria de la relativitat, a l'astronomia, etc. És molt reconegut com a estudiós i constructor de rellotges de sol. Una de les seves primeres obres fou el que es va instal·lar a la façana de la Facultat de Ciències de la UAB (Figura 4A).

Menció especial es mereix el rellotge de sol construït en un lloc on pràcticament no toca mai el sol (Figura 4B). Concretament, a la façana nord de la Masia Mariona. Aquesta aparent inutilitat no fou pas un obstacle per tal que en Joan Girbau hi dediqués el seu temps! De fet, la idea original provenia de Rafel Carreres Patxot, qui va fer donació de la Masia Mariona, que havia heretat de la seva família, a la Diputació de Barcelona, i que volia un rellotge de

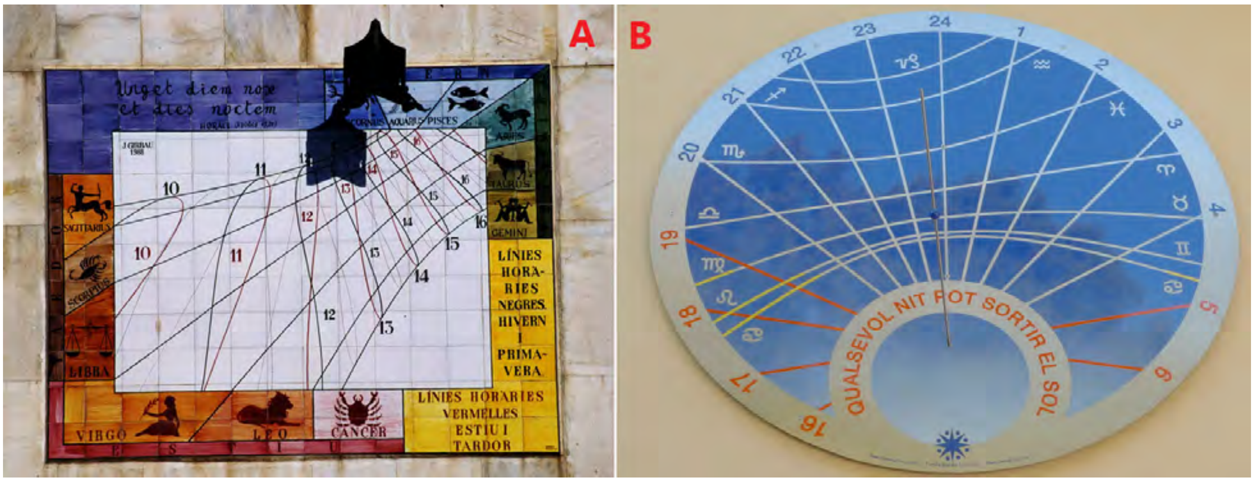


Figura 4: A, rellotge de la UAB (*Urget diem nox et dies noctem*); B, rellotge de la Masia Mariona (*Qualsevol nit pot sortir el sol*)

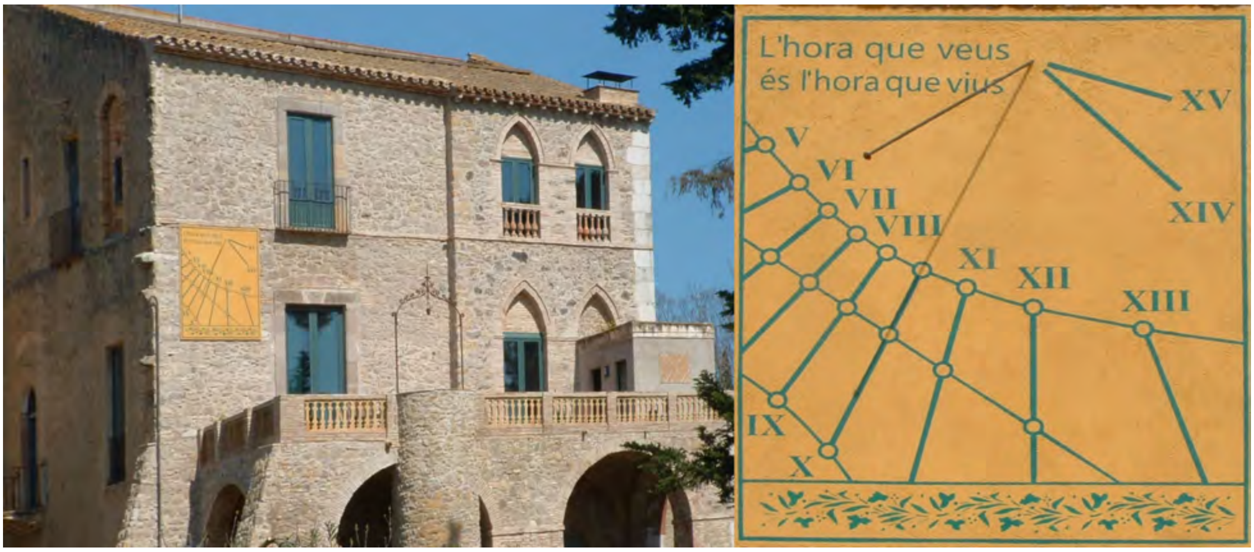


Figure 5: Rellotge de Can Batlle de Palau de Santa Eulàlia, Empordà (*L'hora que veus és l'hora que vius*). Cortesia de Joaquim Agulló i Batlle, doctor Enginyer Industrial per la UPC.

sol on hi hagués també les hores de la nit, com si la Terra fos transparent. Un altre exemple remarcable és el mostrat a la Figura 5.

Li agradava dir que els seus rellotges tenien trenta mil anys de garantia. Fins i tot va dissenyar i construir un zenitògraf solar, un aparell que indica a cada moment el punt de la Terra que té el Sol en el seu zenit (Figura 6A):

> És un rellotge horitzontal tradicional construït sobre una placa de llautó d'1 cm de gruix, que marca l'hora solar vertadera de Greenwich, però, a més, té el dibuix d'un mapamundi deformat convenientment de tal manera que l'ombra del gnòmon sobre el mapamundi sempre és un meridià: el meridià sobre el qual passa el sol en aquell moment. A més, el gnòmon té una petita boleta l'ombra de la qual indica sobre el mapamundi l'indret de la Terra on els seus habitants tenen el sol en el zenit en aquell moment. Lema: *Die Strahlen der Sonne vertrelben die Nacht* (Sarastro 'Die Zauberflöte'), és a dir, *Els raigs del sol allunyen la nit* (Sarastro [personatge de] «La flauta màgica»).

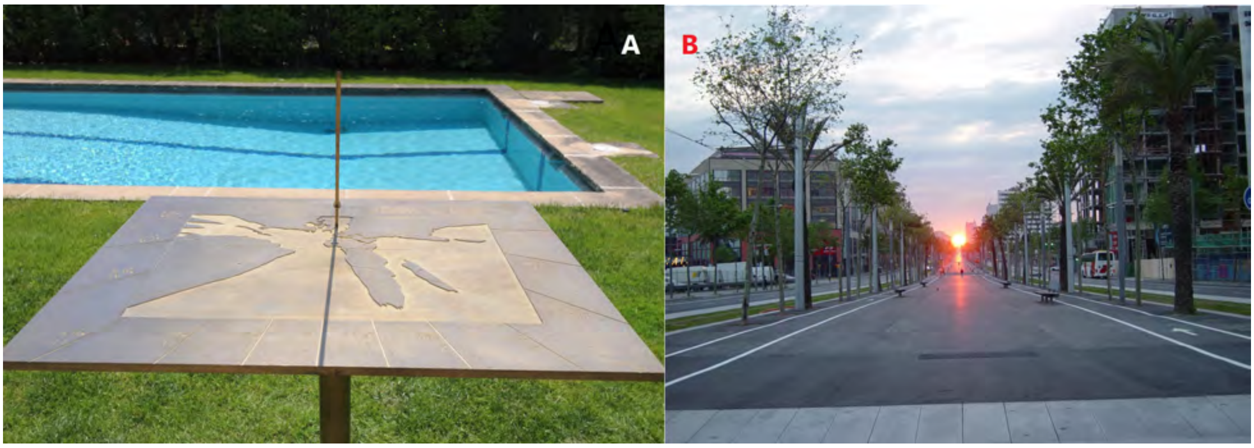


Figura 6: A, zenitògraf a l'Ametlla del Vallès; B, Sortida del Sol a la Diagonal de Barcelona.

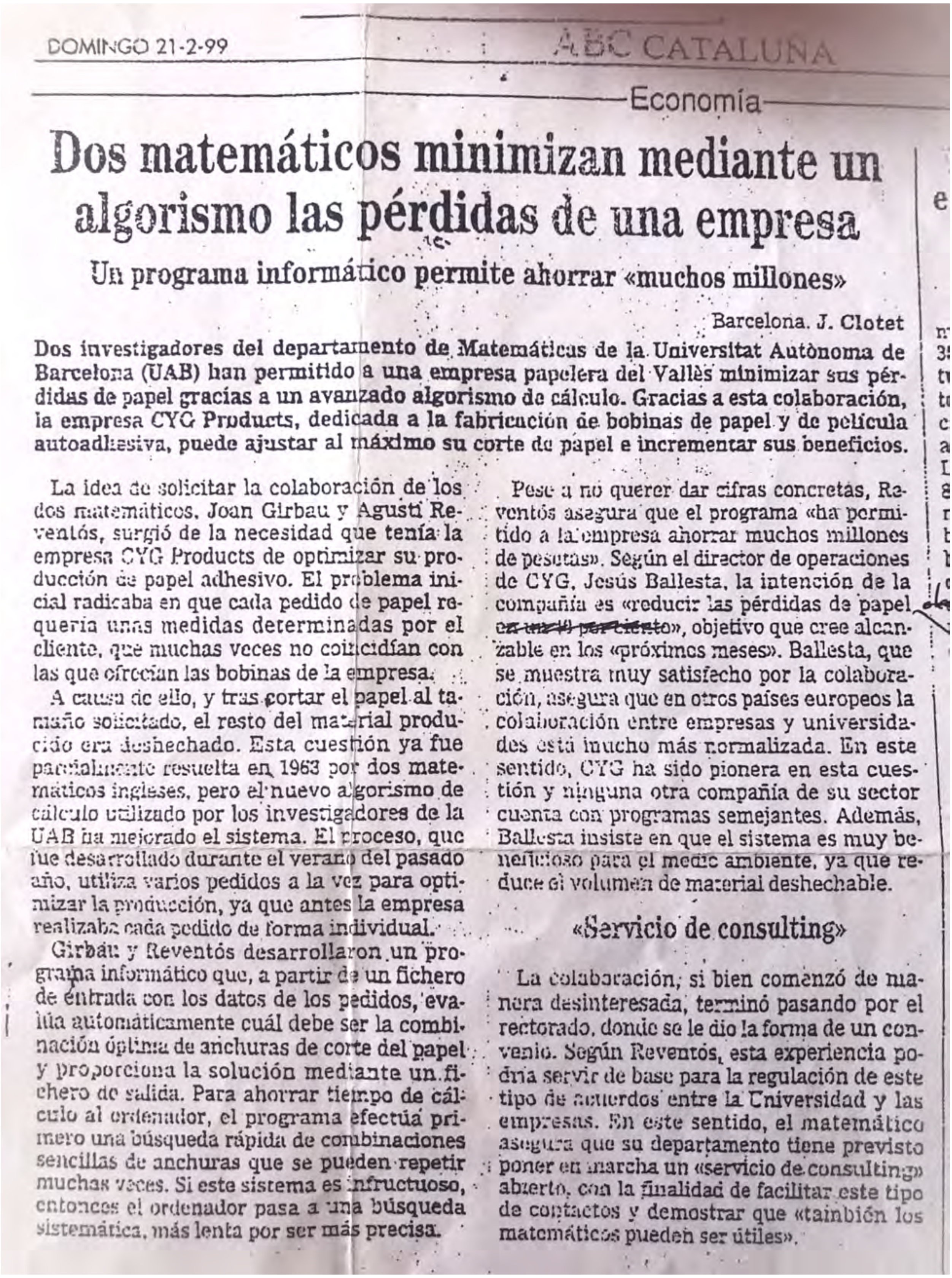
El coneixement de la posició del Sol respecte a la Terra en cada moment el va portar a fer la bonica foto de la sortida del sol a la Diagonal de Barcelona (Figura 6B). Va enviar un correu titulat "Miracle!!!!" que deia així:

> Fa mesos us vaig enviar un mail a tots en què us anunciava que hi ha dos dies a l'any en què una persona situada a la plaça de les Glòries veu sortir el sol per l'extrem marítim de la diagonal, i que aquests dos dies coincideixen amb dues marededeus: la de Montserrat i la Mare de Déu d'Agost. Doncs, bé, avui és la Mare de Déu de Montserrat i he anat a veure sortir el sol a la plaça de les Glòries.
>
> Pensava trobar-hi una multitud de gent, però –sorprenentment– era jo sol. Un vianant que hi passava, en veure que jo treia la màquina de retratar i, nerviós, enfocava cap a un punt llunyà, se m'ha quedat mirant com si no entengués quin era el motiu de la meva foto.
>
> He deixat al disc S (carpeta girbau) tres fotos meravelloses d'aquest fet singular. Ara vosaltres, sense haver matinat, podeu fer-vos una idea de l'espectacle.

A banda de la seva activitat de recerca, amb nombrosos articles publicats en revistes de prestigi, va fer més d'un centenar de recensions per a *Zentralblatt für Mathematik* i *Mathematical Reviews*. Va destacar com a professor i com a divulgador. És molt reconegut el seu llibre *Geometria Diferencial i Relativitat*, reeditat per la Societat Catalana de Matemàtiques, i al final adjuntem una llarga llista dels seus articles de divulgació.

També va tenir col·laboracions esporàdiques amb empreses, per exemple amb CYG SA respecte al tall de paper (v. Figura 7) i amb Complex Systems SL amb qui va col·laborar en un projecte sobre *Obtenció de la flota òptima per al subministrament d'hidrocarburs a les Illes Canàries.*

Els seus alumnes el recorden com un gran professor, entusiasta, que gaudia amb les seves classes, en les quals posava sempre un toc d'humor. Va impartir una assignatura de campus d'astronomia (destinada a tots els estudiants de l'Autònoma), que podeu trobar aquí https://www.youtube.com/watch?v=r7f6qzJZRfA. Vegeu Figura 8.



DOMINGO 21-2-99 — ABC CATALUÑA

Economía

Dos matemáticos minimizan mediante un algorismo las pérdidas de una empresa

Un programa informático permite ahorrar «muchos millones»

Barcelona. J. Clotet

Dos investigadores del departamento de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) han permitido a una empresa papelera del Vallès minimizar sus pérdidas de papel gracias a un avanzado algorismo de cálculo. Gracias a esta colaboración, la empresa CYG Products, dedicada a la fabricación de bobinas de papel y de película autoadhesiva, puede ajustar al máximo su corte de papel e incrementar sus beneficios.

La idea de solicitar la colaboración de los dos matemáticos, Joan Girbau y Agustí Reventós, surgió de la necesidad que tenía la empresa CYG Products de optimizar su producción de papel adhesivo. El problema inicial radicaba en que cada pedido de papel requería unas medidas determinadas por el cliente, que muchas veces no coincidían con las que ofrecían las bobinas de la empresa.

A causa de ello, y tras cortar el papel al tamaño solicitado, el resto del material producido era deshechado. Esta cuestión ya fue parcialmente resuelta en 1963 por dos matemáticos ingleses, pero el nuevo algorismo de cálculo utilizado por los investigadores de la UAB ha mejorado el sistema. El proceso, que fue desarrollado durante el verano del pasado año, utiliza varios pedidos a la vez para optimizar la producción, ya que antes la empresa realizaba cada pedido de forma individual.

Girbau y Reventós desarrollaron un programa informático que, a partir de un fichero de entrada con los datos de los pedidos, evalúa automáticamente cuál debe ser la combinación óptima de anchuras de corte del papel y proporciona la solución mediante un fichero de salida. Para ahorrar tiempo de cálculo al ordenador, el programa efectúa primero una búsqueda rápida de combinaciones sencillas de anchuras que se pueden repetir muchas veces. Si este sistema es infructuoso, entonces el ordenador pasa a una búsqueda sistemática, más lenta por ser más precisa.

Pese a no querer dar cifras concretas, Reventós asegura que el programa «ha permitido a la empresa ahorrar muchos millones de pesetas». Según el director de operaciones de CYG, Jesús Ballesta, la intención de la compañía es «reducir las pérdidas de papel ~~en un 10 por ciento~~», objetivo que cree alcanzable en los «próximos meses». Ballesta, que se muestra muy satisfecho por la colaboración, asegura que en otros países europeos la colaboración entre empresas y universidades está mucho más normalizada. En este sentido, CYG ha sido pionera en esta cuestión y ninguna otra compañía de su sector cuenta con programas semejantes. Además, Ballesta insiste en que el sistema es muy beneficioso para el medio ambiente, ya que reduce el volumen de material deshechable.

«Servicio de consulting»

La colaboración, si bien comenzó de manera desinteresada, terminó pasando por el rectorado, donde se le dio la forma de un convenio. Según Reventós, esta experiencia podría servir de base para la regulación de este tipo de acuerdos entre la Universidad y las empresas. En este sentido, el matemático asegura que su departamento tiene previsto poner en marcha un «servicio de consulting» abierto, con la finalidad de facilitar este tipo de contactos y demostrar que «también los matemáticos pueden ser útiles».

Figura 7: Treball per a l'empresa CYG SA, carrer Pintor Fortuny 17-19 de Polinyà, sobre la minimització de pèrdues de paper en tallar les comandes diàries dels clients d'una bobina mare d'amplitud fixada. Això va suposar un contracte entre l'empresa i la UAB signat el desembre de 1998.

Figura 8: A, Classe d'Astronomia; B, Última classe

Continuant en el món empresarial, va constituir 4 societats els anys 1964, 1999, 2003 i 2004 per tal de promocionar i vendre un conjunt de cases a l'Ametlla del Vallès. Portava ell sol la comptabilitat i tot el necessari per tirar endavant el projecte.

Era molt aficionat a la música i juntament amb la seva dona, la Montserrat Roura, va fer viatges arreu d'Europa per escoltar òperes. També tocava l'acordió (Figura 9) i la flauta.

Figura 9: Dibuix d'Evarist Mora, quan en Joan Girbau tenia catorze anys: «A l'insigne acordionista i comentador de la Novena Simfonia, El Gran Joan».

A principis de la dècada dels vuitanta es va interessar per la pintura a l'oli, aconseguint resultats remarcables (Figura 10), però aquesta activitat sembla que no tingué continuïtat.

Figura 10: Pintures a l'oli de Joan Girbau. La del centre és de 1981, la de l'esquerra de 1984 i la de la dreta de 1982.

Amb motiu de la seva jubilació va sorprendre tothom presentant-se al dinar vestit de Gauss!! (Figura 11). És una mostra del caràcter d'en Joan Girbau, bromista, divertit i sense complexos!

Un cop jubilat es va dedicar amb gran professionalitat a escriure novel·les. Va publicar *L'home de la campana*, biografia novel·lada de K. F. Gauss, i *Memòries de Delft*. També havia escrit una novel·la inspirada en la figura de mossèn Cinto Verdaguer i una altra sobre les guerres carlistes, de moment inèdites, i els últims dies estava escrivint una novel·la sobre un poema de Mossèn Cinto, *El Gorg Negre*, que va acabar just abans de morir i que es publicà el desembre de 2024.

Fou sempre una persona positiva que intentava ajudar els companys i fer funcionar les institucions. Això el va portar a ser director del Departament de Matemàtiques de la UAB (1994-96), president de la Societat Catalana de Matemàtiques (1986-90) i va ser membre numerari de l'Institut d'Estudis Catalans des del 1990, on va ocupar diversos càrrecs directius en la Secció de Ciències i Tecnologia, en la Comissió d'Investigació, en el Consell de Direcció del Centre de Recerca Matemàtica, en la Fundació Ferran Sunyer Balaguer, etc.

Podem resumir la seva personalitat dient simplement que era genial.

Figura 11: Discurs de Girbau/Gauss, amb motiu de la seva jubilació, 30 maig 2012.

Treballs de recerca

[1] Joan Girbau. Estudio de las formas armónicas sobre una variedad kähleriana compacta con curvatura biseccional holomorfa no negativa. *Collect. Math.*, 21:9–17, 1970.

[2] Joan Girbau. Sur les théorèmes d'annulation de Kodaira. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.*, 272:740–742, 1971.

[3] Joan Girbau. Sur les théorèmes d'annulation de Kodaira. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.*, 273:461–462, 1971.

[4] Joan Girbau. Certain properties of harmonic forms on compact Kählerian manifolds with nonnegative holomorphic bisectional curvature. In *Proceedings of the Tenth Conference of Spanish Mathematicians (La Laguna, 1969) (Spanish)*, pages 76–80. Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1972.

[5] Joan Girbau. Fibrés seminégatifs sur une variété kählérienne et le principe du maximum. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 278:1515–1517, 1974.

[6] Joan Girbau. Fibrés semi-positifs et semi-négatifs sur une variété Kählérienne compacte. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 101:171–183, 1974.

[7] Joan Girbau. Sur le théorème de Le Potier d'annulation de la cohomologie. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 283(6):355–358, 1976.

[8] Joan Girbau. Vanishing theorems for complex analytic foliate manifolds. In *Proceedings of the IV International Colloquium on Differential Geometry (Univ. Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 1978)*, volume 15 of *Cursos Congr. Univ. Santiago de Compostela*, pages 131–139. Univ. Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 1979.

[9] Joan Girbau and Marcel Nicolau. Pseudodifferential operators on V-manifolds and foliations. I. *Collect. Math.*, 30(3):247–265, 1979.

[10] Joan Girbau. Vanishing theorems and stability of complex analytic foliations. In *Geometry and differential geometry (Proc. Conf., Univ. Haifa, Haifa, 1979)*, volume 792 of *Lecture Notes in Math.*, pages 247–251. Springer, Berlin, 1980.

[11] Joan Girbau. Sur le théorème de stabilité de feuilletages de Hamilton, Epstein et Rosenberg. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 291(1):A41–A44, 1980.

[12] Joan Girbau and Marcel Nicolau. Pseudodifferential operators on V-manifolds and foliations. II. *Collect. Math.*, 31(1):63–95, 1980.

[13] Joan Girbau and Marcel Nicolau. The theory of pseudodifferential operators over V-manifolds and its relation with foliations. *Proceedings of the seventh Spanish-Portuguese conference on mathematics, Part II (Sant Feliu de Guíxols, 1980). Publicacions de la Secció de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona*, 21:33–36, 1980.

[14] Joan Girbau. Vanishing cohomology theorems and stability of complex analytic foliations. *Israel J. Math.*, 40(3-4):235–254, 1981.

[15] J. Girbau, A. Haefliger, and D. Sundararaman. On deformations of transversely holomorphic foliations. *J. Reine Angew. Math.*, 345:122–147, 1983.

[16] J. Girbau. Some examples of deformations of transversely holomorphic foliations. In *Differential geometry (Peñíscola, 1982)*, volume 1045 of *Lecture Notes in Math.*, pages 53–62. Springer, Berlin, 1984.

[17] J. Girbau and M. Nicolau. Deformations of holomorphic foliations and transversely holomorphic foliations. In *Differential geometry (Santiago de Compostela, 1984)*, volume 131 of *Res. Notes in Math.*, pages 162–173. Pitman, Boston, MA, 1985.

[18] Joan Girbau. On deformations of holomorphic and transversely holomorphic foliations. In *Géométrie différentielle (Paris, 1986)*, volume 33 of *Travaux en Cours*, pages 51–63. Hermann, Paris, 1988.

[19] Joan Girbau and Marcel Nicolau. On deformations of holomorphic foliations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 39(2):417–449, 1989.

[20] Joan Girbau and Gregori Guasp. Deformations of transversely symplectic and transversely contact foliations. *Tsukuba J. Math.*, 15(2):479–508, 1991.

[21] Joan Girbau. A versality theorem for transversely holomorphic foliations of fixed differentiable type. *Illinois J. Math.*, 36(3):428–446, 1992.

[22] Joan Girbau. *Geometria Diferencial i Relativitat*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1993. Segona Edició Electrònica: Publicacions de la SCM, Vol. 8, 2022. https://publicacions.iec.cat/repository/pdf/00000490/00000020.pdf.

[23] Lluís Bruna and Joan Girbau. Linearization stability of the Einstein equation for Robertson-Walker models. I. *J. Math. Phys.*, 40(10):5117–5130, 1999.

[24] Lluís Bruna and Joan Girbau. Linearization stability of the Einstein equation for Robertson-Walker models. II. *J. Math. Phys.*, 40(10):5131–5137, 1999.

[25] Joan Girbau. Relatividad: un curso acelerado. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 2(2):237–262, 1999.

[26] Lluís Bruna and Joan Girbau. Is it admissible to linearize the Einstein equation in the presence of matter? In *Global differential geometry: the mathematical legacy of Alfred Gray (Bilbao, 2000)*, volume 288 of *Contemp. Math.*, pages 277–280. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[27] Lluís Bruna and Joan Girbau. Linearization stability of the Einstein equation in the presence of matter. In *Proceedings of the IX Fall Workshop on Geometry and Physics (Vilanova i la Geltrú, 2000)*, volume 3 of *Publ. R. Soc. Mat. Esp.*, pages 23–32. R. Soc. Mat. Esp., Madrid, 2001.

[28] Joaquim Bruna and Joan Girbau. Mapping properties of the Laplacian in Sobolev spaces of forms on complete hyperbolic manifolds. *Ann. Global Anal. Geom.*, 25(2):151–176, 2004.

[29] Lluís Bruna and Joan Girbau. Laplacian in the hyperbolic space H_n and linearization stability of the Einstein equation for Robertson-Walker models. *J. Math. Phys.*, 46(7):072501, 21, 2005.

[30] Lluís Bruna and Joan Girbau. *Stability by linearization of Einstein's field equation*, volume 58 of *Progress in Mathematical Physics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

Treballs de divulgació científica

[1] Marston Morse (1892-1977). *Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Fís. Quim. i Mat.* 3:26-27, 1979.

[2] La difusió del pensament d'Einstein a Catalunya (1805-1923). Amb Antoni Roca i Josep M. Tura. Centenari de la naixença d'Albert Einstein/Jornades d'homenatge organitzades per la Societat Catalana de Ciències Fís. Quim. i Mat. Publicacions de l'IEC. 185-195, 1981.

[3] Astronomia per a xicots de 14 anys una mica espavilats. *Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Fís. Quim. i Mat.* 14:21-42, 1983.

[4] Geometria hiperbòlica: els seus models. *Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques.* 14:98-124, 1983. Segona conferència dins del cicle de conferències sobre *Geometries no Euclidianes*, la primera pronunciada per S. Xambó: *D'Euclides a Gauss*, i la tercera per A. Reventós: *De Riemann fins als nostres dies.*

[5] Seminari sobre "Noves tendències en l'educació matemàtica". La geometria grega a l'ensenyament mitjà. *Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Fís. Quim. i Mat.* 17:89-93, 1984.

[6] Les Matemàtiques i les Escales Musicals. *Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Fís. Quim. i Mat.* 18: 3-27, 1985.

[7] Geometria Diferencial de Gauss a Riemann. *El desenvolupament de les matemàtiques el segle XIX.* Arxius de la Secció de Ciències, Institut d'Estudis Catalans. LXXV:41-53, 1984. Edició a cura de Manuel Castellet.

[8] Les Matemàtiques i les escales musicals. *Butlletí de la Secció de Matemàtiques*, 18:3-27, 1985.

[9] Relojes de Sol de Precisión Diseñados por Ordenador. *La Vanguardia* 3-7-88. *Sección Ciencia. Pag. C-1.*

[10] Las Matemàtiques y las Escalas Musicales. *La Vanguardia* 9-10-88. Sección Ciencia. Pag. C-1.

[11] El Rellotge de sol de la Facultat de Ciències. *Campus... què?* 24-25, 1988.

[12] Rellotges de sol. Llibret editat pel Departament de Matemàtiques de la UAB, 1988.

[13] La latitud i la longitud en els mapes detallats. *La Busca de Paper. Butlletí de la Societat Catalana de Gnomònica*, 8:2-6, 1990.

[14] Matemàtiques i cultura. *Itineraris pels sabers. Reflexions sobre la tercera trobada de científics i Humanistes a Sitges, juny de 1993.* Llibret editat pel Departament de Cultura de la Generalitat, 15-18, 1994.

[15] Anàlisi en varietats de dimensió infinita. Aplicació a un problema d'ones gravitatòries. *Arxius de les Seccions de Ciències, Institut d'Estudis Catalans*, 100:455-473, 1995. (Original rebut el dia 1 de desembre de 1993).

[16] Si no es pot representar cap terreny a escala, què fan els cartògrafs? *Les bases matemàtiques de la civilització tecnològica.* Fundació Caixa de Sabadell, 1999.

[17] Estudio introductorio al *Libro de los reloges solares compuesto por Pedro Roiz (siglo XVI).* Departamento de Publicaciones del Senado. Madrid, 1999.

[18] La Societat Catalana de Matemàtiques a les portes del segle XXI (1). *Ciència i cultura al llindar del segle XXI: cicle de conferències. Editat per Mercè Durfort.* Publicacions IEC. 167-174, 1999.

[19] La falacia del mapa. *Fotografiando las matemáticas.* Carroggio S.A. de Ediciones, 56-61, 2000.

[20] Com determinar l'orientació d'una paret. *La Busca de Paper. Butlletí de la Societat Catalana de Gnomònica*, 37:1-4, 2000.

[21] Estudio Introductorio al "Libro de los Reloges Solares" de Pedro Roiz, publicado en Valencia in 1575". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemàtica Española.* 3:93-107, 2000.

[22] Relacions entre l'art i la matemàtica. *Notícies de la SCM*, 16:12-16, 2001.

[23] Mathematics in Catalonia 1990-1996. Amb Joaquim Bruna, Marta Sanz i Joan de Solà-Morales. *Contributions to Science.* 111-121. Vol. 2(1). 2001.

[24] Cicle de Metó i Saros. *Notícies SCM.* 17:5-8, 2002.

[25] Mathematics and Music (review). *Notícies SCM.* 19:42-43, 2003.

[26] Lluís Antoni Santaló i Sors (1911-2001). Memòria del curs 2001-2002 de l'IEC. 194-195. Editat el 2003.

[27] L'equació d'Einstein de la relativitat general i la seva relació amb l'equació d'ona. Conferència impartida a la Jornada Einstein de la Facultat de Matemàtiques de la UPC, el dia 9 de febrer de 2005 i recollida en el llibre Conferències FME, volum II, curs Einstein 2004-2005, pàgines 79-89.

[28] Any Mundial de la Física. *Notícies de la SCM.* 21:6-7, 2005.

[29] Trigonometria esfèrica. *Materials Matemàtics, http://mat.uab.cat/matmat,* vol. 1, 2006.

[30] Rellotges de sol. *Materials Matemàtics, http://mat.uab.cat/matmat,* vol. 14, 2006.

[31] Projecte de llei sobre el valor de π. *Notícies de la SCM*, 22:33, 2006.

[32] Rellotges de sol analemàtics amb analema. *La Busca de Paper. Butlletí de la Societat Catalana de Gnomònica*, 60:7-11, 2008.

[33] La dona sense ombra. *La Busca de Paper. Butlletí de la Societat Catalana de Gnomònica*, 62:7-11, 2009.

[34] El rellotge de sol de la façana nord de la Masia Mariona. *La Busca de Paper. Butlletí de la Societat Catalana de Gnomònica*, 66:22-24, 2010.

[35] Inauguració d'un zenitògraf solar. *Notícies de la SCM*, 29:42-44, 2010.

[36] Un nou tipus de rellotge de sol. *La Busca de Paper. Butlletí de la Societat Catalana de Gnomònica*, 68:25-27, 2011.

[37] Lleis de Kepler i mesura del temps. *Materials Matemàtics, http://mat.uab.cat/matmat,* vol. 3, 2011.

[38] Un Curs accelerat d'acceleració còsmica. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 28:147-181, 2013.

[39] Detecció d'ones gravitatòries. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 31:143-178, 2016.

[40] El·lipses, hipèrboles o paràboles? *La Busca de Paper. Butlletí de la Societat Catalana de Gnomònica*, 84:14-16, 2016.

[41] Rutes matemàtiques en el Congrés d'Educació Matemàtica. Amb Iolanda Guevara. *Notícies de la SCM*. 40:56-59, 2016.

[42] Com es mesuren les distàncies als estels. *Noubiaix: revista de la FEEMCAT i la SCM*, 43:24-35, 2018.

[43] El meu Josep Vaquer. *Notícies de la SCM*, 47:62-64, 2020.

[44] Com es mesuren les distàncies als estels. *La Busca de Paper. Butlletí de la Societat Catalana de Gnomònica*, 100:16-19, 2021.

Tres col·laboracions al Notícies de la SCM

[1] Ressenya del llibre *Geometria Axiomàtica*, d'Agustí Reventós. *Notícies de la SCM*, 29: 64-65, 2010.

[2] Girbau respon la pregunta: Com creus que influeix la teva formació en matemàtiques en la novel·la o relat que has escrit? *Notícies de la SCM*, 49:75-76 2021.

[3] Conversa a dues bandes entre Manuel Castellet i Joan Girbau. *Notícies de la SCM*, 50:59-66, 2022.

Novel·les

[1] L'home de la Campana: Biografia novel·lada de Carl F. Gauss. Ed. Gregal. 2015.

[2] Memòries de Delft: L'epopeia de 1640. Ed. Base. 2020.

[3] El Gorg Negre. Ed. Senyor Ruc. 2024.

[4] El secret andorrà de mossèn Cinto. Inèdita.

[5] L'Eulàlia. Inèdita.

Rellotges de sol

Podeu trobar la llista completa a https://www.gnomonica.cat/inventari/bd_res.php que reproduïm per a més facilitat del lector.

[1] Carrer Granollers 8, Ametlla del Vallès.

[2] Can Diví. Av. Onze de Setembre, Ametlla del Vallès.

[3] Carrer Sant Pere 2, Ametlla del Vallès.

[4] Can Plantada, Passatge de Can Camp. Ametlla del Vallès.

[5] Facultat de Ciències UAB. Bellaterra (Figura 4).

[6] Masia Mariona, Mosqueroles (Figura 4).

[7] Can Boixareu. Llerona, Franqueses del Vallès.

[8] Mas Batlle. Palau de Santa Eulàlia (Figura 5).

[9] Carrer Heribert Pons, 1. Rellinars.

[10] Carrer Maragall 24, Sant Adrià de Besòs.

[11] Ajuntament de Sant Feliu de Codines.
[12] Carrer d'Aiguanegre 22, Sant Joan les Fonts.
[13] Mas Verdaguer, Sant Vicenç de Torelló.
[14] Observatori Astronòmic Senterada.
[15] Urbanització El Romaní. El Vendrell.
[16] Plaça de les Hores. Vilafant.

Memòria sobre el Concepte, Mètode i Fonts
de la
Geometria Diferencial

Introducció

La present memòria està dividida en dues parts. A la primera es tracta de descriure l'evolució històrica de la geometria diferencial des de la invenció del càlcul infinitesimal fins als nostres dies.

La Matemàtica, a mesura que s'ha anat desenvolupant, ha adquirit un grau més gran d'abstracció. Els resultats de la geometria grega podrien ser explicats en poques paraules a qualsevol persona de seny que no hagués sentit mai parlar de Geometria. Això és degut al fet que els conceptes utilitzats pels grecs constitueixen una primera abstracció dels emprats en la vida quotidiana. No es pot dir el mateix de la Matemàtica actual, els conceptes de la qual són abstraccions de conceptes matemàtics d'altres èpoques, que al seu torn són abstraccions d'abstraccions de conceptes quotidians. Això explica la gran dificultat, per no dir la impossibilitat, de divulgar els resultats de la Matemàtica actual a un públic no especialitzat. Tanmateix, cadascuna d'aquestes abstraccions sempre ha estat plantejada per problemes molt concrets, en intentar trobar mètodes comuns a diversos d'ells.

A la primera part d'aquesta memòria pretenem descriure els diferents problemes, en el domini de la geometria diferencial, que han estat objecte d'estudi pels matemàtics en cada època històrica, i mostrar com nombrosos conceptes i generalitzacions han sorgit per imperiosa necessitat, després d'haver estat emprats reiteradament, fins i tot abans d'haver estat definits correctament. Així, per exemple, veurem com Riemann maneja el tensor de curvatura encara que el càlcul tensorial no seria formalitzat fins a principis d'aquest segle. Veurem com es desenvolupa gran part de la geometria diferencial, inclosa la teoria de grups de Lie, molt abans de definir-se el concepte de varietat diferenciable. Veurem com Élie Cartan maneja la teoria de connexions en fibrats, obtenint resultats molt concrets sobre els grups d'holonomia, molt abans que es defineixi de manera rigorosa la noció d'espai fibrat.

La presentació històrica constitueix la millor manera de comprendre el perquè dels diferents conceptes i definicions actuals.

La manca gairebé absoluta d'obres dedicades a la història de la geometria diferencial ha fet que la nostra tasca revestís gran dificultat i resultés en alguns moments aclaparadora. Dos treballs, però, ens han estat de gran utilitat. D'una banda, el llibre de J. L. Coolidge titulat «A history of Geometrical Methods» (Clarendon Press, Oxford 1940; Reeditat el 1947) ens ha servit per formar-nos ràpidament una idea de la geometria diferencial anterior a Gauss. D'altra banda, l'article de Chern i Chevalley «Élie Cartan and his mathematical work» (Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952) 217-250) ens ha donat una visió de conjunt de la immensa obra d'Élie Cartan. A part d'aquests dos treballs, no hem comptat amb cap altra ajuda substancial, havent de recórrer en la majoria dels casos a la lectura directa dels treballs originals dels qui, al llarg dels anys, han anat forjant la geometria diferencial. [Girbau no coneixia en aquell moment el treball de D. J. Struik «Outline of a History of Differential Geometry I, II» publicat el 1933 a *Isis*: **19**/1, 92-120, **20**/1, 161-191]

La segona part d'aquesta memòria està dedicada a les varietats complexes i en ella pretenem donar una visió de conjunt dels problemes actuals d'aquesta branca de la matemàtica, que està relacionada per igual amb la geometria diferencial, amb la geometria algebraica i amb la teoria de funcions analítiques de diverses variables complexes.

Barcelona, abril de 1973.

Memòria sobre el concepte, mètode i fonts de la Geometria Diferencial
Part I: Varietats reals

Joan Girbau Badó
Opositor a l'Agregaduria de Geometria Diferencial
de la Universitat Autònoma de Barcelona

Barcelona 1973

Índex

1 La prehistòria de la geometria diferencial 1

2 La geometria diferencial de Newton a Gauss 2

3 Gauss 7

4 De Gauss a Riemann 10

5 Riemann 11

6 De Riemann a Sophus Lie 13

7 Sophus Lie 16

8 Els treballs de W. Killing i la tesi doctoral d'É. Cartan 18

9 La geometria diferencial des de principis de segle fins a Einstein i la seva teoria de la relativitat general 21

10 De la relativitat general a la tesi doctoral de G. de Rham 26

11 La tesi doctoral de Georges de Rham i els treballs de Marston Morse 36

12 La geometria diferencial de 1934 a la Segona Guerra Mundial 45

13 La geometria diferencial a la dècada 1940-50 51

14 La geometria diferencial a la dècada 1950-60 58

15 La geometria diferencial de 1960 als nostres dies 73

Anotacions dels traductors-curadors 88

Referències 93

1 La prehistòria de la geometria diferencial

Tot i que els orígens remots de la geometria diferencial es poden trobar potser en els grecs, per exemple en el procediment d'Arquimedes de determinació d'àrees i volums,[1] o en l'estudi d'Apol·loni de les normals a les seccions còniques,[2] els orígens més recents cal buscar-los en Cavalieri, i en la seva teoria dels indivisibles.[3] Cavalieri va ser deixeble de Galileu i va ensenyar Matemàtiques a Bolonya des de 1629 fins a la seva mort el 1667. En la seva teoria dels indivisibles hi trobem la idea que un punt genera una línia per moviment i una línia genera una superfície. Poc després Torricelli, per provar que dos triangles d'igual base i altura tenen la mateixa àrea, substitueix les línies de Cavalieri per petites franges, és a dir, una mena de línies amb gruix. I és el mateix Torricelli qui expressa correctament el «principi de Cavalieri», afirmant que dos sòlids amb les mateixes alçades tenen el mateix volum si les seves seccions planes a igual alçada tenen la mateixa àrea. En aquestes idees s'hi troba el germen del càlcul infinitesimal i integral.

El primer a abordar un problema que podem considerar propi de la geometria diferencial és Huygens,[4] que estudia les involutes o desenvolupants d'una corba.

La invenció, a finals del segle XVII, del càlcul infinitesimal per part de Newton i Leibniz tanca el que podríem anomenar la prehistòria de la geometria diferencial.

2 La geometria diferencial de Newton a Gauss

És el mateix Newton, en la seva «Geometria Analítica», editada per primera vegada el 1736 després de la seva mort, qui defineix la noció de cercle osculador en un punt d'una corba plana i, amb això, la noció de centre de curvatura i curvatura, calculant aquestes expressions amb l'ús de la noció de derivada, acabada d'inventar.

---

[1] Vegeu: The method of Archimedes, editat per T. L. Heath. Cambridge 1912.

[2] Des Coniques d'Apollonius, per Paul Ver Ecke, Buges 1924.

[3] Cavalieri: Geometria indivisibilium continuorum. Bonn 1653.

[4] Huygens: Oeuvres Completes de Huygens, Vol. 14. Societé Hollandaise des Sciences (1920) pàg. 387.

Clairaut, en el seu treball «Recherche sur les courbes à double courbure» aparegut el 1731, és el primer a interessar-se per les corbes guerxes a l'espai. No obstant això, caldrà esperar fins al 1775, quan Monge publica el seu article «Sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions dans les courbes à double courbure», perquè el concepte de curvatura d'una corba guerxa quedi precisat en el sentit que avui el coneixem i perquè sorgeixi de manera incipient el concepte de torsió. Vegem com Monge introdueix la curvatura en aquest article. Comença observant que les normals en un punt no singular de la corba guerxa donada estan en un pla. En aquest pla es troba una recta que ell anomena «eix», que és el límit de la intersecció d'aquest pla amb el pla corresponent a un altre punt de la corba infinitament pròxim. És a dir, cada punt P de la corba té el seu «eix». Si es traça una perpendicular des de P a l'eix corresponent a P i anomenem Q al peu de la intersecció, Q serà el centre de curvatura, PQ el radi de curvatura, i la inversa de la longitud PQ, la curvatura.

Com hem dit, el concepte de torsió es troba en germen en aquest treball de Monge. Però caldrà esperar fins al 1806, quan Lancret publica «Mémoire sur les courbes à double courbure»,[5] perquè la torsió i la curvatura quedin establertes com actualment (▷ **1**), Lancret defineix per primera vegada el pla osculador. La normal a la corba continguda en aquest pla és la normal principal, i anomena binormal a la normal al pla osculador.

Mentre la teoria local de les corbes guerxes va prenent forma, els geòmetres s'interessen també paral·lelament per l'estudi de les superfícies. Ja el 1697 Johanes Bernoulli proposa el següent problema: «Donats dos punts sobre una superfície connexa, es demana una manera de descriure geomètricament d'un d'aquests punts a l'altre, la línia més curta».[6] La paraula «connexa» no deixa de ser interessant. El problema de trobar les geodèsiques estava, doncs, des de llavors correctament plantejat.

El 1728 apareixen per separat dos treballs, un del mateix Johanes Bernoulli i un altre d'Euler, que intenten donar solució a aquest problema. El treball d'Euler[7] és molt més profund que el de Bernoulli, i en ell s'hi troben les famoses equacions que avui dia ocupen un lloc central en el càlcul de variacions.

Una altra importantíssima contribució d'Euler a la geometria de superfícies la

[5]Mémoires présentés à l'Institut par divers savants, vol 1 (1806).

[6]Johanes Bernoulli: Opera Omnia. Lausanne 1767, vol 1, pàg. 204.

[7]Euler: De linea brevissima in superficie quacunque. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, vol. 2. St. Petersburg 1728.

constitueix el seu treball «Recherches sur la courbure des surfaces»,[8] en què introdueix les direccions principals i les curvatures principals en un punt d'una superfície. També es planteja Euler per primera vegada, en un treball aparegut el 1772,[9] el problema de quan una superfície pot desenvolupar-se isomètricament sobre un pla, trobant condicions necessàries perquè això succeeixi.

Parlem ara d'un treball molt important de Meusnier aparegut el 1785.[10] Meusnier considera una superfície S i, en un punt p de S, el pla tangent a aquesta superfície. Mitjançant una elecció adequada de coordenades, considera que el punt p és l'origen i que el pla tangent és el pla (u,v). Anomena t a la tercera coordenada; t serà sobre la superfície, funció de u,v. Desenvolupant t en sèrie de potències a l'origen:

$$t=\frac{1}{2}(cu^2+2\,e\,u\,v+f\,v^2)+\dots$$

A l'origen es tindrà:

$$d^2t=c\,du^2+2e\,du\,dv+f\,dv^2.$$

Suposant que $fc-e^2\neq 0$, mitjançant una rotació d'eixos es pot aconseguir que d^2t adopti la forma:

$$d^2t=\frac{du'^2}{r}+\frac{dv'^2}{\rho}.$$

Les direccions dels eixos de coordenades u' i v' les anomena direccions principals, i els nombres $1/r$ i $1/\rho$ curvatures principals (com hem dit abans, les curvatures principals ja havien estat introduïdes per Euler). Meusnier calcula r i ρ en funció de c,e,f i troba les expressions

$$\begin{aligned} r &= \frac{2}{c+f+\sqrt{(c-f)^2+4e^2}}, \\ \rho &= \frac{2}{c+f-\sqrt{(c-f)^2+4e^2}} \end{aligned}$$

En el pla $v'=0$, pren el cercle de radi r tangent a la línia $t=0$. Aquest cercle descriu per rotació al llarg de la línia $t=\rho$ un tor. El tor així format té les

[8] Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Berlín 1760.

[9] De Solidis quorum superficiem in planum explicare licet. Novi Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, vol. XVI. St. Petersburg 1772.

[10] Mémoire sur la courbure des surfaces. Mémoires de Mathématiques et de Physique, vol. X. París 1785.

mateixes direccions i curvatures principals en l'origen que la superfície inicial. Tothom reconeixerà sota aquest enunciat el que avui coneixem com a teorema de Meusnier. Centra després la seva atenció en dos problemes particularment interessants:

1r) Què es pot dir d'una superfície en què les curvatures principals en tots els punts són iguals?

2n) Què es pot dir d'una superfície en què les curvatures principals en tots els punts són iguals, però de signe contrari?

Meusnier troba les següents respostes a aquestes preguntes:

a) Les úniques superfícies solució al primer problema són les esferes i els plans.

b) Entre totes les superfícies limitades per una corba no plana, la que té menor àrea verifica que les seves curvatures principals són iguals i de signe contrari.

Meusnier deixa de banda el problema d'existència de tals superfícies d'àrea mínima (▷ **2**). Els seus raonaments en aquesta qüestió són més fruit de la intuïció geomètrica directa que de l'estudi analític del problema.

Ja Lagrange s'havia ocupat, amb anterioritat a Meusnier, de les superfícies de mínima àrea. El punt de vista de Lagrange és més analític que el de Meusnier i, si bé no arriba a resultats tan bonics, potser és més útil en obrir la porta a futures i més profitoses investigacions sobre el tema. El treball de Lagrange al qual fem referència es troba a les pàgines 135 a 362 del volum 1 de les Obres de Lagrange publicades per Gauthier-Villars, París 1867. Resumim la part més important d'aquest treball.

Considera una superfície donada per una equació $z = z(x, y)$. Designa per $p = \partial_x z$, $q = \partial_y z$. L'àrea d'aquesta superfície ve donada per

$$\iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Per minimitzar l'àrea, aplica el càlcul de variacions inventat per Euler i obté

$$0 = \delta \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = -\iint \delta z\big(\partial_x P + \partial_y Q\big)\,dx\,dy,$$

on:

$$P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Q = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Les superfícies d'àrea mínima han de complir doncs: $\partial_x P + \partial_y Q = 0$. Equació que es tradueix a:

$$(1+q^2)r - pqs + (1+p^2)t = 0,$$

on

$$r = \partial_x^2 z, \; s = \partial_x \partial_y z, \; t = \partial_y^2 z.$$

Lagrange s'atura en aquesta equació que no sap integrar. Dedueix llavors d'aquesta equació resultats particulars desproveïts d'interès. El primer tractament profund d'aquesta equació és de Legendre i data de 1787.[11] La teoria de desenvolupables iniciada com hem vist per Euler és continuada per Monge que el 1780 publica un bonic treball sobre aquest tema. [12] Vegem el raonament intuïtiu de Monge. Una superfície desenvolupable és per definició la que es pot desplegar sobre un pla. Fixant la seva atenció en l'operació de «desplegament» diu que a cada instant, el pla està plegat sobre la superfície i el desplegament significa una petita rotació al voltant d'un eix. L'eix de rotació ha d'estar immers a la superfície i els eixos successius han de ser coplanaris. D'això en dedueix que els eixos han de passar per un punt o bé han de ser tangents a una corba. D'aquí que per estudiar les desenvolupables, estudia la superfície engendrada per les tangents a una corba.

Hem d'esmentar també un bell llibre de Monge titulat «Aplication de l'Algèbre à la Géometrie» (París 1807). En ell considera les envolupants d'una família de superfícies $F(x, y, z, \alpha) = 0$, depenents d'un paràmetre α. Per trobar la línia d'intersecció de dues superfícies corresponents a dos paràmetres infinitament propers, considera l'equació $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$. A la corba intersecció l'anomena «corba característica». L'equació de l'envolvent la troba eliminant α entre les equacions $F = 0$ i $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$. Aplica després aquesta teoria d'envolvents a les desenvolupables, considerant que una desenvolupable és una envolupant d'una família de plans dependent d'un paràmetre i troba l'equació característica de les desenvolupables: $rt = s^2$.

Un brillant deixeble de Monge va ser Dupin, que el 1813 publica el llibre «Developpements de Géometrie», on defineix el que avui es coneix amb el nom de

[11] «Mémoire sur l'integration de quelques écuations aux dérivées parcielles». Histoire de l'Académie Royale de Sciences, 1787.

[12] «Mémoire sud els propriétés de plusieurs gèneres de surfaces courbes». Mémoires de Mathématique et de Physique, Vol. IX, 1780.

«indicatriu de Dupin». Considera una superfície donada pel seu desenvolupament en sèrie en un punt (x_0, y_0, z_0):

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0) + \frac{1}{2}\big(r(x - x_0)^2 + 2s(x - x_0)(y - y_0) + t(u - u_0^2)\big) + \cdots$$

Tallant aquesta superfície per un pla paral·lel al pla tangent al punt (x_0, y_0, z_0), obté com a primera aproximació d'aquesta intersecció la cònica:

$$\begin{cases} c = r(x - x_0)^2 + 2s(x - x_0)(y - y_0) + t(u - u_0^2) \\ z - z_0 = p(x - x_0)^2 + q(y - y_0)^2 + C \end{cases}$$

Anomena indicatriu a la cònica situada al pla (x, y) d'equació

$$c = r(x - x_0)^2 + 2s(x - x_0)(y - y_0) + t(u - u_0^2)$$

Tallant aquesta cònica per una recta:

$$y - y_0 = \ell(x - x_0)$$

troba el semidiàmetre de la indicatriu en cada direcció i observa que a cada punt de la superfície el radi de curvatura d'una secció normal en una determinada direcció és proporcional al semidiàmetre de la indicatriu en aquella direcció.

Apareixen també per primera vegada en aquest llibre de Dupin les direccions conjugades i les direccions asimptòtiques o autoconjugades.

Com veiem, la geometria diferencial de superfícies va perfilant-se a poc a poc. Juntament amb raonaments i càlculs perfectament rigorosos se'n troben també d'altres purament intuïtius i desproveïts de rigor. Les diferencials són considerades com a increments molt petits i encara que de vegades es precisi el seu ordre de petitesa en altres no. Això indueix, fins i tot a grans matemàtics, a errors molt freqüents. El primer llibre de geometria diferencial escrit amb un rigor que res no ha d'envejar als tractats actuals es deu a Cauchy i apareix 1826 sota el títol «Leçons sur l'application du calcul infinitesimal à la géometrie». [13]

En aquest llibre de Cauchy hi ha moltes innovacions. En primer lloc, a la teoria de corbes pren sistemàticament com a paràmetre l'arc. Observa que la direcció de la normal principal a cada punt ve donada per les tres components

[13] Hi ha una magnífica edició de les obres completes de Cauchy en 14 volums editada per Gauthier-Villars a principis de segle i que ha estat reeditada diverses vegades.

$\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$. Denotant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ els cosinus directors de la tangent, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ als de la normal principal i $\cos L$, $\cos M$, $\cos N$ als de la binormal, estableix que

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{\cos\lambda}{\rho}, \quad \frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{\cos\mu}{\rho}, \quad \frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{\cos\nu}{\rho}$$

sent ρ el radi de curvatura, i estableix també

$$\frac{d\cos L}{ds} = \frac{\cos\lambda}{R}, \quad \frac{d\cos M}{ds} = \frac{\cos\mu}{R}, \quad \frac{d\cos N}{ds} = \frac{\cos\nu}{R}.$$

El coeficient $1/R$ és el que avui anomenem torsió. Aquestes dues equacions són, doncs, les dues primeres fórmules de Serret-Frenet (▷ **3**). Encara li faltava la tercera. A la teoria de superfícies, Cauchy tracta les tres variables x, y, z de manera simètrica substituint l'equació $z = z(x, y)$ per l'equació $w(x, y, z) = 0$. Sens dubte ja hem dit que el rigor de Cauchy és extrem. Per ell una equació del tipus:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

significa que quan x, y, z són funcions de t es té

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

3 Gauss

El 1827 apareix un dels treballs més fonamentals de tots els temps pel que fa a la geometria diferencial. És obra de Carl Friedrich Gauss. El títol: «Disquisicions generals sobre les superfícies corbes». [14]

Gauss en aquest treball comença considerant que les coordenades (x, y, z) d'un punt d'una superfície poden expressar-se en funció de dos paràmetres independents que ell anomena p, q i que nosaltres anomenarem u, v per no confondre'ls amb les derivades parcials de z respecte x, y, que tradicionalment s'han designat sempre per p, q. A banda d'aquest petit canvi, seguirem en tota la resta les notacions de Gauss, que s'han anat mantenint al llarg dels anys i són

[14] Es pot consultar una recent edició d'aquesta obra, en francès, sota el títol «Recherches Générales sur les surfaces courbes». A. Blanchard. Paris 1967.

les mateixes que s'empren actualment. Diferenciant les expressions de x, y, z en funció de u, v obté:

$$dx = a\,du + a'\,dv, \quad dy = b\,du + b'\,dv, \quad dz = c\,du + c'\,dv.$$

Anomena

$$A = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

i

$$\Delta = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \not\equiv 0.$$

Posa $E = a^2 + b^2 + c^2$, $F = aa' + bb' + cc'$, $G = a'^2 + b'^2 + c'^2$. Amb això, el diferencial de longitud s'expressa:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

i

$$\Delta = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

Calcula després el cosinus de l'angle entre dues direccions qualsevol i obté, com a cas particular, que el cosinus de l'angle entre les línies donades per $u = 0$ i $v = 0$ és $F/\sqrt{EG}$. Per tant, aquestes dues direccions seran perpendiculars si $F = 0$. Després es proposa definir la curvatura d'una superfície i heus aquí la seva manera de raonar:

En una corba plana, si posem en correspondència cada punt de la corba amb el punt de la circumferència unitat determinat per la direcció de la normal orientada, la curvatura de la corba es pot interpretar com el límit de les raons dels corresponents arcs infinitesimals a la circumferència i a la corba. Això li suggereix la idea de fer el mateix a les superfícies. A cada punt (x, y, z) de la superfície, Gauss assigna el punt (X, Y, Z) de l'esfera unitat, donat per la direcció de la normal orientada de la superfície en aquest punt. El límit de la raó de les corresponents àrees infinitesimals a l'esfera unitat i a la superfície, és el que ell defineix com a curvatura de la superfície. Designant per K aquesta curvatura, considera després la integral $\int Kd\sigma$, on σ és l'element d'àrea. A aquesta integral estesa a una porció de superfície, li diu curvatura integral de la porció de superfície. Obté per càlcul la següent expressió:

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2},$$

on

$$D=\frac{\begin{vmatrix}\partial_u^2 x & \partial_u^2 y & \partial_u^2 z\\ \partial_u x & \partial_u y & \partial_u z\\ \partial_v x & \partial_v y & \partial_v z\end{vmatrix}}{\Delta},\quad D'=\frac{\begin{vmatrix}\partial_u\partial_v x & \partial_u\partial_v y & \partial_u\partial_v z\\ \partial_u x & \partial_u y & \partial_u z\\ \partial_v x & \partial_v y & \partial_v z\end{vmatrix}}{\Delta},\quad D''=\frac{\begin{vmatrix}\partial_v^2 x & \partial_v^2 y & \partial_v^2 z\\ \partial_u x & \partial_u y & \partial_u z\\ \partial_v x & \partial_v y & \partial_v z\end{vmatrix}}{\Delta}$$

Gauss observa llavors que la curvatura K no és més que el producte de les curvatures principals. Mitjançant un altre càlcul observa que K compleix la següent equació:

$$\begin{aligned}4(EG-F^2)K = {} & E\big(\partial_v E\partial_v G - 2\partial_u F\partial_v G + (\partial_u G)^2\big)\\ & + F\big(\partial_u E\partial_v G - \partial_v E\partial_u G - 2\partial_v E\partial_v F - 2\partial_u F\partial_u G + 4(\partial_u F)^2\big)\\ & + G\big(\partial_u E\partial_u G - 2\partial_u E\partial_v F + (\partial_v E)^2\big)\\ & - 2(EG-F^2)\big(\partial_v^2 E - 2\partial_u\partial_v F + \partial_v^2 G\big).\end{aligned}$$

Després escriu (transcrivim literalment): «Si observem que es té sempre: $dx^2+dy^2+dz^2 = Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ es veu immediatament que $\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$ és l'expressió general d'un element lineal sobre una superfície corba. Per tant, l'anàlisi exposada al § precedent (es refereix a la equació anterior que compleix la curvatura) ens ensenya que per trobar la mesura de la curvatura no hi ha necessitat de fórmules finites donant les coordenades x, y, z en funció de les indeterminades u, v, sinó que n'hi ha prou amb conèixer l'expressió general de la longitud de cada element lineal».

Això constitueix allò que avui coneixem per teorema egregi. I afegeix més endavant: «Les consideracions que acabem d'exposar estan lligades a una manera particular de concebre les superfícies que ens sembla digne, al més alt grau, de la consideració dels geòmetres. En efecte, si es considera una superfície, no com a límit d'un sòlid, sinó millor com un sòlid flexible i inextensible, una part de les propietats de la superfície dependran de la forma particular que pugui adoptar per una determinada flexió, però altres seran absolutes i invariants, sigui quina sigui aquesta forma. És precisament en l'estudi d'aquesta última classe de propietats que s'obre a la geometria un camp nou immens» … «es pot concebre, des d'aquest punt de vista, la teoria de les línies geodèsiques i altres subjectes que més tard tractarem».

Més endavant s'ocupa de les geodèsiques i obté per un raonament geomètric molt simple el següent important teorema:

«Si es tracen sobre una superfície, a partir d'un mateix punt, una infinitat de geodèsiques de la mateixa longitud, la línia que uneix els extrems de les línies esmentades les talla a totes en un angle recte».

Més endavant considera un triangle format per línies geodèsiques, calculant la integral $\int K d\sigma$ estesa a l'interior del triangle esmentat. Per això utilitza per primera vegada coordenades polars geodèsiques i obté:

$$\int K d\sigma = \text{suma dels angles del triangle} - \pi.$$

D'això dedueix (transcrivim literalment): «La suma dels angles d'un triangle format per línies geodèsiques és superior a 180° si aquesta superfície és còncau-convexa i inferior a 180° si aquesta superfície és convex-còncava». (▷ **4**)

Diu després que aquest resultat es pot generalitzar a un polígon geodèsic de n costats, descomponent-lo en triangles, i obté per a un tal polígon de n costats l'expressió:

$$\int K d\sigma = \text{suma dels angles del polígon} - (n-2)\pi,$$

on la integral $\int K d\sigma$ es considera estesa a l'interior del polígon.

Es pot reconèixer sota aquest enunciat el teorema de Gauss–Bonnet (▷ **5**).

4 De Gauss a Riemann

Bonnet, vint anys després de Gauss,[15] considera un polígon qualsevol sobre una superfície (Gauss considerava un polígon geodèsic) i obté que la integral $\int K d\sigma$ estesa a l'interior del polígon val la suma dels angles menys $(n-2)\pi$, menys la integral de la curvatura geodèsica del contorn.

Serà Darboux molt més tard, el 1887, qui donarà la primera demostració de la fórmula de Gauss-Bonnet utilitzant la fórmula de Green.[16] El 1849 apareix un treball de Plateau, que encara que pròpiament entri de ple al camp de la Física,

[15] Mémorie sud la théorie générale des surfaces. Journal École Polytechnique 19 (1848) pàg. 131.

[16] Darboux: Leçons sud la théorie générale des surfaces. París, 1887, pàg. 122.

estava destinat a tenir una remarcable importància en geometria diferencial.[17] El resultat central d'aquest treball és el següent: Si una làmina líquida sense pes s'adhereix a una corba rígida, la forma d'equilibri ha de ser la de mínima àrea. Aquest resultat dona una empenta considerable a l'estudi de les superfícies d'àrea mínima i planteja el problema matemàtic de l'existència d'una superfície mínima amb contorn donat.

El 1852 apareix el treball de Frenet[18] en què s'estableixen per primera vegada de manera completa les fórmules de Frenet per a corbes guerxes, tal com avui les coneixem —(Hem vist abans com Cauchy havia obtingut amb anteriorioriad dues d'aquestes tres fórmules).

5 Riemann

Els treballs de Gauss que obrien una infinitat de camins nous, haurien de tenir una continuació lògica en l'obra de Bernhard Riemann. El seu principal treball en geometria diferencial és la memòria llegida el 10 de juny de 1854 en ocasió de les proves d'admissió com a professor de la Universitat de Göttinguen. El seu títol: «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen».[19]

En aquest treball els càlculs no són més que indicats succintament. Comença introduint, de manera més filosòfica que matemàtica, el concepte de varietat n-dimensional, preocupant-se a donar exemples en què aparegui la necessitat de considerar varietats de dimensió més gran que tres. Posa l'exemple d'una línia, transportant-se sobre una altra línia donada, d'una determinada manera. Diu: «El conjunt de modes de determinació així obtinguts formarà una varietat de dues dimensions. Semblantment, s'obtindrà una varietat de tres dimensions si es concep una varietat de dues dimensions transportant-se d'una manera determinada sobre una altra completament diferent i és fàcil veure com així es pot prosseguir la construcció». Després es preocupa del concepte de longitud d'un element d'arc en aquesta varietat. Diu: «El problema consisteix a establir una expressió matemàtica de la longitud d'una línia ... em limitaré a les línies en què les relacions entre els increments dx de les variables x variïn de manera contínua. Es poden llavors concebre les línies descompostes en elements en els

[17] J. Plateau: Sur les figures d'equilibre d'un masse liquide sans pesanteur. Mémoires de l'Academie Royale de Belgique. Vol. XXIII, nouvelle sèrie, 1849.

[18] Sur les courbes a double courbure. Liouville journal de Mathématiques, Vol. XVII.

[19] Es pot trobar traduït al francès a A. Blanchard, Oeuvres de Riemann. Paris 1968.

quals les relacions de les quantitats dx puguin considerar-se com a constants, i el problema consisteix llavors a establir per a cada punt, una expressió general de l'element lineal ds amb origen en aquest punt». Després ve a dir que només s'ocuparà del cas en què el ds pugui expressar-se com a arrel quadrada d'una forma quadràtica definida positiva. Considera el cas particular en què

$$ds = \sqrt{\Sigma(dx^i)^2},$$

i diu que una tal expressió pot transformar-se en una altra reemplaçant les n variables x per funcions d'altres noves variables independents i el problema que es planteja aleshores és de saber quan un element d'arc pot, amb una elecció convenient de les coordenades, expressar-se en la forma $ds = \sqrt{\Sigma(dx^i)^2}$. A aquestes varietats les anomena varietats planes. Actualment sabem que perquè això passi és condició necessària i suficient que el tensor de curvatura sigui idènticament nul. Però el tensor de curvatura és un tensor de quart ordre força complicat. Com s'ho fa Riemann per introduir la curvatura? Primer de tot, defineix les coordenades normals geodèsiques entorn d'un punt x_0, de manera intuïtiva. Després, compara l'expressió de l'element de longitud ds^2 en un punt qualsevol i al punt x_0. En llenguatge actual, si g_{ij} és el tensor mètric es tindrà, per la fòrnula de Taylor

$$g_{ij}(x) = g_{ij}(x_0) + \sum_{k,l} \left(\partial_k \partial_l g_{ij}\right)_{x_0} (x^k - x_0^k)(x^l - x_0^l) + \cdots \quad (\partial_k = \partial_{x^k})$$

ja que en coordenades geodèsiques es verifica: $\left(\partial_k g_{ij}\right)_{x_0} = 0$. Però en aquestes coordenades els termes $\left(\partial_k \partial_l g_{ij}\right)_{x_0}$ determinen completament el tensor de curvatura i recíprocament. A més, el tensor de curvatura queda determinat si es coneixen les curvatures seccionals a totes les direccions planes que passen per x_0.

Això és més o menys el que esbossa Riemann a l'article que referim, dient que en coordenades normals geodèsiques es té:

$$ds^2 = \Sigma(dx^i)^2 + \text{un terme d'ordre } 4 + \cdots$$

i que aquest terme d'ordre 4 queda determinat per les curvatures de Gauss de les superfícies que passen per x_0, i després diu que aquest terme d'ordre 4 mesura en certa manera la «planitat» de l'espai, ja que si l'espai és pla aquest terme s'anul·la.

Amb anterioritat a Riemann, Lobatschewsky, per provar que el postulat d'Euclides no es deduïa necessàriament dels altres axiomes d'Euclides, havia construït una Geometria rebutjant aquest postulat i conservant els altres axiomes d'Euclides. Aquesta Geometria passaria ara a ser una més de les infinites Geometries de Riemann possibles, precisament la Geometria de les varietats de curvatura seccional constant negativa.

Encara que sigui molt posterior, citarem aquí un paràgraf de H. Poincaré que revela la preocupació de molts matemàtics pel fet que les Geometries de Riemann s'apartaven del que tradicionalment s'havia entès per Geometria. Diu Poincaré: «Les Geometries de Riemann, tan interessants en diversos camps, mai seran, però, més que purament analítiques i no conduiran a demostracions anàlogues a les d'Euclides».[20]

La diferència entre les infinites Geometries de Riemann i les Geometries tradicionals està en el fet que en la majoria d'aquelles el moviment d'un sòlid rígid no és possible. ¿No serà, potser, aquesta idea inicial la que induirà Sophus Lie, vint anys després de l'aparició de la memòria de Riemann, a l'estudi dels espais continus de transformacions que poden actuar sobre una varietat donada?

6 De Riemann a Sophus Lie

El 1867 apareix un treball de Bonnet que constitueix una important aportació a l'estudi de les superfícies de $\mathbf{R}^3$. [21] S'estableix que una superfície de $\mathbf{R}^3$ queda (localment) unívocament determinada (excepte desplaçaments de $\mathbf{R}^3$) pel coneixement de la mètrica i de la segona forma quadràtica fonamental. Bonnet només estableix aquí la unicitat. El problema d'existència que Bonnet no aborda pot formular-se així:

Donats en un obert U de $\mathbf{R}^2$ dos camps tensorials g i α, dues vegades covariants, el primer definit positiu, quines condicions han de complir perquè existeixi a $\mathbf{R}^3$ una superfície parametritzada $U \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}^3$ tal que si $\tilde{g}$ i $\tilde{\alpha}$ són respectivament la mètrica i la segona forma quadràtica fonamental d'aquesta superfície, es verifiqui $g = \varphi^* \tilde{g}$ i $\alpha = \varphi^* \tilde{\alpha}$? La condició que han de complir g i α perquè aquest problema tingui solució, és que estiguin relacionats mitjançant les

[20] Poincaré: La Ciencia y la hipótesis. Colección Austral. Espasa Calpe, pàg. 55.

[21] Mémoire sud la théorie des surfaces applicables sur une surface donné. J. Ecole Polytechnique, 42 (1867).

equacions de Gauss–Codazzi. Per això, quan el 1880 Codazzi estableix les seves equacions, és precisament Bonnet el primer a adonar-se de la seva extraordinària importància. Però d'això ja en parlarem més endavant.

El 1868 apareix un treball extraordinàriament interessant, ja que conté, en germen, la idea de derivada covariant i tot el càlcul tensorial. El seu autor és Christoffel.[22] El problema que es planteja en aquest treball és el de determinar quan dues formes diferencials quadràtiques $\Sigma g_{ij}dx^i dx^j$ i $\Sigma g'_{ij}dx'^i dx'^j$ es poden convertir l'una en l'altra mitjançant un canvi de coordenades. Es tracta, doncs, de veure en quins casos és possible trobar funcions independents $x^i = x^i(x'^1,\dots,x'^n)$ que verifiquin:

$$g'_{\mu\nu} = g_{ij}\partial'_\mu x^i \partial'_\nu x^j \quad (\partial'_\mu = \partial_{x'^\mu}). \tag{1}$$

Introdueix llavors els símbols que porten el seu nom:

$$\begin{aligned} \left[{ij \atop k}\right] &= \tfrac{1}{2}\big(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}\big) \\ \left\{{l \atop ij}\right\} &= g^{lk}\left[{ij \atop k}\right] \end{aligned}$$

i dedueix, per derivació de (1), les fórmules de canvi de coordenades dels seus símbols:

$$\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}'\partial'_\lambda x^l = \left\{{l \atop ij}\right\}\partial'_\mu x^i\, \partial'_\nu x^j + \partial'_\mu \partial'_\nu x^l \tag{2}$$

Interpreta (2) com l'equació diferencial que cal resoldre per trobar les funcions $x^i = x^i(x'^1,\dots,x'^n)$. Aleshores es proposa trobar les condicions d'integrabilitat de (2). Deriva parcialment (2) pel que fa a x'^σ i després deriva respecte a x'^ν l'equació anàloga a la (2):

$$\left\{{\lambda \atop \mu\sigma}\right\}'\partial'_\sigma x^l = \left\{{l \atop ij}\right\}\partial'_\mu x^i \partial'_\sigma x^j + \partial'_\mu \partial'_\sigma.$$

Eliminant el terme

$$\partial'_\mu \partial'_\nu \partial'_\sigma x^l$$

de les equacions que així obté, observa que la condició d'integrabilitat de (2) es pot escriure:

$$R'^\lambda_{\mu\sigma\nu}\, \partial'_\lambda x^l = R^l_{ijk}\, \partial'_\mu x^i\, \partial'_\sigma x^j\, \partial'_\nu x^k. \tag{3}$$

Si l'equació (3) es verifica idènticament, (2) és integrable i es pot trobar efectivament la transformació que transforma la mètrica $\Sigma g_{ij}dx^i dx^j$ en $\Sigma g'_{ij}dx'^i dx'^j$.

---

[22] Über die Transformation der homogenen Differential Audrücke zweiten Grades. Journal für die reine und angew. Math. (Crelle) 70 (1869) 46-70.

Això passa, per exemple, en el cas de curvatura nul·la. Christoffel obté aquí, doncs, la condició necessària i suficient perquè una mètrica sigui plana (Riemann havia obtingut només la condició necessària). Si (3) no es verifica idènticament, pren (3) com a nova equació diferencial a integrar i troba com a condició d'integrabilitat una equació en què intervenen les derivades covariants del tensor de curvatura. Si aquesta condició d'integrabilitat es compleix idènticament, té el problema resolt, i si no, prenent la nova condició d'integrabilitat com a nova equació a integrar, troba una altra condició d'integrabilitat per a aquesta nova equació en què figuren les derivades covariants segones de la curvatura i així continua el procés. Si aquest procés té fi, l'equivalència de les formes diferencials

$$\Sigma g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{i} \quad \Sigma g'_{ij} dx'^i dx'^j$$

queda establerta. Diguem que en aquest treball la noció de derivada covariant no apareix en forma clara, sinó perduda entre els càlculs. Observem aquí una vegada més que els grans conceptes de la matemàtica apareixen sempre en intentar resoldre un problema molt concret i van sempre envoltats de gran aparell de càlcul.

Malgrat els avenços realitzats en el coneixement de les varietats n-dimensionals, els geòmetres no deixen d'interessar-se per les superfícies de l'espai ordinari. Així, per exemple, el 1880 apareix un treball de Codazzi[23] en què es troben per primera vegada les equacions que avui coneixem amb el seu nom i de les quals ja hem parlat abans. L'autor considera una superfície de l'espai ordinari donada per $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ i les dues formes quadràtiques fonamentals:

$$\begin{aligned} I &= E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} \\ II &= e\, du^2 + 2f\, du\, dv + g\, dv^2 = -d\vec{x} \cdot d\vec{N} \end{aligned}$$

i estableix les equacions següents:

$$\begin{cases} \partial_v e - \partial_u f = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ \partial_v f - \partial_u g = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^1 \end{cases}$$

on Γ_{ij}^k són els símbols de Christoffel. Aquestes equacions poden interpretar-se actualment de la següent manera:

$$(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y \alpha)(X, Z)$$

sent ∇ la connexió sobre la superfície determinada per la mètrica i α la segona forma quadràtica fonamental.

[23]Mémoires présentés à l'Académie, 27 (1880).

7 Sophus Lie

El 1885 i 1886 apareixen els primers treballs de Sophus Lie sobre els grups continus de transformacions.[24] Tot i que no és fins al 1888 que s'exposen de manera sistemàtica els resultats de la teoria de Lie en una obra en tres volums, el tercer dels quals no apareix fins a 1893.[25] Nosaltres estem acostumats a definir un grup de Lie com un grup dotat d'una estructura de varietat diferenciable, i a estudiar per separat els grups de Lie i l'actuació d'un grup de Lie com a grup de transformacions d'una varietat. Aquesta manera d'enfocar la teoria és molt posterior i es deu principalment a W. Killing i É. Cartan. La presentació primitiva de Lie i Engel consisteix en l'estudi d'una família de transformacions de $\mathbf{R}^n$ depenent de manera analítica de r paràmetres independents:

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r)$$

A cada valor $a = (a_1, \ldots, a_r)$ dels paràmetres correspon una transformació T_a definida a $\mathbf{R}^n$ i se suposa que aquestes transformacions constitueixen un grup per a valors de a prou petits. És a dir, se suposa que existeixen r funcions $\varphi^1, \ldots, \varphi^r$ de $2r$ variables, que donen les lleis de multiplicació del grup:

$$a_3^\alpha = \varphi^\alpha(a_1, a_2), \quad \alpha = 1, \ldots, r,$$

on $a_1 = (a_1^1, \ldots, a_1^r)$, $a_2 = (a_2^1, \ldots, a_2^r)$, tals que ($\triangleright$ **6**)

$$f^i(f(x; a_1); a_2) = f^i(x; \varphi(a_1, a_2))$$

i que la llei de multiplicació donada per les funcions φ^α és una llei de grup. El primer teorema fonamental de Lie pot enunciar-se de la següent manera:

«Una condició necessària perquè n funcions $x'^i = f^i(x; a)$ de n variables x^i i r paràmetres essencials a^α defineixin un grup de transformacions és que aquestes funcions satisfacin un sistema d'equacions diferencials de la forma:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a^\alpha} = \xi^i_\beta(x') A^\beta_\alpha(a) \quad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, r) \tag{1}$$

on el determinant de $A^\beta_\alpha(a)$ és diferent de zero i el rang de (ξ^i_β) és màxim.

[24] Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen die eine continuirliche, endliche Gruppe gestaten. Math Annalen, 25 (1885) 71-151. Untersuchungen über Transformations Gruppen. Arch. for Math. og Natuer vol. 10 (1886) 74-128, 353-413.

[25] S. Lie i F. Engel. Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig 1888-1893, reeditat el 1930.

Recíprocament si es té un sistema d'equacions diferencials del tipus esmentat, completament integrable, i si $x'^i = f^i(x;a)$ és una solució que satisfà la condició inicial

$$f^i(x;0) = x^i$$

aquestes funcions defineixen un grup de transformacions».

Les condicions dintegrabilitat del sistema (1):

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial a^\alpha \partial a^\beta} = \frac{\partial^2 x'^i}{\partial a^\beta \partial a^\alpha}$$

poden posar-se sota la següent forma:

$$\xi^j_\alpha \frac{\partial \xi^i_\beta}{\partial x'^j} - \xi^j_\beta \frac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial x'^j} = C^\gamma_{\alpha\beta} \xi^i_\gamma \tag{2}$$

on

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = (A^{-1})^\lambda_\alpha (A^{-1})^\mu_\beta \Big(\frac{\partial A^\gamma_\lambda}{\partial a^\mu} - \frac{\partial A^\gamma_\mu}{\partial a^\lambda}\Big),$$

indicant per A^{-1} la matriu inversa de A. Es veu llavors que les $C^\gamma_{\alpha\beta}$ són constants i es diuen constants d'estructura del grup de transformacions. Les funcions ξ^i que apareixen a (1) serveixen per determinar r operadors que actualment s'anomenen derivades de Lie:

$$X_\alpha = \xi^i_\alpha(x)\, \partial_i.$$

Definint el claudàtor de Poisson $[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha$ es verifica que

$$[X_\alpha, X_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma. \tag{3}$$

Les constants d'estructura han de verificar les relacions següents:

$$\begin{cases} C^\gamma_{\alpha\beta} = -C^\gamma_{\beta\alpha} \\ C^\lambda_{\alpha\beta} C^\delta_{\lambda\gamma} + C^\lambda_{\beta\gamma} C^\delta_{\lambda\alpha} + C^\lambda_{\gamma\alpha} C^\delta_{\lambda\beta} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

El segon teorema fonamental de Lie es pot enunciar:

«Donada una matriu $(\xi^i_\beta(x))$ de funcions de x, $i = 1, \ldots, n$, $\beta = 1, \ldots, r$, de rang màxim, que satisfan l'equació (2), existeix una matriu de funcions $A(a) = (A^\beta_\alpha(a))$ amb determinant no nul tal que el sistema d'equacions

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a^\alpha} = \xi^i_\beta(x') A^\beta_\alpha(a)$$

és completament integrable. Les solucions $f^i(x;a)$ d'aquest sistema tals que $f^i(x;0) = x^i$ defineixen un grup de transformacions».

El tercer teorema fonamental de Lie diu:

«Qualsevol sistema de constants $C^\lambda_{\alpha\beta}$ que satisfaci les relacions (4) constitueix les constants d'estructura d'un determinat grup de transformacions».

En llenguatge actual, sigui G un grup de Lie que actuï com a grup de transformacions d'una varietat diferenciable M, $G \times M \to M$. Aquesta actuació defineix un homomorfisme de l'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G a l'àlgebra de Lie dels camps de M, $\mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$. Els dos primers teoremes de Lie es refereixen al fet que el coneixement d'aquest homomorfisme determina el coneixement local de la llei d'actuació de G sobre M, i el tercer teorema de Lie es refereix al fet que el coneixement del àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ determina el coneixement local de la llei de multiplicació del grup.

Lie i Engel van classificar les àlgebres de Lie en dimensions baixes i van començar l'estudi general de les àlgebres de Lie resolubles i nilpotents. Van aplicar la teoria dels grups de transformacions a la integració d'equacions diferencials que admeten un grup de transformacions. Una bona exposició de tots aquests resultats, que conserva tota la frescor de la teoria primitiva i original, pot trobar-se al llibre d'Einsenhart «Continous Groups of Transformations».[26]

8 Els treballs de W. Killing i la tesi doctoral d'É. Cartan

Hem vist que la presentació primitiva dels grups de Lie tal com es troba als treballs de Lie i Engel consisteix en l'estudi d'una família de transformacions de $\mathbf{R}^n$ depenent de manera analítica de r paràmetres independents, tal que el producte de dues tals transformacions pertany a la família i que si una transformació pertany a la família la seva inversa també. La idea de considerar el grup abstracte subjacent a un grup de transformacions donat, és obra principalment de Killing i de Cartan. Amb això l'estudi dels grups continus de transformacions quedarà descompost en dos problemes diferents:

1r) Trobar totes les possibles estructures abstractes dels grups continus.

[26] Dover, New York (1933), reeditat el 1961.

2n) Trobar totes les possibles realitzacions de cadascuna d'aquestes estructures com a grups de transformacions d'una determinada varietat.

El primer problema, en la fase local, consisteix a classificar totes les àlgebres de Lie possibles i el segon problema, també en la fase local, està relacionat amb la classificació de les representacions d'una àlgebra de Lie donada.

Naturalment el primer que s'intenta és resoldre el problema per als grups simples, és a dir, s'intenta classificar, localment, els grups de Lie simples. Aquesta classificació es fa primer sobre el cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos.

Era ja conegut de Sophus Lie que existien 3 tipus fonamentals d'àlgebres simples (una àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es diu simple si no admet més ideals que $\{0\}$ i $\mathfrak{g}$ i si a més no és commutativa), és a dir:

1r) L'àlgebra de Lie $\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$ de les $(n\times n)$-matrius antisimètriques, que és l'àlgebra de Lie del grup de totes les matrius regulars que deixen invariant la forma quadràtica $z_1^2+\cdots+z_n^2$.

2n) L'àlgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ de totes les $(n\times n)$-matrius de traça nul·la, que correspon al grup de Lie $SL(n,\mathbb{C})$ de totes les $(n\times n)$-matrius de determinant 1.

3r) L'àlgebra de Lie simplèctica $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ de les matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & A^T \end{pmatrix}$$

on A, B i C són $(n\times n)$-matrius complexes, C i B simètriques. Aquesta àlgebra de Lie correspon al grup $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ de totes les matrius de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ que deixen invariant la forma diferencial exterior:

$$z_1\wedge z_{n+1}+z_2\wedge z_{n+2}+\cdots+z_n\wedge z_{2n}.$$

A banda d'aquests tres tipus d'àlgebres de Lie simples, conegudes ja per Sophus Lie (Lie considera 4 tipus, ja que subdivideix el primer en dos casos: n parell i n imparell), existeixen altres àlgebres de Lie simples diferents d'aquestes? W. Killing en dos treballs fonamentals,[27] estableix que a part de les àlgebres de Lie simples citades poden existir altres 5 àlgebres de Lie excepcionals de dimensions 14, 52, 78, 133 i 248. Si bé el treball de Killing és molt important, és incorrecte en alguns punts fonamentals i encara que estableix que a part les àlgebres

[27] Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformations-gruppen. Math. Ann.31 (1888) 252-290, 32 (1889) 1-48.

de Lie simples conegudes i d'aquestes excepcionals no n'hi pot haver cap altra que sigui simple, no queda clar en el seu treball si les cinc àlgebres excepcionals existeixen efectivament.

Caldrà esperar encara cinc anys perquè la classificació de les àlgebres de Lie simples complexes quedi correctament establerta per Élie Cartan a la seva tesi doctoral.[28] Cartan dona proves rigoroses de la classificació esmentada i construeix explícitament les 5 àlgebres de Lie simples excepcionals. La importància dels treballs de Killing i Cartan no està tan sols en els resultats obtinguts (molt brillants) sinó també en els mètodes emprats.

Sigui $\mathfrak{g}$ una àlgebra de Lie. A cada X de $\mathfrak{g}$ se li associa l'endomorfisme de $\mathfrak{g}$ que transforma cada element Y de $\mathfrak{g}$ en $[X,Y]$. Aquesta transformació s'anomena $\mathsf{ad}X$. A $\mathfrak{g}$ es pot considerar la forma quadràtica B (anomenada de Killing) que a cada parell $X,Y \in \mathfrak{g}$ associa el nombre $B(X,Y)$ = traça de l'endomorfisme $\mathsf{ad}X \circ \mathsf{ad}Y$.

Un dels resultats més importants de la tesi de Cartan consisteix a caracteritzar les àlgebres de Lie semisimples (és a dir, descomponibles en suma directa d'àlgebres simples) com aquelles en què la forma quadràtica de Killing és no degenerada. Donat un element $X \in \mathfrak{g}$, $\mathsf{ad}X$ sempre admet el valor propi zero, ja que $(\mathsf{ad}X)X = [X,X] = 0$. Donat un $Y \in \mathfrak{g}$, si designem per $\mathfrak{g}(Y,0)$ el subespai de $\mathfrak{g}$ de vectors propis de valor propi zero de la transformació lineal $\mathsf{ad}Y$, es diu que Y és un element regular de $\mathfrak{g}$ si es verifica:

$$\dim \mathfrak{g}(Y,0) = \min_{X\in\mathfrak{g}} \dim \mathfrak{g}(X,0).$$

Si Y és un element regular de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}(Y,0)$ és una subàlgebra nilpotent de $\mathfrak{g}$ que coincideix amb el seu normalitzador (el normalitzador d'una subàlgebra $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ és el conjunt dels $X \in \mathfrak{g}$ tals que $[X,\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$). Una tal subàlgebra s'anomena subàlgebra de Cartan. Si l'àlgebra de partida és semisimple, totes les subàlgebres de Cartan $\mathfrak{h}$ són abelianes. En aquest cas, donada una subàlgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ admet una base d'elements que són vectors propis simultàniament de tots els endomorfismes $\mathsf{ad}X$ amb $X \in \mathfrak{h}$. Per aquest procediment Cartan (a la seva tesi) estudia l'estructura de les àlgebres de Lie semisimples i aconsegueix classificar-les.

[28]Élie Cartan: Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Thèse. Paris, 1894.

9 La geometria diferencial des de principis de segle fins a Einstein i la seva teoria de la relativitat general

Acabat d'estrenar el segle apareixen dos treballs extraordinàriament importants sobre les superfícies de $\mathbf{R}^3$ de curvatura constant. El primer, obra de H. Liebmann,[29] conté el resultat següent: Una superfície connexa, tancada, de $\mathbf{R}^3$, amb curvatura constant positiva és una esfera.

El segon resultat a què ens referim és obra de Hilbert[30] i diu que si S és una subvarietat completa i connexa de $\mathbf{R}^3$ (completa en el sentit que tota geodèsica pot prolongar-se indefinidament) de curvatura constant $k \neq 0$, ha de ser $k > 0$. Dit d'una altra manera, no hi ha cap superfície completa i connexa de $\mathbf{R}^3$ amb curvatura constant negativa ($\triangleright$ **7**).

Observem que aquests resultats són de caràcter global a diferència dels anteriors que eren locals. En aquesta època el concepte de varietat diferenciable abstracta no ha nascut encara. Aquest concepte començarà a néixer a partir de 1914 com a conseqüència dels treballs de Hausdorff, dels quals parlarem més endavant, que juntament amb el llibre de H. Weyl «Die Idee der Riemannschen Fläche» (Göttingen, 1913) en què es defineix de manera rigorosa la noció de superfície de Riemann mitjançant cartes locals, i treballs posteriors de Caratheodory en què es defineixen correctament les varietats complexes de qualsevol dimensió, constitueixen el germen de la definició actual de varietat diferenciable.

No deixa de ser significatiu que comenci el segle amb resultats de caràcter global, com a presagi dels senders que prendrà la geometria diferencial en el període que s'inicia. Els resultats de Hilbert i Liebmann fan referència a superfícies de curvatura constant positiva o negativa. Les de curvatura nul·la no foren estudiades fins a època molt recent (concretament fins al 1962 amb un treball de Massey que comentarem més endavant, precedit per un treball de Hartman i Nirenberg el 1959).

---

[29] Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung. Math. Ann 53 (1900) 81-112.

[30] Über Flächen von konstanter Gaussscher Krümmung. Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1901) 87-99.

El 1901 apareix un treball de Levi-Civita i Ricci[31] que conté una exposició sistemàtica i coherent del càlcul tensorial, replantejant molts resultats de la teoria de superfícies de l'espai ordinari, la derivació covariant i moltes altres qüestions. Per exemple, trobem en aquest treball un estudi complet dels grups de moviments que admet una varietat de Riemann de dimensió 3, problema que ja havia estat abordat anteriorment per Killing i Bianchi, però que aquí es presenta de manera concisa i clara. Queda establert que (cito literalment) «en les varietats (subvarietats de dimensió 2 de $\mathbf{R}^3$) de curvatura constant i només en aquest cas, hi ha un moviment infinitament petit per al qual les components de translació i les de rotació prenen, en un punt donat, valors inicials prefixats». Ja Killing s'havia ocupat de les isometries infinitesimals (camps tals que el grup uniparamètric que engendren està compost únicament per isometries). Avui sabem que les isometries infinitesimals d'una varietat de Riemann connexa M de dimensió n constitueixen una àlgebra de Lie de dimensió com a màxim $\frac{1}{2}n(n+1)$. Aquesta àlgebra de Lie correspon al grup de Lie de totes les isometries de M (això és conseqüència del treball de Bochner–Montgomery el 1946 que va ser precedit per un de Van Dantzig i Van der Waerden el 1928, dels quals parlarem més endavant). Doncs bé, perquè la dimensió de l'àlgebra de Lie de les isometries infinitesimals de M sigui màxima, és a dir $\frac{1}{2}n(n+1)$, és condició necessària i suficient que M tingui curvatura constant. Aquest fet és el que tradueixen, en un cas particular, Levi-Civita i Ricci.

El 1901 apareix també un treball d'Élie Cartan,[32] que, encara que no és pròpiament de geometria diferencial sinó d'equacions en derivades parcials, tindria una gran repercussió en geometria diferencial, ja que hi apareix per primera vegada de manera explícita el concepte de diferencial exterior. (Implícitament ja es troba en els treballs de Poincaré). L'àlgebra exterior havia estat desenvolupada per Grassmann, però per poder ser emprada en geometria diferencial i en equacions diferencials cal introduir, evidentment, l'operació de diferenciació exterior. En aquest treball de Cartan que comentem, s'introdueixen les equacions en involució i es dona un mètode general per resoldre-les. Aquest treball inicia un ampli camp a la teoria equacions en derivades parcials.

No podem passar per alt un treball de Bianchi aparegut el 1902,[33] on s'estableixen les identitats que avui porten el seu nom.

[31] Mèthodes de càlcul différentiel absolut et leurs applications. Math. Ann. 54 (1901) 125-201.

[32] Sur l'integration des systèms d'équations aux differetielles totales. Ann. École Norm. Sup. l8 (1901) 241-311.

[33] Soi símboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann. Rend. Acad. Lincei 11 (1892) 3-7.

El problema de determinar els possibles grups continus de moviments que admet una determinada varietat de Riemann, que havia estat tractat en dimensió 3, com hem vist, per Killing, Bianchi, Ricci i Levi-Civita, és replantejat i estudiat en dimensió 4 per G. Fubini en dos treballs apareguts el 1903 i 1904.[34]

Hem dit en parlar de la tesi d'É. Cartan i dels treballs de W. Killing que el problema de classificació dels grups de transformacions havia estat dividit en dos problemes diferents: el de trobar les possibles estructures abstractes dels grups continus i el de trobar totes les possibles realitzacions de cadascuna de les esmentades estructures com a grups de transformacions d'una determinada varietat. El primer problema havia estat abordat, en primera fase, classificant les àlgebres de Lie simples complexes. Un cop establerta aquesta classificació es podia abordar el segon problema intentant classificar les representacions lineals d'aquestes àlgebres de Lie simples. Això és objecte d'un important treball d'É. Cartan aparegut el 1913.[35] Una representació d'una àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ és una aplicació lineal ρ de $\mathfrak{g}$ a l'àlgebra de Lie dels endomorfismes d'un espai vectorial V, tal que $\rho([X,Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X)$. Una representació de $\mathfrak{g}$ a V dona lloc a una estructura de $\mathfrak{g}$-mòdul a V. Si $\mathfrak{h}$ és una subàlgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ i si ρ és una representació lineal de $\mathfrak{g}$, totes les matrius $\rho(X)$ amb $X \in \mathfrak{h}$ es poden diagonalitzar simultàniament. Per a cada $X \in \mathfrak{h}$ els coeficients $\lambda_1(X), \ldots, \lambda_n(X)$ de la diagonal de la matriu $\rho(X)$ una vegada diagonalitzada, considerats com a funcions lineals de X, s'anomenen pesos de la representació ρ. Els pesos de la representació adjunta s'anomenen arrels. Cartan introdueix una relació d'ordre al sistema de tots els pesos i arrels, i prova que una representació irreductible queda unívocament determinada pel seu màxim pes en aquesta relació d'ordre. (Una representació de $\mathfrak{g}$ en un espai vectorial V s'anomena irreductible si V considerat com a $\mathfrak{g}$-mòdul és simple). El problema de trobar totes les representacions irreductibles de $\mathfrak{g}$ queda reduït, doncs, a trobar tots els possibles pesos màxims. La suma de pesos màxims de dues representacions irreductibles és també un pes màxim d'una altra representació irreductible continguda a la suma directa de les dues representacions donades. Si r és el rang (la dimensió d'una subàlgebra de Cartan) de $\mathfrak{g}$, Cartan estableix que tots els possibles pesos màxims de representacions irreductibles poden escriure's com a combinacions lineals (amb coeficients enters $\geqslant 0$) de r funcions lineals

[34] Sugli spazii che ammettono un grupo continuo di movimenti. Annali di Matematica 8 (1903) 30-81, 9 (1904) 33-90.

[35] Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. Bull. Soc. Math. France 41 (1913) 63-96.

particulars que depenen només de l'estructura de $\mathfrak{g}$ i de la relació d'ordre al sistema d'arrels. Considerant després un a un els diferents tipus d'àlgebres de Lie simples que existeixen, estableix després que cadascuna d'aquestes r funcions lineals és un pes màxim corresponent a una representació irreductible. Això condueix a una classificació de totes les possibles representacions irreductibles de les àlgebres de Lie simples. Aquest treball de Cartan ha estat després completat i molt simplificat per H. Weyl el 1925 (treball del qual ens ocuparem més endavant) i més recentment per Chevalley. Fins ara es treballava sempre amb àlgebres de Lie complexes. Un any més tard de la memòria de Cartan que hem comentat, apareixen dos treballs del mateix autor[36] que tenen per objecte respectivament classificar les àlgebres de Lie simples reals i les seves representacions irreductibles reals. El mètode per a la classificació de les primeres consisteix en un estudi de la complexificació de l'àlgebra de Lie considerada, que és, o bé simple, o bé suma de dues àlgebres de Lie simples. En aquest darrer cas es defineix en aquesta complexificació una operació de conjugació que admet els elements de l'àlgebra de Lie simple donada com a elements fixos. Començant per una àlgebra complexa convenient, Cartan determina totes les possibles operacions de conjugació i arriba per aquest procediment a una classificació completa de les àlgebres de Lie simples. Aquest mètode va ser després simplificat pel mateix Cartan fent ús de les formes reals compactes.

Encara que pròpiament no sigui de geometria diferencial, hem de citar el llibre de Hausdorff aparegut el 1914, del qual ja hem parlat,[37] perquè és arran d'aquest treball que comença a néixer la noció de varietat diferenciable abstracta. El 1916 apareixen els treballs d'Einstein sobre la «Relativitat general»,[38] que donen un gran impuls a la geometria diferencial, impulsant investigacions sobre el transport paral·lel i paral·lelisme absolut. La teoria de la relativitat restringida, sorgida per explicar certs fenòmens físics com l'experiència de Michelson, és una teoria ideal vàlida només en absència de camp gravitacional. La teoria de la relativitat general requereix la geometria de Riemann de dimensió 4 per a

[36]Les groupes réels simples finis et continus. Ann. École Norm. Sup. 31 (1914) 263-355. Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariant aucune multiplicité plane. J. Math. Pures. Appl. 10 (1914) 149-186.

[37]Grundzüge der Megenlehre. Leipzig 1914.

[38]Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sizungsberichte der Preussichen Akad. Wissenschaften (1915). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstneorie. Ann. der Ph. 49 (1916). Hamiltonsches Princip und allgemeine Relativitätstneorie. Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften 1916. Kosmologische Betrachtungen zur algemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften (1917).

la seva descripció, amb un tensor mètric $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ on els components $g_{\alpha\beta}$ depenen de la distribució i moviment de la matèria i s'anomenen de vegades potencials del camp gravitatori. En cada espai tangent a aquesta varietat és vàlida la teoria de la relativitat restringida. A la teoria de Newton, el potencial gravitatori és una funció escalar ϕ subjecta a verificar l'equació de Poisson:

$$\Delta\phi = 4\pi k\mu$$

(on μ és la densitat de massa i k la constant de la gravitació universal). En absència de matèria el potencial gravitatori verifica l'equació de Laplace: $\Delta\phi = 0$. En relativitat general, el potencial gravitatori no es descriu per mitjà d'una funció escalar ϕ sinó pel tensor mètric $g_{\alpha\beta}$ i la massa no es descriu per la funció de «densitat de massa» μ, sinó per un tensor anomenat tensor d'energia. (A la teoria de la relativitat restringida ja es veu l'equivalència de massa i energia i s'obté aquest tensor d'energia que descriu la distribució de massa-energia de la configuració). En relativitat general, l'equació que substitueix l'equació de Poisson, és a dir, l'equació que ha de verificar el potencial gravitatori és

$$R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -\lambda T_{\alpha\beta},$$

on $R_{\alpha\beta}$ indica el tensor de Ricci, R la curvatura escalar (que s'obté per contracció del tensor de Ricci), $g_{\alpha\beta}$ la mètrica, $T_{\alpha\beta}$ el tensor d'energia i λ una constant universal. En absència de matèria ($T_{\alpha\beta} = 0$) el potencial gravitatori verificarà l'equació (que substitueix la de Laplace):

$$R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0.$$

Aquesta equació és important fins i tot en el camp de la geometria diferencial pura, ja que ha donat lloc a l'estudi d'una classe particular de varietats de Riemann en què el tensor de Ricci és proporcional al tensor mètric. Aquestes varietats es diuen d'Einstein.

10 De la relativitat general a la tesi doctoral de G. de Rham

Com hem dit, la relativitat general impulsa noves investigacions en geometria de Riemann, sobretot pel que fa al concepte de paral·lelisme. En aquesta direcció apareix el 1917 un treball fonamental de Levi-Civita[39] on introdueix la noció de transport paral·lel al llarg d'una corba. Levi-Civita pressuposa en el seu treball que tota varietat de Riemann de n dimensions pot submergir-se localment, isomètricament, en un espai euclidià de dimensió $\frac{1}{2}n(n+1)$. Una prova rigorosa d'aquest fet, conegut per «conjectura de Schlaefli», pot trobar-se en un treball molt posterior d'Élie Cartan.[40] Levi-Civita considera una varietat de Riemann donada, submergida isomètricament en un $\mathbf{R}^m$ i, per tant, es limita a estudiar les subvarietats de $\mathbf{R}^m$. Queda clar després del treball de Levi-Civita que la derivada covariant en una subvarietat de $\mathbf{R}^m$ s'obté per projecció ortogonal sobre la subvarietat, de la derivació ordinària a $\mathbf{R}^m$. Aquest treball constitueix una baula important en la comprensió de la derivada covariant i contribueix enormement a la generalització de la noció de «connexió», constituint el punt de partida dels treballs de H. Weyl sobre connexions projectives i connexions conformes que obren les portes a un enorme camp de recerca. Però abans de parlar d'aquests treballs, cal esmentar, seguint un rigorós ordre històric, la tesi doctoral de P. Finsler apareguda el 1918,[41] on s'introdueixen els espais que avui es coneixen amb el seu nom i que tenen l'origen en el càlcul de variacions. Els espais de Finsler constitueixen la generalització més natural dels espais de Riemann. La diferència fonamental consisteix en en fet que l'element de longitud, en lloc de venir donat per una expressió del tipus:

$$ds = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}$$

ve donada per una funció qualsevol

$$ds = \mathcal{L}(x^1, \dots, x^n, dx^1, \dots, dx^n)$$

[39] Nozione di paralelismo in una varietá qualunque et consequente specificazione della curvature Riemanniana. Rend. Palermo 42 (1917) 73-205.

[40] Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien. Annals de la Soc. Polonaise de Math. 6 (1927) 1-7.

[41] Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Dissertation. Göttingen 1918.

positivament homogènia i de primer grau respecte a les dx^i. Amb això volem dir que:

$$\mathcal{L}(x^1,\dots,x^n,dx^1,\dots,kdx^i,\dots,dx^n) = k\mathcal{L}(x^1,\dots,x^n,dx^1,\dots,dx^n)$$

si $k > 0$.

Ja Riemann, a la seva famosa memòria de 1854, discuteix diverses possibilitats en l'elecció de la mètrica i diu que també es poden considerar altres mètriques donades per expressions diferents. Riemann concretament suggereix la possibilitat de prendre com a mètrica una expressió que sigui l'arrel quarta d'una forma diferencial de quart d'ordre en les diferencials dx^i. Així doncs, encara que els remots orígens del treball de Finsler es puguin buscar en aquesta memòria de Riemann, el seu veritable motiu és, sens dubte, el càlcul de variacions, en què es pretenen trobar les corbes que fan mínima una determinada integral:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\big(x^i(t), \dot{x}^i(t)\big)\,dt$$

on $\mathcal{L}$ és una funció determinada de x^i i de $\dot{x}^i$. Si volem parlar amb un mínim de rigor, necessitem treballar al fibrat tangent (que té dimensió $2n$ si la varietat de partida té dimensió n). $\mathcal{L}$ és llavors una funció $\mathcal{L}(x^1,\dots,x^n,\xi^1,\dots,\xi^n)$ definida al fibrat tangent. Les funcions $\mathcal{L}$ considerades per Finsler no poden ser completament arbitràries, sinó que cal imposar-los certes condicions de regularitat i positivitat, per exemple que la forma quadràtica $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\eta^i\eta^j$ sigui definida positiva, la qual cosa es tradueix en condicions de convexitat:

$$\mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i + \dot{\bar{x}}^i) \leqslant \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i) + \mathcal{L}(x^i, \dot{\bar{x}}^i).$$

Finsler, per mètodes analiticogeomètrics variats i enginyosos aconsegueix generalitzar gran nombre de teoremes de la geometria riemanniana. Posteriorment altres geòmetres tractaran de traslladar a la geometria finsleriana la teoria del paral·lelisme de Levi-Civita,[42] però el primer a donar-ne una teoria coherent i metòdica de la geometria finsleriana fou sens dubte É. Cartan.[43]

El 1918 apareix també un treball fonamental de H. Weyl[44] que juntament amb un altre treball del mateix autor aparegut tres anys més tard,[45] constitueixen el

[42] L. Berwal. Math. Zeitschrift 25 (1926) 40-73 i Atti Congresso Inter. Matem. Bologna (1928) 263-270.

[43] Les spaces de Finsler. Hermann. Paris 1934.

[44] Reine Infinitesimalgeometrie. Math. Zeischrift 2 (1918) 384-411.

[45] H. Weyl: Zur Infinitesimalgeometrie; Einordnung der projektiven und konformen Auffassung, Götingen Nachrichten (1921) 99-112.

punt de partida de la geometria diferencial conforme i de la geometria diferencial projectiva. Fins llavors només s'havien considerat les connexions induïdes per mètriques de Riemann (emprem aquí la paraula connexió com a sinònim de derivació covariant, encara que H. Weyl l'empra en sentits molt diferents). És a partir d'aquests treballs que comencen a considerar-se un altre tipus de connexions. H. Weyl defineix les connexions afins (el que avui entenem per connexions lineals sense torsió) que consisteixen a donar una família de símbols de Christoffel Γ^k_{ij}, tals que $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ i que en canviar de coordenades canvien segons les lleis de canvi ben conegudes.

Weyl s'interessa després per les famílies de connexions afins que tenen les mateixes geodèsiques, canviant-ne si cal la parametrització. Sigui Γ una connexió afí (donada pels seus símbols de Christoffel). Si $x(t)$ és una geodèsica, verificarà:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0.$$

Sigui $\bar{t} = \varphi(t)$ un canvi de paràmetre d'aquesta corba. Es tindrà:

$$\frac{d^2x^i}{d\bar{t}^2} + \frac{dx^i}{d\bar{t}}\frac{\varphi''}{\varphi'^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\bar{t}}\frac{dx^j}{d\bar{t}} = 0.$$

Si volem que amb la nova parametrització, la corba $x(\bar{t})$ sigui una geodèsica per a una certa connexió $\tilde{\Gamma}$ haurà de verificar-se

$$\frac{d^2x^i}{d\bar{t}^2} + \tilde{\Gamma}^k_{ij}\frac{dx^i}{d\bar{t}}\frac{dx^j}{d\bar{t}} = 0.$$

Restant aquesta igualtat de l'anterior es té:

$$\left(\tilde{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}\right)\frac{dx^i}{d\bar{t}}\frac{dx^j}{d\bar{t}} = \frac{dx^i}{d\bar{t}}\frac{\varphi''}{\varphi'^2}$$

Perquè això passi, dedueix Weyl que la diferència $\tilde{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}$ ha de ser del tipus:

$$\delta^k_i\psi_j + \delta^k_j\psi_i$$

on ψ és una 1-forma diferencial i δ^k_i indica la δ de Kronneker. Recíprocament donada una 1-forma diferencial ψ i una connexió Γ, la connexió $\tilde{\Gamma}$ definida per:

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \delta^k_i\psi_j + \delta^k_j\psi_i \tag{1}$$

és tal que té les mateixes geodèsiques que Γ (possiblement parametritzades d'una altra manera). Als canvis de connexió del tipus (1), Weyl els anomena canvis projectius de parametrització, ja que conserven les geodèsiques (per analogia amb les transformacions projectives de l'espai ordinari que conserven les rectes). La geometria diferencial projectiva s'interessa per les propietats invariants per canvis projectius de connexions, és a dir, per propietats comunes a totes les connexions $\tilde{\Gamma}$ que s'obtenen d'una connexió Γ donada, per canvis del tipus (1).

La condició (1) es pot expressar de la manera següent:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \psi(X)Y + \psi(Y)X,$$

on $\tilde{\nabla}$ i ∇ són respectivament les derivades covariants corresponents a $\tilde{\Gamma}$ i Γ. Donada una mètrica de Riemann g sobre una varietat n-dimensional M, Weyl defineix el tensor de curvatura projectiva per:

$$W_{lijk} = R_{lijk} - \tfrac{1}{n-1}(g_{ik}R_{ij} - g_{lj}R_{ik})$$

i demostra que si $(\tilde{M}, \tilde{g})$ és una altra varietat de Riemann i $M \xrightarrow{\varphi} \tilde{M}$ una transformació de M a $\tilde{M}$, condició necessària perquè φ conservi les geodèsiques (és a dir, sigui una transformació projectiva) és que $\varphi^* \tilde{W} = W$, on $\tilde{W}$ és el tensor de curvatura projectiva de $\tilde{M}$.

En aquests dos treballs Weyl també s'ocupa de la geometria conforme, que té per objecte l'estudi de les propietats geomètriques d'una varietat de Riemann que no s'alteren per transformacions conformes. Una transformació φ entre dues varietats de Riemann (M, g) i (M', g'), $M \xrightarrow{\varphi} M$, es diu conforme si es verifica $\varphi^* g' = \lambda g$, on λ és una funció positiva, cosa que equival a dir que «conserva els angles». Si g és una mètrica sobre M, sigui Γ la connexió de Riemann associada a aquesta mètrica. Sigui λ una funció positiva i considerem la mètrica $\tilde{g} = \lambda g$. Si Γ i $\tilde{\Gamma}$ són les connexions associades a aquestes mètriques de Riemann, es verifica:

$$\tilde{\Gamma}^i_{lk} = \Gamma^i_{lk} + \delta^i_l \psi_k + \delta^u_k \psi_l - g^{ij} g_{lk} \psi_j \tag{2}$$

on ψ és la 1-forma diferencial definida per:

$$\psi_i = \tfrac{1}{2}\partial_i \log \lambda.$$

Així, doncs, la geometria conforme estudia les propietats de M que no s'alteren per canvis de connexió del tipus (2). Weyl introdueix el tensor de curvatura conforme d'una varietat de Riemann n-dimensional de la següent manera:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = R_{ijkl} - \tfrac{1}{n-2}\big(g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} - g_{jk}R_{il} + g_{jl}R_{ik}\big) \\ + \tfrac{R}{(n-1)(n-2)}\big(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\big). \end{aligned}$$

Prova llavors que si M i $\tilde{M}$ són varietats de Riemann i φ és una transformació $M \xrightarrow{\varphi} \tilde{M}$, condició necessària perquè φ sigui conforme és que $\varphi^*\tilde{C} = C$, on $\tilde{C}$ i C són respectivament els tensors de curvatura conforme de $\tilde{M}$ i M.

Aquests treballs de H. Weyl serveixen de punt de partida a É. Cartan per a un estudi més profund de la geometria diferencial projectiva i conforme.[46] Aquests treballs d'É. Cartan constitueixen el germen de la teoria de connexions en espais fibrats que no trobarà la seva expressió definitiva fins al treball fonamental d'Ehresmann el 1950. Precisament per manejar intuïtivament nocions que trigarien molts anys a formalitzar-se rigorosament, els treballs d'É. Cartan als quals al·ludim són de difícil lectura. Una exposició moderna, de fàcil comprensió sobre les connexions projectives i conformes es pot trobar als treballs de Tanaka.[47] El 1919 i 1920 apareixen quatre treballs d'É. Cartan[48] que no podem deixar d'esmentar ja que contenen l'essencial de la teoria de la referència mòbil (aplicada a l'estudi de subvarietats d'un espai euclidià o no euclidià i a la deformació de superfícies). El mètode no era nou, ja que havia estat utilitzat amb anterioritat per altres matemàtics, especialment per Darboux. El que aporta É. Cartan no és el mètode en si, sinó adonar-se de les moltes possibilitats que ofereix la seva aplicació sistemàtica. Si S és una subvarietat de $\mathbf{R}^n$, el mètode de la referència mòbil serveix per determinar invariants de S davant del grup G de les isometries de $\mathbf{R}^n$ que ens permeten determinar quan dues subvarietats S i S' difereixen per un desplaçament de $\mathbf{R}^n$. Pel que fa referència a la pedagogia de la geometria diferencial, direm que ens sembla summament formatiu l'ús reiterat d'aquest mètode en el transcurs d'un curs, utilitzant-lo en geometria de Riemann per definir les formes de connexió i de curvatura, a geometria d' hipersuperfícies de $\mathbf{R}^n$ per interpretar la segona forma quadràtica fonamental,

[46] É. Cartan. Les espaces à connexion conforme. Ann. Soc. Polon. Math. 2 (1923) 171-221. Sur les variétés à connexion projective. Bull. Soc. Math. França 52 (1924) 205-241.

[47] Tanaka: Projective connections and projective transformations. Nagoya Math. Journal 12 (1957) 1-24. Conformal connections and conformal transformations. Trans. Amer. Math. Soc. 92 (1959).

[48] Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidiene. Bull. Soc. Math. France 47 (1919 126-160. 48 (1920) 132-208) Sur le problème général de la déformation. C.R. Congrés Strasbourg (1920) 397-406. Sur la déformation projective des surfaces. Ann. École Norm. 37 (1920) 259-356.

les equacions de Gauss-Codazzi i per demostrar el teorema de Bonnet que diu que una hipersuperfície queda completament determinada, excepte desplaçaments de $\mathbf{R}^3$, per les seves dues primeres formes quadràtiques fonamentals, i en moltes altres qüestions.

En començar el segle XX hem citat els treballs de Hilbert i Liebmann sobre superfícies de $\mathbf{R}^3$ i hem dit que eren resultats de tipus global. No obstant això, fins ara la majoria de resultats que hem comentat han estat locals. La noció de varietat diferenciable que comença a néixer a partir de 1914 triga a imposar-se a la majoria d'investigadors atrafegats en qüestions locals importants, com ara la noció de paral·lelisme i la generalització del concepte de connexió que es va perfilant. El 1925 apareix no obstant un resultat global, que està molt directament relacionat amb els de Hilbert i Liebmann. Em refereixo al següent teorema de H. Hopf: «Una varietat de Riemann de dimensió n completa, simplement connexa, de curvatura constant $k^2 > 0$ és isomètrica a l'esfera de $\mathbf{R}^{n+1}$ de radi $\frac{1}{k}$».[49]

A partir del 1925 els geòmetres comencen a preocupar-se per «globalitzar» resultats. En el camp dels grups de Lie tots els resultats que es coneixien fins aleshores eren de caràcter local. El concepte de grup de Lie com varietat diferenciable (global) ni tan sols havia estat plantejat. Però ara, en tres anys, quedarà tota la teoria globalitzada per obra i gràcia de H. Weyl i É. Cartan. La memòria fonamental de H. Weyl en aquest domini és de considerable extensió[50] i replanteja tota la teoria des del principi, és a dir, des de la tesi doctoral d'É. Cartan simplificant enormement els càlculs i els raonaments. Aborda el problema de les representacions dels grups de Lie semisimples des del punt de vista local. Obté el següent resultat (local) de considerable importància: Si $\mathfrak{g}$ és una àlgebra de Lie semisimple, tot $\mathfrak{g}$-mòdul (és a dir tota representació de $\mathfrak{g}$) és semisimple. Els resultats globals estan lligats a l'estudi dels caràcters de les representacions irreductibles. Si G és un grup de Lie, una representació de G en un espai vectorial E consisteix en un morfisme ρ de G al grup de Lie $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ o $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ de les aplicacions lineals regulars d'un $\mathbb{C}$-espai vectorial o de un $\mathbf{R}$-espai vectorial E de dimensió n. Una tal representació es pot interpretar com una estructura de G-mòdul a E. El caràcter χ_E d'una representació ρ de G a E consisteix en l'aplicació de G a $\mathbb{C}$ (o a $\mathbf{R}$) que assigna a cada x de G la traça de l'endomorfis-

[49] R. Hopf: Über die curvatura integra geschlossener Hyperflächen. Math. Ann. 95 (l926) 340-367.

[50] Theorie der Darstellung Kontinuerlichen halb-einfacher Gruppen durch lineare Transfomationen. Math. Zeitschrift 23 (1925) 271-309, 24 (1926) 388-393 i 789-791.

me $\rho(x)$. Weyl considera un producte escalar natural de caràcters que ja havia estudiat I. Schur molt abans[51] i que podem definir de la següent manera: Si χ_E i χ_F són dos caràcters corresponents a dues representacions de G en dos espais vectorials diferents E i F, el producte escalar $\langle\chi_E\chi_F\rangle$ és

$$\int_{s\in G}\chi_E(s)\chi_F(s^{-1})$$

(se suposa G compacte) on aquesta integral (o mesura de Haar) està caracteritzada per ser l'única aplicació lineal μ de l'espai $\mathcal{C}(G)$ de totes les funcions contínues de G a $\mathbf{R}$ que verifica les següents propietats:

(1) Si $f \geqslant 0$, $\mu(f) \geqslant 0$ i si $g \geqslant 0$ i $f(s) > 0$ per a algun $s \in G$, $\mu(f) > 0$.

(2) Per a la funció 1 es té $\mu(1) = 1$.

(3) $\mu(L_a f) = \mu(f)\ \forall a \in G$, on $(L_a f)(s) = f(as)$.

El producte escalar de caràcters $\langle\chi_E,\chi_F\rangle$ que hem definit verifica les següents propietats d'ortogonalitat:

Si E i F són representacions simples no isomorfes, $\langle\chi_E,\chi_F\rangle = 0$, i si són representacions simples isomorfes $\langle\chi_E,\chi_F\rangle > 0$ (si les representacions són complexes $\langle\chi_E,\chi_F\rangle = 1$). D'aquest resultat es desprèn que si E i F són representacions simples de G tals que $\chi_E = \chi_F$, E i F són G-isomorfs. Això explica perquè l'estudi dels caràcters dona tanta informació sobre les representacions. L'estudi dels caracters juntament amb la classificació local dels grups de Lie semisimples permet a Weyl classificar les representacions dels grups de Lie. Diguem que quan Weyl va publicar aquest treball no es coneixia encara la teoria d'integració en grups topològics compactes arbitraris (mesura de Haar) i que Weyl pot integrar les seves funcions sobre tot el grup construint un element de volum adequat i utilitzant l'estructura de varietat diferenciable de grup de Lie. El fet que el mètode d'integració de Weyl no està lligat en realitat a l'estructura diferenciable del grup és un descobriment posterior.

La publicació de la darrera part del treball de H. Weyl coincideix amb l'aparició de dues importants memòries d'É. Cartan sobre aquest domini,[52] la primera

[51] Schur: Neue Begründung der Theorie der gruppenchraktere. Sitz. Ber. Berl. Akad. 1905.

[52] La géometrie des groupes de transformations. J. Math. Appl. 6 (1927) 1-119. La géometrie des groupes simples. Annali di Matematica 4 (1927) 209-256.

de les quals conté un estudi dels grups de Lie des d'un punt de vista geomètric-diferencial. Un grup G pot operar sobre si mateix de tres maneres diferents: per translacions per l'esquerra, per translacions per la dreta i per transformacions del tipus: $t \mapsto sts^{-1}$. En relació amb això, Cartan mostra que es poden definir sobre G tres connexions afins diferents de manera «natural». Dues d'aquestes connexions (les que corresponen a translacions per la dreta i per l'esquerra) tenen curvatura nul·la, però en canvi tenen torsió. Les geodèsiques de G són les mateixes en les tres connexions (són les classes laterals corresponents als subgrups uniparamètrics). Cartan determina les subvarietats de G totalment geodèsiques que són de dues classes: (a) els subgrups de G i les classes laterals corresponents a aquests subgrups, i (b) les subvarietats de G determinades pels sistemes triples de Lie continguts a l'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, és a dir, els subespais $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$ que verifiquen que si $X, Y, Z \in \mathfrak{t}$, llavors l'element $[[X, Y], Z]$ és també de $\mathfrak{t}$. La segona memòria de Cartan que hem esmentat conté un estudi de la topologia dels grups de Lie semisimples compactes reals i de les seves complexificacions, arribant-ne a determinar el primer grup d'homotopia.

Ja hem vist abans, en parlar dels treballs de H. Weyl sobre geometria projectiva i conforme, com el concepte abstracte de connexió es va perfilant. En aquesta direcció no podem passar per alt una memòria d'É. Cartan apareguda el 1926[53] que és una veritable anticipació de les connexions en fibrats i en què és introduït per primer cop el grup d'holonomia. Actualment, en què aquests conceptes estan formulats de manera rigorosa, ens sembla convenient transcriure literalment alguns paràgrafs de la introducció d'aquesta memòria on es reflecteixen de manera excel·lent les idees intuïtives que estaven a la ment d'É. Cartan: «. . . En lloc de generalitzar d'una manera més o menys natural les lleis del transport paral·lel de vectors, he buscat la manera de generalitzar el principi tan fecund de Klein pel qual tota geometria és l'estudi d'un grup de transformacions G». El «continu» en el qual estan localitzades les figures de què s'ocupa la geometria i les úniques propietats que es jutgen essencials són aquelles que es conserven per una transformació arbitrària de G, es diu un *espai amb grup fonamental* G.

Sigui un «continu» de n dimensions i G un grup de n variables. Imaginem, intuïtivament, associat a cada punt del continu un espai amb grup fonamental G, al qual pertanyerà aquest punt A. Imaginem també una llei permetent relacionar entre ells els espais associats a dos punts infinitament propers del continu.

[53] Les groupes d'holonomie les espaces généralizes. Acta Math. 48 (1926) l-42.

Gràcies a aquesta llei, la porció del continu infinitament propera a A podrà ser considerada com una porció d'un espai amb grup fonamental G i l'espai associat a A podrà anomenar-se espai tangent al continu en A. Si ara considerem en el continu un camí continu que uneixi dos punts A i B, la relació de l'espai tangent a B amb l'espai tangent a A es podrà fer progressivament al llarg del camí considerat i podrà dir-se que aquesta relació constitueix el desenvolupament del camí AB i dels espais tangents, o si es vol, de la porció de continu que entorn del camí AB, sobre l'espai tangent a A. Si es va de A a B per un altre camí, el desenvolupament així obtingut no coincidirà en general amb el primer. Poden expressar-se totes aquestes propietats dient que el continu donat, amb la llei que relaciona progressivament els espais tangents, constitueix un espai no holònom amb grup fonamental G. La no holonomia es tradueix pel fet que, descrivint en el continu un contorn tancat (o cicle) que partint de A torna una altra vegada a aquest punt, el punt A i el seu entorn han patit en arribar, un cert desplaçament (o transformació del grup G) en relació amb les seves posicions inicials, que en direm desplaçament associat al cicle. Jo he demostrat que els desplaçaments associats als diferents cicles d'origen donat A constitueixen un grup continu $\mathcal{G}$ (subgrup del grup fonamental) i que aquest grup és essencialment el mateix sigui quin sigui el punt A considerat a l'espai no holònom. El grup $\mathcal{G}$, que proposo anomenar grup d'holonomia de l'espai, em sembla que ha de jugar un paper important en la teoria dels espais no holònoms ...» i conclou Cartan: «...Després d'indicar alguns teoremes generals que ens seran útils, demostro com es poden determinar tots els grups d'holonomia dels espais mètrics i dels espais conformes normals de tres dimensions, així com dels espais projectius normals de dues dimensions. Indico, finalment, com consideracions d'*Anàlisis situs* s'introdueixen de manera natural en aquesta teoria».

Com es pot veure per aquests paràgrafs, la mentalitat de Cartan arribava sempre al fons dels problemes encara que per això hagués de suplir amb molta intuïció les eines que li feien falta i que no tenia de manera rigorosa.

La teoria dels espais de Riemann simètrics és iniciada per É. Cartan en tres memòries fonamentals, aparegudes respectivament el 1926, 1927 i 1932.[54]Els espais de Riemann localment euclidians són els que tenen curvatura nul·la. Després d'aquests, els espais de Riemann més senzills que es coneixen són aquells en què la derivada covariant del tensor de curvatura és nul·la. Aquests espais,

[54]Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. Bull. Soc. Math. France 54 (1926) 214-264, 55 (1927) 114-134. Les espaces riemanniens symetriques. Verh. Int. Math. Kong. Zürich I (1932) 152-161.

que inclouen els espais de curvatura constant, van ser anomenats simètrics per Cartan ja que són aquells espais per als quals la simetria respecte a un punt és una isometria. Aquests espais admeten un grup transitiu d'isometries i la component connexa del subgrup d'isometries que deixen fix un punt de l'espai és compacta. Aquest fet relaciona els espais de Riemann simètrics amb els espais homogenis. Cartan es proposa el problema de la classificació dels espais esmentats. Per això observa, en primer lloc, que si una mètrica de Riemann simètrica pot descompondre's (localment) en suma de dues mètriques de Riemann de dimensió menor, cadascuna és també simètrica. El problema queda reduït per tant al cas de les mètriques irreductibles, que no es poden descompondre. Cartan aplica dos mètodes diferents per resoldre aquest problema. El primer consisteix en la determinació dels subgrups dels grups ortogonals que poden ser grups d'holonomia d'un espai de Riemann simètric irreductible. Aquests subgrups poden ser determinats basant-se en la propietat de deixar invariant la forma: $\Sigma R_{ijkl} X^i X^k Y^j Y^l$. Aquest mètode, que ha estat aplicat posteriorment a l'estudi de molts altres problemes de molt diversa índole, condueix per desgràcia a càlculs força complicats. El segon mètode és molt més bonic. Sigui G la component connexa del grup de totes les isometries i H la component connexa del subgrup de G que deixa fix un punt O. H és un subgrup compacte. Si σ designa la simetria respecte a O, l'aplicació: $G \to G$, $g \mapsto \sigma g \sigma$, és un automorfisme involutiu de G. Tots els elements de H són elements fixos d'aquest automorfisme. Recíprocament, quan un grup de Lie connex G té un automorfisme involutiu tal que la component connexa H del subgrup d'elements fixos d'aquest automorfisme és compacta, el grup quocient G/H pot dotar-se d'una mètrica de Riemann simètrica. Pot veure llavors que si G/H no és localment euclidià (és a dir, si el seu tensor de curvatura no és idènticament nul), o bé el grup G és simple, o bé és producte directe de dos grups simples compactes isomorfs.

En el darrer cas, si suposem $G = L \times L$, aleshores l'automorfisme involutiu ha de tenir la manera $(a, b) \mapsto (b, a)$ amb a i b de L i l'espai G/H es pot identificar a L. Aquest cas es redueix, doncs, a l'estudi de la geometria de l'espai d'un grup de Lie simple compacte. Quan G és simple, pot passar que sigui compacte o que no. En el primer cas, G/H és homeomorf a un espai euclidià que és l'únic espai simètric que té G com a grup d'isometries. En el segon cas, l'espai simètric que té G per grup isometries, no és únic. Cartan, en aquests treballs, arriba a donar una llista dels espais de Riemann simètrics possibles.

Encara que no sigui pròpiament de geometria diferencial, cal esmentar un treball de Van Dantzig i Van der Waerden aparegut el 1928[55] en què proven que el grup d'isometries d'un espai mètric connex i localment compacte, és localment compacte respecte a la topologia compacte-oberta. Com que una varietat de Riemann pot dotar-se de manera natural d'una distància que la converteix en un espai mètric, el resultat anterior aplicat a aquesta situació ens diu que el grup d'isometries d'una varietat de Riemann és localment compacte respecte a la topologia compacte-oberta. Això permetrà posteriorment aplicar a aquest grup d'isometries molts resultats de la teoria general de grups localment compactes que en aquells temps ja s'estava forjant.

H. Hopf i W. Rinow demostren el 1931 un resultat que actualment usem molt sovint, que és el següent:

Si M és una varietat de Riemann, les tres afirmacions següents són equivalents:

(a) Tota geodèsica de M es pot prolongar indefinidament.

(b) M és un espai mètric complet respecte a la distància d determinada per la mètrica de Riemann.

(c) Tot subconjunt fitat de M (respecte d) és relativament compacte.

Aquest resultat justifica anomenar varietat de Riemann completa una varietat de Riemann que compleix (a).[56]

11 La tesi doctoral de Georges de Rham i els treballs de Marston Morse

Així com la dècada dels anys vint ha estat marcada d'una banda pel desenvolupament considerable de la teoria global dels grups de Lie i la seva conseqüent aplicació als espais de Riemann simètrics i, d'altra banda, per l'evolució del concepte de connexió i l'aparició del concepte de grup d'holonomia, la dècada dels anys trenta estarà marcada pels treballs de Georges De Rham i Marston Morse, en direccions ben diferents, i pels treballs de Hodge al final d'aquesta dècada sobre l'espai de formes harmòniques d'una varietat de Riemann.

[55] Über metrisch homogenen Räume. Abh. Math. Sem. Hamburg. 6 (1928) 374-376.

[56] Hopf–Rinow: Über den Begriff vollständigen differentialgeometrischen Flächen. Comm. Math. Helvetici 3(1931) 209-225.

El 1931 apareix la tesi doctoral de Georges De Rham[57] els resultats de la qual havien estat conjecturats per Élie Cartan,[58] que els havia utilitzat anticipadament per a l'estudi de la topologia dels grups de Lie compactes. Sigui X una varietat diferenciable compacta i orientable. Designem per $R^p(X)$ l'espai vectorial de les p-formes diferencials sobre X. Designem per $B^p(R(X))$ el subespai de les $\omega \in R^p(X)$ que són de la forma $\omega = d\alpha$ amb $\alpha \in R^{p-1}(X)$. Designem per $Z^p(R(X))$ el subespai de les formes ω de $R^p(X)$ que són tancades, és a dir tals que $d\omega = 0$. $B^p(R(X)) \subset Z^p(R(X))$ ja que $dd = 0$. Per altra banda, introduïm la noció de cadena singular de dimensió p com a combinació lineal formal (amb coeficients reals) d'aplicacions diferenciables orientades de políedres de dimensió p amb valors a X. Es defineix la vora d'un políedre singular de dimensió p, que és una cadena singular de dimensió $p-1$, i per linealitat es defineix la vora ∂C d'una cadena singular qualsevol C. S'anomenen p-cicles les p-cadenes C tals que $\partial C = 0$ i p-vores les p-cadenes C que són de la forma $C = \partial C'$, on C' és una $(p+1)$-cadena. Com que $\partial\partial C = 0$, tota p-vora és un p-cicle. L'espai vectorial quocient dels p-cicles mòdul les p-vores es designa per $H_p(X)$ i és l'espai d'homologia de dimensió p de X. Donada una p-forma ω sobre X i una p-cadena C es defineix de manera natural la integral $\int_C \omega$. Si ω és una p-forma i C una $(p+1)$-cadena, la fórmula de Stokes es pot escriure:

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

Aquesta fórmula mostra que quan ω és una p-forma tancada i C és un p-cicle la integral $\int_{\partial C} \omega$ no depèn del representant C triat a la classe d'homologia de C. S'obté així una aplicació

$$\begin{array}{ccc} Z^p(R(X)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H_p(X), \mathbf{R}) \\ \omega & \longmapsto & \left(c \mapsto \int_c \omega\right) \end{array}$$

Aquesta aplicació és lineal i s'anul·la al subespai $B^p(R(X))$, en virtut de la fórmula de Stokes. Per pas al quocient s'obté una aplicació:

$$H^p(R(X)) = Z^p(R(X))/B^p(R(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_p(X), \mathbf{R}) = H^p(X, \mathbf{R}).$$

Els dos teoremes fonamentals de la tesi de De Rham afirmen respectivament que l'aplicació anterior és injectiva i exhaustiva, és a dir, un isomorfisme. De

[57] Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions, thèse de doctorat. Paris, Journal de Math. 10 (1931).

[58] Sur els nombres de Betti des espaces de groupes clos. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 187 (1928) 196-198.

Rham a la seva tesi només tracta el cas en què la varietat X és compacta i orientable i admet una certa subdivisió cel·lular. A aquests dos teoremes, De Rham afegeix un tercer concernent a l'estructura multiplicativa de l'àlgebra de cohomologia. Observem que en aquesta època encara no es coneixia aquesta estructura multiplicativa. Així doncs, en aquesta ocasió la geometria diferencial va anar per davant de la topologia algebraica. En aquella època es coneixia no obstant la teoria de la intersecció de cicles: la intersecció de la classe d'homologia d'un p-cicle i de la classe d'homologia d'un q-cicle és una classe d'homologia de dimensió $p+q-n$, on n designa la dimensió de la varietat X. Així doncs, la intersecció de cicles de dimensions complementàries defineix una aplicació lineal:

$$F : H_p(X) \times H_{n-p}(X) \longrightarrow \mathbf{R}$$

que posa en dualitat els dos espais vectorials $H_p(X)$ i $H_{n-p}(X)$. Aquesta dualitat era ja coneguda per Poincaré. Utilitzant l'isomorfisme de De Rham i aquesta dualitat s'obté un isomorfisme:

$$H_p(X) \longrightarrow H^{n-p}(R(X)).$$

El tercer teorema fonamental de la tesi de De Rham es pot enunciar així:

La intersecció de classes d'homologia i la multiplicació exterior de formes diferencials defineixen respectivament a $H_*(X)$ i $H^*(R(X))$ estructures multiplicatives que es conserven mitjançant l'isomorfisme anterior.

Els teoremes de De Rham, que després van ser generalitzats a varietats no compactes i no orientables, no trobarien però la seva expressió definitiva fins que el 1945 Laurent Schwartz introduís la seva teoria de distribucions. Aquesta suggeriria a De Rham la noció de «corrent» que engloba alhora la noció de cadena singular i de forma diferencial. Però ja en parlarem molt extensament més endavant. Diguem ara que potser la millor exposició que s'ha fet dels teoremes de De Rham sense recórrer a la noció de corrent, es deu a André Weil.[59] Actualment és relativament fàcil, pressuposant coneguts prou resultats de topologia algebraica, provar que la cohomologia de les formes diferencials (anomenem-la cohomologia de De Rham) és isomorfa a la cohomologia singular. Això és el que fan molts llibres enunciant-lo com a «teorema de De Rham». Això no obstant, el que no resulta tan fàcil i que constitueix el veritable teorema de De

[59] Sur les théorèmes de De Rham. Comentarii Mathematici Helvetici 26 (1952) 119-145.

Rham és provar que l'aplicació engendrada per:

$$\begin{array}{ccc} Z^p(R(X)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H_p(X), \mathbf{R}) \\ \omega & \longmapsto & \left(c \mapsto \int_c \omega\right) \end{array}$$

dona un isomorfisme de $H^p(R(X))$ a $H^p(X, \mathbf{R})$ (no que hi ha un isomorfisme, sinó provar que l'aplicació anterior és un isomorfisme).

Els treballs de Marston Morse constitueixen un estudi de la topologia d'una varietat diferenciable a partir dels punts crítics que admet una funció donada sobre aquesta varietat, amb valors reals o complexos. Si bé els resultats essencials de la teoria de Morse estan continguts en una sèrie de treballs apareguts de 1925 a 1931,[60] una exposició conjunta de la seva teoria no apareix fins al 1934 en un llibre editat per l'«American Mathematical Society».[61] Si bé en aquesta publicació s'hi exposava l'essencial de la teoria de Morse, la presentació és força diferent a com la coneixem actualment pel fet que en aquella època no es coneixia encara la noció de CW-complex que va ser introduïda per J. H. C. Whitehead el 1949.[62] Pel que fa a la part de la teoria que es refereix al càlcul de variacions, concretament el teorema de l'índex, va anar evolucionant després de l'aparició del llibre de Morse abans esmentat, per obra de dues publicacions, una del mateix Morse el 1938 i una altra més recent deguda a Ambrose el 1961.[63] Una exposició moderna breu i de lectura molt agradable de tota la teoria pot trobar-se al llibre de R. Bott «Lectures on Morse Theory» (Universität Bonn 1960) o al llibre de Milnor «Morse theory» (Princeton University 1963) que és una còpia del llibre de Bott amb molt poques variants. A causa de l'extraordinària importància d'aquesta teoria intentarem explicar en poques paraules, el contingut i resultats essencials. Per això adoptarem el punt de vista actual, encara que tractarem en alguns casos de donar el punt de vista inicial de Morse. La teoria de Morse té dues parts. La primera part, que anomenarem «elemental» estudia la topologia d'una varietat diferenciable a partir dels punts crítics que admet una funció donada sobre aquesta varietat. La segona part consisteix en la transposició dels resultats obtinguts a la primera a l'estudi de certes propietats globals del càlcul de variacions. Comencem per la teoria «elemental». Sigui M una varietat diferenciable (de classe C^∞) i f una funció diferenciable

[60] Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925) 345-396. 30 (1928) 213-274, 31 (1929) 379-404, 32 (1930)

[61] M. Morse: The calculus of variations in the large. New York 1934.

[62] Combinatorial Homotopy. Bull, Amer. Math. Soc. 55 (1949) 213-245.

[63] Morse: The index theorem in the calculus of variations. Duke Math. Periòdic 4 (1938) 231-346. Ambrose. The index theorem in Riemannian Geometry. Ann. of Math. 73 (1961).

real, definida sobre M. Un punt $p \in M$ s'anomena punt crític de la funció f si l'aplicació lineal tangent en aquest punt $T_p(M) \xrightarrow{f_*} \mathbf{R}$ s'anul·la, la qual cosa equival a dir que si $(x^1, \ldots, x^n)$ és un sistema de coordenades del punt p, totes les derivades parcials $\partial_i f$ s'anul·len en p. Si p és un punt crític de f, l'hessià de f a p és per definició l'aplicació bilineal simètrica:

$$T_p(M) \times T_p(M) \xrightarrow{f_{**}} \mathbf{R}$$

definida per $f_{**}(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f))$, on $\tilde{v}$ i $\tilde{w}$ són camps definits en un entorn de p tals que al punt p coincideixen amb els vectors v i w donats. La definició és independent de les extensions $\tilde{v}$ de v i $\tilde{w}$ de w considerades. f_{**} és simètrica, ja que

$$\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) - \tilde{w}_p(\tilde{v}(f)) = [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0$$

(el claudàtor de Poisson $[\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f)$ s'anul·la perquè p és un punt crític de f). L'hessià així definit té per matriu en un sistema de coordenades $(x^1, \ldots, x^n)$:

$$(\partial_i \partial_j f(p)).$$

S'anomena índex de f a p la dimensió del màxim subespai vectorial E de $T_p(M)$ sobre el qual f_{**} és definida negativa i s'anomena nul·litat de f a p la dimensió del subespai N de $T_p(M)$ constituït pels vectors v tals que $f_{**}(v, w) = 0$ per a tot w.

Sigui p un punt crític de f. Si la nul·litat de l'hessià f_{**} al punt p és nul·la, el punt es diu que és un punt crític no degenerat. El següent resultat (lema de Morse), mostra el comportament de la funció f en un entorn d'un punt crític p no degenerat: Sigui p un punt crític no degenerat de f. Sigui λ l'índex de f a p. Hi ha un sistema de coordenades $(y^1, \ldots, y^n)$ en un entorn de p tals que $y^i(p) = 0$ i que la funció f s'expressa en aquest entorn per:

$$f = f(p) - (y^1)^2 - (y^2)^2 - \cdots .(y^\lambda)^2 + (i^{\lambda+1})^2 + \cdots + (i^n)^2.$$

Diguem ara en què consisteix l'operació d'adjuntar una «k-cel·la» a un espai. Sigui e^k la k-cel·la consistent en tots els vectors de $\mathbf{R}^k$ de norma $\leqslant 1$, i $\dot{e}^k$ la seva vora, és a dir, el conjunt de vectors de norma 1.

Si g és una aplicació contínua de $\dot{e}^k$ en un espai topològic Y, l'espai $Y \cup_g e^k$ (adjunció de e^k a Y mitjançant g) és per definició la reunió disjunta junta de Y i e^k, identificant cada $x \in \dot{e}^k$ amb $g(x) \in Y$. Sigui f una funció real positiva sobre una varietat diferenciable M. Donat un nombre real, a, designem per $M^a = f^{-1}(-\infty, a) = \{p \in M \mid f(p) \leqslant a\}$. Els resultats fonamentals de la *teoria de Morse* elemental poden enunciar-se així:

«Siguin a i b dos nombres reals amb $a < b$. Si el conjunt de punts p de M tals que $a \leqslant f(p) \leqslant b$ és compacte i no conté punts crítics de f, llavors M^a és difeomorf a M^b i a més la inclusió natural $M^a \to M^b$ és una equivalència d'homotopia».

«Sigui p un punt crític no degenerat de f d'índex λ i posem $c = f(p)$. Suposant que $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ és compacte i que no conté cap altre punt crític de f diferent de p, llavors l'espai $M^{c+\varepsilon}$ té el mateix tipus d'homotopia que $M^{c-\varepsilon}$ amb una λ-cel·la adjuntada de manera convenient».

Aquests dos resultats porten com a conseqüència el següent:

«Si f és una funció diferenciable sobre M els punts crítics de la qual són tots no degenerats i si cada M^a és compacte, M és homotòpicament equivalent a un CW-complex que té una cel·la de dimensió λ per cada punt crític de f d'índex λ».

Veiem, doncs, a través d'aquest resultat, que l'estudi dels punts crítics de la funció donada, si aquests són no degenerats, ens dona molta informació sobre la topologia de la varietat.

Aquests són els principals resultats de la part que hem anomenat «elemental» de la teoria de Morse.

Diguem dues paraules sobre la primitiva versió de Morse. L'estudi de la topologia de la varietat M a través dels punts crítics de f era motivat pels següents resultats:

«Si M és compacta i els punts crítics de la funció f són no degenerats, es verifica:

$$\begin{cases} b_\lambda(M) & \leqslant c_\lambda \\ \chi(M) & = \sum(-1)^\lambda c_\lambda \end{cases}$$

on $b_\lambda(M)$ és el nombre de Betti de dimensió λ de M, c_λ és el nombre de punts crítics d'índex λ de la funció f i $\chi(M)$ denota la característica d'Euler-Poincaré de M».

La segona part de la teoria consisteix, com hem dit, en la transposició del mètode emprat a la part elemental a l'estudi de certes propietats globals del càlcul de variacions.

Sigui M una varietat de Riemann connexa. Siguin p i q dos punts de M (que poden coincidir). Designem per $\Omega(p,q)$ el conjunt de totes les corbes de M diferenciables a trossos, que uneixen p i q. Considerem la funció $E:\Omega(p,q)\to\mathbf{R}$ que a cada trajectòria ω que uneix p i q li assigna l'energia $E(\omega)=\int_p^q \|\frac{d\omega}{dt}\| dt$.

Els punts crítics de la funció E donen les trajectòries extremals, és a dir, les geodèsiques que uneixen p i q. Un estudi similar que condueix als mateixos resultats es pot fer prenent en lloc de la funció «energia», la funció «longitud». La teoria elemental de Morse suggereix en aquest cas la possibilitat d'estudiar les propietats topològiques de l'espai $\Omega(p,q)$ a partir dels punts crítics de la funció E («energia»). Però aquí ensopega amb moltes dificultats. En primer lloc, $\Omega(p,q)$ no és una varietat diferenciable. Si es volgués dotar d'una estructura de varietat diferenciable, hauria de ser de dimensió infinita, modelada, en lloc de $\mathbf{R}^n$, en un espai vectorial topològic localment convex. Tanmateix, sense recórrer a això, es pot intentar transposar molts conceptes de la teoria elemental de Morse a aquest cas.

La transposició del concepte de corba diferenciable a trossos en una varietat M, ens dona aquí la noció de variació. En efecte, si ω és un element de $\Omega(p,q)$, una variació de ω no és més que una funció

$$I_\varepsilon \xrightarrow{\bar{\alpha}} \Omega(p,q)$$

on I_ε és l'interval obert $(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, tal que

(a) $\bar{\alpha}(0)=\omega$;

(b) Hi ha una subdivisió $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$ de $[0,1]$ tal que l'aplicació

$$I_\varepsilon\times[0,1]\xrightarrow{\alpha} M$$

definida per: $\alpha(\mu,t)=\bar{\alpha}(\mu)(t)$ és C^∞ sobre cada tros $I_\varepsilon\times[t_i,t_{i+1}]$.

Es diu que una trajectòria $\omega\in\Omega(p,q)$ és un punt crític per a la funció E si qualsevol que sigui la variació $\bar{\alpha}$ de ω es verifica

$$\left[\frac{dE(\bar{\alpha}(\mu))}{d\mu}\right]_{\mu=0}=0.$$

És fàcil veure que les trajectòries crítiques ω per a la funció E són precisament les geodèsiques que uneixen p i q.

Per continuar l'analogia amb el cas elemental, hem de definir ara quan una trajectòria crítica és degenerada o no i hem de definir l'índex de la funció E en una trajectòria crítica.

Per això hem de definir l'hessià de la funció E. Donat $\omega \in \Omega(p,q)$, designem per $T_\omega(\Omega)$ «espai tangent a ω d'Ω», l'espai vectorial dels camps vectorials W al llarg de ω, diferenciables a trossos, i que s'anul·len als extrems p, q. Així com en el cas elemental l'espai tangent en un punt és l'espai dels vectors tangents a les corbes que passen per aquell punt, aquí es verifica també que donat un $X \in T_\omega(\Omega)$ existeix una variació $\bar{\alpha}$ de ω tal que $\bar{\alpha}(0) = \omega$ i que $\frac{d\bar{\alpha}}{d\mu}(0) = X$.

Si ω és un punt crític de Ω per a la funció E, definirem l'hessià de E a ω com una aplicació bilineal:

$$T_\omega(\Omega) \times T_\omega(\Omega) \xrightarrow{E_{**}} \mathbf{R}.$$

Per a això, donat $(X,Y) \in T_\omega(\Omega) \times T_\omega(\Omega)$, considerem una variació bidimensional d'ω, és a dir, una aplicació $U \times [0,1] \xrightarrow{\alpha} M$, on U és un entorn de l'origen a $\mathbf{R}^2$, tal que

$$\alpha(0,0,t) = \omega(t), \quad \partial_{u_1}\alpha(0,0,t) = X(t), \quad \partial_{u_2}\alpha(0,0,t) = Y(t).$$

Designem per $\bar{\alpha}(u_1,u_2)$ l'element de $\Omega(p,q)$ definit per: $\bar{\alpha}(u_1,u_2)(t) = \alpha(u_1,u_2,t)$. Definim l'hessià $E_{**}(X,Y)$ per:

$$E_{**}(X,Y) = [\partial_{u_1}\partial_{u_2}E(\bar{\alpha}(u_1,u_2))]_{u_1=0,u_2=0}.$$

La fórmula de la variació segona ens diu que aquesta definició és independent de la variació bidimensional α triada que compleixi amb les propietats

$$\alpha(0,0,t) = \omega(t), \quad \partial_{u_1}\alpha(0,0,t) = X(t), \quad \partial_{u_2}\alpha(0,0,t) = Y(t).$$

Sigui ω un punt crític d'Ω per a la funció E, és a dir, una geodèsica. Podem ara definir, per analogia amb el cas elemental, l'índex de E a ω com la dimensió del màxim subespai vectorial de $T_\omega(\Omega)$ sobre el qual E_{**} és definida negativa, i la nul·litat de E a ω com la dimensió del subespai de $T_\omega(\Omega)$ constituït pels vectors $X \in T_\omega(\Omega)$ tals que $E_{**}(X,Y) = 0$ per a tot $Y \in T_\omega(\Omega)$. Com que aquí $T_\omega(\Omega)$ és un espai vectorial de dimensió infinita, caldria veure si l'índex i la nul·litat de E a ω són nombres finits o no. El subespai dels $X \in T_\omega(\Omega)$ tals que $E_{**}(X,Y) = 0$ per a tot Y es demostra que coincideix amb el subespai dels camps de Jacobi al llarg de ω que s'anul·len als extrems. Un camp definit sobre la corba $\omega(t)$ es diu de Jacobi si verifica l'equació diferencial de segon ordre:

$$\nabla^2_{\dot{\omega}(t)}X + R\big(X,\dot{\omega}(t)\big)\dot{\omega}(t) = 0$$

on R indica el tensor de curvatura de la varietat M. Això constitueix una equació diferencial de segon ordre i, per tant, X queda determinat unívocament per les condicions inicials $X(0)$ i $(\nabla_{\dot{\omega}(t)}X)_{t=0}$, de manera que la dimensió de l'espai vectorial dels camps de Jacobi és $2n$ (on n és la dimensió de la varietat M). Els punts p i q es diuen conjugats al llarg d'ω si hi ha un camp de Jacobi no nul X al llarg de ω que s'anul·la a p i q. Es denomina multiplicitat de p i q com a punts conjugats al llarg de ω a la dimensió de l'espai vectorial d'aquests camps de Jacobi. Es desprèn per tant que la nul·litat de E coincideix amb la multiplicitat de p i q com a punts conjugats al llarg de ω. L'índex de E a ω ve donat pel següent bonic teorema de Morse, conegut com a «teorema de l'índex»:

«Sigui $\omega(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, una geodèsica de M que uneix p i q. Hi ha només un nombre finit de punts $\omega(t_i)$, $i = 1, \dots, k$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < 1$, que són conjugats del punt $p = \omega(0)$ al llarg d'ω. Si designem per μ_i la multiplicitat dels punts p i $\omega(t_i)$ com a punts conjugats al llarg d'ω, l'índex de E a ω ve donat per la suma $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$».

Donats dos punts p i q de M (que poden coincidir), un nombre real $c > 0$ i una subdivisió de l'interval $[0,1]$: $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$, designem per $\Omega(p,q)(t_0, \dots, t_k)^c$ el subconjunt de $\Omega(p,q)$ constituït per les trajectòries $\omega(t)$ amb $\omega(0) = p$ i $\omega(1) = q$ que compleixen

(a) $\omega|[t_i, t_{i+1}]$ és una geodèsica per a $i = 0, 1, \dots, k-1$,

(b) $E(\omega) < c$.

Si la varietat de Riemann M és completa, per a subdivisions $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ de l'interval $[0,1]$ prou fines, el conjunt $\Omega(p,q)(t_0, \dots, t_k)^c$ es pot dotar d'una estructura de varietat diferenciable de dimensió finita. Aproximant l'espai $\Omega(p,q)$ per tals varietats diferenciables i aplicant-hi la teoria de Morse elemental per a la funció «energia» E, s'arriba, per una anàlisi força fina, al següent teorema fonamental de la teoria de Morse:

«Sigui M una varietat de Riemann completa. Siguin p i q dos punts de M no conjugats al llarg de cap geodèsica de M. L'espai $\Omega(p,q)$ de totes les trajectòries que uneixen p i q, dotat de la topologia compacte-oberta, és homotopament equivalent a un CW-complex que té una cel·la de dimensió λ per cada geodèsica d'índex λ que uneix p i q».

Veurem més endavant com la teoria de Morse es revela d'extraordinària utilitat en l'estudi de la topologia de les varietats riemannianes a partir de condicions de curvatura. Veurem que juga un paper essencial en els treballs de Klingenberg sobre les varietats de Riemann δ-pinçades.

12 La geometria diferencial de 1934 a la Segona Guerra Mundial

Descriurem ara els principals avenços de la geometria diferencial en el període que va de la publicació del llibre de Morse, el 1934, a l'inici de la segona conflagració mundial. Els resultats més importants d'aquest període es deuen, sens dubte, a W.V.D. Hodge, i es refereixen a la teoria de formes harmòniques sobre una varietat de Riemann. Estan continguts en dos treballs apareguts el 1935 i 1936[64] en què es pot trobar l'essencial de la teoria, si bé hem d'esmentar, com a antecedent, un treball del mateix autor publicat el 1933.[65] En una varietat de Riemann compacta (M, g), Hodge considera l'operador δ que actua sobre les r-formes diferencials, transformant-les en $(r-1)$- formes de la següent manera:

$$(\delta\alpha)_{i_1,\ldots,i_{r-1}} = g^{ij}\nabla_i \alpha_{j,i_1,\ldots,i_{r-1}}$$

L'operador δ ja havia estat introduït per L.E.J. Brower per a espais euclidians[66] i per R. Weitzenboeck per a espais de Riemann[67] i encara abans, havia estat considerat per Volterra en el cas euclidià.[68] Una r-forma α sobre M es diu harmònica si verifica $d\alpha = 0$ i $\delta\alpha = 0$, on d indica la diferencial exterior. El teorema fonamental de Hodge afirma que l'espai vectorial de les r-formes harmòniques sobre M té dimensió finita i la seva dimensió coincideix amb el r-èsim nombre de Betti de la varietat M. (M és compacta).

La primera demostració de Hodge, apareguda al primer treball que hem esmentat, utilitza el teorema de De Rham i redueix la qüestió a la solució d'un problema de contorn emprant un procés similar al descrit per Courant, Friedrichs i Lewy en un article aparegut el 1928 que tracta de la resolució d'algunes

[64]Harmonic functionals in a Riemannian space . Proceedings of the London Math. Soc. 38 (1935) 72-95. The existence theorem for harmonic integrals. Proceedings London Math. Soc. 41 (1936) 483-496.

[65]A Dirichlet problem for harmonic functionals. Proceedings London Math. Soc. 36 (1833) 257-303.

[66]Polydimensional vectordistributions. Proc. Royal Ac. Sc. Amsterdam 9 (1906) 66-78

[67]Invariantentheorie. Groningen. Noorhoff 1923.

[68]Sulle funzione coniugate. Atti Ac. Lincei 5 (1889, 599-611).

equacions de la Física Matemàtica.[69] Poc després d'haver aparegut aquesta demostració, Hellmuth Kneser va escriure a Hodge indicant-li com el mètode de la «paramètrix» de Hilbert[70] es podia utilitzar per donar una demostració més simple del teorema de Hodge. La paraula «paramètrix», introduïda per Hilbert, designa en la teoria d'equacions en derivades parcials de tipus el·líptic, una mena d'aproximació grollera d'una solució elemental. Per a les equacions amb coeficients constants és fàcil, en general, trobar una solució elemental, la qual permet obtenir una «paramètrix» per a les equacions corresponents amb coeficients variables, i la cerca d'una solució elemental d'aquestes darreres es redueix llavors a la resolució d'una equació integral. Aquest mètode, molt antic, pot trobar-se també en un article de E.E. Levi del 1909.[71] El segon treball de Hodge que hem esmentat conté la demostració del seu teorema pel mètode de la «paramètrix» que li havia estat suggerit per la carta de H. Kneser. En treballs posteriors d'H. Weyl, Bidal i De Rham, dels que en parlarem més endavant, la demostració del teorema de Hodge s'ha anat simplificant i ha trobat el seu marc natural a la teoria de corrents, però en tots aquests treballs el mètode de la «paramètrix» de Hilbert continua sent la idea central.

El teorema de Hodge té, com es pot apreciar, una importància extraordinària en introduir mètodes de teoria del potencial en el càlcul dels nombres de Betti d'una varietat de Riemann compacta.

A l'època que estem ara considerant, apareixen els primers treballs sobre pinçaments de les varietats de Riemann. Sigui δ un nombre real tal que $0 < \delta \leqslant 1$. Una varietat de Riemann M es diu δ-pinçada si la seva curvatura seccional K verifica: $A\delta \leqslant K \leqslant A$ per a alguna constant positiva A. Aquesta constant A no és essencial, ja que substituint la mètrica g de M per la mètrica $\hat{g} = Ag$, la curvatura seccional $\tilde{K}$ de la nova mètrica verifica $\tilde{K} = K/A$, per la qual cosa si K verificava $A\delta \leqslant K \leqslant A$, $\tilde{K}$ verifica $\delta \leqslant \tilde{K} \leqslant 1$. S. B. Myers prova el 1935[72] que tota varietat de Riemann δ-pinçada és compacta i té grup fonamental finit. Aquest treball de Myers, estarà present en nombrosos treballs posteriors, alguns recents, de Rauch, Klingenberg, Berger i Kobayashi, tant en geometria de Riemann com en

[69] Über die partiellen Differenzengleicnungen der mathematischen Physik. Math. Ann. 100 (1928) 32-74.

[70] Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig, 1912.

[71] I problemi dei valori al contorno per le equazioni totalmente ellitique alle derivate parziali. Memorie di Mat. e vaig donar Fis. Società italiana delle Science, XVI, 1909.

[72] Riemannian manifolds in the large. Duke Math. J. 1 (1935) 39-49.

geometria kähleriana.

En la mateixa direcció que el treball de Myers hem de citar la memòria de J.L. Synge apareguda el 1936[73] en què prova que una varietat de Riemann M, δ-pinçada, de dimensió parell, és o bé simplement connexa, o bé $\pi_1(M) = \mathbf{Z}_2$ i en aquest darrer cas és «no orientable». Tot i que les varietats de Riemann δ-pinçades han de ser compactes d'acord amb el resultat de Myers, les varietats de Riemann amb curvatura positiva no fitada inferiorment per cap constant positiva poden deixar de ser compactes i per descomptat les de curvatura $\geqslant 0$. L'estudi de tals varietats en dimensió 2 és abordat per S. Cohn-Vossen en dos importants treballs apareguts el 1935 i 1936.[74] El resultat fonamental de Cohn-Vossen es pot enunciar de la següent manera: Tota varietat de Riemann completa de dimensió 2, amb curvatura de Gauss $K \geqslant 0$, no compacta, és o bé difeomorfa a $\mathbf{R}^2$, o bé plana (plana vol dir que $K = 0$). La demostració del resultat es basa en fins arguments en què intervé el teorema de Gauss-Bonnet per a polígons geodèsics. La major part de les tècniques emprades per Cohn-Vossen no es poden generalitzar per a dimensió més gran que 2. Aquesta és potser la raó per la qual l'estudi de les varietats de Riemann amb curvatura seccional $\geqslant 0$ no compactes és abandonat per molts anys i no és sinó molt recentment que pren nou impuls amb els treballs de Topogonov el 1964, Gromoll i Meyer el 1969, i Cheeger i Gromoll el 1971 i 1972, dels quals parlarem més endavant.

El 1936 apareix un treball de H. Whitney[75] que conté el resultat següent: «Una varietat diferenciable M de dimensió n, de classe C^r $(r \geqslant 1)$ és C^r-difeomorfa a una subvarietat analítica de $\mathbf{R}^{2n+1}$». Aquest teorema ens assegura la possibilitat de submergir globalment tota varietat diferenciable abstracta en un espai euclidià convenient. Ens diu que no hi ha diferència entre la geometria diferencial de les varietats abstractes i la geometria diferencial ordinària de les subvarietats de $\mathbf{R}^n$. La demostració d'aquest resultat és força llarga i utilitza, fonamentalment, el teorema de Weirstrass d'aproximació d'una funció per polinomis. Whitney es planteja la següent pregunta, que no ens consta que hagi estat encara resolta actualment: És possible submergir analíticament una varietat analítica abstracta en un espai euclidi convenient? ($\triangleright$ **8**). No podem deixar

[73] On connectivity of spaces of positive curvature. Quar. J. Math. Oxford 7 (1936) 316-320.

[74] Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen. Comp. Math. 2 (1935) 69-133. Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfach zusammenhängenden offenen vollständigen Flächenstücken. Recueil Math. Moscou 43 (1936) 139-163.

[75] Differentiable manifolds. Ann. of Math. 37 (1936) 645-680.

d'esmentar un resultat de Myers i Steenrod aparegut el 1939[76] en què es demostra per primera vegada que el grup d'isometries d'una varietat de Riemann és un grup de Lie. Anteriorment, el grup d'isometries s'havia considerat moltes vegades, però, o bé de manera local, o bé globalment sense demostrar que constituïa un grup de Lie, fet que de cap manera no es pot considerar trivial. Encara que a l'època en què Myers i Steenrod publiquen aquest treball ja s'havia desenvolupat força la teoria dels grups topològics localment compactes i se sabia des de 1928, arran del treball de Van Dantzig i Van der Waerden del qual ja hem parlat, que el grup d'isometries d'una varietat de Riemann connexa és un grup localment compacte per la topologia compacte-oberta, la demostració de Myers i Steenrod és directa i no utilitza aquest fet. El punt de vista dels grups topològics localment compactes serà pres més tard per Bochner i Montgomery amb excel·lents resultats.

No podem acabar l'estudi del període històric que estem considerant sense parlar d'alguns resultats que, encara que pertanyen de ple a la Topologia algebraica, estaran destinats a jugar un paper important en geometria diferencial. Ens referim a l'aparició del concepte d'espai fibrat amb fibra esfèrica i el primer intent de classificació d'aquests fibrats. Aquest concepte es troba ja perfectament definit en un treball de Whitney 1935.[77] Entre els exemples més característics d'aquests fibrats podem citar el conjunt de vectors tangents unitaris a una varietat de Riemann donada. El fet que al principi es consideren fibrats amb fibra esfèrica en lloc de fibra vectorial facilitarà, com veurem al paràgraf següent, el problema de la classificació. El treball més important d'aquesta època sobre aquest tema es deu a Whitney, el 1937[78] si bé té com a precedent una memòria de Stiefel el 1936.[79] El treball de Whitney comença pel plantejament d'una sèrie de problemes, l'intent de resolució dels quals el condueix a considerar uns cocicles, les classes de cohomologia dels quals avui coneixem amb el nom de classes característiques de Stieffel-Whitney. El problema que es troba a la base del treball de Whitney consisteix a determinar en quins casos sobre una varietat de Riemann existeixen n camps diferencials globals ortonormals a cada punt. Els resultats obtinguts en aquesta memòria de Whitney van

[76]The group of isometries of a Riemann manifold. Ann. of Math. 40 (1939) 400-416.

[77]Sphere-spaces. Proc. Nat. Ac. Sc. USA 2l(l935) 464-468.

[78]Topological properties of differentiable manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937) 785-806.

[79]Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Commentarii Math. Helvetici 8(l936) 305-353.

ser completats pel mateix autor el 1940.[80] Intentarem descriure en llenguatge actual la idea inicial de Whitney en aquests dos treballs. Sigui M una varietat diferenciable. Sigui (K,φ) una triangulació diferenciable de M, consistent en un complex simplicial geomètric K i una aplicació $\varphi : K \to M$ que sigui un homeomorfisme de K a M i diferenciable a cada símplex. Si σ és un símplex de K, designem per $\underline{\sigma}$ el seu baricentre. Sigui K' la primera subdivisió baricèntrica de K. Els p-símplexs de K' seran de la forma $\langle \underline{\sigma}_0, \underline{\sigma}_1, \dots, \underline{\sigma}_p \rangle$ amb $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_p$ símplexs qualssevol de K amb la condició $\sigma_0 < \cdots < \sigma_p$ ($\sigma < \tau$ indica que σ és una cara de τ). Si σ és un n-símplex, posem $|\sigma| = n$. Per a cada p considerem la p-cadena de K':

$$C_p = \sum_{\sigma_0 < \cdots < \sigma_p \leqslant K} (-1)^{|\sigma_0| + \cdots + |\sigma_p|} \langle \underline{\sigma}_0, \dots, \underline{\sigma}_p \rangle.$$

C_p és la suma de tots els p-símplexs de K' amb signe apropiat. Es pot demostrar que C_p és un cicle enter si $n-p$ és imparell o si $p=0$ (on $n = \dim M$). En cas que $n-p$ sigui parell, C_p és un cicle mòdul 2. La classe d'homologia W_p del cicle C_p és la p-èsima classe d'homologia de Stiefel-Whitney de M. Si $p=0$, $C_0 = \sum_{\sigma \leqslant K} (-1)^{|\sigma|} \underline{\sigma}$ representa la característica d'Euler-Poincaré de M. Quina relació tenen aquestes classes d'homologia amb el problema d'existència d'un determinat nombre de camps sobre M ortonormals a cada punt? Anem a explicar aquesta relació. L'existència de n camps ortonormals a cada punt sabem que equival a l'existència d'una secció al fibrat $O(M)$ de les referències ortonormals de M (fibrat principal amb grup estructural $O(n)$). Sigui $V_{n,n-q}$ la varietat de Stiefel que consisteix en el conjunt de referències $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-q})$ ortonormals de $\mathbf{R}^n$. Designem per $O^q(M)$ el fibrat que s'obté en associar la fibra $V_{n,n-q}$ al fibrat principal $O(M)$. És clar que l'existència d'una secció del fibrat $O^q(M)$ equival a l'existència de q camps sobre M ortonormals a cada punt. En general, si $E(M,Y)$ és un fibrat qualsevol sobre M amb fibra Y, si suposem donada una triangulació de M, per construir una secció de E sobre l'esquelet de dimensió 0 de M no tenim cap problema. Per prolongar aquesta secció a l'esquelet de dimensió 1 tampoc no tenim problema si la fibra Y és connexa per arcs. Per prolongar ara la secció sobre l'esquelet de dimensió 2 de M tampoc tenim problema (com es pot demostrar fàcilment) si $\pi_1(Y) = 0$. En general, si $\pi_0(Y) = \pi_1(Y) = \cdots = \pi_q(Y) = 0$ podrem prolongar sense problemes la secció fins a l'esquelet de dimensió $q+1$ de M. Suposem que es tingui $\pi_0(Y) = \pi_1(Y) = \cdots = \pi_q(Y) = 0$ i $\pi_{q+1}(Y) \neq 0$. Sigui f la secció que tenim construïda sobre l'esquelet de dimensió $q+1$. Suposem la triangulació de M prou

[80] On the theory of sphere bundles. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 26(1940).

fina per que $E|\sigma$ sigui trivial per a cada símplex σ. La secció f restringida a un $(q+1)$-símplex juntament amb una trivialització de $E|\sigma$ donarà lloc a una aplicació (que continuarem designant per f) de σ a Y. Si σ és un $(q+2)$-símplex, designem per $c(f,\sigma) \in \pi_{q+1}(Y)$ la classe d'homotopia de l'aplicació $\partial\sigma \xrightarrow{f} Y$. Es demostra que l'assignació a cada $(q+2)$-símplex σ de $c(f,\sigma)$ constitueix un $(q+2)$-cocicle $c(f)$ amb valors a $\pi_{q+1}(Y)$. Es demostra que la condició necessària i suficient perquè f pugui prolongar-se a l'esquelet de dimensió $q+2$ és que aquest cocicle sigui nul. Si f' és una altra secció de E sobre l'esquelet $(q+1)$-dimensional, es demostra que $c(f)$ difereix de $c(f')$ en una covora. La classe de cohomologia del cocicle $c(f)$ s'anomena obstrucció primària (és un element de $H^{q+2}(M,\pi_{q+1}(Y))$, on q és el menor enter positiu tal que $\pi_q(Y) \neq 0$). L'anul·lació d'aquesta classe de cohomologia és condició necessària i suficient perquè hi hagi una secció de E sobre l'esquelet de dimensió $q+2$. Tornant al nostre problema, designem per W^q l'obstrucció primària del fibrat $O^{q-1}(M)$. W^q serà un element de $H^{r+1}(M,\pi_r(V_{n,n-q}))$ on r és el menor enter tal que $\pi_r(V_{n,n-q}) \neq 0$.

Un estudi dels grups d'homotopia de les varietats de Stieffel $V_{n,n-q}$ mostra que $r=q$ i que $\pi_q(V_{n,n-q}) = \mathbf{Z}$ si q és parell o bé $q = n-1$ i que $\pi_q(V_{n,n-q}) = \mathbf{Z}_2$ si q és senar i menor que $n-1$. La classe de W^q es diu q-èsima classe de cohomologia de Stiefel-Whitney. La seva construcció a partir del concepte d'obstrucció primària mostra clarament la seva relació amb el problema de trobar cert nombre de camps globals ortonormals. Aquesta construcció es deu a Steenrod, però quina relació guarda aquesta construcció amb els cicles C_p primitius de Whitney que hem descrit abans? Si W_p és la classe d'homologia del cicle C_p, es verifica: W_p és el dual de Poincaré de la classe de cohomologia W_{n-p}. A partir de la construcció de Steenrod es va deixar una mica de costat el punt de vista inicial de Whitney molt útil en nombrosos casos concrets. Una demostració completa de l'equivalència de les dues construccions (és a dir que W_p és el dual de Poincaré de W_{n-p}) no es troba a la literatura fins fa molt poc temps.[81] Whitney, en el primer treball que hem citat, obté a més un teorema que constitueix una primera baula molt important en la classificació dels fibrats de fibra esfèrica amb una determinada base B. Per enunciar aquest teorema donem abans algunes definicions. Sigui $G_{k,\ell}$ l'espai (grassmaniana) els punts del qual són les k-esferes màximes de l'esfera unitat $S^{k+\ell+1}$ de $\mathbf{R}^{k+\ell+2}$ ($G_{k,\ell}$ es pot pensar també com l'espai dels $(k+1)$-subespais vectorials de $\mathbf{R}^{k+\ell+2}$). Sigui f una aplicació $B \xrightarrow{f} G_{k,\ell}$. Sigui $\gamma(f)$ el subespai de $B \times S^{k+\ell+1}$ format pels parells

[81] Halperin-Toledo: Stiefel-Vlhitney homology classes. Ann. of Math. 96 (1972) 511-525.

(b, s) de manera que s és un punt de la k-esfera corresponent a $f(b)$. Sigui π la restricció a $\gamma(f)$ de la projecció canònica $B \times S^{k+\ell+1} \to B$. $\gamma(f) \xrightarrow{\pi} B$ és un fibrat amb fibra S^k. El teorema de Whitney pot enunciar-se: Si B és un complex cel·lular, donat un fibrat $E \to B$ sobre B amb fibra S^k, per a tot $\ell \geqslant \dim B - 1$ existeix sempre una aplicació $f : B \to G_{k,\ell}$ tal que $\gamma(f) = E$.

El segon pas, i definitiu, a la classificació dels fibrats amb fibra esfèrica seria donat per Steenrod el 1944 com veurem més endavant. El resultat de Whitney juntament amb el de Steenrod jugarien un paper decisiu en la construcció de les classes característiques d'Euler i Pontryagin a la dècada vinent.

13 La geometria diferencial a la dècada 1940-50

La conflagració mundial produeix una evident frenada en la investigació matemàtica i retarda la publicació dels resultats que es van obtenint. Moltes de les memòries publicades en finalitzar la guerra, havien estat pensades amb molta anterioritat. No obstant això, encara que a molt menor ritme que en èpoques anteriors, van apareixent memòries de certa importància que després comentarem, com la de Weyl el 1940 que introdueix el mètode de la projecció ortogonal en la teoria de formes harmòniques de Hodge, la de Sard el 1942, que conté el ben conegut teorema que porta el seu nom, les d'Allendoerfer, Weil i Chern el 1943 i 1944 que generalitzen la fórmula de Gauss-Bonnet i la de Kodaira el 1944 sobre el teorema de Hodge. Com a dada curiosa, fem ressaltar que aquesta memòria de Kodaira està escrita en alemany (Alemanya i Japó eren aliats) mentre que tots els seus treballs posteriors estan escrits en anglès. La memòria de H. Weyl[82] que es refereix a la teoria del potencial constitueix el punt de partida de la teoria actual dels operadors el·líptics. Encara que aquesta memòria no sigui pròpiament de geometria diferencial, la repercussió que té a la presentació actual del teorema de Hodge i al teorema de descomposició de Kodaira en el cas de varietats de Riemann no compactes, justifica plenament que la comentem aquí. Considera Weyl un obert D de $\mathbf{R}^3$, i l'espai de Hilbert $\mathscr{F}$ de tots els camps X sobre D pels quals $\|X\|^2$ és sumable-Lebesgue :

$$\|X\|^2 = \int_D (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) < +\infty.$$

[82]Method of orthogonal projection in potential theory. Duke Math. J. Journal 7 (1940) 411-444.

Un camp $X \in \mathcal{F}$ s'anomena irrotacional si satisfà la condició

$$\int_D (X \cdot \mathrm{rot}(Y)) = 0$$

per a tot Y de classe C^1 amb suport compacte contingut a D. (El punt $\cdot$ indica producte escalar). Un camp $X \in \mathcal{F}$ s'anomena solenoïdal si satisfà la condició $\int_D (X \cdot \mathrm{grad}(\psi)) = 0$ per a tota funció ψ de classe C^1 amb suport compacte contingut a D. Sigui $\mathcal{H}$ el subespai de $\mathcal{F}$ format pels camps que són alhora irrotacionals i solenoïdals. El teorema central de H. Weyl es pot enunciar així:

(a) Tot $X \in \mathcal{H}$ és un camp de classe C^∞ tal que $\mathrm{div}(X) = 0$ i $\mathrm{rot}(X) = 0$ (Com que $\Delta X = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, X - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, X$, X és un camp harmònic).

(b) Siguin $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ respectivament les clausures (al sentit de la mètrica de Hilbert ($\| \|^2$) dels subespais dels vectors de la forma $\mathrm{grad}\,\psi$, i $\mathrm{rot}\,V$, amb ψ i V de classe C^1, amb suport compacte contingut a D. Llavors $\mathcal{F}$ es descompon en suma directa:

$$\mathcal{F} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$$

on aquests tres subespais són mútuament ortogonals respecte del producte escalar de Hilbert considerat.

La part (a) del teorema, coneguda avui amb el nom de teorema de regularitat, constitueix la base de l'estudi actual dels operadors el·líptics.

Aquest treball de H. Weyl porta el germen de moltes idees, però calia desenvolupar-les i aplicar-les a l'estudi del teorema de Hodge. Això es fa en una sèrie de treballs que van de 1944 a 1949, deguts a Kodaira, Bidal i De Rham. L'operador laplacià $\Delta = d\delta + \delta d$ és introduït en la teoria de Hodge independentment per K. Kodaira i G. de Rham.[83] [84] Recordem que per a Hodge una forma α era harmònica si verificava $d\alpha = \delta\alpha = 0$. Per a Kodaira i De Rham una forma harmònica serà aquella que satisfà $\Delta\alpha = 0$. Les dues definicions coincideixen quan es tracta d'una varietat compacta, però en les varietats no compactes, no. Bidal i De Rham en una memòria apareguda el 1946[85] inspirant-se en el mètode de la

[83] Kodaira: Über die harmonischen Tensorfelder in Riemannschen-Mannigfaltigkeiten. Proc. of the Imperial Acad. of Science Tokyo 20 (1940). 186-198, 257-261, 353-358.

[84] de Rham: Sur la théorie des formes différentielles harmoniques. Ann. Université Grenoble 22 (1946) 135-152.

[85] Les formes différentielles harmoniques. Commentari Math. Helv. 19 (1946) 1-49.

«paramètrix» de Hilbert fan una exposició molt bonica del teorema de Hodge. Sigui M una varietat de Riemann compacta. Sigui F^p l'espai de les p-formes de classe C^∞ sobre M. Sobre F^p es considera el producte escalar $\langle , \rangle$ definit per $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M (\alpha, \beta)\eta$, on (α, β) indica la contracció de α amb β respecte a la mètrica de Riemann g, i η indica l'element de volum. Sigui H^p el subespai de F^p format per les formes α tals que $\Delta\alpha = 0$. Bidal i De Rham proven que l'espai F^p es descompon en suma directa:

$$F^p = H^p \oplus d(F^{p-1}) \oplus \delta(F^{p+1})$$

Aquests tres subespais són ortogonals dos a dos respecte del producte escalar $\langle , \rangle$, i a més l'espai H^p té dimensió finita. Un estudi més profund del mètode de Weyl permetria a Kodaira generalitzar aquest resultat per a varietats de Riemann no compactes.[86] Inspirat en Weyl, Kodaira considera l'espai de Hilbert $\mathcal{F}^p$ de les p-formes diferencials ω (amb coeficients mesurables-Lebesgue) tals que la funció (ω, ω) és sumable-Lebesgue. (ω, ω) indica com abans la contracció de ω amb ω respecte a la mètrica de Riemann g, però es pot demostrar que en realitat $\mathcal{F}^p$ no depèn d'aquesta mètrica. Els operadors d, δ i Δ estan definits sobre les p-formes diferencials de classe C^1, però es poden estendre de manera natural a les p-corrents (encara que la noció de corrent és posterior a aquest treball de Kodaira, nosaltres la fem servir aquí per clarificar l'exposició). Com que $\mathcal{F}^p$ es pot considerar subespai de l'espai $\mathcal{D}^p$ de p-corrents, els operadors d, δ i Δ actuen sobre $\mathcal{F}^p$. Sigui $\mathcal{H}^p$ el subespai de $\mathcal{F}^p$ format pels ω tals que $\Delta\omega = 0$. Sigui $\mathcal{L}_1^p$ la clausura a $\mathcal{F}^p$ de l'espai $d(\mathcal{F}^{p-1}) \cap \mathcal{F}^p$ (tinguem en compte que si $\omega \in \mathcal{F}^{p-1}$, $d\omega$ serà una p-corrent, però no ha de pertànyer a $\mathcal{F}^p$, és a dir, $d(\mathcal{F}^{p-1}) \not\subset \mathcal{F}^p$). Sigui $\mathcal{L}_2^p$ la clausura a $\mathcal{F}^p$ de l'espai $\delta(\mathcal{F}^{p+1}) \cap \mathcal{F}^p$. El teorema de Kodaira es pot enunciar de la següent manera:

(a) Els elements de $\mathcal{H}^p$ són formes diferencials de classe C^∞ (el·lipticitat de Δ).

(b) $\mathcal{F}^p$ es descompon en suma directa: $\mathcal{F}^p = \mathcal{H}^p \oplus \mathcal{L}_1^p \oplus \mathcal{L}_2^p$,

on aquests tres subespais són mútuament ortogonals respecte del producte escalar de Hilbert: $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M (\alpha, \beta)\eta$.

Observem la similitud d'aquest enunciat amb el primitiu teorema de Weyl.

[86] Kodaira: Harmonic fields in Riemannian manifolds. Ann. of Math. 50 (1949) 587-665.

Diguem ara dues paraules sobre la memòria d'A. Sard de 1942[87] en què demostra el teorema que avui es coneix amb el seu nom: «Siguin M i M' dues varietats diferenciables de la mateixa dimensió, amb base numerable d'oberts i sigui $M \xrightarrow{f} M'$ una aplicació de classe C^1 de M a M'. La imatge $f(E)$ del conjunt E de punts crítics de f és un subconjunt de M' de mesura nul·la». Aquest resultat, que es pot reduir fàcilment a un enunciat anàleg per a una aplicació f de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$, completa en certa manera la teoria elemental de Morse. Gràcies a ell es pot demostrar que hi ha una funció f sobre una varietat M donada, amb tots els punts crítics no degenerats i tal que per a cada nombre a, el conjunt M^a de tots els $p \in M$ tals que $f(p) \leqslant a$, és compacte.[88]

Comentem ara els treballs apareguts el 1943 i 1944 que generalitzen la fórmula de Gauss-Bonnet. Hem dit que Bonnet el 1848, generalitzant una fórmula de Gauss, havia obtingut que en una superfície de $\mathbf{R}^3$, si es considera un polígon corbat de n costats, la integral de la curvatura de Gauss estesa a l'interior del polígon val la suma dels angles del polígon menys $(n-2)\pi$, menys la integral de la curvatura geodèsica del contorn. D'aquesta fórmula de Bonnet se'n desprèn fàcilment que a una varietat de Riemann compacta M de dimensió 2, es verifica:

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K d\sigma = \chi(M)$$

on K designa la curvatura de Gauss, $d\sigma$ l'element d'àrea de M, i $\chi(M)$ la característica d'Euler-Poincaré. C.B. Allendoerfer i André Weil[89] obtenen una generalització d'aquesta fórmula de Gauss-Bonnet, vàlida per a qualsevol varietat de Riemann compacta de dimensió parell. Designem per Ω la forma de curvatura (sobre M) corresponent a la mètrica de Riemann considerada. Suposem que la dimensió de M és parell, $n = 2p$. Sigui γ la n-forma diferencial sobre M definida per

$$\gamma = \frac{(-1)^p}{2^n \pi^p p!} \Sigma_{i_1,\ldots,i_n} \varepsilon_{i_1,\ldots,i_n} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{n-1} i_n},$$

on la suma s'estén a totes les permutacions $(i_1, \ldots, i_n)$ de $1, \ldots, n$ i $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_n}$ denota el signe de $(i_1, \ldots, i_n)$. (La forma diferencial γ dona la classe d'Euler del fibrat tangent). La fórmula de Gauss-Bonnet generalitzada es pot enunciar així: Si M

[87] The measure of the critical values of differentiable maps. Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942) 883-897.

[88] Vegeu per exemple: Milnor: Morse Theory. Princeton University 1963. Pàgines 32-36.

[89] The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra. Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943) 101-129.

és compacta i de dimensió parell es verifica:

$$\chi(M) = \int_M \gamma.$$

Aquesta fórmula ja havia estat establerta amb anterioritat independentment per C. B. Allendoerfer i W. Fenchel[90] [91] per a subvarietats de $\mathbf{R}^n$. Aleshores no es coneixia encara el teorema de Nash pel qual una varietat de Riemann qualsevol pot considerar-se com a subvarietat de Riemann de $\mathbf{R}^m$ per a m convenient. No obstant es coneixia el teorema localment (ja n'hem parlat al § 10), és a dir, tota varietat de Riemann pot submergir-se localment a $\mathbf{R}^m$. Utilitzant aquest resultat i la fórmula de Gauss-Bonnet establerta per a subvarietats de $\mathbf{R}^n$ és com Allendoerfer i Weil proven aquesta fórmula per a qualsevol varietat de Riemann de dimensió parell.

La primera demostració que no fa servir una immersió a $\mathbf{R}^n$ es deu a S. S. Chern el 1944.[92]

En el període que estem comentant apareix un treball de Bochner i Montgomery[93] que constitueix un avenç important a l'estudi del grup d'isometries d'una varietat de Riemann. En aquesta memòria es demostra que si G és un grup localment compacte que actua de manera efectiva com a grup de transformacions d'una varietat diferenciable M de classe C^k ($k \geqslant 1$), i si cada transformació de G és de classe C^1, aleshores G és un grup de Lie i l'aplicació $G \times M \to M$ és de classe C^k. Com que Van Dantzig i Van der Waerden havien demostrat el 1928, com hem vist, que el grup d'isometries $I(M)$ d'una varietat de Riemann completa M és localment compacte respecte a la topologia compacte-obert, aquest resultat de Bochner-Montgomery es pot utilitzar per provar que $I(M)$ és un grup de Lie. Aquest camí és més natural que el procediment directe per Myers-Steenrod el 1939 del qual ja hem parlat, i sobretot, aplicat a altres grups localment compactes permet obtenir resultats nous, com per exemple (en varietats complexes) que el grup de totes les transformacions holomorfes d'una varietat complexa és un grup de Lie.[94]

[90] Allendoerfer: The Euler number of a Riemannian manifold. Amer. J. Math. 62 (1940) 243-248.

[91] W. Fenchel: On total curvature of Riemannian manifolds. J. London Math. Soc. 15 (1940) 15-22.

[92] A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. Ann. of Math.45 (1944) 747-752.

[93] Locally compact groups of differentiable transformations. Ann. of Math. 47 (1946) 639-653.

[94] Bochner-Montgomery: Groups on analytic manifolds. Ann. of Math. 48 (1947) 659-669.

Finalitzarem l'estudi de la dècada dels quaranta, parlant dels avenços realitzats en topologia algebraica en el coneixement dels espais fibrats.

Hem vist al § anterior com Whitney havia establert que donat un fibrat $E \xrightarrow{\pi} B$ sobre un complex cel·lular B, amb fibra l'esfera S^k, donat un $\ell \geqslant \dim(B) - 1$ existeix sempre una aplicació $f : B \to G_{k,\ell}$ tal que $\gamma(f) = E$ (utilitzem les mateixes notacions que al § anterior). Doncs bé, el 1944, N. Steenrod completa el resultat de Whitney de la següent manera: [95] Sigui B un complex cel·lular localment finit. Siguin f_1 i f_2 dues aplicacions de B a $G_{k,\ell}$ tals que $\gamma(f_1) = \gamma(f_2)$. Si $\ell \geqslant \dim B$, es verifica que f_1 i f_2 són dues aplicacions homotopes. Aquest resultat juntament amb el de Whitney estableixen una correspondència bijectiva entre els fibrats amb fibra S^k sobre B i les classes d'homotopia d'aplicacions de B a $G_{k,\ell}$ amb $\ell \geqslant \dim B$.

L'avantatge de treballar amb fibrats de fibra esfèrica en lloc de fibrats vectorials rau en el fet que per a aquests el teorema de Steenrod no és cert. Perquè sigui cert cal substituir les grassmanianes $G_{k,\ell}$ per $G_{k,\infty}$ (límit inductiu de grassmannianes).

A conseqüència del teorema de Whitney-Steenrod, el problema de classificació de fibrats sobre B amb fibra S^k queda reduït a la classificació de les classes d'aplicacions homotopes de B a $G_{k,\ell}$. El teorema de Whitney-Steenrod és pres per Pontrjagin per donar la definició general de classe característica d'un fibrat amb fibra esfèrica, definició que engloba les classes característiques de Stiefel-Whitney i totes les que es defineixen posteriorment, la d'Euler, les de Pontrjagin i les de Chern per a fibrats complexos. Sigui $E \xrightarrow{\pi} B$ un fibrat amb fibra esfèrica S^k sobre B. Prenguem $\ell \geqslant \dim B$. Sigui f una aplicació $B \to G_{k,\ell}$ tal que $\gamma(f) = E$. Sigui f^* l'aplicació induïda per f a les àlgebres de cohomologia:

$$H^*(G_{k,\ell}) \xrightarrow{f^*} H^*(B).$$

En virtut del teorema de Steenrod aquesta aplicació depèn només del fibrat $E \xrightarrow{\pi} B$ i no de la f considerada tal que $\gamma(f) = E$, ja que dos tals f són homotopes. Pontrjagin anomena «classe característica» de E a la imatge per f^* de tot element de $H^*(G_{k,\ell})$. Segons els elements de $H^*(G_{k,\ell})$ que es considerin s'obtindran unes o altres classes característiques.[96] Pontrjagin en aquest treball considera una varietat de Riemann compacta M de dimensió n. Per a cada

Ann. of Math. 46 (1945) 685-694.

[95]Steenrod: The classification of sphere-bundles. Ann. of Math. 45 (1944) 294-311.

[96]Pontrjagin: C.R. (Doklady) Acad. Sc. URSS 35 (1942) 34-37.

enter m tal que $1 \leqslant m \leqslant n/4$, es defineix una forma diferencial Δ_{4m} sobre M mitjançant:

$$\Delta_{4m} = \frac{1}{c_{4m}} \sum \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_3 i_4} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{n-1} i_n}.$$

on Ω_{ij} és la forma de curvatura corresponent a la mètrica de Riemann considerada, i c_{4m} és una constant que s'escull de manera que la $4m$-forma diferencial Δ_{4m} determini un cocicle enter. Pontrjagin considera també, en el cas que la dimensió n de M és parell, $n = 2p$, la n-forma diferencial

$$\gamma = \frac{1}{2^n \pi^p p!} \Sigma_{i_1,\ldots,i_n} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{n-1} i_n}$$

El resultat fonamental de Pontrjagin consisteix a provar que les formes difererencials Δ_{4m} i γ defineixen, pel teorema de De Rham, classes de cohomologia de M les quals són classes característiques del fibrat $S(M) \xrightarrow{\pi} M$ de vectors unitaris tangents a M, en el sentit de la definició de classe característica que hem donat abans. En altres paraules, Pontrjagin determina elements Γ_{4m} i $\tilde{\gamma}$ de l'anell de cohomologia $H^*(G_{n-1,\ell}; \mathbf{R})$, amb $\ell \geqslant n-1$, que indueixen les classes de cohomologia de $H^*(M, \mathbf{R})$ determinades per les formes diferencials Δ_{4m} i γ, mitjançant l'homomorfisme $H^*(G_{n-1,\ell}; \mathbf{R}) \to H^*(M, \mathbf{R})$ determinat pel fibrat $S(M) \to M$. Les classes de cohomologia determinades per Δ_{4m} avui s'anomenen classes de Pontrjagin i la classe de γ, classe d'Euler. Aquest resultat que pressuposava que la varietat M fos compacta, és generalitzat per Chern el 1947 per a varietats de Riemann no compactes.[97] No parlem aquí de les classes de Chern per a fibrats complexos introduïdes el 1946,[98] ja que ho farem a la part II d'aquesta Memòria.

L'estudi de l'anell de cohomologia d'un espai fibrat a partir de la cohomologia de la base i de la cohomologia de la fibra és abordat per G. Hirsch i J. Leray en una sèrie de treballs que van de 1941 a 1950[99] [100]

Leray aproxima la cohomologia de Čech d'un espai fibrat per una successió espectral que depèn de la cohomologia de la base i de la cohomologia de la fibra.

---

[97] 0n the characteristic classes of riemannian manifolds. Proc. Nat. Acad. Sc. USA. 33 (1947) 78-82.

[98] Chern. Characteristic classes of hermitian manifolds. Ann. of Math. 47 (1946) 85-121.

[99] Hirsch: Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés. Bull. Soc. Royale Math. de Belgique (1947-48), 24-33.

[100] Leray: Structure de l'anneau spectral et l'anneau filtre d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue. J. Math. Pures et Appl. 29 (1960) 1-139.

L'estudi de la cohomologia singular d'un fibrat seguint el mateix procés que Leray havia utilitzat per a la cohomologia de Čeck es pot trobar a la tesi doctoral de J. P. Serre.[101] Aquests estudis sobre la cohomologia dels espais fibrats van conduir a una simplificació en la teoria de classes característiques, que actualment es pot presentar fonamentada en el resultat que avui coneixem per «teorema de Hirsh-Leray».

14 La geometria diferencial a la dècada 1950-60

El 1950 apareixen dos treballs fonamentals sobre la teoria general de connexions en espais fibrats. Al primer d'ells, de C. Ehresmann,[102] es defineix el concepte de connexió en un fibrat diferenciable qualsevol $E(B,f)$, de base B i fibra F, com una distribució C de subespais n-dimensionals dels espais tangents a E a cada punt $(n = \dim B)$, transversals a cada fibra i subjectes a verificar la següent condició: Si «a» és un camí de B que comença al punt x i acaba en x', existeix sempre una corba integral de C que es projecta sobre «a» i que comença en un punt arbitrari de la fibra F_x. D'aquesta manera el camí «a» defineix un homeomorfisme entre F_x i $F_{x'}$ que s'anomena «transport paral·lel al llarg d'a». Quan $x = x'$, s'obté el grup d'holonomia referit al punt x. Ehresmann observa que si la connexió C és completament integrable, llavors l'homeomorfisme que cada camí de B determina entre les fibres, depèn només de les classes d'homotopia d'aquests camins. En cas que el grup estructural G del fibrat $E(B,F)$ sigui un grup de Lie, Eheresmann imposa llavors, a la definició de connexió, que els homeomorfismes entre les fibres determinats pels camins de B siguin isomorfismes de la G-estructura. Això el porta a considerar connexions en el fibrat principal subjacent. Defineix la forma de connexió com una 1-forma diferencial al fibrat principal, valorada a l'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Aquest treball d'Ehresmann ha inspirat, com es veu, la teoria de connexions tal com la coneixem actualment.

L'altre treball fonamental sobre teoria de connexions a què hem al·ludit es deu a S. S. Chern.[103] L'autor considera un fibrat diferenciable $E(B,F)$ de base B i fibra F, amb grup estructural un grup de Lie G. Sigui $\{U_\alpha\}$ un recobriment de

[101] Homologie singulière des espaces fibrés. Ann. Math. 54 (1951) 425-505.

[102] Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Colloque de Topologie Bruxelles (1950) 29-55.

[103] Differential geometry of fibre bundles. Proc. Int. Congr. Math. (1950) Vol. II, 397-411.

B i ψ_α una trivialització de $E|U_\alpha$. Designem per $g_{\alpha\beta}$ les funcions de transició de E corresponents a aquestes trivialitzacions. Sigui θ la 1-forma (de Maurer-Cartan) valorada en l'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G i unívocament determinada per la condició de ser invariant per l'esquerra i actuar com la identitat sobre els camps de G invariants per l'esquerra. Designem per $\theta_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\beta}\theta$. Per a Chern, una connexió a $E(B,F)$ ve donada per una família d'1-formes $\mathfrak{g}$-valorades $\{\omega_\alpha\}$, on cada ω_α està definida a U_α i subjectes a verificar:

$$\omega_\beta = \mathsf{ad}(g^{-1}_{\alpha\beta})\omega_\alpha + \theta_{\alpha\beta}$$

sobre $U_\alpha \cap U_\beta$. La forma de curvatura ve donada per l'equació d'estructura:

$$\Omega^i_\alpha = d\theta^i_\alpha - \tfrac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j_\alpha \wedge \omega^k_\alpha$$

on C^i_{jk} són les constants d'estructura de G. Des del punt de vista purament teòric, la presentació de Chern no és potser tan bonica com la d'Ehresmann, però potser és més pràctica. La presentació de Chern, una mica més elaborada, permet definir una connexió en un fibrat vectorial $E(B,F)$ com un operador ∇ de diferenciació covariant que actua sobre l'espai $\Gamma(E)$ de seccions diferenciables de E i pren valors a $\Gamma(T(B)^* \otimes E)$, on $T(B)^*$ indica el fibrat cotangent, subjecte a verificar les condicions següents:

(a) $\nabla(\gamma_1 + \gamma_2) = \nabla\gamma_1 + \nabla\gamma_2 \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(E))$,

(b) $\nabla(f\gamma) = df \otimes \gamma + f\nabla(\gamma) \quad (f \in \Gamma(B), \gamma \in \Gamma(E)$.

Si U és un obert prou petit de B, una trivialització de $E|U$ vindrà donada per m seccions ($m = \dim F$) $s_1, \dots, s_m$ de $E|U$ tals que $\{s_1(x), \dots, s_m(x)\}$ constitueix una base de F_x a cada $x \in U$. A aquesta trivialització se li associa la matriu $\omega_U = (\omega^j_i)$ d'1-formes sobre U, definida per:

$$\nabla s_i = \omega^j_i \otimes s_j.$$

A cada obert U tindrem associada una matriu d'1-formes ω_U, verificant-se:

$$\omega_U = dg_{UV}\, g^{-1}_{UV} + g_{UV}\omega_V g^{-1}_{UV}$$

a $U \cap V$, on $\{g_{UV}\}$ són les funcions de transició corresponents a les trivialitzacions que s'han pres. Tant el punt de vista primitiu de Chern com aquest altre, també degut a Chern,[104] tenen l'inconvenient que la forma de connexió no

[104] Complex manifolds. Without potential theory. Van Nostrand 1967.

queda definida de manera intrínseca (per això no hi ha més remei que definir-la com fa Ehresmann al fibrat principal associat), però tenen l'avantatge que les ω_U que donen la forma de connexió estan definides sobre la varietat base B i no sobre un fibrat sobre B.

El mètode de Chern, fins i tot sense ser tan intrínsec com el d'Ehresmann, és més adequat en molts càlculs.

L'estudi de les varietats de Riemann amb curvatura positiva, δ-pinçades, que havia estat iniciat com hem vist per Myers i Synge el 1935 i 1936, és continuat per H. E. Rauch en un treball fonamental en aquesta direcció aparegut el 1951.[105] S'hi demostra que si M és una varietat de Riemann h-pinçada, on h és l'arrel de l'equació $\sin \pi\sqrt{h} = \sqrt{h}/2$ (h és aproximadament igual a $3/4$), el recobriment universal de M és homeomorf a una esfera. En particular, si M és simplement connexa, M és homeomorfa a una esfera. Aquest teorema, conegut per teorema de l'esfera, serà objecte de diverses millores degudes principalment a Klingenberg i Berger com veurem més endavant. El treball de Rauch no tan sols és important pel resultat obtingut, sinó també perquè els seus mètodes es revelaran molt útils aplicats a altres problemes. Siguin M i N dues varietats de Riemann. Sigui $\tau = x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, una geodèsica de M tal que dos punts qualssevol de τ no siguin conjugats al llarg de τ. Sigui $\tau' = y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, una geodèsica de N amb la mateixa propietat. Sigui p_t un pla qualsevol de $T_{x(t)}(M)$ i q_t un pla qualsevol de $T_{y(t)}(N)$. Se suposa que les curvatures seccionals $K(p_t)$ i $K(q_t)$ verifiquen $K(p_t) \geqslant K(q_t)$ per a cada t i qualssevol que siguin els plans p_t i q_t. En aquestes hipòtesis Rauch compara la norma, a cada punt $x(t)$, d'un camp de Jacobi X perpendicular a la geodèsica τ, amb la norma d'un camp de Jacobi Y perpendicular a τ' i que tingui en el punt $y(0)$ les mateixes condicions inicials que X a $x(0)$. A aquest efecte fa servir la fórmula de l'índex de Morse. Els teoremes d'aquest estil, que després del treball de Rauch s'han obtingut també per a varietats kählerianes,[106] es diuen teoremes de comparació i s'han revelat de gran utilitat. La idea dels teoremes de comparació es remunta potser a Bonnet per a superfícies de $\mathbf{R}^3$.[107]

El 1952 apareix el famós teorema de reductibilitat de De Rham.[108] Una varietat

[105] A contribution to differential geometry in the large. Ann. of Math. 54 (1951) 38-55.

[106] Do Carmo: The Cohomology ring of certain Kaelerian manifolds. Ann. of Math. 81 (1965) 1-14.

[107] Vegeu per exemple l'obra de Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris 1837, tercera part, llibre 6, capítol 5.

[108] Sur la réductibilité d'un espace de Riemann. Commentarii Math. Helvetici 26 (l952), 328-

de Riemann M es diu irreductible si donat un punt $x \in M$ no hi ha cap subespai de $T_x(M)$ invariant pel grup d'holonomia $\Psi(x)$ referit al punt x. El teorema de reductibilitat afirma que una varietat de Riemann M, completa, connexa i simplement connexa és isomètrica a un producte directe $M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$, on M_0 és un espai euclidià (que pot ser de dimensió zero) i $M_1, \ldots, M_k$ són varietats de Riemann irreductibles, completes i simplement connexes. A més, una tal descomposició és única llevat de l'ordre.

El 1952 hem d'esmentar també per la seva importància un treball de Borel i Lichnerowicz[109] en què es demostra que el grup d'holonomia d'una varietat de Riemann és un grup de Lie. També es demostra que el grup restringit d'holonomia és un subgrup tancat de $SO(n)$, on $n = \dim M$ (el grup restringit d'holonomia s'engendra a partir dels camins tancats homotops a un punt).

Aquests resultats de Borel i Lichnerowicz influiran en un resultat d'Ambrose i Singer el 1953.[110] Sigui $P(M,G)$ un fibrat principal amb base M i grup G. Donada una connexió Γ a $P(M,G)$ i un punt $u_0 \in P(M,G)$, sigui $P(u_0)$ el conjunt de punts de P que es poden unir amb u_0 mitjançant una corba horitzontal. Es pot veure que $P(u_0)$ constitueix un fibrat principal amb grup estructural el grup d'holonomia de M. El resultat d'Ambrose i Singer pot enunciar-se dient que l'àlgebra de Lie d'aquest grup d'holonomia és el subespai de $\mathfrak{g}$ (on $\mathfrak{g}$ és l'àlgebra de Lie de G) generat per als elements de la forma $\Omega_v(X,Y)$ per a tots els $v \in P(u_0)$, on Ω és la forma de curvatura de la connexió Γ de $P(M,G)$. Aquest resultat havia estat entrevist per Élie Cartan. Cas particular d'aquest teorema d'Ambrose i Singer: quan la connexió Γ de $P(M,G)$ és plana, la forma de curvatura és nul·la i aleshores el grup d'holonomia ha de ser discret. No podem deixar d'esmentar una memòria de Chern apareguda el 1953,[111] on s'introdueix la noció de G-estructura en una varietat diferenciable M, sent G un subgrup de Lie de $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$, on $n = \dim M$. Una G-estructura no és més que una reducció en el fibrat de referències $L(M)$ del grup estructural $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ a G. Si $G = O(n)$, les G-estructures estan en correspondència bijectiva amb les mètriques de Riemann. Si $G = \mathrm{GL}^+(n,\mathbf{R})$, una varietat M admet una G-estructura si i només si és orientable. Si considerem $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ com a subgrup de $\mathrm{GL}(2n,\mathbf{R})$ identificant

---

344.

[109] Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 234 (1952), 1835-1837.

[110] A theorem on holonomy. Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953) 428-443.

[111] Pseudo-groupes continus infinis. Colloque de Géométrie Différentielle. Strasbourg (1953) 119-136.

$A+\sqrt{-1}B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ amb $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2n,\mathbf{R})$, les G-estructures sobre M estan en correspondència bijectiva amb les estructures quasi complexes de M.

Si $G = \mathrm{Sp}(n,\mathbf{R})$ les G-estructures sobre M estan en correspondència bijectiva amb les estructures quasi-simplèctiques. (Una estructura quasi-simplèctica sobre una varietat M de dimensió $2n$ no és més que una 2-forma diferencial F no degenerada a cada punt). Donada una varietat M de dimensió n i un subgrup G de $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$, el problema de saber si M admet una G-estructura és equivalent al de conèixer si el fibrat $L(M)/G$ admet una secció. Una G-estructura sobre M donada per un fibrat $P \subset L(M)$ de grup estructural G es diu integrable si cada punt de M té un entorn U i un sistema de coordenades $x^1,\ldots,x^n$ a U tal que la secció de $L(M)$ sobre U donada per $\partial_1,\ldots,\partial_n$ és una secció de P. El problema de saber si una varietat de dimensió $2n$ admet una estructura complexa és equivalent al de conèixer si M admet una $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-estructura integrable. M admet una estructura simplèctica si admet una $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{R})$-estructura integrable. Com es pot veure el concepte de G-estructura unifica una sèrie de problemes que apareixen a geometria diferencial que són anàlegs.

El 1953 i 1954 es publica un treball d'A. Nijenhuis[112]en què s'introdueixen per primera vegada els conceptes de grup d'holonomia local i grup d'holonomia infinitesimal d'una connexió lineal. El teorema d'Ambrose i Singer del qual ja hem parlat ens diu, en el cas d'una connexió lineal del fibrat tangent $T(M)$, que l'àlgebra de Lie $\mathfrak{h}(x)$ del grup d'holonomia $\Psi(x)$ referit al punt $x \in M$ és el subespai dels endomorfismes de l'espai tangent $T_x(M)$ generat pels elements de la forma $(\tau R)(X,Y) = \tau^{-1} \circ R(\tau X, \tau Y) \circ \tau$, on τ indica el transport paral·lel al llarg d'una corba arbitrària diferenciable a trossos, que comenci i acabi a x. Aquest resultat indueix Nijenhuis a considerar el subespai $\mathfrak{h}'(x)$ de $\mathfrak{h}(x)$ generat per tots els endomorfismes de $T_x(M)$ de la forma:

$$(\nabla^k R)(X,Y;V_1,\ldots,V_k), \text{ amb } X,Y,V_1,\ldots,V_k \in T_x(M),\ 0 \leqslant k < \infty.$$

Això constitueix una subàlgebra de $\mathfrak{h}(x)$. Sigui $\Psi'(x)$ el subgrup més gran de Lie connex de $\Psi(x)$ que té $\mathfrak{h}'(x)$ per àlgebra de Lie. A aquest subgrup Nijenhuis en diu subgrup d'holonomia infinitesimal.

Sigui U un obert que contingui x. Sigui $\Psi(x,U)$ el grup d'holonomia engendrat pels camins tancats que comencen i acaben en x i no surten de U. Sigui $\Psi^*(x) =$

[112]On the holonomy group of linear connections. Indag. Math. 15 (1953) 233-249, 16 (1954) 17-25.

$\cap\Psi(x, U)$ quan U recorre tots els oberts simplement connexos que contenen x. $\Psi^*(x)$ s'anomena grup d'holonomia local a x. Nijenhuis demostra que el grup d'holonomia infinitesimal és un subgrup del grup d'holonomia local. Marcel Berger, també el 1953[113] realitza un estudi detallat dels grups d'holonomia de les connexions lineals i de les connexions de Riemann. Per un curós examen del tensor de curvatura arriba a obtenir una llista de grups que poden ser grups d'holonomia restringits d'una varietat de Riemann irreductible amb tensor de curvatura no paral·lel.

El 1955 es publica un llibre fonamental de Georges De Rham[114] on s'introdueix la noció de corrent. Com molt bé diu el mateix De Rham «la noció de corrent, que engloba com a casos particulars les formes diferencials d'una banda i les cadenes singulars de l'altra, és el concepte clau que permet comprendre com les propietats d'homologia d'una varietat diferenciable es manifesten alhora en l'estudi de les formes diferencials i de les cadenes singulars». La noció de corrent no és més que una generalització a formes diferencials del concepte de distribució introduït per Laurent Schwartz el 1945. Encara que l'obra de De Rham, per poder tenir més difusió entre un públic no especialitzat, evita en la mesura del possible la utilització de propietats d'espais vectorials topològics, nosaltres donarem una succinta descripció utilitzant conceptes d'anàlisi funcional que escurcen el llenguatge i clarifiquen les idees.

Sigui M una varietat paracompacta orientable de classe C^∞. Designem per $\overset{m}{\mathcal{E}}$ l'espai vectorial de les m-formes diferencials C^∞ sobre M, per $\overset{m}{\mathcal{E}}{}^p$ l'espai de les m-formes diferencials de classe C^p, per $\overset{m}{\mathcal{D}}$ l'espai de les m-formes de classe C^∞ amb suport compacte i per $\overset{m}{\mathcal{D}}{}^p$ l'espai de les m-formes de classe C^p amb suport compacte. Si K és un compacte fix de M, designem per $\overset{m}{\mathcal{D}}{}^p_K$ l'espai de les m-formes de classe C^p amb suport contingut a K i per $\overset{m}{\mathcal{D}}_K$ l'espai de les m-formes de classe C^∞ amb suport contingut a K. Dotarem d'una topologia convenient a tots aquests espais. Comencem per $\overset{m}{\mathcal{E}}$. Si φ és una m-forma sobre $\mathbf{R}^n$, $\varphi = \sum_{i_1<\cdots<i_m} \varphi_{i_1,\ldots,i_m} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$, i si $q = (q_1, \ldots, q_m)$ és una m-pla de nombres naturals, designarem per

$$D^q\varphi = \sum_{i_1<\cdots<i_m} \partial_1^{q_1} \cdots \partial_m^{q_m} \varphi_{i_1,\ldots,i_m} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}.$$

[113] Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. Bull. Soc. Math. Franc. 83 (1953) 279-330.

[114] Variétés differentiables. Hermann, París, 1955; reeditat el 1960.

Si φ és una m-forma sobre $\mathbf{R}^n$ designarem per $|\varphi|$ la funció sobre $\mathbf{R}^n$ definida per:

$$|\varphi|(x) = \sup_{i_1<\cdots<i_m} |\varphi_{i_1,\ldots,i_m}(x)|.$$

Sigui $\{(U_i,\psi_i)\}_{i=1,\ldots,n,\ldots}$ un atles numerable de M tal que cada $\overline{U}_i$ sigui compacte. Sigui $1=\sum \nu_i$ una partició diferenciable de la unitat subordinada a aquest atles. Si φ és una m-forma sobre M, $(\psi_i^{-1})^*(\varphi\nu_i)$ serà una m-forma sobre $\mathbf{R}^n$. Dotem l'espai $\overset{m}{\mathscr{E}}$ del sistema de semi-normes $\ell_{i,p}$:

$$\ell_{i,p}(\varphi) = \sup_{x\in U_i,|q|\leqslant p} \left| D^q(\psi_i^{-1})^*(\varphi\nu_i)\right|$$

(p és un nombre natural i $q=(q_1,\ldots,q_m)$ una m-pla). Dotem a $\overset{m}{\mathscr{E}}$ de la topologia d'espai vectorial topològic localment convex donada pel sistema de seminormes $\{\ell_{i,p}\}$. Es demostra que aquesta topologia no depèn ni de l'atles $\{(U_i,\psi_i)\}$ ni de la partició de la unitat $1=\sum \nu_i$ utilitzats.

L'espai $\overset{m}{\mathscr{E}}$ amb aquesta topologia és complet. Per a p fix, l'espai $\overset{m}{\mathscr{E}}{}^p$ es dota de la topologia donada pel sistema de seminormes $\{\ell_{i,p}\}$. Es té:

$$\cdots\subset \overset{m}{\mathscr{E}}{}^p \subset\cdots\subset \overset{m}{\mathscr{E}}{}^2 \subset \overset{m}{\mathscr{E}}{}^1$$

i $\overset{m}{\mathscr{E}} = \cap_{p=1}^{\infty} \overset{m}{\mathscr{D}}{}^p$. Cada espai $\overset{m}{\mathscr{E}}{}^p$ també és complet. Si K és un compacte fix de M, $\overset{m}{\mathscr{D}}_K$ és un subespai vectorial de $\overset{m}{\mathscr{E}}$. Es dota a $\overset{m}{\mathscr{D}}_K$ de la topologia induïda per la de $\overset{m}{\mathscr{E}}$. Anàlogament $\overset{m}{\mathscr{D}}{}_K^p$ és un subespai de $\overset{m}{\mathscr{E}}{}^p$ que es dota de la topologia induïda. Els espais $\overset{m}{\mathscr{D}}_K$ i $\overset{m}{\mathscr{D}}{}_K^p$ són complets. Encara que $\overset{m}{\mathscr{D}}$ també és subespai de $\overset{m}{\mathscr{E}}$, la topologia induïda en $\overset{m}{\mathscr{D}}$ per la de $\overset{m}{\mathscr{E}}$ no és una bona topologia per a $\overset{m}{\mathscr{D}}$, ja que amb ella no seria complet. L'espai $\overset{m}{\mathscr{D}}$ es dota de la topologia «límit inductiu estricte» de les topologies dels $\overset{m}{\mathscr{D}}_K$. Anàlogament es procedeix amb $\overset{m}{\mathscr{D}}{}^p$. Designem per $\overset{m}{\mathscr{E}}{}'$, $\overset{m}{\mathscr{E}}{}'^p$, $\overset{m}{\mathscr{D}}{}'$, $\overset{m}{\mathscr{D}}{}'^p$, els duals forts dels espais $\overset{m}{\mathscr{E}}$, $\overset{m}{\mathscr{E}}{}^p$, $\overset{m}{\mathscr{D}}$, $\overset{m}{\mathscr{D}}{}^p$.

Els elements de $\overset{m}{\mathscr{D}}{}'$ s'anomenen corrents de dimensió m i grau $n-m$ ($n=\dim M$). Els elements de $\overset{m}{\mathscr{D}}{}'^p$ s'anomenen corrents de dimensió m i ordre $\leqslant p$.

Es defineix de manera natural el suport d'un corrent i es comprova que hi ha un isomorfisme algebraic entre l'espai de tots els corrents de dimensió m amb suport compacte i $\overset{m}{\mathscr{E}}{}'$, de manera que els elements de $\overset{m}{\mathscr{E}}{}'$ es poden pensar com a corrents de dimensió m amb suport compacte i els elements de $\overset{m}{\mathscr{E}}{}'^p$ com a corrents de dimensió m i ordre $\leqslant p$, amb suport compacte. Entre els exemples més característics de corrents podem citar les cadenes singulars, les formes diferencials amb coeficients localment integrables-Lebesgue i els corrents de Dirac generalitzats. Es poden definir de manera natural el producte exterior d'un corrent per una forma C^∞, la derivada de Lie d'un corrent respecte a un camp C^∞, la contracció interior d'un corrent per un camp, i la diferencial exterior d'un corrent. La teoria de corrents dona un aclariment definitiu del comportament de les propietats d'homologia i de cohomologia d'una varietat. Designem per $H^r(\overset{*}{\mathscr{D}})$ el r-èsim grup de cohomologia del complex

$$\cdots \longrightarrow \overset{m}{\mathscr{D}} \xrightarrow{d} \overset{m+1}{\mathscr{D}} \xrightarrow{d} \cdots,$$

on d designa la diferencial exterior. De Rham obté els següents isomorfismes:

$$H^r(\overset{*}{\mathscr{D}}) \cong H^r(\overset{*}{\mathscr{D}}{}^p) \cong H^{n-r}(\overset{*}{\mathscr{E}}{}') \cong H^{n-r}(\overset{*}{\mathscr{E}}{}'^p)$$

qualsevol que sigui $p \geqslant 1$. Aquests grups de cohomologia corresponen a la cohomologia amb suports compactes (observeu que tots els espais anteriors són o bé de formes o bé de corrents «amb suports compactes»). També són isomorfs els grups de cohomologia següents:

$$H^r(\overset{*}{\mathscr{D}}{}') \cong H^{n-r}(\overset{*}{\mathscr{D}}{}^p) \cong H^r(\overset{*}{\mathscr{E}}) \cong H^r(\overset{*}{\mathscr{E}}{}^p)$$

Aquests grups de cohomologia corresponen a la cohomologia ordinària, és a dir, sense suports.

L'espai $\overset{r}{Z}$ dels cocicles de $\overset{r}{\mathscr{D}}$ és tancat per la topologia feble i anàlogament el dels covores. El mateix succeeix amb els espais de cocicles i covores de $\overset{r}{\mathscr{E}}$.

Aquest fet és molt important, ja que permet interpretar la dualitat de Poincaré com un cas particular de dualitat en espais vectorials topològics. En efecte si E és un espai vectorial topològic i H i L dos subespais amb $H \subset L$, si H és dèbilment tancat a E es pot demostrar que $H^\perp/L^\perp$ (on $H^\perp$ indica l'ortogonal de H al dual topològic (E') és canònicament isomorf al dual topològic $(L/H)'$. Si $\overset{r}{Z}$ i $\overset{r}{B}$ són respectivament l'espai de cocicles i de covores de $\overset{r}{\mathscr{D}}$, i si $\overset{n-r}{\mathscr{Z}}$ i $\overset{n-r}{\mathscr{B}}$ són els espais de cocicles i covores de $\overset{n-r}{\mathscr{D}}{}'$, es verifica $\overset{n-r}{\mathscr{Z}} = \overset{r}{B}{}^\perp$ i $\overset{n-r}{\mathscr{B}} = \overset{r}{Z}{}^\perp$, per tant

$$H^{n-r}(\overset{*}{\mathscr{D}}') = \overset{n-r}{\mathscr{Z}} / \overset{n-r}{\mathscr{B}} = \overset{r}{B}^{\perp} / \overset{r}{Z}^{\perp} = (\overset{r}{Z} / \overset{r}{B})',$$

és a dir, $H^{n-r}(\overset{*}{\mathscr{D}}')$ (cohomologia sense suports) és canònicament el dual topològic de $H^r(\overset{*}{\mathscr{D}})$ (cohomologia amb suports compactes).

El 1955 citarem també un interessant treball de S.S. Chern[115] en què prova, usant la fórmula de Gauss–Bonnet, que si M és una varietat de Riemann completa, δ-pinçada, de dimensió 2 o 4, la seva característica d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ és positiva. Chern conjectura en aquest treball que aquest resultat és vàlid per a qualsevol varietat de Riemann completa, δ-pinçada, de dimensió parell. En relació amb aquesta conjectura, actualment encara no resolta, que nosaltres sapiguem ($\triangleright$ **9**), M. Berger demostra el 1962 que una varietat de Riemann completa, δ-pinçada, de dimensió $2m$, verifica:

$$\left|\chi(M)\right| \leqslant 2^{-m}(2m)!\delta^{-m}.$$

Els conceptes de grup d'holonomia infinitesimal i grup d'holonomia local que havien estat introduïts per Nijenhuis el 1953 i 1954 per a connexions lineals al fibrat tangent, són esteses per Ozeki el 1956 a connexions qualssevol.[116] El 1956 es publica també un treball fonamental de Milnor[117] en què es demostra que l'esfera S^7 admet diverses estructures diferenciables diferents, no difeomorfes. Abans de l'aparició d'aquest resultat es creia probable que una varietat topològica donada pogués posseir com a màxim una sola estructura diferenciable (llevat de difeomorfisme). És fàcil construir per exemple sobre la recta real **R**, dues estructures diferenciables diferents: l'ordinària i la que s'obté imposant que la aplicació:

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \; x \mapsto x^{1/3}$$

sigui un difeomorfisme. Les dues estructures són diferents en el sentit que una funció diferenciable en una estructura no ha de ser-ho en l'altra, però són difeomorfes, per la mateixa construcció. Abans d'aquest treball de Milnor no es coneixia cap exemple de varietat topològica amb dues estructures diferenciables no difeomorfes. No cal dir el gran camp de recerca que s'obre després de la publicació de la memòria esmentada ($\triangleright$ **10**). Milnor comença considerant la classe de totes les varietats diferenciables compactes i orientables, de

[115]On curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold. Abh. Math. Som. Hamburg 20 (1955) 117-126.

[116]Infinitesimal holonomy groups of bundle connections. Nagoya Math. J. 10 (1956) 105-123.

[117]On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Ann. of Math. 64 (1956) 17-86.

dimensió 7, per a les quals el tercer i quart grup de cohomologia entera s'anullen: $H^3(M^7,\mathbf{Z}) = H^4(M^7,\mathbf{Z}) = 0$. Per a cadascuna de tals varietats defineix un invariant $\lambda(M^7)$ que és un invariant mòdul 7. Després defineix sobre S^7 diverses estructures diferenciables diferents i prova que l'invariant λ que ha definit no és el mateix per a totes, per tant, no poden ser difeomorfes. La definició de l'invariant $\lambda(M^7)$ reposa en la teoria del «cobordisme» de R. Thom[118] i específicament en el fet que tota varietat compacta de dimensió 7, M^7, és la vora d'una varietat de dimensió 8, B^8.

El 1956 apareix també un important treball de J. F. Nash[119] que resol el problema de la immersió isomètrica global d'una varietat de Riemann en un $\mathbf{R}^n$ convenient. El resultat de Nash es pot enunciar així: Tota varietat de Riemann de dimensió n i classe C^k $(3 \leqslant k \leqslant \infty)$ es pot submergir C^k-isomètricament en qualsevol petita porció de $\mathbf{R}^m$ amb $m = \frac{1}{2}n(3n+11)$ si la varietat és compacta i $m = \frac{1}{2}n(n+1)(3n+11)$ si la varietat no és compacta. Recordem que Levi-Civita ja considera la possibilitat de submergir localment, isomètricament una varietat de Riemann a $\mathbf{R}^m$ $(m = \frac{1}{2}n(n+1))$. És É. Cartan qui demostra de manera efectiva aquesta propietat. El resultat de Nash globalitza el d'É. Cartan. Així com després del teorema de Whitney no hi ha diferència entre la geometria diferencial de les varietats abstractes i la de les subvarietats de $\mathbf{R}^n$, després d'aquest resultat de Nash no existeix diferència entre la geometria de Riemann de les varietats de Riemann abstractes i la de les subvarietats de $\mathbf{R}^n$.

El 1956 hem de citar també el llibre de K. Nomizu «Lie groups and differential geometry».[120] Si bé aquesta obra és més aviat de caràcter expositiu, s'hi poden trobar simplificacions importants en algunes demostracions respecte dels treballs originals. Per exemple el teorema d'Ambrose i Singer del qual ja hem parlat és demostrat en aquest llibre de Nomizu basant-se en el teorema de reducció que, implícit en els treballs d'É. Cartan i d'Ehresmann, és aquí enunciat explícitament de la següent manera: Sigui $P(M,G)$ un fibrat principal amb base M connexa i paracompacta i sigui Γ una connexió a P. Sigui u_0 un punt arbitrari de P. Sigui $P(u_0)$ el conjunt de punts de P que es poden unir amb u_0 mitjançant una corba horitzontal. $P(u_0)$ és un subfibrat de P amb grup estructural el grup d'holonomia de M referit al punt u_0. La connexió Γ és reduïble a una connexió de $P(u_0)$.

[118] Comment. Math. Helv. 28 (1954) 17-86.
[119] Imbedding problem for Riemannian manifolds. Ann. Math. 63 (1956) 20-63.
[120] Nomizu: Lie groups and differential geometry. Publ. Math. Soc. Japan, 1956.

Una altra demostració del teorema d'Ambrose i Singer pot trobar-se en un treball de K. Kobayashi aparegut el 1957.[121] Si G és un grup de Lie, i $T(G)$ el fibrat tangent de G, la multiplicació de G:

$$G \times G \xrightarrow{\mu} G, \quad (a,b) \mapsto a \cdot b$$

indueix una aplicació (que a cada punt és la diferencial de μ):

$$T(G) \times T(G) \xrightarrow{\mu_*} T(G).$$

Aquesta aplicació dota $T(G)$ d'una operació que el converteix en un grup de Lie. A cada fibrat principal $P(M,G)$ sobre M amb grup estructural G pot associar-li de manera natural un fibrat principal $T(P)$ sobre el fibrat tangent de M, $T(M)$, amb grup estructural $T(G)$. Kobayashi prova que el teorema d'Ambrose i Singer és equivalent al següent enunciat:

Per a cada connexió Γ de P hi ha una connexió $\tilde{\Gamma}$ de $T(P)$ induïda de manera natural per Γ, de forma que si ϕ és el grup d'holonomia de Γ i $\tilde{\phi}$ és el grup d'holonomia de $\tilde{\Gamma}$ es verifica $\tilde{\phi} = T(\phi)$.

El 1958 es publica una obra important d'A. Lichnerowicz[122] que pretén donar una visió sistemàtica dels resultats relatius als grups de Lie que operen sobre una varietat diferenciable conservant una determinada estructura. La geometria dels espais homogenis i l'estudi dels grups de transformacions afins i de transformacions conformes constitueixen els objectius principals d'aquest llibre on es troben una sèrie de resultats nous de considerable importància. Així per exemple es prova que en una varietat de Riemann compacta de dimensió $n \geqslant 3$, amb curvatura escalar constant negativa o nul·la, tota transformació infinitesimal conforme és una isometria infinitesimal (pàg. 134). Si designem per $I(M)$ i $C(M)$ respectivament els grups d'isometries i transformacions conformes d'una varietat de Riemann M i per $I_0(M)$ i $C_0(M)$ els seus components connexos, es desprèn del resultat anterior que si M és compacta de dimensió $\geqslant 3$ i amb curvatura escalar constant negativa o nul·la es verifica $I_0(M) = C_0(M)$. Obata demostraria el 1962 que amb les mateixes hipòtesis es verifica $I(M) = C(M)$. Lichnerowicz demostraria el 1964 el mateix resultat per a varietats de dimensió $\geqslant 3$, amb curvatura escalar constant positiva, no isomètriques a una esfera i tals que el tensor de Ricci verifiqués una certa relació. El

[121] Theory of connections. Annali di Matematica. 43 (1957) 119-194.
[122] Géométrie des groupes de transformations. Dunod, Paris, 1958.

fet que la igualtat $I(M) = C(M)$ es verifiqués sota hipòtesis tan diferents com les que hem descrit faria pensar que la igualtat seria certa sota la hipòtesi: «M compacta, de dimensió $\geqslant 3$, de curvatura escalar constant i no isomètrica a una esfera». Aquesta conjectura coneguda sota el nom de «conjectura de Lichnerowicz» ha estat objecte de nombrosos treballs que davant la impossibilitat de resoldre-la s'han acontentat de donar respostes parcials ($\triangleright$ **11**). De tot això parlarem més endavant. Un altre resultat nou contingut al llibre de Lichnerowicz que estem comentant, que ha obert posteriorment un ampli camp de recerca, fa referència a l'espectre d'una varietat de Riemann. Es diu espectre d'una varietat de Riemann compacta M al conjunt de nombres reals λ tals que hi ha una funció f de classe C^∞ sobre M tal que $\Delta f = \lambda f$, on Δ és el laplacià. Per a un obert D de $\mathbf{R}^n$ amb frontera B, l'espectre havia estat estudiat per H. Weyl el 1915.[123] L'espectre està constituït per una successió discreta $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots\}$ que tendeix a $+\infty$. El resultat de Lichnerowicz concerneix al primer valor propi no nul λ_1, i diu essencialment que si hi ha un escalar k tal que la forma quadràtica $R - kg \geqslant 0$, on R és el tensor de Ricci i g la mètrica, llavors $\lambda_1 \geqslant \frac{n}{n-1}k$, on n és la dimensió de la varietat. Obata va provar el 1962 que, amb les mateixes hipòtesis, si es verifica la igualtat $\lambda_1 = \frac{n}{n-1}k$, llavors la varietat de Riemann considerada és isomètrica a l'esfera S^n.[124]

Al terreny de la topologia diferencial no podem passar per alt la comunicació de René Thom al Congrés Internacional de Matemàtiques celebrat el 1958[125] en què es planteja el problema de definir una estructura diferenciable sobre un complex simplicial K que és una varietat topològica. La construcció (si és possible) es fa successivament per als diferents esquelets de dimensió r de K, quan r varia de zero a la dimensió de K. Suposant definida una estructura diferenciable en un entorn del r-esquelet de K, el problema consisteix a perllongar-la a una estructura diferenciable definida en un entorn del $(r+1)$-esquelet de K. Aquesta prolongació no sempre és possible. Thom estudia l'obstrucció a aquesta prolongació seguint un camí molt semblant a l'utilitzat per Whitney per definir les classes característiques de Stiefel-Whitney (aquest procediment ja l'hem descrit). Allà es tractava d'estudiar l'obstrucció a la prolongació d'una secció. Aquí es tracta de l'obstrucció a la prolongació d'una estructura diferen-

[123] Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers. Rend. Cir. Mat. Palermo 39 (1915) 1-49.

[124] Obata: Certain conditions for a riemannian manifold to be isometric with a sphere. J. Math. Soc. Japan 14, 1962, 333-340.

[125] Des variétés triangulées aux variétés différentielles. Proc. Int. Congres Math. 1958. pàg. 248-255. Cambridge University Press. New York 1960.

ciable. Naturalment la situació és molt diferent, però els procediments emprats tenen certa analogia. Kervaire donarà el 1960 el primer exemple explícit d'una varietat topològica triangulable que no admet cap estructura de varietat diferenciable.

El 1959 es publica un treball de P. Hartman i L. Nirenberg[126] que té per objecte l'estudi de les desenvolupables de $\mathbf{R}^3$. Una desenvolupable sol definir-se com una superfície de $\mathbf{R}^3$ de curvatura de Gauss nul·la, condició equivalent al fet que cada punt posseeixi un entorn isomètric a un obert de $\mathbf{R}^2$. Era conegut, des de molt antic, que si la segona forma quadràtica fonamental s'anul·la en un entorn d'un punt x_0 d'una superfície desenvolupable S, la superfície en aquest entorn ha de ser una porció de pla i que si la segona forma quadràtica fonamental no s'anul·la en un punt x_0 de S, hi ha un entorn de x_0 en què la superfície és reglada i tal que el vector normal al llarg de cada generatriu conserva una direcció constant. Entre aquestes superfícies hi ha els cons, els cilindres i les superfícies engendrades per les tangents a una corba. Ja en l'estudi merament local, el cas d'un punt x_0 de S en què s'anul·li la segona forma quadràtica fonamental sense que hi hagi cap entorn de x_0 en què s'anul·li, escapa a les consideracions anteriors. Tals punts poden presentar-se en unir de manera C^∞ un tros de pla amb un tros de cilindre. Hartman i Nirenberg per al seu estudi consideren quatre diferents tipus de punts en una superfície desenvolupable (tipus que no s'exclouen mútuament) :

(a) Punts parabòlics, que són aquells en què s'anul·la una curvatura principal sense anul·lar-se l'altra.

(b) Punts plans, que són aquells en què s'anul·len les dues curvatures principals.

(c) Punts essencialment parabòlics que són límit de punts parabòlics (poden ser parabòlics o plans).

(d) Punts planers, que són punts plans que tenen un entorn format únicament per punts plans. El conjunt de tots els punts planers d'una desenvolupable S és obert, mentre que el conjunt de punts essencialment parabòlics és tancat i la reunió d'aquests dos conjunts és tot S. El teorema principal de Hartman i Nirenberg es pot enunciar així:

Per cada punt essencialment parabòlic p_0 d'una desenvolupable S passa una única generatriu $\ell = \ell(p_0)$ que, o bé es pot prolongar indefinidament, o bé té un

[126] On spherical image maps whose Jacobians do not change sign. American Journal of Math. 81 (1959) 901-920.

o els seus dos extrems a la vora de S. Tots els punts de $\ell(p_0)$ són essencialment parabòlics i, o bé són tots parabòlics, o bé són tots plans.

Aquest treball de Hartman i Nirenberg obre les portes a la classificació completa de les superfícies desenvolupables de $\mathbf{R}^3$.

L'estudi de les varietats de Riemann δ-pinçades que s'havia iniciat amb Myers i Synge a la dècada dels trenta i que havia estat continuat per Rauch el 1951 és objecte d'un important treball de Klingenberg[127] publicat el 1959. El principal resultat d'aquesta memòria es pot enunciar així: Una varietat de Riemann de dimensió parell, completa, simplement connexa, δ-pinçada, amb δ igual a l'arrel de l'equació $\sin\pi\sqrt{\delta} = \sqrt{\delta}$ (δ aproximadament igual a $0,54$) és homeomorfa a una esfera. El resultat de Klingenberg val només per a varietats de dimensió parell mentre que en el de Rauch la dimensió pot ser parell o imparell. Klingenberg utilitza un altre camí molt diferent del de Rauch, fundat en la teoria de Morse. El treball de Klingenberg constitueix un bell exemple d'aplicació d'aquesta teoria a l'estudi d'un problema molt concret. La cota $\delta = 0,54$ de Klingenberg seria rebaixada un any més tard independentment per Topogonov i Berger a qualsevol nombre $k > \frac{1}{4}$. Berger demostraria a més que aquesta cota no es pot rebaixar més. ▷ **12**

No podem acabar l'estudi de la dècada que estem considerant sense parlar del teorema de Riemann–Roch per a varietats diferenciables reals. El 1951 Kodaira generalitza per a superfícies algebraiques sense singularitats (de dimensió 2) el clàssic teorema de Riemann–Roch que fins llavors es coneixia per a corbes algebraiques. Hirzebruch el 1956 generalitza aquest resultat per a varietats algebraiques sense singularitats, de dimensió qualsevol, i finalment Grothendieck generalitza el resultat de Hirzebruch de manera molt elegant.[128] De tot això ens n'ocuparem amb detall a la segona part d'aquesta Memòria dedicada a les varietats complexes. El que si volem explicar aquí és una versió feble del teorema de Riemann–Roch de Grothendieck vàlida per a varietats diferenciables reals, deguda a Atiyah i Hirzebruch, publicada el 1959.[129] Atiyah i Hirzebruch comencen intentant definir en el fibrat tangent d'una varietat diferenciable real un concepte equivalent a la classe característica de Todd per a fibrats vectorials complexos. Sigui $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrat vectorial (real o complex) sobre una varietat

[127] Contributions to Riemann geometry in the large. Ann. of Math. 69 (1959) 654-666.

[128] Borel–Serre: Le théorème de Riemann-Roch d'après Grothendieck. Bull. Soc. Math. France 86 (1958) 97-136.

[129] Riemann–Roch theorem for differenciable manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959) 276-281.

M (real o complexa). Hi ha un resultat de topologia algebraica conegut pel nom de «principi de descomposició» que afirma l'existència una varietat $\bar{M}$ i una aplicació $f : \bar{M} \to M$ tals que $f^*(E) = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ (on els E_j són fibrats de línia) i que l'aplicació induïda a l'àlgebra de cohomologia: $H^*(M, \mathbf{R}) \xrightarrow{f^*} H^*(\bar{M}, \mathbf{R})$ és monomorfisme. Sigui $E \to M$ un fibrat vectorial complex sobre una varietat complexa M. La classe característica de Todd es defineix per l'expressió formal:

$$\mathbf{td}(E) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\gamma_j}{1 - e^{-\gamma_j}}$$

on γ_j és la primera classe de Chern del fibrat E_j sobre $\bar{M}$ donat pel «principi de descomposició» anterior. Això s'explicarà amb més detall a la segona part d'aquesta Memòria dedicada a les varietats complexes. Atiyah i Hirzebruch comencen observant que la classe de Todd es pot expressar:

$$\mathbf{td}(E) = \exp\left(\tfrac{c_1(E)}{2}\right) \prod_{j=1}^{m} \frac{\gamma_j/2}{\sinh \gamma_j/2} \in H^*(M, \mathbf{Q}).$$

Situem-nos en el cas particular en què E és el fibrat tangent de tipus $(1,0)$ d'una varietat complexa M. Aleshores indicarem per $\mathbf{td}(M)$ la classe $\mathbf{td}(T(M))$. La classe $\alpha(M) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\gamma_j/2}{\sinh \gamma_j/2}$ es diu A-classe, i depèn només de les classes de Pontrjagin de M. Com que la primera classe de Chern $c_1(M)$ és congruent mòdul 2 amb la segona classe de Stiefel-Whitney $w^2(M)$, per definir la classe de Todd per a varietats reals cal restringir-se a les varietats M tals que $w^2(M)$ sigui la reducció, mòdul 2, d'una classe entera. Una condició necessària i suficient perquè això passi és que $w^3(M) = 0$ (observeu que w^3 és una classe amb coeficients enters). Per a les varietats M tals que $w^3(M) = 0$, es defineix la classe de Todd triant una $d \in H^2(M, \mathbf{Z})$ la reducció de la qual mòdul 2 sigui w^2 i posant:

$$\mathbf{td}(M) = \exp(d/2)\alpha(M) \in H^*(M, \mathbf{Q}).$$

Aquesta classe depèn en principi del d triat. Si $E \xrightarrow{\pi} M$ és un fibrat complex, el caràcter de Chern de E, $\mathbf{ch}(E)$ (per a la definició, vegeu la segona part d'aquesta Memòria), és un element de $H^*(M, \mathbf{Q})$.

El caràcter de Chern $\mathbf{ch}$ dona una aplicació del grup de Grothendieck $K(M)$ a $H^*(M, \mathbf{Q})$. Si $E \xrightarrow{\pi} M$ és un fibrat real sobre M, es defineix $\mathbf{ch}(E)$ com el caràcter de Chern de la complexificació de E. Si designem per $K_0(M)$ el grup de

Grothendieck construït a partir dels fibrats vectorials reals sobre M, amb la definició anterior el caràcter de Chern dona una aplicació:

$$K_0(M) \xrightarrow{\mathbf{ch}} H^*(M,\mathbf{Q}).$$

Es denomina grup de Riemann–Roch de M al subgrup de $H^*(M,\mathbf{Q})$ donat per:

$$R(M) = \mathbf{ch}(K(M))\mathbf{td}(M) = \mathbf{ch}(K(M))\exp(d/2)\alpha(M).$$

Es demostra que $R(M)$ és independent del d triat que intervé en la definició de $\mathbf{td}(M)$. El resultat d'Atiyah-Hirsebruch (conegut per teorema de Riemann–Roch per a varietats diferenciables) pot enunciar-se de la següent manera:

Siguin M i N dues varietats diferenciables compactes, orientables amb $w^3(M) = w^3(N) = 0$ i $\dim M - \dim N \equiv 0 \mod 2$. Sigui $f : M \to N$ una aplicació contínua. Es verifica $f_*(R(M)) \subseteq R(N)$.

Quan M i N són varietats algebraiques sense singularitats aquest resultat constitueix una versió feble del teorema de Riemann-Roch de Grothendieck. Del resultat d'Atiyah-Hirzebruch se'n desprenen diverses conseqüències importants. Per exemple, se'n dedueixen unes cotes inferiors molt precises de la dimensió de l'esfera en què es poden submergir diferenciablement un espai projectiu real i un espai projectiu complex.

15 La geometria diferencial de 1960 als nostres dies

En valorar un resultat del 1930 o del 1940, per exemple, tenim present la importància que ha tingut en investigacions posteriors. La perspectiva històrica és, doncs, un element essencial en l'apreciació dels resultats. Per aquesta raó és veritablement difícil jutjar els avenços realitzats des de 1960 fins a l'actualitat. Conscients d'aquesta dificultat intentarem, però, descriure aquest període històric el millor que sapiguem.

El 1960 M. Berger demostra[130] que si M és una varietat de Riemann completa, simplement connexa, de dimensió parella, δ-pinçada amb $\delta > 1/4$, és homeomorfa a una esfera. Si $\delta = 1/4$ és, o bé homeomorfa a una esfera, o bé isomètrica

[130] Sur quelques variétés riemanniennes sufficient pincées. Bull. Soc. Math. France 88 (1960) 57-71.

a un espai simètric de rang 1. La primera part d'aquest teorema va ser obtinguda independentment per Topogonov.[131] Recordem que Klingenberg havia provat el 1959 el mateix resultat per a δ-pinçaments amb $\delta > 0,54$. Berger combina la tècnica de Klingenberg amb un resultat de Topogonov obtingut el 1958[132] relatiu a les varietats δ-pinçades amb diàmetre igual a $\pi/\sqrt{\delta}$. La demostració de Berger, força complicada, va ser simplificada per Y. Tsukamoto el 1962.[133]

Després del teorema de Berger, l'estudi de les varietats δ-pinçades de dimensió parell amb $\delta > 1/4$ quedava resolt. Però, què cal dir de les varietats de dimensió senar? En aquesta direcció apunten dos treballs de Klingenberg, apareguts el 1961 i 1962,[134] en què es prova que tota varietat de Riemann completa, simplement connexa de dimensió imparell $\frac{1}{4}$-pinçada, és homeomorfa a una esfera. Klingenberg utilitza en la demostració el resultat de Berger per a varietats de dimensió parell. $\triangleright$ **13**

Així com en el cas de dimensió parell el resultat de Berger no es pot millorar, ja que els espais projectius complexos i quaterniònics constitueixen exemples de varietats $\frac{1}{4}$-pinçades no homeomorfes a una esfera, en dimensió imparell no se sap actualment si el resultat de Klingenberg pot ser o no millorat rebaixant la cota del δ-pinçament ($\triangleright$ **14**).

Paral·lelament als resultats que acabem de citar es produeixen una sèrie de descobriments de gran importància en el camp de la topologia diferencial. Kervaire dona el 1960[135] el primer exemple d'una varietat topològica triangulable que no admet cap estructura de varietat diferenciable. La construcció de Kervaire es pot sintetitzar així: Sigui $E \xrightarrow{p} S^5$ el fibrat dels vectors tangents de S^5 de norma menor que 1. Sigui $D_5 \subset S^5$ l'hemisferi superior de S^5. $p^{-1}(D^5)$ admet una trivialització de la següent forma:

$$D^5 \times D^5 \xrightarrow{f} p^{-1}(D^5).$$

[131] Dependence between curvature and topological structure of Riemannian space of positive curvature. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 133 (1960) 1031-1033. Traducció a l'anglès: Soviet Math. Dokl. 1 (1961) 943-945.

[132] Dokl. Akad. SSSR 120 (1958) 719-721.

[133] On Riemannian manifolds with positive curvature. Mem. Fac. Sci. Kyushu. Univ. Sèrie A, 15 (1962) 90-96.

[134] Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung. Comment. Math. Helvetici 35 (1961) 47-54. Über Riemannsche Mannigfatigkeiten mit nach oben beschränkter Krümmung. Annali di Matematica 60 (1962) 49-59.

[135] A manifold which does not admit any differentiable structure. Commentarii Math. Helv. 34 (1960) 257-270.

Sigui W l'espai obtingut per reunió disjunta de E amb si mateix identificant $f(u,v) \in p^{-1}(D^5)$ en la primera còpia de E amb el punt $f(v,u) \in p^{-1}(D^5)$ a la segona còpia de E. W constitueix una varietat triangulable amb vora ∂W que resulta ser homeomorf a l'esfera S^9. La reunió de W amb el con sobre ∂W constitueix una varietat M_0 de dimensió 10 que no admet cap estructura diferenciable. La demostració d'aquesta afirmació recorda la utilitzada per Milnor (de la qual hem parlat a l'apartat anterior) per provar que S^7 admet diverses estructures diferenciables diferents. Kervaire construeix un invariant $\phi(M)$ per a totes les varietats topològiques triangulables M de dimensió 10, 4-connexes i prova que aquest invariant ha de ser zero per a totes les varietats que admeten una estructura diferenciable. Un còmput directe de $\phi(M)$ per a la varietat M_0 abans construïda mostra que $\phi(M_0) = 1$.

El 1960 i 1961 apareixen una sèrie de treballs, uns de topologia algebraica, altres de topologia diferencial relacionats amb la següent conjectura de Poincaré: «Una varietat polièdrica, compacta, simplement connexa de dimensió 3, sense vora, és necessàriament homeomorfa a l'esfera S^3». Aquesta conjectura s'havia generalitzat de la manera següent: «Una varietat n-dimensional que tingui el mateix tipus d'homotopia que una esfera, és necessàriament homeomorfa a l'esfera S^n» (▷ **15**).

Naturalment, això condueix a diverses conjectures diferents segons el significat que es doni a la paraula «varietat». Per a varietats topològiques la conjectura generalitzada de Poincaré va ser provada per a $n \geqslant 7$ per J. Stallings el 1960,[136] per a $n \geqslant 5$ per C. I . Zeeman el 1961,[137] que va perfeccionar el mètode de Stallings. Usant un camí ben diferent Smale va obtenir el 1960 una demostració de la conjectura generalitzada de Poincaré per a varietats C^∞ de dimensió $n \geqslant 5$. El mètode de Smale està fundat en la teoria de Morse i consisteix a construir una determinada funció sobre la varietat amb singularitats apropiades. Per provar que una varietat és difeomorfa a una esfera és suficient, en virtut d'un resultat de Reeb,[138] trobar una funció sobre la varietat amb dos punts crítics cada un dels quals sigui no degenerat. En el treball esmentat, Smale obté, a més, els resultats següents: «Una esfera de dimensió imparell admet només un nombre finit d'estructures diferenciables diferents». «Existeix una varietat topològica triangulable que no admet cap estructura diferenciable». En relació amb aquest

[136] Polyhedral homotopy spheres. Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) 485-488.

[137] The generalized Poincaré conjecture. Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961) 270.

[138] Reeb: Sur certain propiétés des variétés feuilletées. Actual. Sci. Industr. ll83. Hernani Paris 1952, 91-154.

segon resultat ja hem vist l'exemple de Kervaire. Observem que els treballs de Smale i Kervaire són simultanis. El 1961 es publica una Memòria de Smale[139] en què es prova la conjectura generalitzada de Poincaré per a varietats diferenciables de dimensió $n \geqslant 4$ (abans s'havia provat per a $n \geqslant 5$). Aquest treball, com l'anterior, està fundat en la teoria de Morse. Smale obté a més altres resultats particularment forts. És capaç de computar, per exemple, el nombre d'estructures diferenciables diferents que admet S^n per a $n = 3, 5, 7, 9, 11, 13$ i 15. (Recordem que abans havia demostrat que per a n imparell S^n admet un nombre finit d'estructures diferenciables diferents).

En un altre ordre d'idees, hem de citar el 1962 dos treballs de M. Obata que generalitzen dos resultats d'A. Lichnerowicz dels quals ja hem parlat. El primer fa referència a l'espectre d'una varietat de Riemann compacta.[140] Recordem que Lichnerowicz havia provat el 1958 que en una varietat de Riemann compacta M en què existeixi un escalar k tal que $R - kg \geqslant 0$, on g és la mètrica i R el tensor de Ricci, el primer valor propi no nul λ_1 de l'espectre del laplacià compleix $\lambda_1 \geqslant \frac{n}{n-1}R$, on n és la dimensió de la varietat. Obata prova ara que, en les mateixes hipòtesis de Lichnerowicz, la igualtat $\lambda_1 = \frac{n}{n-1}R$ només es verifica quan M és isomètrica a una esfera. L'altre treball d'Obata que mereix ser esmentat[141] conté un resultat del qual ja hem parlat a l'apartat anterior en tractar de la «conjectura de Lichnerowicz» sobre la coincidència dels grups d'isometries i de transformacions conformes en una varietat de Riemann compacta de dimensió $\geqslant 3$, no isomètrica a una esfera.

Les superfícies desenvolupables de $\mathbf{R}^3$ que havien estat objecte d'un treball important de Hartman i Nirenberg a 1959 són de nou estudiades el 1962 per W. Massey.[142] El principal resultat contingut en aquest treball es pot enunciar com segeueix:

Una superfície de classe $\mathcal{C}^4$ de $\mathbf{R}^3$ de curvatura de Gauss nul·la, completa, és un cilindre. La memòria de Massey conté altres resultats que són conseqüències més o menys immediates del treball de Hartman i Nirenberg.

L'estudi de les varietats de Riemann, la curvatura seccional k de les quals té sig-

[139] Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. Ann. of Math. 74 (1961) 391-406.

[140] Obata: Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. J. Math. Soc. Japan 14 (1962) 333-340.

[141] Conformal transformations of compact riemannian manifolds. Illinois Journal of Math. 6 (1962) 292-295.

[142] Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space. Tôhoku Math. J. 14 (1962) 73-79.

ne constant, ha constituït sempre un problema central en geometria diferencial, donant lloc en el cas $k > 0$ a tots els treballs sobre δ-pinçaments als qual ja ens hem referit. Com les varietats δ-pinçades són compactes, s'havia concentrat sempre l'atenció, en el cas $k > 0$, en les varietats compactes. No obstant això, quan la curvatura seccional k no està acotada inferiorment per cap constant positiva, la varietat pot ser no compacta, i en el cas $k > 0$ evidentment també. L'estudi d'aquestes varietats no compactes s'havia deixat de banda durant molts anys. Recordem que Cohn-Vossen els anys 1935 i 1936 s'havia ocupat ja d'aquest problema en dimensió 2. El 1964 apareix una Memòria fonamental de V. Topogonov[143] que torna a ressuscitar la qüestió i que constitueix el punt de partida de treballs posteriors molt recents i importants de Cheeger, Gromoll i Meyer. El principal resultat de Topogonov pot enunciar-se així:

Una varietat de Riemann completa M amb curvatura seccional $k > 0$ és isomètrica a un producte $\bar{M} \times \mathbf{R}^r$, on $\bar{M}$ no conté rectes i $\mathbf{R}^r$ està dotat de la seva mètrica euclidiana canònica (anomenem recta de $\bar{M}$ a tota geodèsica $\varphi : (-\infty, +\infty) \to \bar{M}$ tal que cada segment de la mateixa dona la mínima distància entre els extrems).

El 1964 hem de citar un treball de Lichnerowicz[144] que aporta nova llum sobre la coincidència dels grups d'isometries i de transformacions d'una varietat de Riemann amb curvatura escalar constant. Recordem que el 1958 Lichnerowicz havia demostrat que en una varietat de Riemann amb curvatura escalar constant negativa o nul·la, de dimensió $\geqslant 3$, tota transformació infinitesimal conforme era una isometria infinitesimal. Obata havia provat el 1962 que en les mateixes hipòtesis es verificava la igualtat global $I(M) = C(M)$, on $I(M)$ és el grup d'isometries globals de M i $C(M)$ el de transformacions conformes de M. Al treball de Lichnerowicz de 1964 es demostra que si M és compacta, de dimensió $n \geqslant 3$, no isomètrica a una esfera, amb curvatura escalar $R = \text{cte} > 0$, i si a més es verifica la hipòtesi addicional: $R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \text{cte}$, es té la igualtat $I(M) = C(M)$. El fet que la identitat $I(M) = C(M)$ es compleixi sota hipòtesis tan diferents feu pensar que probablement es verificaria per a tota varietat compacta, de dimensió $\geqslant 3$, amb curvatura escalar constant, i no isomètrica a una esfera. Si això fos cert, com $I(M)$ és compacte, $C(M)$ ha de ser compacte. La conjectura més feble de la compacitat de $C(M)$ seria demostrada el 1971 per Jacqueline Lelong-Ferrand.

[143] Spaces with straight lines. A.M.S. Translations 37 (l964) 747-817.

[144] Sur les transformations conformes d'une variété riemannienne compacte. Comptes Rendues Ac. Sci. Paris 259 (1964) 697-700.

El 1964 es publica un treball de J. Eells i J. J. Sampson[145] en què s'introdueix un concepte la importància del qual no ha parat d'augmentar els darrers anys: el concepte d'aplicació harmònica. Donades dues varietats de Riemann (M,g) i (M',g'), la primera compacta i orientable, i donada una aplicació $M \xrightarrow{f} M'$, expressada localment per $f^\alpha = f^\alpha(x^1,\dots,x^n)$, $\alpha = 1,\dots,n$, s'anomena «energia de l'aplicació f» al nombre $E(f)$ definit per

$$E(f) = \int_M g^{ij}\partial_i f^\alpha \partial_j f^\beta g'_{\alpha\beta}\eta$$

on η designa l'element de volum. La raó d'anomenar energia de f a aquest nombre rau en el fet, quan $M = S^1$, que una aplicació $f : S^1 \to M'$ no és més que un camí tancat de M' i en aquest cas $E(f)$ coincideix amb l'energia del camí en el sentit «físic» de la paraula. S'anomenen aplicacions harmòniques a les aplicacions $M \xrightarrow{f} M'$ que fan extremal l'energia $E(f)$. La raó d'anomenar harmòniques a aquestes aplicacions rau en el fet que poden ser obtingudes mitjançant la següent construcció:

Sigui f una aplicació de M a M'. Sigui $T(M')$ el fibrat tangent de M'. Sigui E el fibrat imatge inversa $f^*(T(M'))$ (fibrat sobre M). L'aplicació f_* «diferencial de f» de cada espai tangent $T_x(M)$ a $T_{f(x)}(M')$ dona lloc a una aplicació $\hat{f}$ dels camps de M, $\mathfrak{X}(M)$, a les seccions diferencials de E, $\Gamma(E)$:

$$\begin{gathered}\mathfrak{X}(M) \xrightarrow{\hat{f}} \Gamma(E)\\ X \mapsto (x \to f_*(X_x)\end{gathered}$$

$\hat{f}$ es pot considerar una secció diferenciable de $T(M)^* \otimes E$, és a dir, com una 1-forma amb coeficients a E. Per a les formes diferenciables sobre M amb coeficients en un fibrat E es pot definir de manera natural la diferencial d, la codiferencial δ i el laplacià $\Delta = d\delta + \delta d$. L'aplicació $f : M \to M'$ és harmònica si i només si la 1-forma diferencial $\hat{f}$ amb coeficients a E verifica $\Delta\hat{f} = 0$. Aquesta és la raó d'anomenar harmòniques a aquestes aplicacions. La raó fonamental per la qual el concepte d'aplicació harmònica s'ha revelat d'una importància extraordinària consisteix a englobar una sèrie de casos particulars, dispars, importants cadascun per separat, i que ara troben la seva naturalesa comuna. Entre els exemples d'aplicacions harmòniques, podem esmentar els següents:

1) Una aplicació $f : S^1 \to M$ és harmònica si i només si és una geodèsica tancada de M.

[145] Harmonic mappings of riemannian manifolds. Amer. J. Math. 86 (1964) 109-160.

2) Una immersió isomètrica $f : M \to M'$ és harmònica si i només si M, considerada com a subvarietat de M', té curvatura mitjana nul·la, la qual cosa és equivalent a dir que localment és solució del problema de Plateau: «Cada punt $x \in M$ té un entorn U que té àrea (n-dimensional) menor que qualsevol altra subvarietat n-dimensional amb el mateix contorn ∂U».

3) Una aplicació $f : M \to M'$ entre dues varietats kählerianes (M, g, J), (M', g', J') holomorfa és harmònica.

4) Siguin G i G' dos Grups de Lie. Sigui G una mètrica de Riemann sobre G, bi-invariant (és a dir invariant per l'esquerra i per la dreta), i sigui g' una mètrica de Riemann sobre G' bi-invariant. Tot homomorfisme $f : G \to G'$ és una aplicació harmònica de la varietat de Riemann (G, g) a la varietat de Riemann (G', g') (es considera G compacte).

Eells i Sampson, després de definir el concepte d'aplicació harmònica, apliquen a l'estudi d'aquestes aplicacions, d'una banda la tècnica de Bochner de què parlarem més àmpliament en tractar de les varietats complexes, que dona teoremes d'anul·lació relacionats amb condicions de curvatura, i d'altra banda una anàlisi fina basada en la teoria del potencial. Per aquest procediment obtenen dos resultats fonamentals que es poden enunciar així:

I) Siguin (M, g) i (M', g') dues varietats de Riemann verificant les hipòtesis següents:

(a) (M, g) és compacta i orientable, i el seu tensor de Ricci és $\geqslant 0$.

(b) La curvatura seccional de M' és $\leqslant 0$.

Aleshores tota aplicació harmònica de M a M' és totalment geodèsica (transforma geodèsiques de M en geodèsiques de M'). Si, a més, en un punt de M el tensor de Ricci és > 0, no hi ha més aplicacions harmòniques que les constants.

Considerem la hipòtesi:

(b′) La curvatura seccional de M' és < 0.

En les hipòtesis (a) i (b′), tota aplicació harmònica de M a M' és o bé constant o bé de rang 1, i en aquest darrer cas $f(M)$ és una geodèsica tancada de M'.

II) Si la varietat de Riemann (M', g') és compacta i té curvatura seccional $\leqslant 0$, tota aplicació contínua $\mu : M \to M'$ és homotopa a una aplicació harmònica. Si μ és de classe $\mathcal{C}^1$, la classe d'homotopia de μ conté una aplicació harmònica f per a la qual l'energia $E(f)$ és un mínim absolut.

Les aplicacions harmòniques en les varietats de Riemann juguen el mateix paper que les aplicacions holomorfes en les varietats complexes. Per això l'existència del concepte d'aplicació harmònica ha permès recentment traslladar a les varietats de Riemann moltes tècniques que només s'empraven abans en varietats complexes. Així, per exemple, Lichnerowicz ha adaptat recentment a les varietats de Riemann la noció de «varietat d'Albanese» i «aplicació de Jacobi», estenent tots els resultats que es coneixien per a les varietats complexes a les varietats de Riemann. Utilitzant aquests conceptes que depenen essencialment de la noció d'aplicació harmònica, Lichnerowicz ha caracteritzat les varietats de Riemann compactes amb primer nombre de Betti nul com aquelles varietats M per a les que tota aplicació contínua de M en un tor real és homotopa a una aplicació constant.[146]

El 1964 i 1965 hem de destacar també els treballs de K. Nomizu i K. Yano[147] sobre una vella qüestió de la geometria diferencial: el problema de Christoffel. Recordem que aquest matemàtic, en la seva transcendental memòria de 1869, es va proposar determinar en quins casos dues varietats de Riemann eren localment isomètriques i va obtenir condicions en què intervenien les diferencials covariants successives dels tensors de curvatura de totes dues varietats. El resultat de Nomizu i Yano es pot enunciar així:

Siguin M i M' dues varietats de Riemann analítiques. Designem per R i R' els seus respectius tensors de curvatura. Si M i M' són irreductibles (com a varietats de Riemann), de dimensió $\geqslant 2$ i difeomorfes, tot difeomorfisme $f: M \to M'$ que apliqui $\nabla^m R$ a $\nabla'^m R'$ per tot $m = 0, 1, 2, \dots$ és una transformació homotètica (f s'anomena transformació homotètica si hi ha una constant positiva c tal que $g'(f_*(X), f_*(Y)) = c^2 g(X, Y)$). Nomizu i Yano van obtenir primerament un resultat anàleg de tipus local, relatiu a les transformacions infinitesimals. En el cas particular en què se suposa M completa i a més $M = M'$, es pot afirmar que la transformació f és una isometria.

El 1965 hem de mencionar també pel seu extraordinari interès un treball de R.

[146] Lichnerowicz: Variétés kählériennes à première classe de Chern non negative et variétés riemanniennes a courbure de Ricci généralisée non négative. Journal of Dif. Geom. 6 (1971) 47-94.

[147] On infinitesimal transformations preserving the curvture tensor field and its covariant differentials. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 14 (1964) 227-236. Some results related to the equivalence problem in Riemannian geometry. Proc. U. S. Japan Seminar in Differential Geometry. Kyoto Japan (1965) 95-100.

Finn[148] que té per objecte estendre a les varietats de Riemann no compactes la fórmula de Gauss-Bonnet generalitzada que havia estat establerta a la dècada dels quaranta per Allendoerfer, Fenchel, Weil i Chern en el cas compacte. Sigui M una varietat de Riemann de dimensió parell $n = 2p$. Sigui γ la n-forma diferencial sobre M definida per:

$$\gamma = \frac{(-1)^p}{2^m \pi^p p!} \varepsilon_{i_1,\ldots,i_{2p}} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}}$$

Recordem que quan M és compacta la fórmula de Gauss-Bonnet diu que la característica d'Euler–Poincaré de M, $\chi(M)$, coincideix amb la integral $\int_M \gamma$. Designem per $C(M) = \int_M \gamma$. Suposem ara M no compacta. Suposem que tant $\chi(M)$ com $C(M)$ existeixen (es diu que $C(M)$ existeix si la integral $\int_M \gamma$ és convergent). Sigui $\delta(M)$ la diferència $\chi(M) - C(M)$ ($\delta(M) = 0$ si M és compacta). Finn, en el seu treball, troba una interpretació geomètrica de la diferència $\delta(M)$ per a una classe particular de varietats de Riemann de dimensió 2. La memòria de Finn havia tingut com a precedent un treball de A. Huber el 1957.[149] Molt recentment E. Portnoy ha donat una interpretació parcial de la diferència $\delta(M)$ per a varietats de dimensió $\geqslant 2$.[150]

Fem ressaltar que aquest problema encara es troba poc estudiat i que constitueix un excel·lent tema per a futures investigacions. (▷ **16**)

Les subvarietats d'àrea mínima han despertat sempre l'interès dels matemàtics en tots els temps. El 1966 hem de citar un treball de T. T. Frankel sobre aquest tema[151] en què es demostra el resultat següent:

Si $M \to \tilde{M}$ és una immersió mínima de dues varietats de Riemann, la primera de les quals se suposa compacta, es verifica:

(1) Si $\tilde{M}$ té curvatura seccional $\leqslant 0$, $\pi_1(M)$ és un grup finit.

(2) Si el tensor de Ricci de $\tilde{M}$ és definit positiu, llavors l'homomorfisme natural $\pi_1(M) \to \pi_1(\tilde{M})$ és exhaustiu.

[148] On a class de conformal metrics, with application to differential geometry in the large. Comm. Math. Helv. 40 (1965) 1-30.

[149] On subharmonic functions and differential geometry in the large. Comm. Math. Helv. 32 (1957) 13-72.

[150] Toward a generalized Gauss-Bonnet formula for complete open manifolds. Tesi doctoral. Stanford 1969.

[151] On the fundamental group of a compact minimal submanifold. Ann. of Math. 83 (1966) 68-73.

L'esforç dels matemàtics en l'estudi d'immersions mínimes s'ha concentrat majoritàriament en el cas particular en què l'espai ambient és o bé $\mathbf{R}^n$, o bé l'esfera S^n. Almgren i Calabi van demostrar que S^2 no pot submergir-se mínimament en S^3 d'una altra manera que com equador de S^3. Una prova simple d'aquest fet es pot trobar en un treball de Chern de 1969.[152] Davant d'aquest resultat sorgeix de manera natural la pregunta següent: És veritat, en general, que S^n no es pot submergir mínimament en S^{n+1} d'una altra manera que com a equador? We-Yi Hsiang va provar el 1967[153] que la pregunta anterior té resposta negativa per a $n = 3$, donant un contraexemple. Per altres dimensions es desconeix la resposta a la pregunta anterior ($\triangleright$ **17**). Les immersions mínimes de S^2 a S^n han estat estudiades per Calabi en un treball publicat el 1967[154] que conté resultats molt remarcables, com el següent:

Sigui $f : S^2 \to S^n$ una immersió mínima tal que $f(S^2)$ no és un equador de S^n. Aleshores: (1) n ha de ser parell; (2) L'àrea de $f(S^2)$ és un múltiple sencer de 2π; (3) Si la mètrica induïda a $f(S^2)$ és de curvatura de Gauss constant, la immersió f queda completament determinada excepte isometries de S^n i aquesta curvatura val:

$$k = \frac{2}{m(m+1)}, \text{ on } n = 2m.$$

No obstant això, en la teoria d'immersions mínimes el problema clàssic per excel·lència consisteix en la immersió d'una varietat M de dimensió n com a hipersuperfície de $\mathbf{R}^{n+1}$. N. S. Bernstein va demostrar el 1915[155] que una superfície de $\mathbf{R}^3$ donada per $z = F(x, y)$ és mínima si i només si és un pla. És cert aquest mateix resultat per hipersuperfícies $x_{n+1} = F(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^{n+1}$? Aquest problema ha estat objecte d'estudi en els últims anys. El primer pas va ser fet per E. De Giorgi el 1965[156] en contestar afirmativament a la pregunta anterior per a $n = 3$. F. J. Almgren va contestar també afirmativament aquesta pregunta per a $n = 4$ el 1966.[157] El cas $n = 5$, 6 i 7 va ser tractat per J. Simons el 1968, amb

[152] S. S. Chern: Simple proofs of two theorems on minimal surfaces. L'Enseignement Math. 15 (1969) 53-61.

[153] Remarks on closed minimal submanifolds in the standard riemannian sphere. J. of Diff. Geom. 1 (1967) 257-267.

[154] Minimal immersions of surfaces in euclidian spheres. J. of Diff. Geom. 1 (1967) 111-125.

[155] Sur un théorème de géometrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique. Comm. Soc. Math. Kharkov 15 (1915-1917) 38-45.

[156] Una extensione del teorema di Bernstein. Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa 19 (1965) 79-85.

[157] Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's the-

resposta igualment afirmativa.[158]. Però, sorprenentment, la resposta va deixar de ser afirmativa per a $n > 7$ segons han demostrat recentment Bombieri, De Giorgi i Giusti el 1969.[159]

Els problemes de superfícies mínimes, de tanta actualitat com es pot veure, condueixen sempre a consideracions profundes d'equacions diferencials de tipus el·líptic i per això poden considerar-se més com a pertanyents a la teoria del potencial que a la geometria diferencial, encara que actualment sigui molt difícil establir límits.

Hem vist que les immersions mínimes eren un cas particular d'aplicacions harmòniques. El 1967 es publica una memòria de Hartman[160] que després de la memòria inicial d'Eells i Sampson constitueix sens dubte el treball més important realitzat fins al present en l'estudi de les aplicacions harmòniques. El resultat fonamental de Hartman és el següent:

Donada una varietat de Riemann (M', g') completa, amb curvatura seccional $\leqslant 0$, el conjunt d'aplicacions harmòniques d'una altra varietat de Riemann (M, g) a (M', g') homotòpiques a una aplicació harmònica donada és $\mathcal{C}^2$-connex (un conjunt $\mathcal{E}$ d'aplicacions harmòniques de (M, g) a (M', g') de classe $\mathcal{C}^2$ es diu $\mathcal{C}^2$-connex si per a cada $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{E}$ hi ha una aplicació $\mu(x, u) : X \times [0,1] \to M'$ de classe $\mathcal{C}^2$ a trossos, tal que $\mu(\cdot, 0) = \mu_0$, $\mu(\cdot, 1) = \mu_1$ i $\mu_u = \mu(\cdot, u)$ pertany a $\mathcal{E}$ per a tot $u \in [0,1]$). Hartman dedueix del seu teorema el resultat següent:

Si (M', g') és completa i amb curvatura seccional < 0, donada una aplicació harmònica μ de M a M', per tal que hi hagi una aplicació harmònica homòtopa a μ i diferent de μ és necessari i suficient que o bé μ apliqui M en una geodèsica tancada de M' o bé μ sigui constant.

El teorema fonamental de Hartman que hem esmentat abans es troba present a la majoria dels treballs posteriors sobre aplicacions harmòniques (veure, per exemple, Lichnerowicz 1970.[161])

El 1967 hem d'esmentar forçosament l'extensa i completa obra de J. A. Wolf[162] dedicada a les varietats de Riemann de curvatura constant. Va ser H. Hopf qui

orem. Ann. of Math. 85 (1966) 277-292.

[158] Minimal varieties in riemannian manifolds. Ann. of Math. 88 (l968) 62-105.

[159] Minimal cones and the Bernstein problem. Inventiones Math. 7 (1969) 243-268.

[160] On homotopic harmonic maps. Canad. J. Math. 18 (1967) 673-687.

[161] Lichnerowicz: Applications harmoniques et variétés Kählériennes. Instituto Nazionale di Alta Mathematica, Symposia Math. Vol. 3 (1970) 341-402.

[162] Spaces of constant curvature. Mc Graw-Hill, New York, 1967.

el 1925 va provar[163] que el recobriment universal d'una varietat de Riemann completa amb curvatura seccional constant k és o bé una esfera si $k > 0$, o bé un espai hiperbòlic si $k < 0$. Des de llavors el problema de classificació de les varietats de Riemann completes de curvatura constant ha derivat cap a un estudi del grup fonamental de tals varietats. El llibre de Wolf presenta els resultats més importants en aquesta direcció des de H. Hopf als nostres dies, molts dels quals són nous.

El 1967 un treball de McKean i Singer[164] dona nou impuls a l'estudi de l'espectre de l'operador laplacià en una varietat de Riemann. Ja hem vist els resultats de Lichnerowicz i Obata relatius al primer valor propi no nul λ_1 de l'espectre. McKean i Singer en el seu treball consideren el següent desenvolupament asimptòtic utilitzat ja el 1949 per S. Minakshisundaram i A. Pleijel:[165]

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \underset{t\to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-n/2}(a_0 + a_1 t + a_s t^2 + \cdots)$$

on λ_j són els valors propis de l'espectre i n la dimensió de la varietat. Els coeficients a_i són invariants riemannians que depenen de la curvatura de la varietat. En el treball de McKean i Singer s'introdueix un mètode de càlcul dels coeficients a_i. La utilització dels valors que es troben per aquest procediment per a_0, a_1 i a_2 condueix a alguns resultats d'unicitat de varietats amb espectre donat (vegeu, per exemple, Berger-Gauduchon–Mazet[166]). En relació amb aquest tema de l'espectre de l'operador laplacià, hem d'esementar també el treball de J. Cheeger publicat el 1968[167] que relaciona el primer valor propi no nul de l'espectre amb el diàmetre de la varietat, en certes varietats compactes. Aquest resultat es pot enunciar així:

Per a cada nombre natural n hi ha un nombre estrictament positiu $k(n)$ tal que per a tota varietat de Riemann compacta M de dimensió n amb curvatura seccional $\leqslant 0$ es té:

$$\lambda_1 \leqslant \frac{k(n)}{(\text{diàmetre de } M)^2}.$$

[163] Zum Clifford-Kleinscher Raumproblem. Math. Ann. 95 (1925) 313-339.

[164] Curvature and the eigenvalues of the laplacian. J. of Diff. Geom. 1 (1967) 43-69.

[165] Some properties of the eigenfuntions of the Laplace operator on Riemannian manifolds. Canadian J. of Math. 1 (1949) 242-256.

[166] Berger-Gauduchon–Mazet: Le Spetre d'une variété riemannienne. Lecture Notes in Math. 194, Springer-Verlag, 1971.

[167] The relation between the Laplacian and the diameter for manifolds of non negative curvature. Archiv der Math. 19 (1968) 558-560.

En general, tots els problemes relatius a l'estudi de l'espectre de l'operador laplacià entren de ple en la teoria d'equacions en derivades parcials de tipus el·líptic i requereixen, per tant, un coneixement profund de la teoria del potencial. Les solucions fonamentals de l'equació de la calor hi juguen un paper molt important.

Hem vist com el problema de determinar propietats topològiques d'una varietat de Riemann completa a partir de condicions de curvatura es troba constantment a tota la història recent de la Geometria diferencial. La condició de completesa és essencial segons posa en evidència el següent sorprenent resultat degut a M. L. Gromov:[168] Tota varietat no compacta de dimensió > 1 admet sempre una mètrica de Riemann de curvatura positiva i una altra de curvatura negativa. Cal tenir en compte que les mètriques de curvatura positiva i negativa, l'existència de les quals afirma aquest resultat, poden ser «no completes». Si ens restringim només a mètriques completes, llavors sí que la propietat de tenir curvatura positiva o negativa dona condicions sobre la topologia de la varietat.

Quan la curvatura seccional k és positiva, fitada inferiorment per una constant positiva, el problema ha estat llargament estudiat (varietats δ-pinçades). En aquestes condicions, la varietat havia de ser compacta. Gromoll i Meyer, en un treball publicat el 1969[169] es proposen estudiar el cas de curvatura positiva no fitada inferiorment per cap constant positiva i demostren que una tal varietat, si és no compacta, és difeomorfa a $\mathbf{R}^n$. Recordem que en dimensió 2 tals varietats havien estat estudiades per Cohn-Vossen el 1935 i 1936 i que el cas de curvatura $\geqslant 0$ havia estat tractat en general per Topogonov el 1964.

El 1970 hem d'esmentar un treball de certa importància degut a R. S. Kulkarni,[170] que aporta nova llum al clàssic problema de trobar en quines condicions el coneixement de la curvatura d'una varietat de Riemann determina el coneixement de la mètrica. Recordem la memòria de Christoffel i més recentment els treballs de Nomizu i Yano en aquesta direcció. Siguin (M, g) i $(\bar{M}, \bar{g})$ dues varietats de Riemann. Es diu que M i $\bar{M}$ són isocorbes si hi ha un difeomorfisme entre elles que preserva la curvatura seccional. En general, no es pot esperar que dues varietats isocorbes siguin també isomètriques. Per exemple, dues varietats difeomorfes amb la mateixa curvatura constant són isocorbes i no tenen per què ser isomètriques. Kulkarni obté el següent sorprenent resultat:

[168] Stable mappins of foliations into manifolds. Math. USSR. Izvestija 3 (1969) 671-694.
[169] On complete open manifolds of positive curvature. Ann. of Math. 90 (1969) 75-90.
[170] Curvature and metric. Ann. of Math. 91 (1970) 311-331.

«En dimensió > 4, dues varietats isocorbes amb mètriques analítiques són forçosament isomètriques, excepció feta de l'exemple just esmentat de dues varietats difeomorfes no isomètriques amb la mateixa curvatura constant».

En dimensió 2, aquest resultat és completament fals, ja que es poden construir molts exemples de superfícies isocorbes no isomètriques. En dimensió 3, en canvi, no se sap si el resultat de Kulkarni és cert o no, ja que no se'n coneix cap contraexemple. ▷ **18**.

Si bé hem vist innombrables resultats que intenten relacionar la curvatura seccional d'una varietat de Riemann M amb diverses propietats topològiques o geomètriques de M, el coneixement del comportament de la mateixa curvatura seccional en els seus punts crítics ha estat relativament poc estudiat. En aquesta direcció cal esmentar una important memòria de S. A. Thorpe publicada el 1971.[171] La curvatura seccional d'una varietat de Riemann es pot considerar com una funció definida en el fibrat de tots els plans tangents (de dimensió 2) de M. El treball de Thorpe es proposa descriure l'estructura del conjunt de punts d'aquest fibrat en què la funció «curvatura seccional» aconsegueix un màxim o un mínim absolut, centrant la seva atenció especialment en les varietats M de curvatura seccional $\geqslant 0$. De la descripció que fa Thorpe de tals conjunts es desprenen diversos resultats concrets d'interès innegable, com el següent:

«Sigui M una varietat de Riemann amb curvatura seccional $\geqslant 0$. Si en un punt $p \in M$ les components diagonals R_{ijij} relatives a un sistema de coordenades s'anul·len, llavors el tensor de curvatura s'anul·la a p».

El 1971 es publica també el treball de Jaqueline Lelong-Ferrand que soluciona definitivament la conjectura de Lichnerowicz sobre la compacitat del grup $C(M)$ de transformacions conformes d'una varietat de Riemann M de dimensió $\geqslant 3$ no isomètrica a una esfera.[172] Aquest treball es basa en la teoria de transformacions quasiconformes i en un estudi fi d'anàlisi que permet aplicar el teorema d'Ascoli.

L'estudi que Topogonov havia iniciat el 1964 de les varietats de Riemann amb curvatura seccional $\geqslant 0$ és generalitzat el 1971, per a varietats amb tensor de Ricci semidefinit positiu, per Cheeger i Gromoll.[173] El resultat fonamental d'a-

[171] The zeros of nonnegative curvature operators. J. of Diff. Geom. 5 (1971) ll3-l25.

[172] Jaqueline Lelong-Ferrand: Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes. Académie Royale de Belgique. Classe des Sciences. Mémoires 39 (1971) 3-44.

[173] The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. J. of Diff. Geom. 6

quest treball es pot enunciar així: Si M és una varietat de Riemann completa amb curvatura de Ricci semidefinida positiva, llavors M és isomètrica a un producte $\tilde{M} \times \mathbf{R}^k$ on $\tilde{M}$ no conté rectes i $\mathbf{R}^k$ està dotat de la seva mètrica euclidiana canònica. L'estudi de Cheeger i Gromoll ha estat continuat per A. Lichnerowicz.[174] Cheeger i Gromoll en un altre important treball publicat el 1972[175] intenten classificar totes les varietats de Riemann completes amb curvatura seccional > 0 i arriben a donar una llista exhaustiva de tals varietats en dimensió $\leqslant 3$. $\triangleright$ **19**.

El 1972 hem d'esmentar també un treball de N. R. Wallach[176] que conté una classificació completa dels espais homogenis de dimensió parell que admeten una estructura de Riemann homogènia de curvatura estrictament positiva.

Ja hem dit, en començar aquest apartat, que la manca de perspectiva històrica feia difícil la descripció de l'evolució de la geometria diferencial en aquests darrers anys. Per sobre dels resultats concrets que hem anat ressenyant, diguem que la geometria diferencial es veu cada cop més envaïda per l'anàlisi funcional i la teoria d'equacions diferencials de tipus el·líptic. La dosi d'anàlisi funcional que es va emprant en diverses demostracions es veu incrementada considerablement en passar de l'estudi de les varietats compactes a les no compactes. Així mateix, la interconnexió entre la topologia algebraica i la geometria diferencial és gran, encara que crec que històricament la geometria diferencial ha influït més en el desenvolupament de la topologia algebraica que viceversa, com hem anat veient en diversos casos concrets: els teoremes de De Rham, la teoria de Morse, la teoria de classes característiques, la conjectura generalitzada de Poincaré, per esmentar només alguns exemples.

(1971) 119-128.

[174] Variétés kähleriénnes à première classe de Chern non négative et varietés riemanniennes a courbure de Ricci géneralisée non négative. J. of Diff. Geom 6 (1971) 47-94.

[175] On the Structure of complete manifolds of non negative curvature. Ann. of Math. 96 (1972) 413-443.

[176] Compact homogeneous riemannian manifolds with strictly positive curvature. Ann. of Math. 96 (1972) 277-295.

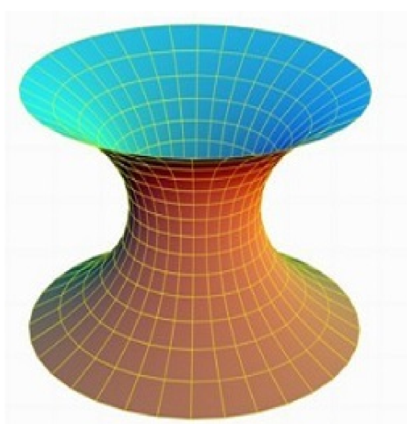
Anotacions dels traductors-curadors

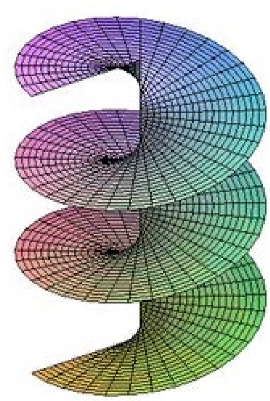
$\boxed{\mathbf{1}}$ (Concepte de torsió). De fet, el concepte de torsió havia estat usat anteriorment per Lacroix a [1], amb el nom de segona flexió o segona curvatura. El nom de torsió prové de Louis L. Vallée, [2]. ◁

$\boxed{\mathbf{2}}$ (Superfícies mínimes). Girbau es refereix a les solucions de l'equació en derivades parcials que ha de complir la funció $z = z(x, y)$ perquè la seva gràfica sigui una superfície d'àrea mínima (equació de Lagrange),

$$\partial_x^2 z\big(1 + (\partial_y z)^2\big) + 2\partial_x\partial_y z\, \partial_x z\, \partial_y z + \partial_y^2 z\big(1 + (\partial_x z)^2\big) = 0,$$

però no als exemples de superfícies d'àrea mínima, ja que Meusnier, en aquest mateix article, descriu explícitament la catenoide i l'helicoide. Veu l'helicoide com engendrat per «le filet d'un vis», és a dir, com la rosca d'un caragol. De fet la catenoide ja havia estat estudiada per Euler per veure que complia l'equació de Lagrange, però sense relacionar-la amb la propietat de curvatura mitjana zero, com fa Meusnier. ◁





$\boxed{\mathbf{3}}$ (Fórmules de Serret–Frenet o de Frenet–Serret?). Les fórmules de Serret-Frenet apareixen per primer cop al treball de Serret [3]. Frenet les va publicar en el treball de 1852 [4] citat per Girbau, però aquest article de Frenet es un extracte de la seva tesi defensada el 1847, quatre anys abans, doncs, que el treball de Serret. Tot això porta a una històrica controvèrsia de prioritat sobre aquestes fórmules. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (Convex-còncava i còncau-convexa)**.** Aquesta nomenclatura va ser introduïda per Jean-Baptiste Meusnier en la «Mémoire sur la courbure des surfaces» llegida a l'Académie els dies 14 i 21 de febrer de 1776 (§27, 493-494). $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (*Disquisitiones*)**.** Amb aquest comentari sobre la fórmula de Gauss-Bonnet que fa Girbau acaba el que es pot considerar com la primera part del *Disquisitiones*. És el final de la secció 20. Les seccions 21 a 29 estan relacionades amb problemes de geodèsia. Gauss hi generalitza el famós teorema de Legendre sobre triangles geodèsics de l'esfera. Si s'eliminessin aquests articles, la influència del *Disquisitiones* sobre el desenvolupament de la geometria riemanniana no es veuria significativament afectada. Potser per això, Girbau omet de comentar-los. Però la idea de comparar un triangle geodèsic sobre una superfície amb el triangle euclidià de costats congruents és l'origen del treball d'A. D. Aleksandrov de 1967, [5], sobre geometria intrínseca de superfícies no regulars. A la introducció de [5] s'explicita que es fa ús de la comparació de figures en els espais que estan estudiant amb figures similars sobre el pla. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (Les transformacions T_a)**.** En termes de les trasformacions T_a, la fórmula equival a la relació $T_{a_2}(T_{a_1}(x)) = T_{\varphi(a_1,a_2)}(x)$. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (Significat del resultat de Hilbert)**.** És a dir, que no existeix un model a $\mathbf{R}^3$ de la geometria hiperbòlica. Si hagués existit, el problema de la consistència d'aquesta geometria, tan important a l'època, hauria quedat dilucidat ja per Gauss. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (Resposta a la pregunta de Whitney)**.** Whitney, després de plantejar la pregunta a què fa referència Girbau, afegeix un peu de pàgina on diu que la resposta és molt probablement afirmativa, i que està comprovada per algunes varietats analítiques especials en les seccions 23 i 24 del mateix treball.

Girbau no coneixia que l'any 1958 C.B. Morrey [6] i H. Grauert [7] varen contestar la pregunta de Whitney afirmativament: «tota varietat real analítica es pot submergir de manera real analítica en un espai Euclidià per una aplicació regular i pròpia».

En relació amb el treball de Whitney, pel cas diferenciable, R. L. Cohen l'any 1985 a [8] demostra que tota varietat diferenciable compacta de dimensió $n > 1$ admet una immersió en un espai euclidià de dimensió $2n - a(n)$, on $a(n)$ és el nombre de $1's$ en l'expressió binària de n. $\lhd$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (Conjectura de Chern)**.** Aquesta conjectura no ha estat tancada, que nosaltres sapiguem. El teorema de l'esfera la implica per a varietats δ-pinçades amb $\delta = 1/4$. Exemples on es compleix són els espais compactes simètrics de rank 1: les esferes de dimensió parell ($\chi = 2$), l'espai projectiu complex $\mathbb{C}P^n$ ($\chi = n+1$), l'espai projectiu quaterniònic, $\mathbb{H}P^n$ ($\chi = 2(n+1)$) i el pla projectiu de Cayley QP^2 ($\chi = 3$). $\lhd$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (Esferes exòtiques que Milnor)**.** Aquest treball de Milnor, [9], té actualment 128 citacions al MathSciNet. Va donar peu a l'estudi de varietats homeomorfes, però no difeomorfes, i és molt citat en la teoria del cobordisme. Juntament amb Kervaire, el mateix Milnor va culminar la classificació de les esferes exòtiques el 1963 a [10]. $\lhd$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (Conjectura de Lichnerowicz)**.** La conjectura original de Lichnerowicz afirmava que les 4-varietats localment harmòniques eren localment simètriques i va ser provada per Walker (1949). Actualment, aquesta conjectura es refereix al fet que les varietats localment harmòniques són planes o localment simètriques de rang 1. Va ser provada certa per Szabó (1990) per varietats compactes amb grup fonamental finit, però existeixen contraexemples per al cas no compacte. $\lhd$

$\boxed{\mathbf{12}}$ (Berger i Klingenberg)**.** Girbau es refereix al treball de Berger de 1960 [11], on es demostra que una varietat Riemannianan simplement connexa de dimensió parella amb curvatura seccional K complint $1/4 < K \leqslant 1$, és homeomorfa a una esfera (vegeu també la nota 130). Immediatament Klingenberg veu, el mateix any 1960 a [12] (ja esmentat a la nota 134), que el resultat de Berger és cert també per a dimensions senars. Girbau retorna sobre aquest tema a la secció 15. $\lhd$

$\boxed{\mathbf{13}}$ (Variant diferenciable del problema de l'esfera)**.** La versió diferenciable d'aquest teorema (canviar homeomorfisme per difeomorfisme) va ser provada el 2009 per Simon Brendle i Richard Schoen utilitzant la tècnica del flux de Ricci, [13]. Veieu un article expositiu sobre aquest tema, dels dos mateixos autors, el 2011, [14]. $\lhd$

$\boxed{\mathbf{14}}$ (Evolució del problema del pinçament)**.** Aquesta cota del pinçament de què parla Girbau no es va poder millorar fins al 1994, quan Abresch i Meyer van demostrar a [15] que el resultat de Klingenberg era cert a partir de

$$\frac{\delta}{\Delta} > \frac{1}{4(1+10^{-6})}.$$

Vegeu una detalladíssima exposició de la història del teorema de l'esfera en el llibre enciclopèdic de Marcel Berger de 2002, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, [16]. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{15}}$ (Teorema de Perelman)**.** Com és ben sabut, la Conjectura de Poincaré va ser tancada per Grigori Perelman l'any 2006. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{16}}$ (Tesi de Portnoy)**.** La tesi que cita Girbau d'Esther Portnoy, de 1969, va ser publicada el 1971 a [17]. Kobayashi, en el seu report a «MathSciNet» d'aquest article, diu: «The author considers the problem of extending the Gauss-Bonnet formula to complete, open manifolds of higher dimension n and derives generalized formulas in five different special cases. These formulas seem to indicate that a unifying general formula, if any, would be very complicated.» No sé si hi ha treballs sobre aquesta possible fórmula unificadora. Els articles posteriors d'Esther Portnoy no van seguir aquesta línia. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{17}}$ (Immersions minimals d'esferes)**.** El problema de les immersions minimals d'esferes en esferes havia estat considerat per M. P. do Carmo i N. R. Wallach en els articles [18] i [19] de 1969 i 1971 respectivament.

Del segon d'aquests articles es dedueix que S^n no es pot submergir mínimament a S^{n+1} si no és com equador. Per tant, l'afirmació de Girbau —sobre el «contraexemple» de We-Yi Hsiang a l'article esmentat a la nota 153— no és correcta. De fet, en aquest article, l'autor en cap moment afirma haver obtingut aquest contraexemple.

És clar que Girbau no coneixia els dos articles citats de do Carmo i Wallach, gairebé dels mateixos anys en què ell estava escrivint la seva Memòria.

El resultat de do Carmo–Wallack diu que si $f : S^n_k \to S^l_1$ és una immersió minimal isomètrica, llavors $k = k(s)$ per algun s, i si f és «plena» (*full* en anglès), $l \leqslant m(s)$, amb

$$k(s) = \frac{n}{s(s+n-1)}, \qquad m(s) = (2s+n-1)\frac{(s+n-2)!}{n!(n-1)!} - 1.$$

Es diu que f és plena quan $f(S^n_k)$ no està continguda en un hiperplà de $\mathbf{R}^{l+1}$.

El cas particular d'immersions minimals de S^2 va ser posteriorment estudiat per J. Sacks i K. Uhlenbeck el 1981 a [20]. Demostren que si N és una varietat $\mathcal{C}^\infty$ de Riemann compacta, de dimensió > 3, tal que el seu recobriment universal és no contràctil, llavors existeix una aplicació $\mathcal{C}^\infty$ no constant $s : S^2 \to N$ tal que $s : S \setminus \{x_1, \dots, x_l\} \to N$ és una immersió minimal conforme amb $\{x_1, \dots, x_l\}$ punts de ramificació de s. $\lhd$

$\boxed{\mathbf{18}}$ (Enunciat invàlid en dimensió 3)**.** El cas de dimensió 3, obert en el moment en què Girbau escriu la seva Memòria, es va tancar el 1974 en donar primer Yau [21] i després el mateix Kulkarni [22] exemples de difeomorfismes no isomètrics que conservaven la curvatura seccional. $\lhd$

$\boxed{\mathbf{19}}$ (Més enllà de Cheeger i Gromoll)**.** Els estudis de les varietats de Riemann completes, en la línia dels treballs de Cheeger i Gromoll de 1972 que cita Girbau, van continuar en el treball de 1974 de Sharafutdinov, [23]. Concretament, J. Cheeger and D. Gromoll [24] (citat a la nota 175) havien provat que si M és una varietat de Riemann completa amb curvatura no negativa llavors M és homeomorfa al fibrat normal unitari $\nu(N)$ sobre una certa subavarietat N de M, i Sharafutdinov prova que M i $\nu(N)$ són difeomorfes. $\lhd$

Referències

[1] S. F. Lacroix, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. París: J. B. M. Duprat., 1797-1800. 3 vols. Hi ha diverses edicions posteriors, editades per Bachelier, París. La que citem en el text de 1810 està editada per Chez Courcier, i porta el subtítol "Seconde édition, revue et augmentée".

[2] L. L. Vallée, *Traité de géométrie descriptive*. Rue du Jardinet-Saint-André-des-Arcs; París: M. V. Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Sciences, 1819.

[3] J. A. Serret, "Sur quelques formules relatives à la theorie des courbes à double courbure," *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 16, pp. 193–207, 1851.

[4] J. F. Frenet, "Sur quelques propriétés des courbes à double courbure," *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 17, pp. 437–447, 1852. resultats obtinguts a la seva tesi de 1847.

[5] A. D. Aleksandrov and V. A. Zalgaller, *Intrinsic geometry of surfaces*, vol. 15. Translations of Mathematical Monographs, AMS, 1967. traduït del rus per J. M. Danskin.

[6] C. B. Morrey, Jr., "The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds," *Ann. of Math. (2)*, vol. 68, pp. 159–201, 1958.

[7] H. Grauert, "On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds," *Ann. of Math. (2)*, vol. 68, pp. 460–472, 1958.

[8] R. L. Cohen, "The immersion conjecture for differentiable manifolds," *Ann. of Math. (2)*, vol. 122, no. 2, pp. 237–328, 1985.

[9] J. Milnor, "On manifolds homeomorphic to the 7-sphere," *Annals of Mathematics*, vol. 64, no. 2, pp. 399–405, 1956. UIC pdf.

[10] M. A. Kervaire and J. W. Milnor, "Groups of homotopy spheres: I," *Annals of Mathematics*, vol. 77, no. 3, pp. 504–537, 1963.

[11] M. Berger, "Les variéteés riemanniennes $(1/4)$-pincées," *C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. 250, pp. 442–444, 1960.

[12] W. Klingenberg, "Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung," *Comment. Math. Helv.*, vol. 35, pp. 47–54, 1961.

[13] S. Brendle and R. Schoen, "Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms," *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 22, no. 1, pp. 287–307, 2009.

[14] S. Brendle and R. Schoen, "Curvature, sphere theorems, and the Ricci flow," *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, vol. 48, no. 1, pp. 1–32, 2011.

[15] U. Abresch and W. T. Meyer, "Pinching below $\frac{1}{4}$, injectivity radius, and conjugate radius," *J. Differential Geom.*, vol. 40, no. 3, pp. 643–691, 1994.

[16] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry.* Springer, 2002.

[17] E. Portnoy, "Toward a generalized Gauss-Bonnet formula for complete, open manifolds," *Comment. Math. Helv.*, vol. 46, pp. 324–344, 1971.

[18] M. P. do Carmo and N. R. Wallach, "Minimal immersions of spheres into spheres," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 63, pp. 640–642, 1969.

[19] M. P. do Carmo and N. R. Wallach, "Minimal immersions of spheres into spheres," *Ann. of Math. (2)*, vol. 93, pp. 43–62, 1971.

[20] J. Sacks and K. Uhlenbeck, "The existence of minimal immersions of 2-spheres," *Ann. of Math. (2)*, vol. 113, no. 1, pp. 1–24, 1981.

[21] S. T. Yau, "Curvature preserving diffeomorphisms," *Ann. of Math. (2)*, vol. 100, pp. 121–130, 1974.

[22] R. S. Kulkarni, "Equivalence of Kähler manifolds and other equivalence problems," *J. Differential Geometry*, vol. 9, pp. 401–408, 1974.

[23] V. A. Sharafutdinov, "Complete open manifolds of nonnegative curvature," *Siberian Mathematical Jornal*, vol. 15, pp. 126–136, 1974.

[24] J. Cheeger and D. Gromoll, "On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature," *Ann. of Math. (2)*, vol. 96, pp. 413–443, 1972.

Índex alfabètic

índex, 40
$\mathrm{ad}X$, 20
$\mathfrak{g}$, 20
$\mathfrak{h}$, 20

representacions lineals, 23

A-classe, 72
Abresch, 91
Aleksandrov, A. D., 89
àlgebra exterior, 22
Allendoerfer, 51, 54, 81
Almgren, 82
Ambrose, 39, 61
aplicació de Jacobi, 80
aplicació harmònica, 78, 79
Apol·loni, 1
Arquimedes, 1
arrels, 23
Atiyah, 71

Berger, 46, 63, 66, 71, 73, 74
Berger-Gauduchon–Mazet, 84
Bernstein, 82
Bianchi, 22, 23
Bidal, 46, 52
binormal, 2
Bochner, 48, 55
Bochner–Montgomery, 22
Bombieri, 83
Bonnet, 10, 13, 14, 60
Borel, 61
Bott, 39
Brendle, 90
Brower, 45

càlcul de variacions, 26, 27, 39
càlcul infinitesimal, 1
càlcul tensorial, 22
Calabi, 82
camps de Jacobi, 43
caràcters, 31
característica d'Euler-Poincaré, 49
Caratheodory, 21
Carl Friedrich Gauss, 7
Cartan, 16, 18, 20, 22, 23, 26, 27, 30, 31, 33–35, 37, 67
catenoide, 88
Cauchy, 6, 11
Cavalieri, 1
Cheeger, 47, 77, 84, 86, 92
Chern, 51, 55, 57, 58, 61, 66, 81, 82
Chevalley, 24
Christoffel, 14, 85
Clairaut, 2
classe d'Euler, 57
classe de Todd, 71
classes característiques, 87
classes d'Stiefel–Whitney, 48
classes de Pontrjagin, 57
claudàtor de Poisson, 40
Codazzi, 14, 15
Cohen, 90
Cohn-Vossen, 47, 85
cohomologia de De Rham, 38
cohomologia singular, 38
conjectura de Lichnerowicz, 69, 86
conjectura de Poincaré, 75, 87
conjectura de Schlaefli, 26
connexió de Riemann, 29
connexions afins, 28
connexions conformes, 26

connexions en fibrats, 33
connexions lineals, 28
connexions projectives, 26
constants d'estructura, 17
corrent, 38, 63
Courant, 45
curvatura escalar, 25
curvatura geodèsica, 10
CW-complex, 39

Darboux, 10, 30
De Giorgi, 82, 83
De Rham, 36, 37, 46, 52, 63
derivació covariant, 22
derivada covariant, 14, 15, 26
diferencial exterior, 22
direccions asimptòtiques, 6
direccions conjugades, 6
Disquisitiones, 89
do Carmo, 91
dualitat de Poincaré, 38
Dupin, 5

Eells, 78, 79, 83
Ehresmann, 30, 58
Einsenhart, 18
Einstein, 24
Engel, 16, 18
equació de Lagrange, 88
equació de Laplace, 25
equació de Poisson, 25
equacions de Gauss–Codazzi, 14
espai no holònom, 34
espais de Finsler, 26
espais fibrats, 30
espais simètrics, 34
espectre, 69
Euler, 5, 88

fórmula de Gauss-Bonnet, 51
fórmula de Green, 10
fórmules de Frenet, 11
Fenchel, 55, 81
Finn, 81
Finsler, 26
flux de Ricci, 90
forma de Killing, 20
formes harmòniques, 36, 45
fórmules de Serret-Frenet, 7
Frenet, 11
Friedrichs, 45
Fubini, G., 23

G-estructura, 61
Galileu, 1
Gauss, 7, 10, 11
Gauss–Bonnet, 10, 66
Gauss–Codazzi, 14
Gauss-Codazzi, 31
geometria conforme, 29
geometria diferencial conforme, 28
Giusti, 83
Grassmann, 22
Grauert, 89
Gromoll, 47, 77, 85, 86, 92
Gromov, 85
Grothendieck, 71
grup d'holonomia, 33, 61
grup de Grothendieck, 73
grup de Riemann–Roch, 73
grup restringit d'holonomia, 61
grups de Lie, 36

Hartman, 21, 70, 76, 83
Hausdorff, 21, 24
helicoide, 88
hessià, 40

Hilbert, 21, 31, 46
Hirsch, 57
Hirzebruch, 71
Hodge, 36, 45
holonomia infinitesimal, 62
holonomia local, 63
Hopf, 31, 36, 83
Hsiang, 82, 91
Huber, 81
Huygens, 1

indicatriu de Dupin, 6
isometries infinitesimals, 22

Kervaire, 70, 74, 76
Killing, 16, 18, 20, 22, 23
Klein, 33
Klingenberg, 45, 46, 71, 74
Kneser, 46
Kobayashi, 46, 68
Kodaira, 51, 52, 71
Kulkarni, 85

Lagrange, 5
Lancret, 2
Legendre, 5, 89
Leibniz, 1
Lelong-Ferrand, 77, 86
lema de Morse, 40
Leray, 57
Levi, 46
Levi-Civita, 22, 23, 26, 67
Lewy, 45
Lichnerowicz, 61, 68, 69, 76, 77, 80, 83, 84, 87
Lie, 13, 16, 18
Liebmann, 21, 31
Lobatschewsky, 13

mètode de la paramètrix, 46
Massey, 21, 76
Maurer-Cartan, 59
McKean, 84
mesura de Haar, 32
Meusnier, 88
Meyer, 47, 77, 85, 91
Michelson, 24
Milnor, 39, 66
Minakshisundaram, 84
Monge, 2, 5
Montgomery, 48, 55
Morrey, 89
Morse, 36, 39, 41, 44
Myers, 46, 48, 71

Nash, 67
Newton, 1
Nijenhuis, 62
Nirenberg, 21, 70, 76
Nomizu, 67, 80, 85
normal principal, 2
nul·litat, 40

Obata, 68, 69, 76, 77, 84
operadors el·líptics, 52
Ozeki, 66

paral·lelisme absolut, 24
pesos, 23
pesos màxims, 23
pinçaments, 46
pla osculador, 2
Plateau, 10
Pleijel, 84
Poincaré, 13, 22
Pontrjagin, 56
Portnoy, 81
potencial gravitatori, 25

problema de Christoffel, 80
punt crític, 40
punt crític no degenerat, 40

Rauch, 46, 60, 71
Reeb, 75
referència mòbil, 30
relativitat general, 24
relativitat restringida, 24
representació adjunta, 23
Ricci, 22, 23
Riemann, 11, 27
Rinow, 36

símbols de Christoffel, 14, 15
Sacks, 92
Sampson, 78, 79, 83
Sard, 51, 54
Schoen, 90
Schur, 32
Schwartz, 38, 63
segona forma fonamental, 13
Serre, 58
Sharafutdinov, 92
Simons, 82
Singer, 61, 84
Smale, 75, 76
Stallings, 75
Steenrod, 48, 50, 51, 56
Stiefel, 48
subàlgebra de Cartan, 20
superfície de Riemann, 21
superfície mínima, 11
Synge, 47, 71
Szabó, 90

Tanaka, 30
tensor d'energia, 25
tensor de curvatura, 12
tensor de curvatura conforme, 29
tensor de Ricci, 25, 68, 69
tensor mètric, 12
teorema d'Ambrose i Singer, 67, 68
teorema d'Ascoli, 86
teorema de Bonnet, 31
teorema de De Rham, 38, 87
teorema de Gauss–Bonnet, 10
teorema de Hirsh-Leray, 58
teorema de Hodge, 45
teorema de Kodaira, 53
teorema de l'índex, 39, 44
teorema de l'esfera, 60
teorema de reducció, 67
teorema de reductibilitat, 60
teorema de regularitat, 52
teorema de Riemann–Roch, 71, 73
teorema de Weirstrass, 47
teorema de Whitney, 67
teorema egregi, 9
teoremes de comparació, 60
teoria de connexions, 30, 58
teoria de distribucions, 38
teoria de Morse, 39, 41, 87
teoria de Morse elemental, 41
tesi de Cartan, 20
Thom, 67, 69
Thorpe, 86
Topogonov, 47, 71, 74, 77, 85
Torricelli, 1
transformació conforme, 29
transport paral·lel, 24, 26, 58
Tsukamoto, 74

Uhlenbeck, 92

Vallée, Louis L., 88
Van Dantzig, 22, 36, 48, 55

Van der Waerden, 22, 36, 48, 55
varietat d'Albanese, 80
varietat diferenciable, 21, 24
varietats complexes, 21
varietats d'Einstein, 25
Volterra, 45

Walker, 90
Wallach, 87, 91
Weil, 38, 51, 54, 81
Weitzenboeck, 45
Weyl, 21, 24, 26–33, 46, 51, 52, 69
Whitehead, 39
Whitney, 47–51, 56, 67
Wolf, 83

Yano, 80, 85

Zeeman, 75

Memòria sobre el concepte, mètode i fonts de la geometria diferencial
Part II: Varietats complexes

Joan Girbau Badó
Opositor a l'Agregaduria de Geometria Diferencial
de la Universitat Autònoma de Barcelona

Barcelona 1973

Índex

1 Estructures complexes i quasi complexes 1

2 Classes de Chern 4

3 Estructures hermítiques i kählerianes 6

4 Les varietats kählerianes compactes: des dels primers resultats d'Eckmann i Guggenheimer fins al teorema de Riemann–Roch 9

5 Algunes conseqüències del teorema de Riemann–Roch 25

6 Cerca de teoremes d'anul·lació per a fibrats vectorials. El treball de Nakano 26

7 Deformació d'estructures complexes 28

8 Varietats kählerianes compactes de curvatura positiva. Conjectura de Frankel 32

9 Teoremes d'anul·lació per a fibrats semipositius i seminegatius 35

10 Varietats complexes no compactes. El d''-problema de Neumann i el problema de Levi 37

Anotacions dels traductors-curadors 43

Referències 49

1 Estructures complexes i quasi complexes

La teoria de les varietats complexes està íntimament relacionada amb la teoria de funcions analítiques d'un costat i amb la geometria algebraica de l'altre. Una varietat complexa M és un espai paracompacte, Hausdorff, dotat d'un atles complex els canvis de coordenades dels quals es fan per transformacions holomorfes. L'espai projectiu complex de dimensió n, $\mathbf{P}_n$, constitueix un primer exemple de varietat complexa.

W. L. Chow [1] va establir el 1949 que tota subvarietat compacta immersa analíticament en $\mathbf{P}_n$ és una varietat algebraica, és a dir, es pot donar per un nombre finit de polinomis homogenis. Una simple demostració d'aquest important teorema es pot trobar al llibre de Gunning i Rossi: "Analytic functions of several complex variables".[2]

No cal considerar subvarietats analítiques compactes de $\mathbf{C}^n$ ja que és fàcil provar que aquestes subvarietats es redueixen forçosament a un punt.

Si M és una varietat complexa de dimensió n definida per un atles complex $A = \{(U_i, \varphi_i)\}$ i ϕ és l'aplicació

$$\mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{R}^{2n},\ (z^1, \ldots, z^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n),$$

on $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$, l'atles $\{(U_i, \phi \circ \varphi_i)\}$ dota M d'una estructura de varietat diferenciable real de dimensió $2n$ que s'anomena varietat real subjacent. Si designem per ${}^c\mathcal{F}(x)$ l'àlgebra de les funcions de classe C^∞ amb valors a $\mathbf{C}$ definides en un entorn del punt x, l'espai dels operadors $X : {}^c\mathcal{F}(x) \to \mathbf{C}$ que verifiquen:

(a) $X(f + g) = X(f) + X(g)$

(b) $X(fg) = f(x)X(g) + g(x)X(f)$

és precisament la complexificació ${}^cT_x(M)$ de l'espai tangent a la varietat real subjacent $T_x(M)$. Aquest espai es diu espai tangent complex. A cada punt x es defineix de manera natural un endomorfisme J_x de $T_x(M)$ posant:

$$J_x\big(\tfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\big)_x = \big(\tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\big)_x, \quad J_x\big(\tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\big)_x = -\big(\tfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\big)_x.$$

Aquest endomorfisme no depèn del sistema de coordenades elegit, ja que els canvis de coordenades són holomorfs. J s'estén per complexificació a ${}^cT_x(M)$. A ${}^cT_x(M)$ els vectors $\{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\}$ són vectors propis de J de valor propi $\sqrt{-1}$ i els seus conjugats $\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\}$ són vectors propis de J de valor propi $-\sqrt{-1}$.

[1] On complex compact analytic varieties. Amer. J. Math. 71 (1949) 893-914.

[2] Prentice Hall 1965. Pàg. 170.

Designant doncs per $T_x^{(1,0)}$el subespai de ${}^cT_x(M)$ engendrat per $\{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\}$ i per $T_x^{(0,1)}$ el seu conjugat, es té la descomposició

$$ {}^cT_x(M) = T_x^{(1,0)} \oplus T_x^{(0,1)} $$

que condueix a la noció de tipus d'un tensor o una forma diferencial i a la descomposició de la diferencial exterior: $d = d' + d''$.

Moltes de les propietats de les varietats complexes només depenen de l'operador J i no de l'existència d'un atles analític complex a M. Per aquesta raó, ha sorgit el concepte de varietat quasi complexa. Es diu així a tota varietat diferenciable real M dotada d'un camp tensorial J una vegada covariant i una vegada contravariant que a cada punt $x \in M$ és un endomorfisme J_x de l'espai tangent $T_x(M)$ tal que $J^2 = -\mathrm{Id}$.

El problema de saber quan una varietat quasi complexa és complexa va ser abordat per primera vegada per Eckmann i Fröhlicher[3] i posteriorment per Newlander i Nirenberg.[4] En el fons, això es redueix a un problema d'integració. Donar l'endomorfisme J equival a donar a cada punt x de M el subespai $T_x^{(1,0)}$ de ${}^cT_x(M)$, que és equivalent a donar localment un sistema de n formes diferencials $\{\theta^\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,n}$ de manera que a cada punt x constitueixin una base de $(T_x^{(1,0)})^*$. El problema es planteja doncs de la manera següent: Quan existiran funcions diferenciables z^α amb valors complexos tals que $\theta^\alpha = dz^\alpha$? Es tindrà:

$$ d\theta^\alpha = \tfrac{1}{2}\sum A^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta \wedge \theta^\gamma + \sum B^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta \wedge \bar\theta^\gamma + \tfrac{1}{2}\sum C^\alpha_{\beta\gamma}\bar\theta^\beta \wedge \bar\theta^\gamma. $$

Expressió única si se suposen els coeficients $A^\alpha_{\beta\gamma}$ i $C^\alpha_{\beta\gamma}$ antisimètrics en els índexs β, γ. La condició que tots els $C^\alpha_{\beta\gamma}$ siguin nuls és invariant per canvi de coordenades i és equivalent a la condició que el següent tensor, anomenat tensor de torsió de l'estructura complexa, sigui nul:

$$ N(X,Y) = 2[JX, JY] - 2[X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y] $$

Si $\theta^\alpha = dz^\alpha$, evidentment es té $d\theta^\alpha = 0$ i per tant tots els coeficients $C^\alpha_{\beta\gamma}$ són nuls i el tensor de torsió és nul. Aquest tensor va ser introduït per Eckmann i Fröhlicher en el treball que hem esmentat, demostrant a més, usant essencialment el teorema de Frobenius, que si la varietat M és analítica real l'anul·lació del tensor de torsió implica l'existència de funcions z^α tals que $\theta^\alpha = dz^\alpha$. El

[3]Sur l'integrabilité de structures presque complexes. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 232 (1951) 2284-2286.

[4]Complex coordinates in almost complex manifolds. Ann. of Math. 65 (1957) 391-404.

mateix resultat quan la varietat M és C^∞ va ser obtingut per Newlander i Nirenberg a l'article abans esmentat. Una altra demostració del mateix resultat basada en la resolució de l'anomenat d''-problema de Neumann del qual parlarem més endavant, va ser donada per Kohn el 1963.[5] Nijenhuis i Woolf n'han donat també una altra prova diferent. [6]

Del que s'ha dit es desprèn que el problema de saber si una estructura quasi complexa donada procedeix o no d'una estructura complexa està totalment resolt. Només cal comprovar si el tensor de torsió s'anul·la o no. Però donada una varietat amb una estructura quasi complexa no integrable (és a dir, amb torsió no nul·la) no hi ha manera de decidir en la majoria dels casos si existeix o no una estructura quasi complexa integrable sobre aquesta varietat. Per exemple S^6 es pot dotar d'una estructura quasi complexa no integrable de manera natural,[7] $\triangleright$ **1**, però fins fa molt poc no se sabia si admetia o no una estructura complexa. Recentment A. Adler ha resolt aquesta qüestió en sentit negatiu.[8] ($\triangleright$ **2**). No hi ha cap altra esfera, tret de S^2 i S^6, que admeti una estructura quasi complexa.[9] Recentment A. van de Ven ha donat exemples (els primers que es coneixen) de varietats quasi complexes compactes que no admeten cap estructura complexa.[10] En la demostració, van de Ven utilitza el teorema de l'índex d'Atiyah-Singer.

Anàlogament al que passa amb les varietats reals, els fibrats que més naturalment apareixen en l'estudi de les varietats complexes són el de les referències i el tangent, encara que cal fer ressaltar aquí les diferències amb el cas real que cal tenir en compte. Una referència complexa en un punt $x \in M$ és una base de ${}^cT_x(M)$ de la forma $X_1, \ldots, X_n, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n$, on $X_1, \ldots, X_n$ és una base de $T_1^{(1,0)}$. El conjunt $C(M)$ de totes les referències complexes en tots els punts de M, sobre el que actua de forma natural el grup GL$(n, \mathbf{C})$, es pot dotar d'una estructura natural de varietat complexa. S'obté així el fibrat principal de les referències complexes $C(M) \xrightarrow{\pi} M$. El grup GL$(n, \mathbf{C})$ es pot

[5] Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds. Ann. of Math. 78 (1963) 112-148; 79 (1964) 450-472.

[6] Some integration problems in almost complex manifolds. Ann. of Math. 77 (1963) 424-489.

[7] Veure per exemple Kobayashi-Nomizu: Foundations of differential geometry. Interscience Publishers 1969, tom II, pàg. 139.

[8] A. Adler: The second fonamental form on S^6 and $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Amer. J. Math. 91 (1969) 657-670.

[9] Borel-Serre: Determinació des p-puissances reduïtes de Steenrod dans la cohomologie des groupes classiques. Applications. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 233 (1951) 680-682.

[10] A. van de Ven: On Chern numbers of certain complex and almost complex manifolds. Proc. Nat. Ac. Sc. USA 55 (1966) 1624-1627.

fer actuar sobre $\mathbf{C}^{2n}$ de la manera següent:

$$\begin{pmatrix} (a_\alpha^\beta) & 0 \\ 0 & (\bar{a}_\alpha^\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \\ z^{n+1} \\ \vdots \\ z^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \\ y^{n+1} \\ \vdots \\ y^{2n} \end{pmatrix}$$

on $a = (a_\alpha^\beta) \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. Es pot provar que el fibrat associat al fibrat principal $C(M)$ amb fibra estàndard $\mathbf{C}^{2n}$ i amb l'actuació anterior de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ sobre la fibra estàndard, és isomorf al fibrat tangent ${}^cT(M) \xrightarrow{\pi} M$ (fibrat de tots els vectors tangents complexos). Tenim doncs aquí un fibrat vectorial de fibra $\mathbf{C}^{2n}$ en què el grup estructural no és $\mathrm{GL}(2n, \mathbf{C})$ (com passaria en el cas real), sinó $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. El fibrat dels vectors tangents de tipus $(1, 0)$, $T^{(1,0)}(M) \to M$ té fibra estàndard $\mathbf{C}^n$ i grup estructural $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ (Aquest manté l'analogia amb el cas real).

2 Classes de Chern

Els invariants més senzills d'un fibrat vectorial complex van ser introduïts per Chern el 1946.[11] El primer d'aquests invariants, la primera classe de Chern, per a fibrats de línia té una interpretació simple. Sigui M una varietat complexa. Sigui $\mathcal{O}$ el feix de gèrmens de funcions C^∞ sobre M amb valors complexos i $\mathcal{O}^*$ el feix de gèrmens de funcions C^∞ sobre M amb valors a $\mathbf{C} - \{0\}$. Considerem la successió exacta de feixos:

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \to 1$$

on i és la inclusió canònica i e l'aplicació definida per:

$$e(f(x)) = \exp(2\pi\sqrt{-1}f(x)).$$

De la successió exacta anterior se'n desprèn la següent successió exacta de cohomologia:

$$H^1(M, \mathcal{O}) \to H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbf{Z}) \to H^2(M, \mathcal{O}).$$

[11] Chern: Characteristic classes of Hermitian manifolds. Ann. of Math. 47 (1946) 85-121.

Les classes d'equivalència de fibrats de línia complexos, de classe C^∞, dient equivalents a dos fibrats isomorfs, estan en correspondència bijectiva amb els elements del grup de cohomologia $H^1(M, \mathcal{O}^*)$. A més, aquesta bijecció conserva les operacions de grup si es considera als fibrats l'operació "producte tensorial". Poden doncs identificar-se els fibrats de línia amb els elements de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$. Donat un fibrat de línia $E \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$, l'element $\delta E \in H^2(M, \mathbf{Z})$ és la primera classe de Chern de E.

Aquest cas és relativament senzill, ja que el grup estructural dels fibrats de línia és GL$(1, \mathbf{C})$, que és commutatiu. Les classes de Chern $c_i(E)$ per a fibrats vectorials qualssevol $E \to M$ amb grup estructural GL$(n, \mathbf{C})$ es poden introduir de diverses maneres mentre satisfacin els següents axiomes, que les caracteritzen:[12]

Axioma 1 $c_i \in H^{2i}(M, \mathbf{Z})$.

Axioma 2 (de naturalitat): Si es té una aplicació $f : M' \to M$ i es considera el fibrat imatge inversa $f^*(E)$ (fibrat sobre M') es verifica $c_i(f^*(E)) = f^*(c_i(E))$.

Axioma 3 (fórmula de Whitney de la suma): Si $E_1, \ldots, E_q$ són fibrats de línia sobre M i $E_1 \oplus \ldots \oplus E_q \to M$ és el fibrat suma, es verifica

$$c_i(E_1 \oplus \ldots \oplus E_q) = s_i(c_1(E_1), \ldots, c_1(E_q))$$

on s_i és el i-èsim polinomi simètric elemental.

Axioma 4 (de normalització): Sigui γ_n el fibrat de línia canònic sobre $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, és a dir, el subconjunt de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}) \times \mathbf{C}^{n+1}$ format pels parells (V, x) amb $x \in V$. Es verifica que $-c_1(\gamma_1)$ és el generador de $H^2(\mathbf{P}_1(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$, o dit altrament, $c_1(\gamma_1)$, considerada com a 2-forma diferencial, dona -1 en integrar-la sobre el 2-cicle fonamental de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

Hi ha diversos mètodes, uns de topològics, uns altres propis de la geometria diferencial per provar l'existència de les classes de Chern $c_i(E)$ que verifiquen els axiomes anteriors.[13]

Al contrari del que ha passat amb les classes de Stieffel-Whitney, la presentació actual, sigui quina sigui, queda molt allunyada de la versió primitiva dels

[12] Hirzebruch: Topological methods in algebraic geometry. Springer 1966.

[13] Per a una construcció topològica vegeu: Hussemoller: Fibre bundles. Mc Graw Hill 1966, pàg. 229-234. Per a una construcció basada en mètodes de geometria diferencial vegeu: Kobayashi-Nomizu: Foundations of differential geometry, tom II. Interscience Publishers 1969, capítol 12.

seus creadors, a l'article de Chern que hem citat abans es troben ja prou elaborats els principals mètodes de construcció de les classes de Chern utilitzats actualment. Destaquem com a interessant, i avui potser força oblidada, la següent construcció que les relaciona amb la primitiva versió de les classes de Stieffel-Whitney:

Sigui M una varietat complexa de dimensió n. Construirem la r-èsima classe de Chern del fibrat tangent. Prenguem una descomposició simplicial de M tal que cada símplex estigui contingut en una carta local i definim, sobre l'esquelet de dimensió $2r - l$ d'aquesta descomposició, $n - r + l$ camps continus $X_1, \ldots, X_{n-r+1}$ de vectors tangents complexos linealment independents. Agafem un punt a l'interior de cada símplice σ de dimensió $2r$ i considerem la varietat $U(n, n - r + 1)$ de conjunts ordenats de $n - r + l$ vectors tangents complexos linealment independents en aquest punt. Els camps $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r+1}$ defineixen una aplicació de $\partial\sigma \to U(n, n - r + 1)$ i, per tant, un element del grup d'homotopia $\pi_{2r-1}(U(n, n - r + 1))$. Ehresmann ja havia provat el 1939[14] que tots els grups de cohomologia $H^k(U(n, n-r+1))$ són nuls per $k < 2r - 1$ i que per $k = 2r$ el grup de cohomologia que s'obté és isomorf a $\mathbf{Z}$. Per tant, l'isomorfisme de Hurewicz permet concloure que

$$\pi_{2r-1}(U(n, n - r + 1)) = H^{2r-1}(U(n, n - r + 1)).$$

Els camps $X_1, \ldots, X_{n-r+1}$ definiran doncs per a cada $2r$-símplice σ un element f_σ de $\mathbf{Z}$. Associant a cada σ el número f_σ s'obté un $2r$-cocicle que és un representant de la r-èsima classe de Chern del fibrat tangent.

3 Estructures hermítiques i kählerianes

Una mètrica hermítica sobre una varietat complexa M no és més que una mètrica hermítica h sobre cada fibra $\pi^{-1}(x)$ del fibrat $T^{(1,0)}(M)$ que depèn diferenciablement de x. És fàcil veure que una mètrica hermítica equival a una estructura bilineal, simètrica, real, de tipus $(1, 1)$ sobre el fibrat tangent ${}^cT(M)$ i també equival a una estructura de Riemann g del fibrat tangent $T(M)$ a la varietat real subjacent que a cada punt x verifiqui $g_x(J_xZ_1, J_xZ_2) = g_x((Z_1)_x, (Z_2)_x)$.

S'anomena forma de Kähler associada a una mètrica hermítica g a la forma diferencial definida localment per:

$$F = \sqrt{-1}g_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

[14]Sur la topologie des groupes simples clos. Comptes Rendues Ac. Sc. Paris 208 (1939) 1263-1265.

F es pot definir també posant $F(X,Y) = g(JX,Y)$. La mètrica g es diu kählleriana si la seva forma de Kähler F és tancada, és a dir, $dF = 0$. Una varietat kähleriana no és més que una varietat complexa que admet una mètrica kähleriana.

Aquestes mètriques van ser considerades per primera vegada per Kähler el 1933[15] i d'aquí en prenen el nom. L'exemple més notable de varietat kähleriana és l'espai projectiu complex $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ dotat de la mètrica de Fubini. Per definir aquesta mètrica, només cal observar que la mètrica de $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ definida per:

$$ds^2 = \frac{\sum dz^\alpha d\bar{z}^\alpha}{\sum z^\alpha \bar{z}^\alpha} - \frac{(\sum \bar{z}^\alpha dz^\alpha)(\sum z^\beta d\bar{z}^\beta)}{(\sum z^\alpha \bar{z}^\alpha)^2}$$

és definida positiva i projectable a $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, on indueix una mètrica kähleriana, ja que la seva forma de Kähler és:

$$F = \sqrt{-1}\left\{\frac{\sum dz^\alpha d\bar{z}^\alpha}{\sum z^\alpha \bar{z}^\alpha} - \frac{(\sum \bar{z}^\alpha dz^\alpha)(\sum z^\beta d\bar{z}^\beta)}{(\sum z^\alpha \bar{z}^\alpha)^2}\right\} = \sqrt{-1}d'' \log(\sum z^\alpha \bar{z}^\alpha)$$

que és evidentment tancada. Aquesta mètrica va ser considerada per Fubini el 1903.[16] Tota subvarietat complexa d'una varietat kähleriana dotada de la mètrica induïda, és kähleriana. En particular tota subvarietat complexa de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ és kähleriana. Per tant, totes les varietats algebraiques sense singularitats són kählerianes.

Així com tota varietat complexa admet una mètrica hermítica, no tota varietat complexa admet una mètrica kähleriana. La situació que es presenta és molt diferent segons que la varietat que es consideri sigui compacta o no. Molt recentment, M. L. Gromov ha demostrat[17] que tota varietat complexa no compacta admet una mètrica kähleriana. En canvi, per tal que una varietat complexa compacta admeti una mètrica kähleriana, els seus nombres de Betti $b_i(M)$ han de verificar condicions molt precises, com les següents:

(a) Per a i parell, $i = 2r$, $b_{2r}(M) \neq 0$.

(b) Per a i senar, $i = 2r+1$, $b_{2r+1}(M)$ ha de ser parell.

(c) $b_r(M) \leqslant b_{r+2}(M)$ per a $r < n$ (n = dimensió complexa de M), $b_r(M) \geqslant b_{r+2}(M)$ si $r > n$, i $b_r(M) = b_{n-2r}(M)$.

[15] Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 9 (1933) 173-186.

[16] Sulle metriche definite da una forma Hermitiana. Atti Inst. Veneto 6 (1903) 501-513.

[17] Stable mappings of foliations into manifolds. Math. USSR Izvestia 3 (1969) 671-699.

Aquests resultats sobre els nombres de Betti, l'obtenció dels quals esbossarem més endavant, van ser obra en la seva major part d'Eckmann i Guggenheimer,[18] sense oblidar Hodge, les idees del qual estan sempre subjacents a la major part dels treballs sobre varietats kählerianes compactes.[19]

Aquest coneixement sobre els nombres de Betti d'una varietat kähleriana compacta va permetre donar exemples de varietats complexes no kählerianes i, per tant, no algebraiques. H. Hopf el 1948[20] va descobrir una estructura complexa sobre $S^{2p+1} \times S^1$ i Calabi-Eckmann[21] més tard van introduir una estructura complexa sobre $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$. Aquestes varietats no poden admetre cap mètrica kähleriana, ja que $b_2(S^{2p+1} \times S^{2q+1}) = 0$.

El problema general de saber en quines condicions una varietat complexa compacta admet o no una mètrica de Kähler, és de tal envergadura que no ha estat abordat mai de manera general. Com que tots els exemples que es coneixen de varietats complexes que no admeten una mètrica kähleriana consisteixen en espais fibrats (observem que $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ és un fibrat sobre $\mathbf{P}_p(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_q(\mathbf{C})$), sembla natural intentar abordar primer el problema molt més fàcil de determinar en quines condicions un fibrat analític complex admet o no una mètrica kähleriana. Excel·lents resultats en aquest sentit han estat obtinguts per Kodaira, Blanchard i Kobayashi. El primer d'aquests matemàtics va provar el 1954[22] que tot espai fibrat analític complex la fibra del qual és un espai projectiu complex i la base del qual és una varietat kähleriana compacta, és una varietat kähleriana. Blanchard en la seva tesi doctoral[23] va obtenir entre altres el següent resultat: Sigui $E(B, F)$ un fibrat analític complex, compacte , de base B i fibra F. Se suposa que $\pi_1(B)$ opera trivialment sobre el primer grup de cohomologia real de la fibra, $H^1(F)$. Per tal que $E(B, F)$ admeti una mètrica kähleriana és necessari i suficient que es verifi-

[18]Eckmann: Quelques propriétés globals des variétés kähleriennes. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 229 (1949) 577-579. Eckmann i Guggenheimer: Formes différentielles et mètrique hermitienne sans torsion. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 229 (1949) 464-466, 489-491. Sur les variétés closes à mètrique hermitienne sans torsion. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 229 (1949) 503-505.

[19]Hodge: A Dirichlet problem for harmonic functionals with applications to analytic varieties. Proc. of the London Math. Soc. 36 (1934) 257-303. Harmonic functionals in a Riemannian space. Proc. of the London Math. Soc. 38 (1935) 72-95. The existence theorem for harmonic integrals. Proc. London Math. Soc. 41 (1936) 483-496.

[20]Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Studies and Essays presented to R. Courant. Interscience Publishers. New York 1948, 177-185.

[21]A class of compact complex manifolds which are not algebraic. Ann. of Math. 58 (1953) 494-500.

[22]On Kähler varieties of restricted type. Ann. of Math. 60 (1954) 28-48.

[23]Sur les variétés analytiques complexes: Ann. Sc. École Norm. Sup. 73 (1956) 157-202.

quin les condicions següents: 1) Hi ha una forma de Kähler sobre F representant d'una classe de cohomologia invariant per $\pi_1(B)$. 2) B és una varietat kähleriana. 3) $b_1(E) = b_1(B) + b_1(F)$. A l'exemple de Calabi-Eckmann és precisament aquesta darrera condició la que no es verifica.

En la mateixa direcció Kobayashi va obtenir el 1959 el següent resultat:[24] Si $E(B, F)$ és un fibrat analític complex tal que $c_1(F) < 0$, on $c_1(F)$ indica la primera classe de Chern de F, aleshores si B és kähleriana (compacta o no) també E és kähleriana i si B és algebraica, també ho és E.

Tots aquests resultats no van sorgir aïlladament, sinó que són conseqüència del considerable avenç que va experimentar el coneixement de les varietats kählerianes compactes a la dècada dels cinquanta, progrés que intentarem descriure sistemàticament.

4 Les varietats kählerianes compactes: des dels primers resultats d'Eckmann i Guggenheimer fins al teorema de Riemann–Roch

Hem exposat els resultats d'Eckmann i Guggenheimer el 1949 sobre les condicions que han de complir els nombres de Betti d'una varietat complexa compacta per tal que aquesta pugui admetre una mètrica de Kähler. Aquests resultats són conseqüència del teorema de Hodge–De Rham sobre l'operador laplacià en una varietat de Riemann compacta.

Sigui M una varietat kähleriana compacta. Considerant la varietat real subjacent com a varietat de Riemann, tindrem sobre M el producte escalar global de formes $\langle\ ,\ \rangle$, del qual hem parlat en tractar del teorema de Hodge; la diferencial exterior d; la codiferencial δ, transposada de d respecte d'aquest producte escalar; i el laplacià $\Delta = d\delta + \delta d$. La descomposició de l'espai tangent ${}^{c}T_x(M) = T_x^{(1,0)}(M) \oplus T_x^{(0,1)}(M)$ dona lloc a una descomposició $d = d' + d''$ i a una descomposició $\delta = \delta' + \delta''$. Si considerem els laplacians $\Delta' = 2(d'\delta' + \delta' d')$ i $\Delta'' = 2(d''\delta'' + \delta'' d'')$, la condició que la mètrica g de M sigui de Kähler comporta la igualtat dels tres laplacians: $\Delta = \Delta' = \Delta''$. El teorema de Hodge–De Rham afirma que la dimensió de $H^r(M, \mathbf{R})$ coincideix amb la dimensió de l'espai de r-formes reals Δ-harmòniques. Es tindrà doncs: $\dim_{\mathbf{R}} H^r(M, \mathbf{R})$ = dimensió real de l'espai de r-formes re-

[24] On the automorphism group of a certain class of algebraic manifolds. Tohoku Math. J. 11 (1959) 184-190.

als Δ-harmòniques = dimensió complexa de l'espai de r-formes complexes Δ''-harmòniques. Si designem per $H^{p,q}$ l'espai vectorial de les formes Δ''-harmòniques de tipus (p,q) i per $b_{p,q}(M) = \dim_{\mathbf{R}} H^{p,q}$, es tindrà, tenint en compte que Δ'' conserva el tipus:

$$b_r(M) = \dim_{\mathbf{R}} H^r(M, \mathbf{R}) = \sum_{p+q=r} b_{p,q}(M).$$

Ara bé, si φ és una forma de tipus (p,q) Δ''-harmònica, la seva conjugada $\bar{\varphi}$ és de tipus (q,p) i és Δ'-harmònica, per tant també Δ''-harmònica ja que $\Delta'' = \Delta'$. Això implica que $b_{p,q}(M) = b_{q,p}(M)$. Juntament amb l'expressió anterior de $b_r(M)$, també implica que quan r és senar $b_r(M)$ ha de ser parell. Com a cas particular d'aquest resultat es té $b_1(M) = 2b_{1,0}(M)$ i $b_{1,0}(M)$ s'anomena irregularitat de M.

Sigui F la forma de Kähler de la mètrica de M. Sigui F^n la n-èsima potència exterior de F (n indica la dimensió complexa de M). Es demostra que $\int_M F^n > 0$. Això porta com a conseqüència que F^n no pot ser una vora, ja que si $F^n = d\alpha$, llavors es tindria $\int_M F^n = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha = 0$. Per tant, F^n és una $2n$-forma diferencial tancada no homòloga a zero. Per tant, $b_{2n}(M) \neq 0$. Per provar que $b_{2p}(M) \neq 0$, sigui quin sigui p, només cal considerar F^p ($p < n$). Si $F^p = d\alpha$, es tindria $F^n = F^{n-p} \wedge d\alpha = d(F^{n-p} \wedge \alpha)$, en contradicció amb el que just hem comentat, de manera que $F^p \neq d\alpha$ i per tant $b_{2p}(M) \neq 0$.

Hem explicat això amb detall per posar en evidència que aquests primers resultats sobre els nombres de Betti d'una varietat kähleriana compacta s'obtenen per camins simples i reposen fonamentalment en el teorema de Hodge, el qual es recolza en la teoria del potencial. Això és una mostra de la interrelació entre l'Anàlisi i la Geometria diferencial i, a través d'aquesta, entre l'Anàlisi i la Geometria algebraica.

Un pas important en l'estudi de la cohomologia de les varietats complexes va ser donat el 1953 per Dolbeault.[25] El teorema de De Rahm per a varietats reals afirma que la cohomologia del complex de formes diferencials amb l'operador «diferencial exterior» coincideix amb la cohomologia singular amb coeficients reals. El teorema de De Rahm utilitza el lema de Poincaré que afirma que tota forma diferencial tancada és localment una vora. En les varietats complexes cal considerar la cohomologia del complex de formes diferencials amb l'operador d''. Per poder aplicar la mateixa tècnica que en el cas real s'utilitza per provar el teorema de De Rahm, calia un resultat que substituís el

[25] Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 236 (1953) 175-177.

lema de Poincaré. Aquest pas va ser precisament el donat per Dolbeault, que va demostrar que si φ és una forma de tipus (p, q) $(q > 0)$ de classe C^∞, definida en un obert U i tal que $d''\varphi = 0$, existeix una forma α de classe C^∞, de tipus $(p, q-1)$, definida en un obert $V \subset U$ tal que $d''\alpha = \varphi$ a V. Aquest important resultat, la demostració del qual utilitza només tècniques elementals de la teoria de funcions analítiques complexes de diverses variables, permet assegurar l'exactitud de la següent successió de feixos:

$$0 \xrightarrow{i} \Omega^p \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{d''} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{d''} \mathcal{A}^{p,2} \to \cdots$$

on Ω^p indica el feix de gèrmens de $(p, 0)$-formes holomorfes i $\mathcal{A}^{p,q}$ el feix de gèrmens de formes C^∞ de tipus (p, q), on i és la inclusió canònica.

Combinant el resultat de Dolbeault amb el teorema de Hodge–De Rahm per a varietats reals, s'obté per raonaments simples l'isomorfisme:

$$H^{p,q} \cong H^q(M, \Omega^p),$$

on $H^{p,q}$ indica l'espai de formes Δ''-harmòniques de tipus (p, q) i $H^q(M, \Omega^p)$ indica el q-èsim grup de cohomologia amb valors en el feix Ω^p. Aquest isomorfisme va ser establert per Kodaira[26] immediatament després de conèixer el resultat de Dolbeault. S'inicien llavors una sèrie de descobriments en cadena (la major part el mateix any 1953) d'una importància posterior extraordinària i que culminen el 1956 amb el teorema de Riemann–Roch de Hirzebruch. Intentarem descriure sistemàticament aquests resultats descoberts en tan poc temps.

El fet que la major part de les varietats kählerianes compactes que es coneixen siguin algebraiques va promoure el trasplantament de moltes idees i mètodes de la geometria algebraica italiana a aquest nou camp. A cada classe de divisors d'una varietat algebraica s'associa de manera natural un fibrat complex de línia el grup estructural del qual és el grup multiplicatiu dels nombres complexos no nuls. Per aquesta raó, en l'estudi de les varietats kählerianes compactes es va veure de seguida la necessitat de considerar formes diferencials a coeficients en un fibrat de línia. Una r-forma diferencial a coeficients en un fibrat de línia analític complex $E \xrightarrow{\pi} M$ no és més que una secció diferenciable del fibrat $(\Lambda^n \; {}^cT(M)^*) \otimes E$. Per a les formes a coeficients en E es poden definir els operadors d_E, d'_E, d''_E, δ_E, δ'_E, δ''_E, Δ_E, Δ'_E i Δ''_E anàlegs als que es defineixen per les formes ordinàries. Si designem per $H^{p,q}(E)$ l'espai de les formes de tipus (p, q) a coeficients en E que són Δ''_E-harmòniques i per $\Omega^p(E)$ el feix de gèrmens de p-formes holomorfes a coeficients en E, es

[26] Proc. Nat. Ac. Sc. USA 39 (1953) 865-868.

verifica l'isomorfisme $H^{p,q}(E) \cong H^q(M, \Omega^p(E))$. Kodaira va obtenir aquest isomorfisme en el treball esmentat abans ja directament per a formes a coeficients en E i no només per a formes ordinàries tal com nosaltres ho hem enunciat al principi.

El fet que el grup additiu de les classes de divisors en una varietat algebraica sigui isomorf al grup de fibrats de línia sobre aquesta varietat, prenent com a operació el producte tensorial de fibrats, posa en evidència la necessitat d'estudiar aquest grup. Aquest estudi és realitzat per Kodaira–Spencer.[27] En aquest treball s'introdueix el concepte de varietat de Picard associada a una varietat kähleriana compacta.

Sigui $\mathcal{O}$ el feix de gèrmens de funcions holomorfes sobre M i $\mathcal{O}^*$ el feix de gèrmens de funcions holomorfes no nul·les. Considerem la successió exacta de feixos:

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \to 0$$

on i indica la inclusió canònica i e l'aplicació donada per

$$e(f(x)) = 2\pi\sqrt{-1}\exp f(x).$$

Considerem la successió exacta de cohomologia induïda per la successió anterior:

$$H^1(M, \mathbf{Z}) \to H^1(M, \mathcal{O}) \to H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbf{Z}).$$

$H^1(M, \mathcal{O}^*)$ és isomorf al grup de tots els fibrats principals de fibra $\mathbf{C}^*$ sobre M. Si $E \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$, δE és la primera classe de Chern de E. La varietat de Picard de M, que es designa per $P(M)$, és el nucli de δ, és a dir, $P(M) = H^1(M, \mathcal{O})/i_*(H^1(M, \mathbf{Z}))$.

Usant essencialment l'isomorfisme de Hodge–De Rahm entre l'espai $H^1(M)$ de formes harmòniques i l'espai de cohomologia $H^1(M, \mathbf{R})$, i usant a més l'isomorfisme de Kodaira $H^{0,1}(M) \cong H^1(M, \mathcal{O})$, es pot trobar un sistema de generadors de $i_*(H^1(M, \mathbf{Z}))$ com a $\mathbf{Z}$-mòdul que generen $H^1(M, \mathcal{O})$ com a $\mathbf{R}$-espai vectorial. És a dir, la varietat de Picard $P(M)$ és un tor complex. El principal resultat de Kodaira–Spencer contingut en el treball que hem citat és el següent: El grup $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ de tots els fibrats complexos de línia sobre M conté la varietat de Picard $P(M)$ com a subgrup i el grup quocient $H^1(M, \mathcal{O}^*)/P(M)$ és isomorf al subgrup $H^2_{(1,1)}(M, \mathbf{Z})$ del segon grup de cohomologia entera $H^2(M, \mathbf{Z})$ format per tots els $c \in H^2(M, \mathbf{Z})$ la part harmònica H_c de la qual és de tipus $(1, 1)$.

[27] Groups of complex line bundles over compact kaehler varieties. Proc. Nat. Ac. Sc. USA 39 (1953) 868-872.

Els fruits més immediats d'aquest resultat es recullen en el camp de la geometria algebraica, on és utilitzat pels seus mateixos descobridors per donar una nova demostració del teorema de Lefschetz–Hodge sobre cicles algebraics i també en la demostració dels teoremes de dualitat d'Igusa.[28] Però a banda de les aplicacions immediates, aquest resultat determina un avenç important en el coneixement de les varietats kählerianes compactes i es fa servir de manera essencial en molts treballs posteriors, per exemple a la tesi de Blanchard de què ja hem parlat.

Donat un fibrat de línia analític complex E sobre una varietat kähleriana M, es considerava important per a moltes aplicacions determinar en quines condicions geomètriques s'anul·len els grups de cohomologia $H^q(M, \Omega^p(E))$. L'isomorfisme de què hem parlat entre l'espai $H^{p,q}$ i $H^q(M, \Omega^p(E))$ va donar a Kodaira la idea d'actualitzar un vell mètode degut a Bochner,[29] el qual li va permetre donar algunes condicions suficients per a l'anul·lació de $H^q(M, \Omega^p(E))$ en termes de la primera classe de Chern de E.[30] Aquest treball de només 5 pàgines constitueix sens dubte el més important avenç d'aquesta dècada en aquest camp i va valer al seu autor la medalla Fields atorgada en el Congrés Internacional de Matemàtics celebrat a Amsterdam el 1954. Enunciarem els resultats que obté Kodaira en aquest treball.

Sigui $\gamma = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\gamma_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ una forma diferencial tancada de tipus $(1,1)$. Sigui φ una forma de tipus (p,q) en un punt $z \in M$. Designem per $\theta^{p,q}(\gamma, \varphi, z)$ la forma hermítica definida en el punt $z \in M$ per:

$$\theta^{p,q}(\gamma, \varphi, z) = \left(\delta^\sigma_\tau[\gamma^{\bar{\beta}}{}_{\bar{\alpha}} - R^{\bar{\beta}}{}_{\bar{\alpha}}] + pR^\sigma{}_{\tau\bar{\alpha}}{}^{\bar{\beta}}\right) \varphi_{\sigma\tau_2\cdots\tau_p\bar{\rho}\bar{\alpha}_2\cdots\bar{\alpha}_q}\bar{\varphi}^{\tau\tau_2\cdots\tau_p\bar{\alpha}\bar{\alpha}_2\cdots\bar{\alpha}_q}$$

on δ^σ_τ indica el símbol de Kronnecker, $R_{\alpha\bar{\beta}}$ el tensor de Ricci i $R^\sigma{}_{\tau\bar{\alpha}\rho}$ el de curvatura. El primer teorema d'anul·lació de Kodaira diu:

Si $c_1(E)$ conté un representant de tipus $(1,1)$,

$$\gamma = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\gamma_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

tal que la forma hermítica $\theta^{p,q}(\gamma, \varphi, z)$ és definida positiva en cada punt z de M, aleshores els grups de cohomologia $H^q(M, \Omega^p(E))$ i $H^{n-q}(M, \Omega^{n-p}(E^*))$ s'anul·len per a $1 \leqslant q \leqslant n$, essent n la dimensió complexa de M.

[28] Kodaira–Spencer: Divisor class groups on algebraic varieties. Proc. Nat. Ac. Sc. USA 39 (1953) 872-877.

[29] Bochner: Vector fields and Ricci curvature. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 776-797.

[30] Kodaira: On a difrerential geometric method in the theory of analytic stacks. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39 (1953) 1268-1273.

Aquest enunciat no és satisfactori des del punt de vista geomètric, ja que és difícil donar condicions geomètriques simples perquè la forma hermítica $\theta^{p,q}(\gamma, \varphi, z)$ sigui definida positiva. No obstant això, quan $p = n$ la forma hermítica $\theta^{n,q}(\gamma, \varphi, z)$ adopta una expressió particularment senzilla i el resultat anterior porta com a conseqüència, en aquest cas particular, el següent: Si $c_1(E) > 0$, els grups $H^q(M, \Omega^n(E))$ i $H^{n-q}(M, \Omega^0(E^*))$ s'anul·len per $1 \leqslant q \leqslant n$. (Es diu que $c_1(E) > 0$ si hi ha un representant γ de $c_1(E)$ tal que a cada punt s'expressi localment per $\gamma = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\gamma_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ amb la matriu hermítica $(\gamma_{\alpha\bar{\beta}})$ definida positiva).

S'anomena fibrat canònic de la varietat M el fibrat de línia $K \xrightarrow{\pi} M$ les funcions de transició del qual són els jacobians dels canvis de coordenades d'un atles qualsevol de M. És fàcil establir el següent isomorfisme:

$$\Omega^0(E) \cong \Omega^n(E \otimes K^*).$$

Usant aquest isomorfisme el resultat anterior pot enunciar-se equivalentment de la següent manera:

Si $c_1(E \otimes K^*) > 0$, llavors $H^q(M, \Omega^0(E)) = 0$ per a $1 \leqslant q \leqslant n$.

El mètode utilitzat per demostrar aquests resultats, que com hem dit és degut originàriament a Bochner, ha inspirat un gran nombre de demostracions en diverses branques de la geometria diferencial. Esmentem com a exemple els resultats d'Eells i Sampson sobre aplicacions harmòniques de què hem parlat a la primera part d'aquesta Memòria.

Ara explicarem de quina manera es van utilitzar els teoremes d'anul·lació de Kodaira per generalitzar a varietats kählerianes qualssevol teoremes com el de Lefchetz i el lema d'Enriques–Severi–Zariski, la validesa del qual només es coneixia fins llavors per a varietats algebraiques. Sigui M una varietat kähleriana compacta de dimensió complexa n. Sigui S una subvarietat analítica no singular de dimensió complexa $n - 1$. Sigui E un fibrat de línia analític complex sobre M. Prenguem un recobriment finit $\{U_j\}$ suficientment fi de M. A cada U_j, la subvarietat S es pot definir per una equació holomorfa $s_j = 0$. Per als U_j que no tallen a S convindrem a designar per s_j la constant 1. A la subvarietat S se li pot associar el fibrat de línia $\{S\}$ definit pel sistema de funcions de transició holomorfes $s_{jk} = \frac{s_j}{s_k}$. A cada U_j que talla a S es pot triar un sistema de coordenades $z_j^1, \ldots, z_j^n$ tal que la funció s_j sigui precisament la primera coordenada z_j^1. Si $z \in S \cap U_j$ cada germen $\eta_j \in \Omega^p(E)_z$ pot descompondre's en la forma:

$$\eta_j = \sum_{1<\alpha_1<\cdots<\alpha_p} \eta_{j\alpha_1\cdots\alpha_p} dz_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_j^{\alpha_p} + \sum_{1<\alpha_2<\cdots<\alpha_p} \eta_{j1\alpha_2\cdots\alpha_p} dz_j^1 \wedge dz_j^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dz_j^{\alpha_p}$$

Amb l'ajuda d'aquesta expressió es pot associar a cada η_j el germen η'_j de p-formes holomorfes sobre S amb coeficients a E_S (restricció de E a S) definit per

$$\eta'_j = \sum_{1<\alpha_1<\cdots<\alpha_p} (\eta_{j\alpha_1\cdots\alpha_p})_S dz_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_j^{\alpha_p}$$

on $(\quad)_S$ denota la restricció a S. Designant per r' l'aplicació $\eta_j \mapsto \eta'_j$ s'obté la següent successió exacta de feixos:

$$0 \to \Omega''^p(E) \xrightarrow{i} \Omega^p(E) \xrightarrow{r'} \Omega^p(E_S) \to 0$$

on $\Omega''^p(E)$ és el nucli de r'. Ara bé, a cada $\eta_j \in \Omega''^p(E)_z$ pot associar-se el germen η''_j de $(p-1)$-formes holomorfes sobre S definit per:

$$\eta''_j = \sum_{1<\alpha_2<\cdots<\alpha_p} (\eta_{j\,1\,\alpha_1\cdots\alpha_p})_S dz_j^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dz_j^{\alpha_p}$$

η''_j és un germen de formes holomorfes a coeficients en el fibrat

$$E_S \otimes \{S\}^*_S,$$

ja que $\eta_j \in \Omega''^p(E)_z$ canvia de la següent manera en fer un canvi de coordenades:

$$\eta''_j = (f_{jk} s_{jk}^{-1})_S \, \eta''_k$$

on $\{f_{jk}\}$ són les funcions de transició de E. Designem per r'' l'aplicació que a cada $\eta_j \in \Omega''^p(E)$ assigna η''_j. Sigui $\zeta_j \in \Omega^p(E \otimes \{S\}^*)_z$. Designem i l'aplicació que al germen ζ_j assigna el germen $s_j\zeta_j \in \Omega''^p(E)_z$. Es té llavors la següent successió exacta de feixos:

$$0 \to \Omega^p(E \otimes \{S\}^*) \xrightarrow{i} \Omega''^p(E) \xrightarrow{r''} \Omega^{p-1}(E_S \otimes \{S\}^*_S) \to 0.$$

D'aquesta successió exacta de feixos i de l'anterior es desprenen les següents successions exactes de cohomologia:

$$\xrightarrow{i^*} H^{q-1}(M, \Omega''^p(E)) \xrightarrow{r''^*} H^{q-1}(S, \Omega^{p-1}(E_S \otimes \{S\}^*_S)$$
$$\xrightarrow{\delta^*} H^q(M, \Omega^p(E \otimes \{S\})) \to \cdots$$

i

$$\xrightarrow{i^*} H^{q-1}(M, \Omega^p(E)) \xrightarrow{r'^*} H^{q-1}(S, \Omega^p(E_S) \xrightarrow{\delta^*} H^q(M; \Omega''^p(E)) \to \cdots$$

Aquestes successions exactes són molt importants, especialment quan se substitueix el fibrat E per $E_m = E \otimes \{S\}^{*m}$, on $\{S\}^{*m}$ indica la m-èsima potència tensorial de $\{S\}^*$. Aquestes successions exactes que van ser introduïdes per Kodaira–Spender[31] el 1953 són presents en treballs posteriors d'extraordinària importància. Aplicant a aquestes successions els teoremes d'anul·lació de Kodaira s'obté de manera gairebé immediata el resultat següent:

Si $c_1(\{S\}^m \otimes E)$ conté un representant γ_m tal que $\theta^{p,q}(\gamma_m, \varphi, z) > 0$ per a $1 < p, q < m$ i si aquesta hipòtesi es verifica per a $1 \leqslant m \leqslant n$, llavors l'aplicació:

$$H^q(M, \Omega^p(E)) \xrightarrow{r'^*} H^q(S, \Omega^p(E_S))$$

és un isomorfisme per a $p+q < n-1$ i un monomorfisme per a $p+q = n-1$.

Aquest resultat generalitza el lema d'Enriques-Severi-Zariski.[32]

De l'isomorfisme de Hodge–Dolbeault–Kodaira se'n desprèn:

$$H^k(M, \mathbf{C}) \cong \sum_{p+q=k} H^q(M, \Omega^p).$$

Es té llavors el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccc} H^k(M, \mathbf{C}) & \cong & \sum_{p+q=k} H^q(M, \Omega^p) \\ r^* \downarrow & & r'^* \downarrow \\ H^k(S, \mathbf{C}) & \cong & \sum_{p+q=k} H^q(M, \Omega^p_S) \end{array}$$

Aplicant el resultat anterior a aquest diagrama s'infereix trivialment que:

Si $c_1(\{S\})$ conté un representant γ que satisfà la condició $\theta^{p,q}(\gamma, \varphi, z) > 0$ per a $1 \leqslant p, q \leqslant n$, aleshores $r^* : H^k(M, \mathbf{C}) \to H^k(S, \mathbf{C})$ és un isomorfisme per a $k < n-1$ i un monomorfisme per a $k = n-1$.

Aquest resultat generalitza el teorema de Lefschetz relatiu a l'homologia de les seccions hiperplanes d'una varietat algebraica.[33]

---

[31] Kodaira–Spencer: On a theorem de Lefschetz and the lemma of Enriques–Severi–Zariski. Proc. Nat. Ac. Sc. USA 39 (1953) 1273-1278.

[32] Zariski: Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques–Severi. Ann. of Math. 55 (1952) 552-592.

[33] Per a l'enunciat i demostració primitius del teorema de Lefschetz vegeu el llibre de Lefschetz "L'Analysis situs et la Géometrie algèbrique". Gauthier-Villards 1924, pàg. 89-91.

Aquestes generalitzacions, tant del lema d'Enriques–Severi–Zariski com del clàssic teorema de Lefschetz, no podien considerar-se del tot satisfactòries donat que no tenien un sentit geomètric clar. En efecte, en llegir els seus enunciats ens adonem que queda a l'aire la següent pregunta que no té una resposta satisfactòria. En quines condicions la forma hermítica $\theta^{p,q}(\gamma, \varphi, z)$ és definida positiva? Aquesta dificultat és la mateixa que trobàvem a l'enunciat del primer teorema d'anul·lació de Kodaira.

Transcorreguts pocs mesos des de la publicació de l'article de Kodaira–Spencer que conté aquests resultats, Akizuki i Nakano,[34] obtenen un altre teorema d'anul·lació més potent que el de Kodaira, que emprat a la situació anterior donarà sentit veritablement geomètric a les generalitzacions del teorema de Lefschetz i del lema d'Enriques–Severi–Zariski. Aquest teorema d'anul·lació es pot enunciar així:

Si $c_1(E) < 0$, llavors $H^q(M, \Omega^p(E)) = 0$ per $p + q \leqslant n - 1$.

Aplicant aquest resultat a les mateixes successions exactes de cohomologia que consideren Kodaira–Spencer, s'obté pel lema d'Enriques–Severi–Zariski el següent enunciat:

Si $c_1(E \otimes \{S\}^*) < 0$, la restricció $H^q(M, \Omega^p(E)) \to H^q(S, \Omega^p(E_S))$ és un isomorfisme per a $p + q < n - 1$ i un monomorfisme per a $p + q = n - 1$.

El teorema de Lefschetz ara es pot enunciar:

Si $c_1(\{S\}) > 0$, la restricció $H^k(M, \mathbf{C}) \to H^k(S, \mathbf{C})$ és un isomorfisme per a $k < n - 1$ i un monomorfisme per a $k = n - 1$.

Akizuki i Nakano utilitzen en la demostració del seu teorema d'anul·lació un procediment força simple (molt més que el de Kodaira) triant una mètrica convenient que simplifica els càlculs. No obstant això, el mètode d'Akizuki–Nakano és menys apte que el de Kodaira per donar teoremes d'anul·lació per a $c_1(E)$ semidefinida positiva o negativa.

Hem dit en una ocasió que les idees de Hodge estan subjacents en molts dels avenços sobre el coneixement de les varietats kählerianes compactes. L'any 1951, Hodge va introduir les varietats kählerianes que ell va anomenar «de tipus restringit»[35] i que amb el temps canviarien de nom per anomenar-se varietats de Hodge. Va ser André Weil el primer que les va anomenar així, en un treball publicat el 1952.[36] Una varietat complexa compacta M es diu

[34] Akizuki–Nakano: Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems. Proc. Japan Acad. 30 (1954) 266-272.

[35] Hodge: A special type of Kähler manifolds. Proc. London Math. Soc. 1 (1951) 104-117.

[36] A. Weil: On Picard varieties. Amer. J. Math. 74 (1952) 865-894.

varietat de Hodge si admet una mètrica kähleriana g de manera que la seva forma de Kähler

$$F = \sqrt{-1}g_{\alpha\bar{\beta}}dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}$$

sigui una classe de cohomologia d'un 2-cicle enter. Dit d'una altra manera, si la integral $\int_c F$ és un nombre enter sigui quin sigui el cicle singular enter c. Una tal mètrica es diu «de Hodge». La mètrica de Fubini sobre l'espai projectiu complex $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ n'és un exemple. D'aquí resulta immediatament que la mètrica induïda a qualsevol subvarietat complexa de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ és de Hodge. Per tant, totes les varietats algebraiques sense singularitats són de Hodge. Hi ha, a més d'aquestes, alguna altra varietat de Hodge? La resposta a aquesta pregunta donada per Kodaira el 1954[37] és negativa i constitueix un considerable avenç en el coneixement de les varietats kählerianes compactes, ja que el fet que una varietat complexa sigui o no algebraica és equivalent al fet que admeti o no una mètrica de Hodge. Com a conseqüència immediata d'aquest resultat, tota varietat kähleriana compacta amb primera classe de Chern definida positiva o negativa és algebraica, ja que si $\gamma = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\gamma_{\alpha\bar{\beta}}dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}$ és un representant de $c_1(M)$ tal que la matriu hermítica $(\gamma_{\alpha\bar{\beta}})$ és definida positiva (o negativa) en tot punt, la mètrica g definida posant $g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\bar{\beta}}$ (o $g_{\alpha\bar{\beta}} = -\gamma_{\alpha\bar{\beta}}$) és de Hodge. (Recordem que les classes de Chern són classes de cohomologia entera).

La importància d'aquest resultat de Kodaira justifica que diguem dues paraules sobre els mètodes utilitzats en la demostració. Sigui M una varietat kähleriana compacta. Sigui F un fibrat de línia analític complex sobre M. Sigui $\Gamma(F)$ l'espai vectorial de les seccions holomorfes de F. Si el fibrat F té funcions de transició f_{ij} en un recobriment $\{U_i\}$, una secció holomorfa de F vindrà donada per un sistema de funcions holomorfes $\{s_i\}$ sobre cada U_i tals que $s_i(x) = f_{ij}(x)s_j(x)$. El sistema $\{s_i\}$ es pot considerar com una funció holomorfa amb coeficients a F. Com les funcions holomorfes coincideixen amb les harmòniques i l'espai de funcions harmòniques és de dimensió finita com a conseqüència del teorema de Hodge, $\Gamma(F)$ és de dimensió finita.

Sigui $s_0, \ldots, s_d$ una $\mathbf{C}$-base de $\Gamma(F)$. Fem correspondre, a cada punt $x \in U_j$, el punt de $\mathbf{P}_d(\mathbf{C})$ que té per coordenades homogènies

$$(s_{0j}(x), \ldots, s_{dj}(x)).$$

Evidentment, si $x \in U_i \cap U_j$, $(s_{0i}(x), \ldots, s_{di}(x))$ i $(s_{0j}(x), \ldots, s_{dj}(x))$ són el mateix punt, ja que aquest s'obté de l'anterior multiplicant totes les seves coordenades per les funcions de transició. El fibrat F estableix doncs una

[37] Kodaira: On Kähler varieties of restricted type. Ann. of Math. 60 (1954) 28-48.

correspondència (que designem també per F):

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & \mathbf{P}_d(\mathbf{C}) \\ U_j \ni x & \longmapsto & (s_{0j}(x), \ldots, s_{dj}(x)) \end{array}$$

Aquesta aplicació està definida excepte per als punts tals que

$$s_{0j}(x) = \cdots = s_{dj}(x) = 0,$$

ja que $(0, \ldots, 0)$ no determina cap punt de $\mathbf{P}_d(\mathbf{C})$. Un fibrat de línia F sobre M s'anomena «ample» si l'aplicació anterior està definida en tot punt de M i, a més, és una immersió analítica complexa de M a $\mathbf{P}_d(\mathbf{C})$. En virtut del teorema de Chow que hem esmentat ja al §1, per provar el resultat n'hi haurà prou de veure que tota varietat de Hodge admet almenys un fibrat de línia «ample». Per això Kodaira prova primer el següent teorema:

Si M admet una mètrica de Hodge, existeix sobre M una forma diferencial β de tipus $(1,1)$ de manera que tot fibrat de línia analític complex F sobre M amb $c_1(F) > \beta$ és ample. (Es diu que $c_1(F) > \beta$ si hi ha γ de tipus $(1,1)$, $\gamma \in c_1(F)$, tal que $\gamma - \beta$ és definida positiva).

Aquest teorema, tal com està enunciat aquí, constitueix una important baula en la demostració del teorema de Riemann–Roch de Hirzebruch. Observem que se'n desprèn el resultat desitjat: que sobre M existeix almenys un fibrat ample. En efecte, multiplicant la mètrica de Hodge per un enter positiu prou gran, s'obté una altra mètrica de Hodge amb forma de Kähler $\gamma > \beta$. En virtut de l'isomorfisme entre $H^2_{(1,1)}(M, \mathbf{Z})$ i el grup dels fibrats de línia complexos sobre M de què ja hem parlat, existirà un fibrat de línia F tal que $\gamma \in c_1(F)$, i aquest fibrat serà «ample» en virtut del teorema anterior. Per provar aquest teorema, Kodaira utilitza un mètode que, segons ell mateix confessa, està inspirat en un argument de Castelnuovo–Enriques sobre les corbes excepcionals de primera espècie d'una superfície algebraica.[38] A la demostració hi intervenen de manera fonamental els teoremes d'anul·lació aplicats a les successions exactes de les quals hem parlat en referir-nos a la generalització del lema d'Enriques–Severi–Zariski.

Amb els avenços realitzats el 1953 i 1954, el coneixement de les varietats kählerianes compactes havia arribat al seu període de maduresa. El teorema d'equivalència de varietats algebraiques sense singularitats i varietats de Hodge permetia aplicar mètodes de geometria diferencial en el tractament de problemes de geometria algebraica. El fruit més important d'aquesta nova

[38]Castellnuovo–Enriques: Sopra alcune questioni fondamentali nelle teoria delle superfície algebriche. Annali di Mat. 6 (1901) 165-225.

mentalitat és sens dubte el teorema de Riemann–Roch de Hirzebruch.[39] En acabar la dècada dels 30, Todd, en dos treballs que es complementen[40] va introduir unes classes característiques (anomenades després d'Eger–Todd) i va mostrar que el gènere aritmètic d'una varietat algebraica podia representar-se en termes de tals classes característiques. Posteriorment, les classes de Chern, introduïdes el 1946, van anar desplaçant les classes d'Eger–Todd. Els treballs de Todd van ser actualitzats el l955 per Nakano usant les classes de Chern.[41] Per enunciar el teorema de Riemann–Roch, comencem definint la classe de Todd d'un fibrat en la seva forma definitiva deguda a Hirzebruch.

Sigui $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrat vectorial complex m-dimensional sobre una varietat complexa M. Hi ha un resultat de topologia algebraica conegut pel nom de «principi de descomposició» que afirma l'existència d'una varietat complexa $\bar{M}$ i una aplicació $f : \bar{M} \to M$ tal que $f^*(E) = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$, amb E_i fibrats de línia, i tal que l'aplicació induïda a l'àlgebra de cohomologia:

$$f^* : H^*(M, \mathbf{R}) \to H^*(\bar{M}, \mathbf{R})$$

és un monomorfisme. En virtut d'aquesta injecció, podem considerar $H^*(M, \mathbf{R})$ com a subàlgebra de $H^*(\bar{M}, \mathbf{R})$. Designem per $\gamma_i = c_1(E_i) \in H^2(\bar{M}, \mathbf{R})$. Definim la classe de Todd de E per la fórmula següent:

$$\mathsf{td}(E) = \prod_{i=1}^{m} \frac{\gamma_i}{1 - e^{-\gamma_i}}$$

L'expressió $\frac{x}{1-e^{-x}}$ té el següent desenvolupament en sèrie:

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} = e^{\frac{x}{2}} \frac{x/2}{\sinh x/2} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} x^{2k}$$

sent B_k els nombres de Bernoulli. El desenvolupament en sèrie de $\frac{\gamma_i}{1-e^{-\gamma_i}}$ és finit ja que $\gamma_i^k \in H^{2k}(\bar{M}, \mathbf{R})$ i $H^{2k}(\bar{M}, \mathbf{R}) = 0$ quan $2k > \dim \bar{M}$. En virtut dels axiomes 2 i 3 que caracteritzen les classes de Chern, es verifica:

$$f^*(c(E)) = c(f^*(E)) = (1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2) \cdots (1 + \gamma_m)$$

[39] Hirzebruch: Neue topologische Methoden in algebraischen Geometrie (1956) Ergebnisse. Springer-Verlag.

[40] Todd: The arithmetical invariants of algebaic loci. Proc. London Math. Soc. 43 (1937) 190-225. The geometric invariants of algebraic loci. Proc. London Math. Soc. 45 (1939) 410-434.

[41] Nakano: Tangential vector bundles and Todd canonical systems of an algebraic variety. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto 29 (1955) 145-149.

on $c(E)$ indica la classe total de Chern definida per $\sum_i c_i(E)$. En considerar $H^*(M,\mathbf{R})$ com a subàlgebra de $H^*(\bar{M},\mathbf{R})$ mitjançant la inclusió f^*, escriurem (per abús de llenguatge) $c(E)$ en lloc de $f^*(c(E))$. Tindrem doncs

$$1 + c_1(E) + \cdots + c_m(E) = c(E) = \prod_{1\leqslant i\leqslant m} (1+\gamma_i).$$

És a dir, $c_i(E)$ és l'i-èsim polinomi simètric elemental en les variables $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$. Ara bé, l'expressió $\prod_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{1-e^{-\gamma_i}}$ és un polinomi simètric en $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ i s'escriurà:

$$\prod_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{1-e^{-\gamma_i}} = 1 + T_1(\gamma_1,\ldots,\gamma_m) + T_2(\gamma_1,\ldots,\gamma_m) + \cdots ,$$

sent T_i un polinomi homogeni de grau i simètric a les variables $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$. Els polinomis $T_1, T_2, \ldots$ podran expressar-se com a polinomis en els polinomis simètrics elementals, que són les classes de Chern. La seva expressió no és senzilla:

$$\begin{aligned} T_1 &= \tfrac{1}{2}c_1 \\ T_2 &= \tfrac{1}{12}(c_2 + c_1^2) \\ T_3 &= \tfrac{1}{24}c_2c_1 \\ T_4 &= \tfrac{1}{720}(-c_4 + c_3c_1 + 3c_2^2 + 4c_2c_1^2 - c_1^4) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Com $c_i(E) \in H^*(M,\mathbf{R})$ i $\prod_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{1-e^{-\gamma_i}}$ pot expressar-se com a polinomi en les classes de Chern, això prova que $\mathsf{td}(E)$, que a priori pertanyia a $H^*(\bar{M},\mathbf{R})$, de fet pertany a la subàlgebra $H^*(M,\mathbf{R})$. Es comprova fàcilment que la classe de Todd verifica:

$$\mathsf{td}(E_1 \oplus E_2) = \mathsf{td}(E_1)\mathsf{td}(E_2)$$

Suposem que M té dimensió complexa n. Sigui $\varkappa$ la projecció natural:

$$H^*(M,\mathbf{R}) \to H^{2n}(M,\mathbf{R}).$$

Sigui γ una $2n$-forma diferencial tancada representant la classe de cohomologia $\varkappa(\mathsf{td}({}^cT(M)))$. Si M és compacta, es defineix el gènere de Todd de M per la fórmula:

$$\mathsf{TD}(M) = \int_M \gamma.$$

En virtut de les expressions que hem trobat dels polinomis T_i en funció de $c_1, \ldots, c_m$, si M és de dimensió complexa 1 (una corba),

$$\varkappa(\mathsf{td}({}^cT(M))) = \tfrac{1}{2}c_1({}^cT(M)).$$

Si M és una superfície,

$$\varkappa(\mathsf{td}({}^cT(M))) = \tfrac{1}{12}[c_1({}^cT(M))^2 + c_2({}^cT(M))].$$

Suposem que M té dimensió complexa 1. Tindrà dimensió real 2 i, per tant, serà homeomorfa a una esfera amb p nanses. Aleshores, si $\gamma \in \frac{1}{2}c_1({}^cT(M))$, en virtut de la fórmula de Gauss-Bonnet (generalitzada per Chern) es tindrà:

$$\int_M \gamma = \tfrac{1}{2}(2-2p) = 1-p$$

Si D és una classe de divisors de M, designem per $H^0(M,D)$ l'espai vectorial complex de totes les funcions meromorfes f sobre M tals que $D+(f)$ és un divisor sense pols. En virtut del teorema clàssic de Riemann–Roch per a corbes, es verifica:

$$\dim H^0(M,D) - \dim H^0(M,K-D) = d+1-p$$

on d és el grau del divisor D i K és la classe canònica. En particular, prenent $D=0$, es té :

$$\int_M \gamma = 1-p = \dim H^0(M,0) - \dim H^0(M,K).$$

Si $\{D\}$ és el fibrat de línia corresponent a un divisor D, es verifica

$$H^0(M,D) = H^0(M,\Omega^0(\{D\})),$$

i pel teorema de Hodge–Dolbeault–Kodaira, $H^0(M,\Omega^0(\{D\})) = H^{0,0}(\{D\})$. Com que a la classe canònica de divisors correspon el fibrat canònic, es tindrà:

$$\mathsf{TD}(M) = 1-p = \dim H^{0,0}(\{0\}) - \dim H^{0,0}(K^{-1})$$

on K indica aquí el fibrat canònic. Com $H^{0,0}(K^{-1}) = H^{0,1}(\{0\})$, la fórmula anterior es redueix a:

$$\mathsf{TD}(M) = \dim H^{0,0} - \dim H^{0,1}.$$

Si M és una varietat kähleriana qualsevol, es diu gènere aritmètic de M al nombre

$$\chi(M) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbf{C}} H^{0,i}.$$

En el cas que M sigui una corba algebraica, el teorema de Riemann–Roch clàssic per a corbes ens diu que:

$$\mathsf{TD}(M) = \chi(M).$$

Kodaira va demostrar el 1951 que la fórmula anterior també és vàlida per a superfícies algebraiques (dimensió 2). La generalització de Hirzebruch del teorema de Riemann–Roch afirma que la fórmula anterior és vàlida per a qualsevol varietat de Hodge, és a dir, algebraica sense singularitats. Més encara, generalitza per a fibrats vectorials la fórmula anterior en el sentit següent:

Si $E \xrightarrow{\pi} M$ és un fibrat vectorial analític complex sobre M, s'anomena gènere de Todd de M relatiu al fibrat E al nombre que s'obté integrant sobre tota la varietat un representant de $\varkappa(\mathsf{ch}(E)\mathsf{td}({}^cT(M)))$, on $\mathsf{ch}(E)$ indica el caràcter de Chern, definit, anàlogament a com hem introduït la classe de Todd, mitjançant l'expressió:

$$\mathsf{ch}(E) = \sum_{i=1}^{m} e^{\gamma_i}.$$

El gènere aritmètic de M relatiu al fibrat E es defineix per l'expressió:

$$\chi(M, E) = \sum (-1)^i \dim H^{0,i}(E).$$

El teorema de Riemann–Roch de Hirzebruch per a fibrats diu que si M és una varietat de Hodge, llavors es verifica:

$$\mathsf{TD}(M, E) = \chi(M, E).$$

Hirzebruch va obtenir primer aquest teorema en el cas particular en què E és un fibrat de línia. En la demostració s'utilitzen essencialment els teoremes d'anul·lació de Kodaira, el teorema dels fibrats amples i el d'equivalència entre les varietats de Hodge i algebraiques, també de Kodaira, juntament amb la teoria del cobordisme de Thom. Molt recentment s'ha demostrat que el teorema de Riemann–Roch de Hirzebruch és vàlid per a varietats kählerianes compactes qualssevol (no necessàriament de Hodge).[42]

Diguem ara dues paraules sobre la versió que va donar Grothendieck[43] del teorema de Riemann–Roch, que és particularment important perquè és la més

[42] V. K. Patodi: An analytic proof of Riemann–Roch–Hirzebruch theorem for Kähler manifolds. J. of Diff. Geom. 5 (1971) 251-283.

[43] Borel–Serre: Le théorème de Riemann-Roch d'après Grothendieck. Bull. Soc. Math. France 86 (1958) 97-136.

apta per ser traslladada a les varietats reals tal com hem vist a la primera part d'aquesta Memòria.

Sigui $F(M)$ el grup abelià lliure engendrat pel conjunt de classes d'isomorfia dels fibrats vectorials complexos sobre M. Sigui

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

una successió exacta de fibrats vectorials complexos sobre M. Sigui $K(M)$ el grup quocient de $F(M)$ mòdul el subgrup engendrat per

$$E - E' - E''$$

per a totes les successions exactes de la forma anterior. Amb la suma de Whitney i el producte tensorial, $K(M)$ constitueix un anell anomenat anell de Grothendieck. Si E és un fibrat sobre M, el caràcter de Chern de E pertany a $H^*(M, \mathbf{Q})$ i, per tant, el caràcter de Chern dona un homomorfisme (d'anells):

$$K(M) \xrightarrow{\mathsf{ch}} H^*(M, \mathbf{Q})$$

Siguin M i N dues varietats de Hodge i $f : M \to N$ una aplicació holomorfa. Tenim el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccc} H_p(M, \mathbf{Q}) & \xrightarrow{f_*} & H_p(N, \mathbf{Q}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^{2m-p}(M, \mathbf{Q}) & \xrightarrow{f_*} & H^{2n-p}(N, \mathbf{Q}) \end{array}$$

on m i n són les dimensions complexes de M i N, respectivament, i les fletxes verticals indiquen els isomorfismes donats per la dualitat de Poincaré. L'aplicació f indueix també un morfisme additiu $f_! : K(M) \to K(N)$ de la següent manera: Sigui $E \in K(M)$. Assignem a cada obert $V \subset N$ el grup $H^q(f^{-1}(V), \Omega^0(E))$. Designem per $R^q\Omega(E)$ el feix engendrat per aquest prefeix. Posem

$$f_!(E) = \sum (-1)^i R^i \Omega(E).$$

En les varietats algebraiques, els feixos algebraics coherents es poden identificar amb els fibrats vectorials complexos. Per aquesta raó, $f_!(E)$ es pot considerar com un element de $K(M)$. Amb aquestes notacions el teorema de Riemann–Roch de Grothendieck es pot enunciar de la següent manera:

$$f_*(\mathsf{ch}(E)\mathsf{td}(^cT(M))) = \mathsf{ch}(f_!(E)\mathsf{td}(^cT(N))).$$

Quan N es redueix a un punt, la fórmula anterior dona el teorema de Riemann–Roch de Hirzebruch.

5 Algunes conseqüències del teorema de Riemann–Roch

La versió primitiva de Hirzebruch del teorema de Riemann–Roch, encara que només és vàlida per a varietats algebraiques, constitueix un poderós instrument per a l'obtenció de resultats que podríem considerar propis de la geometria diferencial. Gràcies a aquest teorema es coneixen per exemple els teoremes següents:[44]

(A) Una varietat kähleriana compacta M amb tensor de Ricci definit positiu és simplement connexa.

(B) Per a una varietat kähleriana compacta M amb primera classe de Chern definida positiva es verifica $H_1(M, \mathbf{Z}) = 0$.

Vegem com es fa servir el teorema de Riemann-Roch en obtenir aquests resultats concrets. Es coneixia ja[45] des de 1941 que el grup de Poincaré d'una varietat de Riemann compacta amb tensor de Ricci positiu és un grup finit. Hem vist anteriorment que tota varietat kähleriana compacta amb primera classe de Chern positiva era algebraica. (Això era conseqüència del teorema d'equivalència entre varietats de Hodge i algebraiques). A aquestes varietats podem aplicar-los el teorema de Riemann-Roch de Hirzebruch. En virtut d'aquest teorema, el gènere aritmètic de M ve donat per la integral sobre M d'un polinomi en les classes de Chern c_i, polinomi que depèn només de la dimensió n de M i no de M. Per exemple $\frac{1}{2}c_1$ si $n = 1$, $\frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)$ si $n = 2$, etc. Sigui $M^* \xrightarrow{\pi} M$ un espai recobridor de k fulles de M. La mètrica kähleriana de M indueix una mètrica kähleriana a M^*. Si indiquem per c_i^* la i-èsima classe de Chern de M^*, es té $\pi^*(c_i) = c_i^*$. El teorema de Riemann-Roch de Hirzebruch aplicat a aquest cas ens diu que:

$$\chi(M^*) = k\chi(M).$$

Com a conseqüència immediata dels teoremes d'anul·lació de Kodaira en tota varietat kähleriana compacta M amb primera classe de Chern definida positiva, es verifica $H^{0,i}(M) = 0$ per a $i > 0$. En aquest cas, ja que tant M com M^* tenen primera classe de Chern definida positiva, es tindrà:

$$\chi(M) = \chi(M^*) = 1.$$

[44] Kobayashi: On compact Kähler manifolds with positive definite Ricci tensor. Ann. of Math. 74 (1961) 570-574.

[45] Myers: Riemannian manifolds with positive mean curvature. Duke Math. J. 8 (1941) 401-404.

Comparant aquest resultat amb l'anterior, es desprèn $k = 1$, és a dir, el grup de Poincaré de M no pot tenir cap subgrup propi d'índex finit. Això, juntament amb el resultat de Myers abans esmentat implica el teorema (A).

Suposem ara que la primera classe de Chern de M és positiva. Com que $H^{0,1}(M) = H^{1,0}(M) = 0$, el primer nombre de Betti de M ha de ser nul. Això implica que $H_1(M, \mathbf{Z})$ és un grup finit. Per un altre costat es verifica:

$$H_1(M, \mathbf{Z}) = \pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$$

on $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ designa el commutador de $\pi_1(M)$. Com que $\pi_1(M)$ no pot tenir subgrups propis d'índex finit, s'ha de complir

$$\pi_1(M) = [\pi_1(M), \pi_1(M)],$$

d'on es dedueix el resultat (B). Sembla que el resultat (A) s'ha de verificar també amb les mateixes hipòtesis que (B), però això és de moment una qüestió oberta. (▷ **3**)

6 Cerca de teoremes d'anul·lació per a fibrats vectorials. El treball de Nakano

Als treballs dels anys 1953 i 1954 sobre varietats kählerianes compactes, que tan fructífers van resultar, podem observar que només apareixen formes diferencials amb coeficients en un fibrat de línia. La generalització dels resultats a fibrats vectorials qualsevol s'inicia el 1955 amb un treball de Nakano[46] que conté una generalització del teorema d'anul·lació d'Akizuki–Nakano a fibrats vectorials qualsevol.

Recordem l'enunciat del resultat d'Akizuki-Nakano:

Si E és un fibrat de línia holomorf sobre M i $c_1(E) < 0$, $H^{p,q}(E) = 0$ per a $p + q \leqslant n - 1$ sent n la dimensió complexa de M.

Si suposem ara que E és un fibrat vectorial holomorf qualsevol, en lloc de fibrat de línia, quina ha de ser la hipòtesi que cal fer en lloc de $c_1(E) < 0$ per obtenir un teorema anàleg a l'anterior?

Prenguem sobre cada fibra E_x de E una mètrica hermítica h_x depenent diferenciablement de x. Aquesta mètrica determina una única connexió a E la forma de connexió de la qual és de tipus $(1, 1)$. Sigui Ω la forma de curvatura

[46] Nakano : On complex analytic vector bundles. J. Math. Soc. Japan 7 (1955) l-12.

d'aquesta connexió. Podem definir un tensor H associat a la mètrica h de la següent manera:

$$H(\varphi, X, \psi, Y) = h(\Omega(X, \bar{Y})\varphi, \psi),$$

on X, Y són camps de vectors complexos de M i φ, ψ seccions de E. Aquest tensor verifica

$$H(\varphi, X, \psi, Y) = \overline{H(\psi, Y, \varphi, X)}.$$

En una carta local U de M tal que $E|U$ sigui trivial, sigui $\{s_A\}_{A=1,\dots,m}$ un sistema de m seccions de $E|U$ de manera que a cada $x \in U$ constitueixin una base de la fibra E_x. Sigui $(x^1, \dots, x^{2n})$ un sistema de coordenades reals a U. Posem

$$H_{A_i,B_j} = H(s_A, \partial_i, s_B, \partial_j).$$

El fibrat E es diu negatiu si es pot trobar una mètrica hermítica h de E el tensor H associat de la qual sigui tal que a cada carta local verifiqui:

$$H_{A_i,B_j} X^{A_i} X^{B_j} \leqslant 0$$

qualsevol que sigui l'1-camp X amb coeficients a E, i a més se suposa que la igualtat només s'assoleix quan l'1-camp X és nul.

La hipòtesi que el fibrat E sigui negatiu (que escriurem $E < 0$) és la que substitueix $c_1(E) < 0$. Quan E és de línia, $E < 0 \iff c_1(E) < 0$. Nakano prova que substituint la hipòtesi $c_1(E) < 0$ per $E < 0$, el resultat d'Akizuki–Nakano continua sent cert per a fibrats vectorials. Encara que la hipòtesi de Nakano, $E < 0$, no té un significat geomètric clar, el seu gran mèrit rau a trobar un marc adequat en el qual els càlculs coneguts per a fibrats de línia poden copiar-se fàcilment per a fibrats qualssevol. Per aquesta raó, el treball de Nakano és fonamental en tot el desenvolupament posterior de la teoria.

Precisament perquè la primitiva definició de $E < 0$ o $E > 0$ no té un significat geomètric clar, i a més és força forta, s'ha intentat donar-ne altres definicions. Així, per exemple, el 1965 Griffiths[47] dona la definició següent:

Un fibrat E sobre M es diu feblement positiu si hi ha una mètrica hermítica h a E el tensor de Nakano H de la qual verifica

$$H(\varphi, X, \varphi, X) \geqslant 0$$

sigui quin sigui el camp X sobre M i la secció φ de E. Se suposa a més que la igualtat només s'assoleix quan el camp X o la secció φ s'anul·len. Així

[47] Griffiths: Hermitian differential geometry and the theory of positive and ample holomorphic vector bundles. J. Math. Mech. 14 (1965) 117-140.

com amb les hipòtesis de Nakano "$E < 0$ o $E > 0$" es coneixen tots els teoremes d'anul·lació que es coneixien per a fibrats de línia, amb les hipòtesis de Griffiths "E feblement > 0 o E feblement < 0" amb prou feines es coneixen teoremes d'anul·lació. Aquest opositor ha trobat teoremes d'anul·lació per a fibrats feblement semi-definits positius o negatius ($\triangleright$ **4**).[48] Un treball recent de Griffiths[49] relaciona entre si les diverses definicions de fibrat positiu i de fibrat ample que poden donar-se per a fibrats vectorials i dona teoremes d'anul·lació per a fibrats feblement positius. En general, aquest camp està molt poc madur. Les dificultats que es presenten són grans i els resultats obtinguts ben modestos. ($\triangleright$ **5**)

7 Deformació d'estructures complexes

El 1957, Fröhlicher i Nijenhuis per una banda, i Kodaira i Spencer per a una altra, comencen a interessar-se en la deformació d'estructures complexes.

Considerem per exemple una varietat complexa M i una família $\{V_t\}$ de subvarietats analítiques de M depenents diferenciablement d'un paràmetre t (en un sentit que cal precisar). L'estructura complexa de M determina a cada V_t una estructura complexa que pot donar-se pel tensor J_t tal que $J_t^2 = -\mathrm{Id}$. En quines condicions les estructures complexes dels V_t per a tots els t en un cert entorn d'un paràmetre fix t_0 seran equivalents? I globalment, quan ho seran?

Els autors citats[50] [51] plantegen el problema de manera general, sense suposar les V_t subvarietats d'una varietat fixa. Un tractament exhaustiu del problema apareix un any després i és obra de Kodaira i Spencer.

En les 139 pàgines, els autors presenten un cos de doctrina que resol, a més d'englobar tots els resultats anteriors, un gran nombre de problemes.[52] No obstant això, els autors no demostren gran part dels resultats del §2 del treball relatius a les formes harmòniques al llarg d'una família diferenciable d'es-

[48] J. Girbau: Fibrès semi-positifs et semi-négatifs sur una variété kählerienne compacte. Ann. di Mat. Pura Appl. 101.1 (1974) 171-183 (anunciat com «en curs de publicació» a la memòria original).

[49] Griffiths: Hermitian differential Geometry, Chern classes and positive vector bundles. Global Analysis Princeton Math. series n. 29 (1969) 185-251.

[50] Fröhlicher–Nijenhuis: A theorem on stability of complex structures. Proc. Nat. Ac. Sc. 43 (1957) 239-241.

[51] Kodaira–Spencer: On the variation of almost-complex structure. Princeton University Press 1957.

[52] Kodaira-Spencer: On deformation of complex analytic structures I, II. Ann of Math. 67 (1958) 328-466.

tructures complexes i sobre les quals es recolza tota la teoria. La demostració d'aquests resultats entra de ple en la teoria del potencial i no apareix fins a 1960.[53] Intentem resumir els resultats més importants de Kodaira i Spencer sobre les deformacions.

Una família diferenciable d'estructures complexes consisteix a donar un fibrat diferenciable $\mathcal{V} \xrightarrow{\omega} X$ sobre una varietat diferenciable X tal que:

(a) Cada fibra $V_t = \omega^{-1}(t), t \in X$, és una varietat analítica complexa l'estructura complexa de la qual és compatible amb l'estructura diferenciable de $\mathcal{V}$.

(b) Hi ha un entorn U de cada punt de $\mathcal{V}$ i un homeomorfisme diferenciable h de U a $\mathbf{C}^n \times \omega(U)$ tal que per a cada $t \in \omega(U)$ la restricció h_t de h a $U \cap V_t$ és una aplicació biholomorfa de $U \cap V_t$ a $\mathbf{C}^n \times \{t\}$.

Donat un obert U de $\mathcal{V}$, designem per $\Theta(U)$ l'espai dels camps de vectors sobre U tangents a les fibres V_t i la restricció dels quals a cada fibra és un camp holomorf de $V_t \cap U$. Anomenem $\Pi(U)$ l'espai dels camps de vectors Y sobre U tals que si $\omega(x) = \omega(x') = t$ es tingui $\omega_*(Y_x) = \omega_*(Y_{x'})$ i tals que per a cada $t \in \omega(U)$, Y_x depengui holomòrficament de x quan $x \in V_t \cap U$ (t fix). El fet de donar sobre cada U l'espai $\Theta(U)$ amb els operadors de restricció evidents engendra un feix Θ sobre $\mathcal{V}$. De la mateixa manera els $\Pi(U)$ engendren un feix Π. Hi ha una inclusió canònica:

$$\Theta \xrightarrow{i} \Pi$$

Anomenem T el feix quocient. La successió exacta:

$$0 \to \Theta \xrightarrow{i} \Pi \to T \to 0$$

dona lloc sobre cada obert U de X a la successió exacta de cohomologia:

$$0 \to H^0(\mathcal{V}|U, \Theta) \to H^0(\mathcal{V}|U, \Pi) \to H^0(\mathcal{V}|U, T) \xrightarrow{\delta^*} H^1(\mathcal{V}|U, \Theta) \to \cdots$$

Quan U és prou petit, la projecció $\mathcal{V} \xrightarrow{\omega} X$ indueix un isomorfisme

$$H^0(\mathcal{V}|U, T) \cong T_x(U)$$

on $T_x(U)$ és l'espai dels camps de vectors diferenciables sobre U. Substituint en la successió exacta de cohomologia anterior $H^0(\mathcal{V}|U, T)$ per $T_x(U)$, l'homomorfisme δ^* dona lloc a un morfisme:

$$\rho_U : T_x(U) \to H^1(\mathcal{V}|U, \Theta)$$

[53] Kodaira-Spencer: On deformation of complex analytic structures III: Stability theorems. Ann of Math. 71 (1960) 43-76.

Si $\mathcal{A}$ és un feix sobre $\mathcal{V}$, designem per $\mathcal{H}^q(\mathcal{A})$ el feix sobre X engendrat pel prefeix definit assignant a cada obert U de X l'espai $H^q(\mathcal{V}|U, \mathcal{A})$. Amb aquestes notacions, per pas al límit de la successió exacta de cohomologia anterior s'obté la successió:

$$0 \to \mathcal{H}^0(\Theta) \to \mathcal{H}^0(\Pi) \to T_x \xrightarrow{\rho} \mathcal{H}^1(\Theta) \to \cdots$$

Una família diferenciable d'estructures complexes $\mathcal{V} \to X$ es diu localment trivial si per a cada $t \in X$ existeix un entorn U de t i una aplicació diferenciable $h : \mathcal{V}|U \to V_t$ tals que per a cada $t' \in U$ la restricció $h_{t'}$ de h a $V_{t'}$ és un homeomorfisme biholomorf de $V_{t'}$ sobre V_t.

Vet aquí, amb aquestes notacions, el primer resultat important de Kodaira–Spencer:

Per tal que una família diferenciable d'estructures complexes $\mathcal{V} \xrightarrow{\omega} X$, que se suposa amb fibres compactes, sigui localment trivial, és necessari i suficient que el morfisme:

$$T_X \xrightarrow{\rho} \mathcal{H}^1(\Theta)$$

sigui nul.

El morfisme ρ es pot considerar l'objecte que representa la magnitud de dependència de l'estructura complexa V_t del paràmetre t. La restricció Θ_t de Θ a la fibra V_t de $\mathcal{V}$ coincideix amb el feix de gèrmens de vectors holomorfs sobre V_t i, per tant, $H^1(V_t, \Theta_t)$ depèn només de V_t. Per restricció de ρ a V_t s'obté el morfisme

$$\rho_t : (T_X)_t \to H^1(V_t, \Theta_t),$$

on $(T_X)_t$ indica l'espai tangent a X a t. El morfisme ρ_t va ser el primer que van introduir Fröhlicher i Nijenhuis. Per a cada vector tangent $v_t \in (T_X)_t$, la imatge $\rho_t(v_t) \in H^1(V_t, \Theta_t)$ representa la deformació infinitesimal de l'estructura complexa de V_t en la direcció v_t. Evidentment, $\rho = 0$ implica $\rho_t = 0$ per a tot t, però el recíproc no és necessàriament cert com es pot provar amb un contraexemple. Amb l'ajuda de la teoria de formes harmòniques, els autors proven que si la dimensió de $H^1(V_t, \Theta_t)$ és independent de t, llavors $\rho = 0$ si i només si $\rho_t = 0$ per a cada t i d'això deriven el següent teorema de Fröhlicher i Nijenhuis:

Si per a un t fix es compleix $H^1(V_t, \Theta_t) = 0$, hi ha un entorn U de t tal que $\mathcal{V}|U \to U$ és una família diferenciable d'estructures complexes trivial.

Aquest teorema és un resultat de «rigidesa» d'estructures complexes.

Restringint les seves consideracions a subvarietats complexes d'una varietat complexa M, Kodaira i Spencer obtenen la corresponent teoria de deformacions relativa a M.

En aquest treball es troba també la demostració del següent teorema degut a Nakano, fins aleshores no publicat:

Sigui M una varietat kähleriana compacta i Θ el feix de gèrmens de vectors holomorfs. Si $c_1(M) < 0$ llavors $H^0(M, \Theta) = 0$ i si $c_1(M) > 0$ llavors $H^q(M, \Theta) = 0$ per a $q \geqslant 2$.

La primera part del teorema assegura que si $c_1(M) < 0$, llavors a M no hi ha cap camp global holomorf. Això comporta que M no admet cap grup continu d'automorfismes analítics. Aquest resultat, conegut ja per Poincaré en el cas que $\dim M = 1$, va ser objecte de dues importants generalitzacions degudes a Kobayashi i Lichnerowicz.

Poincaré, com hem dit, sabia que tota superfície de Riemann compacta de gènere > 1 admet només un nombre finit de transformacions holomorfes.[54]

Kobayashi va generalitzar el 1959[55] el resultat de Nakano de la següent manera:

Si M és una varietat kähleriana compacta amb $c_1(M) < 0$, llavors el grup G de totes les transformacions holomorfes de M és finit.

La demostració de Kobayashi utilitza de manera essencial el teorema de Kodaira sobre els fibrats amples de què ja hem parlat.

Lichnerowicz[56] va generalitzar el 1967 el resultat de Nakano en aquest altre sentit:

Si M és una varietat kähleriana compacta amb $c_1(M) \leqslant 0$ i en un punt de M la desigualtat és estricta, el grup G de transformacions holomorfes de M és discret.

Cal preguntar-se si amb aquesta hipòtesi, G és o no finit. Aquesta qüestió és un problema obert. ($\rhd$ **6**)

Tornem al treball fonamental de Kodaira i Spencer del qual ens hem apartat una mica per comentar el resultat de Nakano i les seves generalitzacions. Diguem que el resultat que hem esmentat, que expressa el fet que una família diferenciable d'estructures complexes és localment trivial o no, segons s'anul·li o no el morfisme ρ, constitueix un teorema fort i de gran utilitat aplicat diverses situacions concretes. Utilitzant aquest resultat i teoremes d'anul·lació per a fibrats vectorials, l'opositor, en el treball abans esmentat, ha demostrat un resultat que intuïtivament es pot expressar de la manera següent:

[54] H. Poincaré: Sur un théorème de M. Fuchs. Acta Math. 7 (1885) 45-82.

[55] K. Kobayashi: On the automorphism group of certain class of algebric manifolds.

[56] A. Lichnerowicz: Variétés kähleriennes et première classe de Chern. J. of diff. Geom. 1 (1967) 195-223.

En una varietat kähleriana de curvatura (biseccional holomorfa) negativa, donada una subvarietat complexa S, compacta, o bé no hi ha cap subvarietat propera a S, o bé sempre es pot trobar una subvarietat S' tan propera com es vulgui a S i l'estructura complexa de la qual és diferent de la de S (dit d'una altra manera, no existeix cap aplicació biholomorfa de S sobre S').

El treball de Kodaira i Spencer sobre les deformacions dona definicions i resultats molt útils, però no es preocupa de l'existència de deformacions. El primer treball que s'ocupa d'aquest problema apareix el 1958 i és obra de Kodaira, Nirenberg i Spencer.[57] El seu resultat fonamental es pot enunciar de la manera següent:

Sigui V_0 una varietat complexa compacta i Θ_0 el feix de gèrmens de camps vectorials holomorfs sobre V_0. Si $H^2(V_0, \Theta_0) = 0$, aleshores hi ha una família analítica d'estructures complexes $\mathcal{V} \xrightarrow{\omega} X$ tal que per un $o \in X$ es té que $\omega^{-1}(o)$ és la varietat V_0 donada i tal que ρ_o aplica isomorfament $(T_X)_o$ a $H^1(V_0, \Theta_0)$.

En virtut del teorema de Nakano aquest resultat és aplicable si $c_1(V_0) > 0$.

8 Varietats kählerianes compactes de curvatura positiva. Conjectura de Frankel

El 1961 apareix un treball de Frankel[58] que intenta abordar un problema que encara continua obert actualment i que ha estat objecte de nombrosos treballs. Considerem l'espai projectiu $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ amb la mètrica de Fubini. Si σ és un pla de l'espai tangent en un punt de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, la curvatura seccional $K(\sigma)$ verifica: $\frac{1}{4} \leqslant K(\sigma) \leqslant 1$, amb $K(\sigma) = 1$ si i només si el pla σ constitueix una «direcció complexa». No es coneix cap varietat kähleriana compacta de dimensió n amb curvatura positiva que no sigui homeomorfa a $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$.

Pot conjecturar-se doncs que tota varietat kähleriana compacta de dimensió n amb curvatura positiva és homeomorfa a $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. La fórmula de Gauss-Bonnet mostra que aquesta conjectura és certa per a $n = 1$. Frankel dona una demostració (deguda a Andreotti) que la conjectura és certa per a $n = 2$. Aquesta demostració utilitza fonamentalment els teoremes d'anul·lació de Kodaira, el teorema d'equivalència entre varietats algebraiques i varietats de

[57] Kodaira–Nirenberg–Spencer: On the existence of deformations of complex analytic structures. Ann. of Math. 68 (1958) 450-459.

[58] Frankel: Manifolds with positive curvature. Pacific J. Math. 11 (1961) 165-174.

Hodge, i la classificació donada per Zariski el 1935 de les superfícies algebraiques.[59]

La conjectura anterior, per a n qualsevol, es coneix amb el nom d'Andreotti-Frankel. Podem dir que en l'actualitat ni tan sols està resolt el següent problema molt més senzill:

Donada una varietat kähleriana compacta M, de dimensió n, amb curvatura positiva, té els mateixos nombres de Betti que $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$?

La conjectura d'Andreotti-Frankel ha donat origen a molts treballs. Si σ és un pla de l'espai tangent en un punt d'una varietat kähleriana M, designem per $\bar{\sigma}$ el pla engendrat pels vectors X i JX, on X és un vector de σ. Designem per $\alpha(\sigma)$ l'angle format pels plans σ i $\bar{\sigma}$. A $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ la curvatura seccional ve donada en funció de l'angle $\alpha(\sigma)$ per la fórmula:

$$K(\sigma) = \frac{1 + 3\cos^2 \alpha(\sigma)}{4}$$

En una varietat kähleriana qualsevol, designem per

$$K_1(\alpha(\sigma)) = \frac{1 + 3\cos^2 \alpha(\sigma)}{4}.$$

Si es tracta de comparar M amb $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, és lògic considerar el quocient

$$K(\sigma)/K_1(\alpha(\sigma)).$$

Això és el que fa Do Carmo[60] a la seva tesi doctoral llegida el 1962 i no publicada fins al 1965, quan tots els seus resultats havien estat ja superats i, per tant, la seva publicació tenia només un interès històric. Do Carmo introdueix el concepte de «pinçament kählerià», diferent del «pinçament riemannià» que s'havia considerat fins aleshores. Donat un nombre real positiu $\delta \leqslant 1$, es diu que una varietat kähleriana és δ-pinçada si hi ha una constant positiva L tal que:

$$\delta L \leqslant \frac{K(\sigma)}{K_1(\alpha(\sigma))} \leqslant L.$$

Do Carmo prova que si M és una varietat kähleriana compacta de dimensió n, δ-pinçada, amb $\delta > 0.8$, l'anell de cohomologia de M amb valors a $\mathbf{Z}_2$, $H^*(M, \mathbf{Z}_2)$, coincideix amb $H^*(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z}_2)$.

[59] Zarski: Algebraic surfaces. Ergebnisse. Springer-Verlag, 1935.

[60] Do Carmo: The cohomology ring of certain kählerian manifolds. Ann. of Math. 81 (1965) 1-14.

Klingenberg, que era el director de la tesi de Do Carmo, millora aquest resultat i obté:[61]

Si M és una varietat kähleriana de dimensió $n \geqslant 4$, δ-pinçada amb $\delta > 0{,}64$, aleshores M és compacta i té el mateix tipus d'homotopia que $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$.

Klingenberg utilitza essencialment en la seva demostració la teoria de Morse. Poc més tard Kobayashi millora aquest resultat i estableix:[62]

Si M és una varietat Kähleriana completa, δ-pinçada, de dimensió complexa n, amb $\delta > \frac{4}{7} = 0{,}57\ldots$, M té el mateix tipus d'homotopia que $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$.

La demostració de Kobayashi és molt més simple que la de Klingenberg. Com se sap, l'esfera S^{2n+1} és un fibrat principal sobre $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ amb fibra S^1. La idea principal de Kobayashi consisteix a generalitzar aquesta situació, és a dir, construir un fibrat principal P sobre M amb fibra S^1 tal que el revestiment universal de P sigui homeomorf a S^{2n+1}. Les successions exactes d'homotopia de les fibracions $S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ i $S^1 \to P \to M$ donen un isomorfisme entre $\pi_1(M)$ i $\pi_1(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}))$ per a $n > 2$. D'altra banda, M és simplement connexa per un resultat de Kobayashi que ja hem vist que s'obté com a conseqüència del teorema de Riemann–Roch. Per tant, també $\pi_1(M) \cong \pi_1(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}))$.

Poc després de la publicació d'aquest article de Kobayashi, Klingenberg, continuant amb el seu mètode fundat en la teoria de Morse, rebaixa la constant $\frac{4}{7}$ de Kobayashi a $\frac{9}{16} = 0{,}56\ldots$. Fins ara aquesta és la millor estimació que es coneix per als pinçaments kählerians.

Els espais projectius complexos amb la mètrica de Fubini són varietats d'Einstein. Berger va provar el 1965,[63] que tota varietat kähleriana compacta de dimensió n, d'Einstein, amb curvatura seccional positiva, és isomètrica a $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$). Poc després Bishop i Goldberg van provar que tota varietat kähleriana compacta amb curvatura seccional positiva i curvatura escalar constant, és d'Einstein.[64]

Com es pot observar, la conjectura d'Andreotti-Frankel només s'ha aconseguit provar afegint hipòtesis suplementàries. Esmentem ara tots els resultats

[61] Klingenberg: Manifolds with restricted conjugate locus. Ann. of Math. 78 (1963) 527-547.

[62] Kobayashi: Topology of positively pinched kaehler manifolds. Tohoku Math. J. 15 (1963) 121-139.

[63] Berger: Sur les variétés d'Einstein compactes. III$^{\text{ème}}$ Reunion Math. Expression latine. Namur (1965) 35-55.

[64] Bishop–Goldberg: On the topology of positively curved Kaehler manifolds II. Tohoku Math. J. 17 (1965) 310-318.

que es coneixen, que són ben pocs, en relació amb aquesta conjectura amb la seva hipòtesi original, és a dir, M una varietat Kähleriana compacta amb curvatura seccional positiva.

Se sap:

1) Els espais $H^{p,0}(M)$ de formes harmòniques de tipus $(p, 0)$ són nuls.[65]

2) El segon nombre de Betti $b_2(M)$ val 1.[66]

3) Els espais $H^{p,1}(M)$ de formes harmòniques de tipus $(p, 1)$ són nuls quan $p > 1$.[67]

Recordem que $b_r(M) = \sum_{p+q=r} \dim H^{p,q}(M)$. Per provar que M té els mateixos nombres de Betti que $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ bastaria provar que els espais $H^{p,q}(M)$ són isomorfs a $H^{p,q}(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}))$. Aquests últims espais són nuls si $p \neq q$ i tenen dimensió 1 si $p = q$. Els resultats 1) i 3) constitueixen un primer pas per calcular els nombres de Betti de M, però encara queda molt camí per recórrer. Podem dir que les demostracions dels tres resultats esmentats utilitzen fonamentalment els teoremes d'anul·lació de Kodaira. El resultat l), que és anterior als teoremes de Kodaira, va ser precisament el que va inspirar els altres. Caldrà esperar segurament a trobar nous mètodes que siguin aptes per abordar aquest problema. (▷ **7**).

9 Teoremes d'anul·lació per a fibrats semipositius i seminegatius

Parlarem ara d'una qüestió que va ser iniciada el 1957 per E. Vesentini.[68] Els teoremes d'anul·lació de Kodaira i d'Akizuki–Nakano, tan importants per les seves aplicacions, són resultats d'aquest tipus: Si la primera classe de Chern de tal o tal fibrat de línia és definida positiva o negativa, llavors tal o tal espai de formes harmòniques s'anul·la. No obstant això, a la pràctica es presenten moltes situacions en què la primera classe de Chern d'un fibrat de línia és

[65] Bochner: Vector fields and Ricci curvature. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 776-797.

[66] Bishop–Goldberg: On the 2nd cohomology grup de Kähler manifold. Proceedings of the AMS 16 (1965) 119-122.

[67] Rideau: Un théorème sur la courbure holomorphe bissectionnelle. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 270 (1970) 887-889.

[68] Vesentini: Osservazionni sulle structure fibrate analitiche sopra una varietà kähleriana compatta. Atti. Acad. Naz. Lincei 23 (1957) 231-241; 24 (1958) 5005-512.

semidefinida positiva o negativa, en lloc de ser definida. Posem un exemple senzill d'una situació d'aquest tipus.

Siguin M i M' dues varietats kählerianes compactes i sigui $f : M \to M'$ una aplicació holomorfa. Si $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ és un fibrat de línia holomorf sobre M' amb $c_1(E') < 0$, el fibrat imatge inversa $f^*(E')$ té primera classe Chern semidefinida negativa.

Vesentini, en el treball esmentat, intenta donar teoremes d'anul·lació com els de Kodaira per a fibrats de línia semidefinits. Els resultats de Vesentini han estat millorats per l'opositor a la seva tesi doctoral.

Lichnerowicz, en un treball publicat el 1967,[69] obté els següents resultats per a varietats kählerianes compactes M amb $c_1(M) \leqslant 0$:

Sigui T^p l'espai vectorial dels p-tensors holomorfs globals sobre M.

1) Si $c_1(M) \leqslant 0$, llavors

a) Si $A \in T^p$ i A s'anul·la en un punt, A és idènticament nul.

b) Si X és un camp vectorial holomorf i $A \in T^p$, la derivada de Lie $L_X A$ s'anul·la.

c) $\dim_{\mathbf{C}} T^p \leqslant b_{p,0}(M)$, on $b_{p,0}(M) = \dim_{\mathbf{C}} H^{p,0}(M)$.

d) El grup connex més gran G de transformacions holomorfes de M és abelià i verifica $\dim_{\mathbf{R}} G \leqslant b_1(M)$.

2) Si $c_1(M) \leqslant 0$ i almenys en un punt de M la desigualtat és estricta, aleshores $T^p = 0$.

Per a l'estudi de les varietats kählerianes compactes M amb $c_1(M) \geqslant 0$, la varietat d'Albanese associada a M juga un paper important. Un estudi sistemàtic de la varietat d'Albanese i les seves propietats elementals pot trobar-se a la tesi de Blanchard ja esmentada anteriorment. Aquesta varietat es pot definir com l'espai quocient de $H^{1,0}(M)^*$ pel subgrup P de $H^{1,0}(M)^*$ format per les aplicacions lineals φ de $H^{1,0}(M)$ a $\mathbf{C}$ que són de la forma $\beta \mapsto \int_c \beta$, on c és un 1-cicle enter de M. P és un subgrup discret de $H^{1,0}(M)^*$ de rang $2q$ ($q = \dim H^{1,0}(M)^*$), per tant la varietat d'Albanese $A(M) = H^{1,0}(M)^*/P$ és un tor complex de dimensió q. Hi ha una aplicació natural, $M \xrightarrow{J} A(M)$, anomenada aplicació de Jacobi. Lichnerowicz, en el treball esmentat, prova que si $c_1(M) \geqslant 0$, llavors l'aplicació de Jacobi és exhaustiva i així M es pot considerar com un fibrat sobre $A(M)$ amb grup estructural abelià i discret, i

[69] Lichnerowicz: Variétés kähleriennes et première classe de Chern. J. of diff. Geom. 1 (1967), 195-223.

fibra estàndard una varietat kähleriana compacta F amb $c_1(F) \geqslant 0$.

Refinant aquests resultats, Lichnerowicz, en un treball recent[70] dona el següent teorema, que es pot considerar com a teorema d'estructura de les varietats kählerianes compactes amb $c_1(M) \geqslant 0$:

Sigui M una varietat kähleriana compacta amb $c_1(M) \geqslant 0$ que verifica alguna de les tres hipòtesis següents:

1) M és de Hodge.

2) El tensor de Ricci R de M és $\geqslant 0$.

3) La 1-forma $d'(\operatorname{Tr} R)$ defineix una transformació infinitesimal holomorfa.

Aleshores hi ha un revestiment $\tilde{M}$ de M que és un fibrat sobre la varietat d'Albanese $A(\tilde{M})$, la fibra estàndard del qual F és una varietat kähleriana compacta amb $c_1(M) \geqslant 0$ i $b_{1,0}(F) = 0$. A més, el grup relatiu del revestiment $\tilde{M} \to M$ és resoluble.

Una vella conjectura de Calabi[71] ens asseguraria, si fos certa, que

$$c_1(M) \geqslant 0 \;\Rightarrow\; R \geqslant 0,$$

d'on la segona hipòtesi del teorema anterior sempre es verificaria ($\triangleright$ **8**). En relació amb aquesta conjectura de Calabi, es pot veure un interessant treball d'Aubin.[72] Una conjectura de Lichnerowicz, enunciada ja fa un decenni, diu que sobre tota varietat kähleriana compacta existeix una mètrica kähleriana per a la qual $d'(\operatorname{Tr} R)$ defineix una transformació infinitesimal holomorfa. Si aquesta conjectura és certa, la hipòtesi 3) del teorema anterior es verificaria sempre.

10 Varietats complexes no compactes. El d″-problema de Neumann i el problema de Levi

Hem explicat fins ara els principals avenços en el coneixement de les varietats complexes compactes, especialment de les kählerianes. Diguem ara alguna cosa sobre les no compactes.

[70] Lichnerowicz: Variétés kähleriennes compactes à première classe de Chern non négative. J. of diff. Geom. 6 (1971) 47-94.

[71] Calabi: On Kähler manifolds with vanishing canonical class. Algebraic geometry and topology. Symposium in honor of S. Lefschetz. Princeton University Press 1957, 78-89.

[72] T. Aubin: Métriques riemanniennes et courbure. J. Diff. Geom. 4 (1970) 383-424.

Ja hem esmentat, §3, un resultat recent de Gromov que afirma que tota varietat complexa no compacta admet una mètrica de Kähler, al contrari del que passava en el cas compacte, en què el problema d'existència d'una mètrica kähleriana era de tal envergadura que només es coneixien respostes parcials.

En el cas compacte hem vist com el teorema de descomposició de Hodge–De Rham jugava un paper molt important. Un teorema anàleg per a varietats hermítiques no compactes i per al laplacià Δ'' no va ser trobat fins al 1962, per J. J. Kohn, després de diverses temptatives anteriors per part especialment de D. C. Spencer, C. B. Morrey i del mateix Kohn. No cal dir que els resultats de Kohn juguen en el cas no compacte el mateix important paper que el teorema de Hodge–De Rham en el cas compacte. Per aquesta raó intentarem explicar breument aquests resultats[73] així com algunes de les seves conseqüències.

Els conceptes que utilitzarem aquí pertanyen més aviat a l'anàlisi funcional i concretament a la teoria d'operadors lineals no acotats en un espai de Hilbert. Si $\mathcal{H}$ és un espai de Hilbert, un operador T no fitat és una aplicació lineal definida en un subespai (que s'anomena domini de T) de $\mathcal{H}$, amb valors a $\mathcal{H}$. El fet de considerar operadors el domini dels quals no sigui tot $\mathcal{H}$ és obligat per importants exemples que es presenten a Anàlisi. Per citar un cas, només cal considerar, a l'espai de Hilbert L^2, l'operador que assigna a cada funció la seva derivada, en cas que aquesta existeixi i pertanyi a L^2. Hi ha una estreta relació entre que el domini de definició sigui o no tot $\mathcal{H}$ i que l'operador considerat sigui o no acotat. Així, per exemple, una transformació lineal A de tot $\mathcal{H}$ a $\mathcal{H}$, simètrica (és a dir, tal que $(Af, g) = (f, Ag)$), és necessàriament fitada, i recíprocament una transformació lineal fitada definida només en un subespai de $\mathcal{H}$ es pot estendre a tot $\mathcal{H}$ conservant la mateixa cota. Això fa palès que tota la teoria d'operadors acotats es pugui fer considerant que el domini de definició és tot $\mathcal{H}$, però a la teoria d'operadors no compactes és essencial que el domini de definició no sigui tot $\mathcal{H}$.[74]

Hem fet aquest llarg preàmbul, potser innecessari, per justificar els conceptes i definicions que emprarem.

Sigui M una varietat complexa (no compacta), de dimensió n, dotada d'una mètrica hermítica. Sigui $\mathcal{A}^{(p,q)}$ l'espai de les formes C^∞ de tipus (p, q) a valors complexos. Donades dues formes $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^{(p,q)}$ es designa per (α, β)

[73] J. J. Kohn: Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds. Ann. of Math. 78 (1963) 112-148. Per a una exposició més recent es pot veure: G. B. Folland and J. J. Kohn: The Neumann problem for the Cauchy–Riemann Complex. Ann. of Math. Studies núm. 75 (1972). A parer nostre, potser és més clara la primera exposició que la segona.

[74] Una exposició breu i excel·lent es pot trobar al capítol 8 del llibre de Riesz i Nagy: Functional Analysis. Fredrick Ungar Publishing 1971.

la funció sobre M que s'obté contraient α amb β mitjançant la mètrica. Es defineix un isomorfisme $\tilde{*} : \mathcal{A}^{(p,q)} \to \mathcal{A}^{(n-p,n-q)}$ que es pot caracteritzar per la propietat: $(\alpha, \beta)\eta = \alpha \wedge \tilde{*}\beta$, on η indica l'element de volum. L'operador $\tilde{*}$ verifica:

$$\tilde{*}\tilde{*}\varphi = (-1)^{p+q}\varphi \quad \text{si } \varphi \in \mathcal{A}^{(p,q)}$$
$$(\tilde{*}\alpha, \tilde{*}\beta) = (\alpha, \beta).$$

Es defineix δ per:

$$\delta = -\tilde{*}d\tilde{*}.$$

Igual que d es descompon segons el tipus com a $d' + d''$, δ es descompon com a $\delta' + \delta''$.

Tot això també ho teníem en les varietats compactes. Allà definíem a més un producte escalar a $\mathcal{A}^{(p,q)}$ mitjançant

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M (\alpha, \beta)\eta = \int_M \alpha \wedge \tilde{*}\beta.$$

Però aquí, si M no és compacta, tindrem problemes de convergència de la integral $\int_M (\alpha, \beta)\eta$. Donada $\alpha \in \mathcal{A}^{(p,q)}$, definim la norma de α per:

$$\|\alpha\| = \sqrt{\int_M (\alpha, \alpha)\eta}$$

Si la integral no és convergent, posarem $\|\alpha\| = \infty$. Sigui $\mathcal{L}'^{(p,q)}$ el subespai de $\mathcal{A}^{(p,q)}$ format per tots els $\alpha \in \mathcal{A}^{(p,q)}$ de norma finita. A $\mathcal{L}'^{(p,q)}$ està definit el producte escalar $\langle \ , \ \rangle$. Designem per $\mathcal{L}^{(p,q)}$ l'espai completat de $\mathcal{L}'^{(p,q)}$. $\mathcal{L}^{(p,q)}$ és un espai de Hilbert.

A les varietats compactes els operadors d i δ eren adjunts un de l'altre mitjançant el producte escalar $\langle \ , \ \rangle$. Per obtenir la mateixa situació en les varietats no compactes, convindrà considerar els operadors d i δ no a $\mathcal{A}^{(p,q)}$ sinó a $\mathcal{L}^{(p,q)}$ ja que és aquí on està definit el producte escalar $\langle \ , \ \rangle$. El primer que cal fer, doncs, és estendre d i δ a $\mathcal{L}^{(p,q)}$. De moment a nosaltres només ens interessen els operadors d'' i δ''. Comencem per estendre d''. L'extensió T de d'' a $\mathcal{L}^{(p,q)}$ no estarà definida en tot $\mathcal{L}^{(p,q)}$ (es tracta d'operadors no acotats). Comencem definint el domini $\mathcal{D}_T^{(p,q)}$ de l'operador T. Sigui $\mathcal{D}_T^{(p,q)}$ el conjunt de tots els $\varphi \in \mathcal{L}^{(p,q)}$ tals que existeix una successió $\{\varphi_n\}$ amb les propietats següents:

(*a*) $\quad \varphi_n \in \mathcal{A}^{(p,q)} \cap \mathcal{L}^{(p,q)}$

(*b*) $\quad \varphi = \lim \varphi_n$ a $\mathcal{L}^{(p,q)}$

(c) $\quad d''\varphi_n \in \mathcal{L}^{(p,q+1)}$

(d) $\quad \{d''\varphi_n\}$ és una successió de Cauchy a $\mathcal{L}^{(p,q+1)}$

Llavors es defineix l'aplicació $T : \mathcal{D}_T^{(p,q)} \to \mathcal{L}^{(p,q)}$ posant $T\varphi = \lim d''\varphi_n$ on $\{\varphi_n\}$ és una successió amb les anteriors propietats. La definició és independent de la successió triada.

L'operador T^* adjunt de l'operador T es defineix, com és usual per a operadors no acotats en un espai de Hilbert, de la manera següent:

Sigui $\mathcal{D}_{T^*}^{(p,q)}$ el conjunt de tots els $\varphi \in \mathcal{L}^{(p,q)}$ tals que existeix $\lambda \in \mathcal{L}^{(p,q-1)}$ que satisfà l'equació $\langle T\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, \lambda\rangle$. Llavors es defineix $T^* : \mathcal{D}_{T^*}^{(p,q)} \to \mathcal{L}^{(p,q-1)}$ mitjançant: $T^*\varphi = \lambda$. T^* està ben definit, ja que $\mathcal{D}_{T^*}^{(p,q-1)}$ és dens a $\mathcal{L}^{(p,q-1)}$.

L'operador T és l'extensió natural de d'' i T^* l'extensió natural de δ''. Es comprova que $T(\mathcal{D}_T^{(p,q)}) \subset \mathcal{D}_T^{(p,q)}$, que $T^*(\mathcal{D}_{T^*}^{(p,q)}) \subset \mathcal{D}_{T^*}^{(p,q)}$, i que $T^2 = 0$ i $(T^*)^2 = 0$.

Sigui $\mathcal{D}_L^{(p,q)}$ el conjunt de tots els $\varphi \in \mathcal{L}^{(p,q)}$ tals que $\varphi \in \mathcal{D}_T^{(p,q)} \cap \mathcal{D}_{T^*}^{(p,q)}$ i que $T\varphi \in \mathcal{D}_{T^*}^{(p,q+1)}$ i $T^*\varphi \in \mathcal{D}_T^{(p,q-1)}$. Es defineix $L : \mathcal{D}_L^{(p,q)} \to \mathcal{L}^{(p,q)}$ mitjançant:

$$L = TT^* + T^*T.$$

L és l'extensió natural del laplacià Δ''. Designem per

$$\mathcal{H}^{(p,q)} = \{\varphi \in \mathcal{D}_L^{(p,q)} : L\varphi = 0\},$$

és a dir, l'espai de formes harmòniques de tipus (p, q). Es veu immediatament que

$$\mathcal{H}^{(p,q)} = \{\varphi \in \mathcal{D}_T^{(p,q)} \cap \mathcal{D}_{T^*}^{(p,q)} : T\varphi = T^*\varphi = 0\}.$$

És relativament fàcil provar que $\mathcal{L}^{(p,q)}$ es descompon en suma directa ortogonal:

$$\mathcal{L}^{(p,q)} = [L\mathcal{D}_L^{(p,q)}] \oplus \mathcal{H}^{(p,q)}$$

on $[L\mathcal{D}_L^{(p,q)}]$ designa l'adherència de $L\mathcal{D}_L^{(p,q)}$ a $\mathcal{L}^{(p,q)}$.

Aquesta descomposició, anomenada de vegades «descomposició ortogonal feble», és anàloga a la del laplacià Δ'' del teorema de Kodaira i a la del laplacià Δ en el cas de varietats reals.

Si $L\mathcal{D}_L^{(p,q)}$ és tancat a $\mathcal{L}^{(p,q)}$, el resultat anterior dona la descomposició següent de $\mathcal{L}^{(p,q)}$ en suma directa ortogonal:

$$\mathcal{L}^{(p,q)} = TT^*\mathcal{D}_L^{(p,q)} \oplus T^*T\mathcal{D}_L^{(p,q)} \oplus \mathcal{H}^{(p,q)}.$$

L'existència o no existència de tal descomposició es diu d''-problema de Neumann. A la teoria clàssica del potencial hi ha dos problemes fonamentals, el de Dirichlet i el de Neumann. El primer consisteix a trobar una funció harmònica en un domini de $\mathbf{R}^n$, continua en el domini i a la seva frontera, i que es redueixi a una funció continua donada sobre la frontera. El de Neumann és el problema anàleg en què en lloc de prescriure els valors de la solució a la frontera, es prescriuen els valors de la derivada normal a la frontera. D'aquest clàssic problema en pren el nom l'anomenat d''-problema de Neumann. En els termes en què ho hem plantejat, aquest problema té solució si i només si l'espai $L\mathfrak{D}_L^{(p,q)}$ és tancat en $\mathcal{L}^{(p,q)}$. Per tant, es redueix a trobar quines condicions ha de verificar la varietat M de partida per tal que l'espai $L\mathfrak{D}_L^{(p,q)}$ sigui tancat a $\mathcal{L}^{(p,q)}$.

Abans d'enunciar la solució a aquest problema donada per Kohn, introduirem algunes definicions que expressen conceptes molt utilitzats en la teoria de funcions de diverses variables complexes.[75] Considerem un parell de varietats complexes M i M' tals que:

(*a*) M és una subvarietat oberta de M'.

(*b*) L'adherència $\bar{M}$ és compacta.

(*c*) La frontera ∂M de M a M' és una subvarietat C^∞ de M'.

(*d*) Per a cada domini U de coordenades complexes de M' hi ha una funció real de classe C^∞ sobre U tal que

(1) $f(z) < 0$ si $z \in M$ i $f(z) > 0$ si $z \notin \bar{M}$;

(2) $(f_*)_z \neq 0$ si $z \in \partial M$;

(3) Si $z_0 \in \partial M$, $a \in \mathbf{C}^n$, $a \neq 0$ i $\sum(\partial_j f)_{z_0} a^j = 0$, llavors $\sum(\partial_i \partial_j f)_{z_0} a^i \bar{a}^j > 0$.

Si el parell $\{M, M'\}$ verifica les propietats anteriors es diu que és fortament pseudoconvex. De vegades es diu també que M és fortament pseudoconvex.

Aquesta situació és familiar en l'estudi dels dominis d'holomorfia de $\mathbf{C}^n$ en el marc de la teoria de funcions analítiques de diverses variables complexes.

El resultat fonamental de J. J. Kohn consisteix a provar que si $\{M \subset M'\}$ és un parell fortament pseudoconvex, on M' és una varietat amb una mètrica

[75] Vegeu per exemple l'excel·lent llibre de Hörmander: An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand, 1966.

hermítica que és kähleriana en un entorn de la frontera ∂M, llavors el d''-problema de Neumann per a M té solució, és a dir, $L\mathcal{D}_L^{(p,q)}$ és tancat en $\mathcal{L}^{(p,q)}$. A més, Kohn prova que en aquesta situació l'espai $\mathcal{H}^{(p,q)}$ té dimensió finita.

Entre les nocions de convexitat que s'utilitzen en la teoria de funcions analítiques de diverses variables complexes, figura la de «convexitat holomorfa», concepte fonamental per a la definició de les varietats de Stein que constitueixen la generalització més natural dels dominis d'holomorfia de $\mathbf{C}^n$. Una varietat complexa M s'anomena «holomòrficament convexa» si per a cada compacte $K \subset M$, el conjunt

$$\hat{K} = \{z \in M : |f(z)| \leqslant \sup_{x \in K} |f(x)| \text{ per a tota funció analítica} f\}$$

és també compacte. Ja E. E. Levi va conjecturar que la pseudoconvexitat forta implicava la convexitat holomorfa. Aquest problema, conegut com a «problema de Levi» no va ser resolt (en sentit afirmatiu) fins al 1958 per H. Grauert.[76]

Utilitzant la resolució de Kohn del d''-problema de Neumann, es pot donar una demostració molt curta del problema de Levi.

Els teoremes d'anul·lació de Kodaira han estat estesos en certa manera a varietats no compactes per H. Grauert i O. Riemenschneider[77] utilitzant fonamentalment el d''-problema de Neumann. Els teoremes d'anul·lació de Grauert es poden formular de la manera següent:

Sigui $\{M \subset M'\}$ un parell fortament pseudoconvex. Aleshores

$$H_c^k(M, \Omega^0) = 0$$

per a $k < n$ ($n = \dim M$) i

$$H^k(M, \Omega^n) = 0$$

per a $k > 0$, on $H_c^k(M, \Omega^0)$ designa la cohomologia amb suports compactes.

[76] H. Grauert: On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. Ann. of Math. 68 (1958) 460-472.

[77] H. Grauert i O. Riemenschneider: Kählersche Mannigfaltigkeiten mit hyper-q-konvexen Rand. Problems in Analysis. Princeton University Press 1970, pàg. 61-79.

Anotacions dels traductors-curadors

$\boxed{\mathbf{1}}$ **(Estructura quasi complexa «natural» de l'esfera S^6).** L'estructura quasi complexa «natural» J de l'esfera S^6 es pot descriure mirant els octonions imaginaris (és a dir, amb part real nul·la) com a $\mathbf{R}^7$, $S^6 \subset \mathbf{R}^7$ com els octonions que tenen norma 1,

$$T_xS^6 = x^\perp = \{v \in \mathbf{R}^7 \,|\, \mathsf{re}(\bar{x}v) = 0\}$$

i $J_x : T_xS^6 \to T_xS^6$ l'aplicació $v \mapsto xv$ (està ben definida i $J_x^2 = -\mathsf{1}$ atès que $x^2 = -1$). Usant la propietat *alternativa* dels octonions ($x(xy) = (xx)y$ i $(yx)x = y(xx)$, x i y octonions arbitraris), és fàcil veure que v i $J_x(v)$ són ortogonals per a tot $v \in T_xS^6$, i això s'anuncia dient que J és ortogonal. L'article [1] és una excel·lent referència per a l'estudi dels octonions. I l'article [2] estudia certes estructures quasi complexes sobre productes d'esferes de dimensió 6, i en particular sobre S^6, i entre les que s'estudien no en troben cap que sigui integrable. V. també [3]. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{2}}$ **(L'esfera S^6).** A la Memòria, l'autor cita (⋄8) el treball d'Alfred Adler de 1969 a l'*American Journal of Mathematics*, [4], en què es «conclou» que S^6 no té estructures complexes (teorema del §5). En el mateix article s'afirma que $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ és rígid, és a dir, que qualsevol deformació de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ és isomorfa a $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Però a [5], per exemple, llegim que l'argument d'Adler era «incomplet» (sense aportar cap evidència per sostenir aquesta informació) i que «el 2016 és encara un important problema obert».

Aquest biaix en parlar sobre l'article d'Adler es repeteix, sigui no esmentant-lo o sigui sense assenyalar clarament on és l'error (si és que n'hi ha algun). Un cas extrem el trobem estirant el fil de [6, §11.10.1], on, comentant l'article d'Adler, llegim que «L'esfera de sis dimensions seria un exemple interessant i significatiu si de fet tingués una estructura complexa. Adler va afirmar que no en tenia cap, i va publicar el seu article en una revista de primer nivell, de manera que es pot inferir que un àrbitre solvent amb estàndards estrictes va estar-hi d'acord. Però la gent [*sic*] no ha acceptat la prova d'Adler. Durant 39 anys, Adler ha mantingut que la seva prova és correcta. Ara [*ca* 2011] està jubilat, i ja no participa en les discussions. Però no va publicar cap treball matemàtic després del seu article de 1969, i durant una bona part d'aquests

39 anys, ningú va ser capaç d'assenyalar on estava l'error. Finalment, fa uns 5 anys [és a dir, ca 2006], Yum-Tong Siu, de Harvard, va escriure un article en el qual explicava precisament on estava l'error. Però el document d'Adler no s'ha reparat mai, i fins avui ningú no sap com demostrar si l'afirmació és vertadera o falsa.» Sorprès pel fet que esmenti un article de Siu sense citar-lo, primer vaig escriure a Siu i després, com que no vaig rebre cap resposta, a Krantz, que al final em va dir que *no estava segur que Siu hagués escrit tal article*: «To tell the truth, I am not sure that there is a reference» (28-10-2024, 21:20).

Pensem, doncs, que pot ser útil comentar el confús estatus del «problema de Hopf», això és, el problema de determinar si S^6 admet estructures complexes o no. En principi hom podria esperar que l'article coral [7], dedicat precisament a la història d'aquest problema, i que en tot cas conté molta informació interessant, hauria de ser una bona font per aclarir la situació, i més quan es va escriure en el context d'una conferència dedicada al tema, però es decanta per afirmar que el problema segueix obert sense ni citar el treball d'Adler. L'article de Robert Bryant [8] estudia i comenta un preprint de S.-S. Chern de 2003 («On the non-existence of a complex structure on the six-sphere») i és presentat de la manera següent: «S.-S. Chern va començar un estudi d'estructures quasi complexes a les esferes de dimensió 6, amb la idea d'explotar les propietats especials de la seva coneguda estructura quasi complexa invariant sota el grup excepcional G_2. Tot i que no va resoldre el problema (*actualment encara obert*) de determinar si existeix una estructura quasi complexa integrable a S^6, sí que va demostrar una identitat significativa que resol la qüestió d'una classe interessant d'estructures quasi complexes a S^6» (cursiva afegida). També conté molta informació interessant, però no hi trobem cap notícia relativa a l'article d'Adler. A més, com que essencialment coincideix amb el preprint de 2014, tampoc esmenta directament l'article [7], però sí indirectament afegint a les referències el breu article [9] (que tampoc cita Adler) en què es demostra que les estructures quasi complexes ortogonals de S^6 no són integrables, i també el fet que aquest resultat l'havia obtingut molt abans Blanchard a [10].

Deixant de banda altres articles que també «demostren» la no existència d'estructures complexes a S^6 (com ara [11], [12], i [13]), el contrapunt a tot aquest panorama el posa Gábor Etesi en els articles [14] i [15], ja que aporta dues «demostracions» molt diferents de l'existència d'una estructura complexa a S^6. El primer article va aparèixer a arXiv el 2005 i després de vuit versions durant deu anys (la v2 va ser retirada) es va publicar el 2015. Curiosament, posa l'article [4] a les referències, però no en diu res en tot l'article. Com que usa tècniques de teories de Yang-Mills-Higgs, és de difícil lectura per a molts matemàtics. El segon article aparegué a arXiv el 2015 i el 2024 va per la versió v6. La suposada «demostració» és matemàtica, però hi ha importants càlculs que no es donen explícitament per ser «massa complicats». L'article [7] despatxa el primer article d'Etesi, i les tres primeres versions del segon, dient que «la comunitat matemàtica no sembla haver trobat un consens sobre els seus resultats», i remet a caòtiques discussions a «MathOverflow».[78] En aquest segon enllaç, hi ha un comentari de Robert Bryant a la versió de 2015 del segon article en què opina: «Tanmateix, l'afirmació bàsica d'aquest article, és a dir, que certa classe de conjugació de G_2 és una subvarietat complexa respecte a (una de les) estructures complexes invariants per l'esquerra de Samelson a G_2, es pot veure fàcilment com a falsa per càlcul directe.» De les versions posteriors no n'he trobat cap comentari, i ni aquestes ni les anteriors es fan ressò de la crítica de Bryant. Per cert, l'article [12] és despatxat d'una manera similar,[79] però en aquest, Robert Bryant ho formula així: «l'argument d'Atiyah en aquest nou article *sembla demostrar* que S^6 no té estructures quasi complexes, cosa que és falsa» (cursiva afegida). A banda, la recensió que John C. Baez fa del volum en què es va publicar el segon article d'Atiyah, [16], acaba amb aquesta frase: «Dos inconvenients del llibre són una gran quantitat d'errors ortogràfics i un article de Michael Atiyah que afirma falsament demostrar la famosa conjectura oberta segons la qual no existeix cap estructura complexa a la 6-esfera», sense trobar-hi cap indicació sobre les raons en què basa aquest judici lapidari. Per cert, el tema dels «manuscrits amb cua» d'Atiyah, incloent-hi [12], està tractat amb un cert detall a la penúltima secció de l'article [17], on s'apunta que potser la inspiració que A. Connes va trobar a l'article *Groups of odd order* per escriure *On an idea of Michael Atiyah* la trobarà algú més en l'article sobre S^6 per superar la indeterminació en què autors diversos semblen interessats a mantenir congelat el problema.

Entre les múltiples preguntes consignades a l'article [18], hi trobem aquesta: «Una qüestió fonamental és si una varietat quasi complexa admet una estructura complexa integrable quan la seva dimensió complexa és superior a dos» (és a dir, dimensió real $\geqslant 6$). Alguns autors, com ara [19], es refereixen a aquesta pregunta com a «repte de Yau», i alguns fins i tot l'eleven a conjectura, com ara [20]. Si fos alguna cosa més que una «provocació», l'expectativa seria que S^6 admet una estructura complexa i de retruc [15] podria veure's no només com una confirmació, sinó potser també com una possible inspira-

[78]Concretament a https://mathoverflow.net/questions/210089/ i https://mathoverflow.net/questions/1973/

[79]Reenvia a les discussions https://mathoverflow.net/questions/253577/ i https://mathoverflow.net/questions/263301/.

ció per a una demostració general. Cal dir també que a l'article de Yau no s'esmenta ni [7] ni a [15].

Un darrer comentari és que tot aquest embolic d'«experts» potser es podria descongelar aplicant mètodes de formalització matemàtica, per exemple amb Lean, començant preferentment pels articles [4] i [15]. $\triangleleft$

$\boxed{3}$ (Qüestió oberta?). Interpretem que la qüestió que es planteja a la memòria és determinar si «una varietat kähleriana compacta M amb *primera classe de Chern definida positiva* és simplement connexa». Aquest problema coincideix amb la conjectura de S. Kobayashi enunciada al principi del §1 de l'article [21] (citat a la nota 44). Aquesta conjectura va ser demostrada pel mateix Kobayashi: a [22, p 56] trobem que «la solució de Yau de la conjectura de Calabi ens permet substituir el supòsit de positivitat del tensor de Ricci pel supòsit que $c_1(M)$ és positiu». Per una presentació més directa d'aquest resultat, vegeu [23]. $\triangleleft$

$\boxed{4}$ (Resum de l'article citat a la nota 48, [24]). Sigui M una varietat compacta kähleriana i $E \xrightarrow{r} M$ un fibrat de línia holomorf. A la primera part s'obtenen dos teoremes d'anul·lació per a $H^{p,0}(E)$ i $H^{0,q}(E)$. A la segona part es demostren els teoremes següents: 1) Sigui $E \xrightarrow{r} M$ un fibrat vectorial holomorf dèbilment semidefinit negatiu. Si el tensor de Ricci de M és $\geqslant 0$ a tot M i > 0 en un punt, llavors $H^{p,0}(E) = 0$, $p > 0$. 2) Sigui M' una varietat kähleriana amb curvatura biseccional holomorfa negativa. Sigui M una subvarietat complexa compacta. Aleshores no existeix cap camp vectorial de M' holomorf sobre M i no existeix cap deformació estricta localment trivial de M. Intuïtivament, això vol dir que entre les subvarietats complexes properes a M (si n'hi ha) se'n pot trobar una amb estructura complexa diferent de la de M. $\triangleleft$

$\boxed{5}$ (Camp poc madur). El tractat [25], publicat el 1978, dedica el primer capítol a les varietats algebraiques complexes. Un aspecte a remarcar és que connecta els teoremes d'anul·lació de la cohomologia amb l'existència de funcions meromorfes amb propietats locals especificades, i també amb els teoremes de Lefschetz i Hodge.

A propòsit d'aquestes connexions, un resultat rellevant és el teorema d'anul·lació (p. 159) que afirma el següent: Si L és un fibrat de línia positiu sobre una varietat complexa compacta M, llavors existeix un enter positiu m_0 tal que $H^p(M, L^m \otimes E) = 0$ per a tot $m \geqslant m_0$ i tot $p > 0$ (en el context de la geometria algebraica es coneix com a teorema d'anul·lació de Serre). També juga un paper fonamental el teorema de dualitat de Kodaira–Serre:

$H^p(M, L^m \otimes E) \simeq H^{n-p}(M, L^{-m} \otimes E^* \otimes K)$, on $K = \Lambda^n T^*(M)$ és el fibrat canònic de M.

La conjectura de Grauert–Riemenschneider (1970), relacionada amb el teorema d'anul·lació dels mateixos autors (una generalització del de Kodaira), diu que si M és una varietat complexa compacta per a la qual existeix un fibrat de línia hermític de curvatura $\geqslant 0$ arreu i > 0 en un obert dens, llavors el grau de transcendència del cos de funcions meromorfes de M és $\dim M$ (condició de Moishezon). Aquesta conjectura va ser demostrada independentment el 1985 per Yum-Tong Siu (basant-se en el teorema de Riemann-Roch de Hirzebruch) i Jean-Pierre Demailly (usant teoria de Morse).

De Demailly són molt importants els articles panoràmics [26], [27], i [28]. Per exemple, en el resum del darrer llegim: «El nostre objectiu és analitzar alguns dels principals avenços que s'han produït recentment en l'estudi de la geometria de varietats de Kähler projectives o compactes: noves tècniques transcendentals molt eficients, una millor comprensió de l'estructura geomètrica dels cons de classes de cohomologia positiva i de la teoria de deformacions de varietats de Kähler, nous resultats al voltant de la invariància de plurigèneres i en el programa de models minimals».

Pensem que també tenen interès els articles com ara [29] i [30]. El primer aporta consideracions sobre l'estat de la teoria de Hodge tant en el context de geometria algebraica com en el de la geometria de Kähler, i es pot considerar com una estela del tractat [31]. El segon correspon a la conferència plenària que l'autor (Donaldson) va impartir a l'ICM-2018. $\lhd$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (És G finit?)**.** Kobayashi [32, Th. 2.1] demostra que el grup és finit sota la hipòtesi que la primera classe de Chern és *negativa*. Aquest resultat és el primer de la secció §2 (titulada «Varietats complexes compactes amb grup d'automorfismes finit»), en la qual s'estableix també la finitud del grup d'automorfismes holomorfs per a varietats hiperbòliques compactes; per a varietats kählerianes compactes amb tensor de Ricci negatiu; per hipersuperfícies de grau $d \geqslant 3$ de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ $(n \geqslant 3)$, llevat quan $n = 3, d = 4$; i per a varietats algebraiques projectives de tipus general.

La condició $c_1 < 0$ usada per Koayashi és més forta que la del teorema de Lichnerowicz ($c_1 \leqslant 0$ arreu i $c_1 < 0$ en un punt), de manera que la finitud de G sota aquesta hipòtesi més feble s'ha de considerar, fins on hem pogut veure, com una qüestió encara oberta. $\lhd$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (Sobre la conjectura de Frankel)**.** Fou resolta l'any 1979 per Shigefumi Mori [33] i per Yum-Tong Siu i Shing-Tung Yau [34]: si una varietat kähleriana compacta té curvatura biseccional positiva, llavors és biholomorfa a un espai projectiu complex. Abans s'havien publicat demostracions per a dimensió dos (Andreotti-Frankel) i tres (T. Mabuchi).

Aquest resultat és anàleg al «teorema de l'esfera»: una varietat riemanniana compacta, simplement connexa i amb operador de curvatura positiu és difeomorfa a una esfera ordinària (no exòtica).

En l'aproximació de Mori, es prova també la conjectura de Hartshorne (1970): una varietat projectiva no singular (sobre un cos algebraicament tancat) amb fibrat tangent ample és isomorfa a l'espai projectiu. En el cas del cos $\mathbf{C}$, la conjectura de Frankel s'obté pel fet que tenir curvatura seccional positiva implica que el fibrat tangent és ample. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (Conjectura de Calabi)**.** La va demostrar Shing-Tung Yau el 1977, [35]. Una bona referència per al seu enunciat i significació és [36]. L'enunciat precís de la conjectura es troba a §I.5. S'usa la noció de forma de Ricci d'una varietat kähleriana, la qual s'explica a §I.4.4. Un cas especial important és el de les varietats de Calabi-Yau (CY), és a dir, varietats kählerianes compactes amb primera classe de Chern nul·la, §I.4.5. Pel resultat de Yau, tota CY admet una mètrica kähleriana amb curvatura de Ricci nul·la. Vegeu també l'article panoràmic [37]. $\triangleleft$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (Perspectives de diversos autors)**.** Per prosseguir els desenvolupaments de la geometria riemanniana, una referència fonamental és el tractat [38], que malgrat la seva extensió (xxiv+824), «presenta els resultats sense demostracions». El capítol 12 (De la curvatura a la topologia) és especialment rellevant, i en particular §12.2 sobre «problemes de pinçament». Destaquem, com a exemples, alguns resultats obtinguts posteriorment d'ençà de 1973, donant l'any, el número que Berger els assigna i la pàgina on s'enuncien: Min-Oo–Ruh (1979, 296, 552); O. Dumeric (1987, 302, 559); Otsu–Shiohama–Yamaguchi (1989, 299, 557); Fukaya (1990, 295, 551); Grove–Wilhelm (1995,300, 558); Abressc–Meyer (1996, 303, 559)

Sobre les contribucions de M. Gromov: [39].

Sobre geometria kähleriana: [23] i [30] (correspon a la conferència plenària que va impartir a l'ICM-2018).

Referències

[1] J. Baez, “The octonions,” *Bulletin of the AMS*, vol. 39, no. 2, pp. 145–205, 2002. AMS pdf.

[2] N. A. Daurtseva, N. K. Smolentsev, “On almost complex structures on six-dimensional products of spheres,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 245, pp. 568–600, 2020.

[3] E. Calabi, H. Gluck, “What are the best almost-complex structures on the 6-sphere?,” *Proc. Symp. Pure Math*, vol. 54, no. 2, pp. 99–106, 1993.

[4] A. Adler, “The Second Fundamental Forms of S^6 and $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$,” *American Journal of Mathematics*, vol. 91, no. 3, pp. 657–670, 1969.

[5] Wikipedia, “List of incomplete or incorrect mathematical proofs,” 2016.

[6] S. G. Krantz, *The proof is in the pudding: The changing nature of mathematical proof.* Springer, 2011.

[7] I. Agricola, G. Bazzoni, O. Goertsches, P. Konstantis, S. Rollenske, “On the history of the Hopf problem,” *Differential Geometry and its Applications*, vol. 57, pp. 1–9, 2018. Elsevier pdf.

[8] R. L. Bryant, “S.-S. Chern’s study of almost-complex structures on the six-sphere,” *International Jpunal of Mathematics*, vol. 32, no. 12, 2021. arXiv pdf, v2 (v1: 2014).

[9] C. LeBrun, “Orthogonal complex structures on s^6,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 101, no. 1, pp. 136–138, 1987. AMS pdf.

[10] A. Blanchard, “Recherche de structures analytiques complexes sur certaines variétés,” *Comptes Rendus hebdomadaires des seances de l’academie des sciences*, vol. 236, no. 7, pp. 657–659, 1953. arXiv pdf.

[11] C.-C. Hsiung, “Nonexistence of a complex structure on the six-sphere,” *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, vol. 14, pp. 231–247, 1986.

[12] M. Atiyah, “Understanding the 6-dimensional sphere,” in *Foundations of Mathematics and Physics One Century After Hilbert: New Perspectives* (J. Kouneiher, ed.), pp. 129–133, Springer International Publishing, 2018.

[13] S. R. Simanca, "$\mathbb{S}^6$ (or any of $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^6$, or $\mathbb{S}^6 \times \mathbb{S}^6$, respectively) is not diffeomorphic to a complex manifold," 2024. arXiv pdf, v2; v1, 2022.

[14] G. Etesi, "Complex structure on the six dimensional sphere from a spontaneous symmetry breaking," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 56, no. 4, 2015. arXiv pdf.

[15] G. Etesi, "The complex structure on the six dimensional sphere," 2024. arXiv pdf.

[16] J. Baez, "Book review: Foundations of Mathematics and Physics One Century After Hilbert: New Perspectives *(edited by J. Kouneiher)*," 2019. AMS pdf.

[17] S. Xambó-Descamps, "Sir Michael Atiyah, *in memoriam*," *SCM/Notícies*, vol. 45, pp. 47–56, 2019. SCM pdf.

[18] S.-T. Yau, "Perspectives on geometric analysis," 2006. arXiv pdf, 75 pages, 755 references. Also available as intlpress pdf.

[19] G. Clemente, "Functionals on the space of almost complex structures," 2020. arXiv pdf.

[20] M. Lladó Duran, "Introduction to complex geometry and Calabi-Yau manifolds motivated by physics," 2023. UB pdf.

[21] S. Kobayashi, "On compact Kähler manifolds with positive definite Ricci tensor," *Annals of Mathematics*, vol. 74, no. 3, pp. 570–574, 1961.

[22] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, vol. 793 of *Princeton Legacy Library*. Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1987. Es va publicar primer com a volume 15 de «Publications of the Mathematical Society of Japan».

[23] S. Sun, "Ricci curvature in Kähler geometry," *International Journal of Mathematics*, vol. 28, no. 09, p. 1740009, 2017. math-berkeley pdf.

[24] J. Girbau, "Fibrés semi-positifs et semi-négatifs sur une variété kählérienne compacte," *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 101, no. 1, pp. 171–183, 1974. pdf.

[25] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., 1978. Republished in 1994 in the Wiley Classics Library.

[26] J.-P. Demailly, "Théorie de Hodge L^2 et théoremes d?annulation," *Introductiona la théorie de Hodge, Panoramas & Syntheses*, vol. 3, pp. 3–111, 1996. In Proceedings ICM84, pdf.

[27] J.-P. Demailly, "Méthodes L^2 et résultats effectifs en géometrie algébrique," *Astérisque-SMF*, vol. 266, pp. 59–90, 2000. Séminaire Boubaki, Numdam pdf.

[28] J.-P. Demailly, "Kähler manifolds and transcendental techniques in algebraic geometry," in *International Congress of Mathematicians. Vol. I*, pp. 153–186, 2007. ICM2006 pdf.

[29] C. Voisin, "Algebraic geometry versus Kähler geometry," *Milan journal of mathematics*, vol. 78, pp. 85–116, 2010. pdf.

[30] S. Donaldson, "Some recent developments in Kähler geometry," in *Proceedings Of The International Congress Of Mathematicians 2018 (4 Volumes)*, p. 425, 2019. arXiv pdf.

[31] C. Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I&II*, vol. 76,77 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 2002, 2003. x+322p, x+351p.

[32] S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*. Springer, 1972. Reprinted in Springer's «Classics of Mathematics».

[33] S. Mori, "Projective manifolds with ample tangent bundles," *Annals of Mathematics*, vol. 110, no. 3, pp. 593–606, 1979.

[34] Y.-T. Siu, S.-T. Yau, "Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature," *Inventiones mathematicae*, vol. 59, no. 2, pp. 189–204, 1980. pdf.

[35] S.-T. Yau, "Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 74, no. 5, pp. 1798–1799, 1977. PNAS pdf.

[36] M. Gross, D. Huybrechts, D. Joyce, *Calabi-Yau manifolds and related geometries*. Springer, 2003. Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway, June 2001.

[37] S.-T. Yau, "Calabi-Yau manifold," 2009. Scholarpedia article.

[38] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*. Springer, 2003. xxiv+824p.

[39] M. Berger, “Encounter with a geometer (M. Gromov), I,II,” *Notices of the AMS*, vol. 47, no. 2-3, pp. 183–194, 326–340, 2000. AMS pdf, AMS pdf.

Índex alfabètic

$\mathbf{C}^n$, 1
$\Delta, \Delta', \Delta''$, 9
$\Delta_E, \Delta'_E, \Delta''_E$, 11
$E(B,F)$, 8
$H^1(M, \mathcal{O}^*)$, 5
$H^k_c(M, \Omega^0)$, 42
$H^{p,q}$, 10
$H^{p,q}(E)$, 11
$H^q(M, \Omega^p)$, 11
J_x, 1
L^2, 38
$\mathcal{O}$, 4
$\mathcal{O}^*$, 4
$\Omega^p(E)$, 11
$\mathbf{P}_n$, 1
S^6, 3, 43
$\mathsf{TD}(M)$, 21
${}^cT_x(M)$, 1
$T_x^{(1,0)}$, 2
$T_x^{(0,1)}$, 2
$\tilde{*}$, 39
$b_{p,q}$, 10
$\mathsf{ch}(E)$, 23
d, d', d'', 2
d_E, d'_E, d''_E, 11
$\delta, \delta', \delta''$, 9
$\delta_E, \delta'_E, \delta''_E$, 11
$\mathsf{td}(E)$, 20

Adler, A., 3, 43
Akizuki, 17
Akizuki–Nakano, 17, 26, 35
Andreotti, 32
Andreotti-Frankel, 33
anell de Grothendieck, 24
aplicació de Jacobi, 36
Atiyah, M., 3
Aubin, 37

Berger, 34
Betti, 7
Bishop, 34
Blanchard, 8, 13, 36
Bochner, 13

Calabi, 8
caràcter de Chern, 23
Castelnuovo–Enriques, 19
Chern, S.-S., 4
Chow, W. L., 1
classe de Todd, 20
classes d'Eger–Todd, 20
classes de Chern, 4
classes de Stieffel-Whitney, 5
cobordisme de Thom, 23
conjectura d'Andreotti-Frankel, 33
conjectura de Calabi, 37
conjectura de Lichnerowicz, 37
convexitat holomorfa, 42

Dirichlet, 41
Do Carmo, 33
Dolbeault, 10
dominis d'holomorfia, 41
dualitat d'Igusa, 13

Eckmann, B., 2, 8
Eells, 14
Ehresmann, 6
Enriques–Severi–Zariski, 14, 16
espai de Hilbert, 38
estructura quasi complexa, 2
  integrable, 3
  ortogonal, 43

fibrat de línia ample, 19
forma de Kähler, 6
formes harmòniques, 9

fortament pseudoconvex, 41
Frankel, 32
Fröhlicher, 2, 28, 30
Fubini, 7
fórmula de Whitney, 5

Gauss-Bonnet, 22
gènere aritmètic, 20, 22
gènere de Todd, 21, 23
Goldberg, 34
Grauert, H., 42
Griffiths, 27, 28
Gromov, M. L., 7, 38
Grothendieck, 23
Guggenheimer, 8
Gunning i Rossi, 1

Hirzebruch, 11, 19, 20
Hodge, 8
Hodge–De Rham, 38
Hopf, H., 8
Hörmander, 41

irregularitat, 10
isomorfisme de
  Hodge–Dolbeault–Kodaira, 16
  Hurewicz, 6
  Kodaira, 12

Kähler, 7
Klingenberg, 34
Kobayashi, 8, 9, 31, 34
Kobayashi i Nomizu, 3
Kodaira, 8, 11, 12, 18, 19, 23, 28, 32, 35
Kodaira–Spencer, 12, 30
Kohn, J. J., 3, 38, 41

laplacià, 9
Levi, E. E., 42
Lichnerowicz, 31, 36

medalla Fields, 13
Morrey, C. B., 38
mètrica de Fubini, 7, 18
mètrica de Hodge, 18
mètrica hermítica, 6
mètrica kähleriana, 7

Nakano, 17, 20, 26, 31
Neumann, 41
Newlander, A., 2
Nijenhuis, 3, 28, 30
Nirenberg, 32
Nirenberg, L., 2
nombres de Betti, 7

octonions, 43
operadors lineals, 38

pinçament kählerià, 33
Poincaré, lema de, 10
problema de Dirichlet, 41
problema de Levi, 42
problema de Neumann, 41
propietat alternativa, 43

referència complexa, 3
Riemann–Roch, 22
Riemann–Roch–Grothendieck, 24
Riemann–Roch–Hirzebruch, 23
Riemenschneider, O., 42

Sampson, 14
Singer, I., 3
Spencer, 12, 28, 32, 38

tensor de torsió, 2
teorema de
  Chow, 19
  De Rahm, 10
  Frobenius, 2
  Hodge–De Rham, 9
  Hodge–Dolbeault–Kodaira, 22

Lefschetz, 16
Lefschetz–Hodge, 13
Riemann–Roch, 11, 19, 20
teorema de l'índex, 3
teoria de deformacions, 30
teoria de Morse, 34
Thom, 23
Todd, 20

van de Ven, A., 3
varietat d'Albanese, 36
varietat de Hodge, 17, 18
varietat de Picard, 12
varietat kähleriana, 7
varietat quasi complexa, 2
varietats d'Einstein, 34
varietats de Stein, 42
Vesentini, E., 35

Weil, André, 17
Whitney, 24
Woolf, 3

Zariski, 33