Yves Meyer, un matemàtic vagabund

Joaquim Bruna i Joan Verdera

29 de març de 2004

Si les corps sont placés loin de nous dans l'immensité de l'espace, si l'homme veut connaître le spectacle des cieux pour des époques successives que séparent un grand nombre de siècles, l'Analyse Mathématique peut suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens et nous rendre ces phénomènes présents et mesurables (Joseph Fourier, Discours Préliminaire)

Yves Meyer, a qui més d'un cop hem vist acabar una xerrada amb la cita anterior, és un els analistes més originals i influents de la seva generació. Nascut a Paris a l'any 1939, va passar la major part de la seva infància al Nord d'Àfrica, sobretot a Tunísia, on va fer tots els seus estudis secundaris. Després de passar per l'Ecole Normale Supérieure de Paris, ha anat bastint una carrera matemàtica impressionant que queda clarament il·lustrada en les dades següents : és qui ha donat estructura matemàtica, a part de ser-ne un dels descobridors, a la teoria d'ondetes (ondelettes en francès i wavelets en anglès), ha treballat successivament en almenys quatre àrees centrals de l'anàlisi harmònica a les quals ha contribuït amb idees decisives, ha estat professor ordinari de diverses universitats tals com la de Paris Sud (Orsay), l'Ecole Polytechnique (on va ocupar la càtedra que va deixar vacant Laurent Schwartz), Paris-Dauphine i l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, ha tingut 46 estudiants de doctorat i ha escrit 14 llibres. Sens dubte, un dels grans de la darrera meitat del segle passat.

L'esbós que acabem de presentar de la seva tasca científica insinua una personalitat exuberant, excessiva, que es confirma en presència de la persona: hom no pot evitar notar els ulls vivíssims, d'un blau intens, els cabells arrissats que prenen formes imprevisibles i la veu càlida, que genera una atmosfera amable i anticipa una conversa cortesa, profunda i gens convencional, plena d'emocions i d'idees. Ens cita al final del congrés que es va celebrar a Paris al Juny del 2003 en honor d'ell i del seu col·laborador més proper, Ronald Coifman de la Universitat de Yale. Parlem durant una hora, que passa volant, sobre com veu, un cop retirat (nosaltres diríem que prematurament) qüestions diverses relacionades amb les matemàtiques i la vida.

L'afecció per les matemàtiques li va néixer a Tunísia, de ben jovenet. Segons les seves pròpies paraules, la matemàtica li permetia experimentar la llibertat i la igualtat: la llibertat en el sentit que els problemes de la matemàtica es poden atacar i resoldre individualment, evitant qualsevol imposició externa; la igualtat perquè en matemàtiques ràpidament s'estableix una certa relació d'equilibri entre el mestre i el deixeble, en el sentit que aquest pot demostrar per la precisió dels seus arguments que el mestre s'equivoca. La fraternitat vindria amb la maduresa, que el portaria a col·laborar amb altres matemàtics per a resoldre problemes que havien resistit les escomeses d'altres generacions. Tot això ho explica molt bé ell mateix a l'article [Me4], en el qual, per cert, el lector hi trobarà una cita magnífica de Montaigne sobre el fet que el coneixement humà és el resultat dels esforços de generacions successives.

La tesi la va voler fer ell mateix, sense cap director, durant el període 1963-66 a Strasbourg on era ajudant de classes pràctiques. La tesi li va permetre guanyar una plaça a Orsay l'any 1966. Pels lectors analistes direm que el tema del treball era descriure els multiplicadors de l'espai de Hardy H^1 i el seu dual.

La insatisfacció per no haver obtingut resultats complets el va portar a criticar, durant la defensa de la seva tesi, el seu treball. La reacció divertida d'un membre del tribunal, el famós probabilista Paul-André Meyer, va ser de fer notar que els judicis sobre el valor de la tesi eren competència del tribunal i que el candidat s'havia de limitar a presentar-la. Els dos Meyer es van fer amics i va resultar que el fill d'en Paul-André, en Martin, va ser alumne de tesi de l'Yves.

A grans trets, la seva obra matemàtica s'estructura en quatre grans temes, que van ser tractats en períodes successius, sense pràcticament interseccions. A tots ells s'hi ha dedicat apassionadament. Diríem que aquesta, la passió per la recerca en matemàtiques, i la seva capacitat per encomanar-la, és un dels trets característics de la persona. Certament, assistint a un seminari d'Yves Meyer, hom no pot quedar indiferent, i els que es posen en primera fila ho han de tenir molt clar. Però quan Yves Meyer ha canviat de tema, sempre hi ha un nexe entre el tema vell i el nou, com després intentarem explicar. Tal com ens fa notar en Meyer, això està en perfecta consonància amb el caràcter nòmada dels beduïns de Tunísia, que abandonen el territori on han viscut durant cert temps per buscar una nova casa en un altre lloc. Els quatre temes són els següents.

1. El període 1967-1973 va ser dedicat, essent professor a Orsay, a la Teoria analítica dels nombres, en particular al paper que juguen els nombres de Pisot i de Salem en certs problemes d'anàlisi harmònica clàssica. Això va portar en Meyer a avançar-se d'uns anys al descobriment a la natura dels quasicristalls per part dels cristal·lografs i també a la teoria dels enrajolats de Penrose, la qual també anticipava el descobriment dels quasicristalls. El seu primer llibre [Me1] és una exposició del seu treball en aquesta àrea. Durant aquests anys també va treballar en teoria ergòdica amb Benjamin Weiss a Jerusalem i en el programa de Jean Delsarte sobre les funcions periòdiques en mitjana.

2. Durant els anys 1974-1983 s'estableix una col·laboració extraordinàriament productiva amb Ronald Coifman per a treballar en el programa de Calderón. Calderón era un matemàtic argentí que treballava amb Zygmund a la Universitat de Chicago en anàlisi harmònica clàssica i les seves aplicacions a les EDP. El programa de Calderón consistia en estendre la teoria clàssica de les EDP a equacions amb hipòtesis minimals de regularitat sobre els coeficients de l'equació. El plan era construir certes àlgebres d'operadors pseudo-diferencials per poder aplicar mètodes de càlcul simbòlic.La consideració de casos elementals portava a estudiar la continuïtat en $L^2(\mathbb{R})$ de certs operadors integrals singulars que no eren de convolució i que, per tant, no eren susceptibles de ser tractats amb els mètodes clàssics de l'anàlisi de Fourier. Un operador de la mateixa família i, en cert sentit, paradigmàtic, és l'operador integral de Cauchy sobre la gràfica d'una funció de la classe de Lipschitz. Calderón va demostrar la desigualtat L^2 per gràfiques molt properes a una recta a l'any 1977, en un article famós. El resultat general va ser obtingut per Coifman, McIntosh i Meyer l'any 1982 en un treball que portava la teoria de Calderón-Zygmund a un estat de plenitud que feia presagiar futures i espectaculars aplicacions. Més endavant s'explica la casualitat que va fer que Meyer i McIntosh es coneguessin personalment i comencessin a col·laborar.

3. El període 1984-1992 és el de les ondetes (ondelettes o wavelets). Segons el mateix Meyer, les ondetes significaren per a ell una segona vida científica i la manera com es va iniciar el seu interès pel tema il·lustra el fet que en la seva vida sempre hi ha hagut un lligam especial entre la recerca i l'amistat. L'any 1984 ell era professor a l'Ecole Polytechnique, on matemàtics i físics matemàtics compartien la fotocopiadora. El director del departament de Física matemàtica era en Jean Lascoux, una persona amb tendència a l'erudició, que ho volia saber tot i , en conseqüència, intentava fotocopiar-ho tot. Això impedia sovint en Meyer de fer les seves fotocópies, perquè en Lascoux ocupava quasi sempre la màquina. Però això no l'amoïnava gens ni mica perquè li agradava parlar amb ell. Un dia de setembre de 1984, en

Meyer li va explicar què havia fet durant l'estiu i en Lascoux li va dir : *llavors t'hauries de mirar un preprint de Grossmann i Morlet que acabo de rebre.* En Morlet era un enginyer que treballava en la recerca de jaciments de petroli en el subsòl per a la companyia petrolífera francesa Elf-Aquitaine i que havia descobert les ondetes d'una forma empírica i intuïtiva. En Grossmann era un físic teòric (especialista en mecànica quàntica) amb qui Morlet s'havia posat en contacte per entendre millor el seus descobriments. Ràpidament en Meyer es va adonar que hi havia una relació entre les expressions de Morlet i Grossmann i fórmules demostrades anys enrera per Calderón. Aquí és on ell es va incorporar, sortosament, a la naixent teoria de les ondetes, que de forma molt principal estructurarà matemàticament. Les ondetes són funcions especials mitjançant les quals es construeixen bases ortonormals de $L^2(\mathbb{R})$ en les que es poden descompondre eficaçment molts dels senyals tractats pels enginyers de telecomunicacions i que, d'altra banda, tenen una relació conceptual profunda amb el programa de Calderón. Per les ondetes i la seva relació amb els operadors de Calderón-Zygmund recomanem el llibre [Me2, vol III].

4. A partir del 1992 Meyer treballa en un problema famós en EDP: les equacions de Navier-Stokes, que descriuen, entre altres coses, els fenòmens de turbulència dels fluids (per exemple, els que apareixen en meteorologia). Per cert, un dels problemes oberts més importants relacionats amb les equacions de Navier-Stokes és un dels sets problemes matemàtics per la solució d'un dels quals un multimilionari nord-americà, Landon Clay, ha ofert un milió de dòlars (vegeu la web [W]).

Immediatament després d'haver repassat la seva obra en Meyer ens parla del seu sentiment d'ignorància i d'incompetència matemàtiques, cosa que ens causa veritable sorpresa. Ens explica que l'envaeix la sensació angoixant de no conèixer gaire la matemàtica i que, a vegades, la sensació es transforma en realitat. Tant és així, que sovint ha de recórrer als seus deixebles per qüestions concretes sobre temes matemàtics. Considera que els seus ex-estudiants de doctorat sí que han sabut fer-se experts en els seus respectius temes i li reca tenir una incapacitat intel·lectual per a l'especialització.

-Quan començo a entendre un determinat tema de recerca em ve un desig de fer altres coses, de tornar a ser una altra vegada com un nen que té necessitat de ser acollit i ensenyat. Llavors procuro relacionar-me amb una altra comunitat científica i procuro aprendre coses i problemes nous de la gent sàvia. Sóc una mica com un viatjant, com un nòmada de les matemàtiques. Per exemple, hi ha la comunitat de Teoria del senyal, que a França és un col·lectiu molt estructurat, que m'ha acollit amb gran amabilitat i hi he fet amics, com en Patrick Flandrin.-

Li preguntem si es considera el cap d'una escola matemàtica i quin paper juguen les escoles matemàtiques al seu parer .

-Jo no em sento el cap d'una escola matemàtica, perquè no tinc la capacitat de quedar-me al mateix lloc per a construir. Jo tinc el dolor de ser una persona totalment desorganitzada i totalment incompetent.-

Hi ha una temptativa de protesta per part nostra que no fructifica. Nosaltres sí que diríem que és el cap visible d'una escola matemàtica!

-Però per altra banda trobo que les escoles matemàtiques juguen un paper molt útil en l'àmbit de l'educació dels joves. Són col·lectius de gent que coneix un munt de coses i que les transmet. A través d'un seminari a una universitat per exemple. A mi em passa que la meva vida matemàtica ha estat una successió d'amistats. Abans de la col·laboració hi ha hagut una relació personal. Amb en Calderón, per exemple. Ell era un home reservat, però de tant en tant em parlava amb nostàlgia de la seva vida de joventut a Buenos Aires, de Borges i em va fer entendre que el peronisme era una forma de populisme retrògrad. Recordo la primera trobada amb en Guido Weiss a Oberwolfach. Els dos vàrem baixar al vespre a la nevera del soterrani i només hi havia una ampolla de vi. Així que la vàrem compartir. En aquella mateixa reunió vaig conèixer en Ferran Sunyer i Balaguer i ens vàrem apreciar molt des del començament. Amb ell mai hi vaig col·laborar, però, perquè això de treballar junts a vegades surt i a vegades no. La trobada amb en McIntosh també és una història curiosa. Durant el curs 1980-81 jo començava a fer classe a l'Ecole Polytechnique i no tenia cap obligació docent a Orsay, però els sindicats d'Orsay es varen oposar a que es fessin cursos de doctorat no pagats. En aquell temps a Orsay els "Professeurs" havien de fer tres hores de classe a la setmana. Com que hi havia moltes hores per a donar ningú no quedava alliberat i no es podien donar cursos de doctorat si no era de manera generosa. Els sindicats s'hi oposaven. Llavors va ser quan vaig decidir fer un curs de doctorat a Orsay com a senyal de rebel·lió contra uns sindicats que actuaven de forma autoritària i també per sentit de responsabilitat envers els més joves. En McIntosh era un alumne d'aquest curs. Vaig trobar que era una persona diferent i el convidava a dinar a la cafeteria de l'Ecole Polytechnique. Va ser ell qui va aportar l'última anella que ens faltava a en Coifman i a mi per a completar el teorema de la corba.-

Suggerim que l'escola d'anàlisi harmònica que s'ha creat des de Princeton al voltant d'Elias Stein potser és el pol oposat.

- Sí, exactament. Vaig tenir una correspondència molt bonica amb l'Stein a propòsit d'un somni que jo havia tingut en el qual intervenia un fill seu. L'Stein va intentar interpretar el meu somni i la seva conclusió va ser que jo havia sortit de les matemàtiques per explorar el món exterior. De fet, al principi d'aquesta setmana vaig estar a Rennes treballant amb uns metges que s'ocupen de millorar les imatges mèdiques per curar millor la gent. A mi

m'agrada molt això. Ells m'accepten i tenim relacions molt amigables.-

Li preguntem què vindrà després de Navier-Stokes.

-Em penso dedicar a les neuro-ciències, que trobo una àrea molt interessant que probablement es desenvoluparà molt ràpidament i a la qual la matemàtica pot contribuir d'una forma decisiva-

És dissabte, últim dia del congrés, i es fa tard. Com que l'hora de dinar ja fa estona que ha passat, compartim un entrepà que apareix d'una nevera i cadascú marxa cap a casa seva.

Durant el trajecte cap a l'hotel repassem el que ens ha explicat en Meyer sobre les seves estades a Espanya. Als anys seixanta tenia amics a València, republicans i lluitadors anti-franquistes, que visitava amb certa freqüència viatjant en els trens tronats de l'època, en vagons de tercera classe, en companyia de pagesos extremament hospitalaris i generosos que compartien amb ell un abundant i gustós menjar. En aquest període va conèixer Barcelona, que recorda amb molt plaer. Durant els anys vuitanta va visitar amb certa regularitat la Universitat Autònoma de Madrid on s'havia format un grup important en anàlisi harmònica clàssica. Els autors recorden especialment la primera edició del congrés de l'Escorial a l'any 1979, en el qual Calderón exposava aplicacions del seu teorema sobre la integral de Cauchy a problemes de EDP en dominis amb frontera lipschitziana i Meyer i Coifman explicaven els seus avenços sobre els commutadors d'ordre superior. El segon autor, que durant els anys vuitanta també visitava freqüentment la UAM, va tenir la sort de poder assistir als magnífics seminaris que impartia en Meyer sobre els treballs dels seus deixebles Guy David i Jean Lin Journé (alguns en col·laboració amb Stephen Semmes) sobre el teoremes T(1) i T(b). Des de la perspectiva d'avui en dia es pot afirmar que el teorema T(b) és un resultat central que ha intervingut de manera determinant en els progressos espectaculars que s'han produït en aquests últims anys en la teoria de la capacitat analítica (vegeu [Ve])i en la solució de la conjectura de Kato (vegeu [AHLMT]).

Més recentment, en Meyer ha visitat Barcelona en ocasió d'un curs organitzat pel primer autor a la Universitat Autònoma de Barcelona sobre el processament d'imatges i en ocasió del tercer congrés europeu celebrat a Barcelona a l'any 2000, en el qual va ser conferenciant plenari. A nivell d'anècdota, en Meyer es declara un entusiasta i un expert del vi espanyol.

Per aquells lectors interessats en temes d'anàlisi harmònica clàssica presentem ara dos apèndixs que volen ser dues breus exposicions del treball d'en Meyer en l'àmbit del programa de Calderón i la integral de Cauchy per una banda, i de les ondetes per l'altra.

Apèndix 1: El programa de Calderón i la integral de Cauchy sobre la corba.

El prototip d'operador integral singular de Calderón-Zygmund és la transformada de Hilbert:

$$H(f)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y-x|>\epsilon} \frac{f(y)}{y-x} dy \equiv V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy,$$

on V.P. significa "valor principal" i f és una funció que, inicialment, s'ha de pensar que és molt bona, diguem infinitament diferenciable i amb un decreixement prou ràpid a l'∞. La integral precedent no és absolutament convergent, però és fàcil veure que el valor principal existeix, utilitzant el fet clau que el nucli és senar i explotant les cancel·lacions que això produeix a l'integrand. La transformada de Hilbert serveix, entre altres coses, per a expressar la part imaginària d'una funció analítica al semiplà superior $\{\text{Im}z \geq 0\}$ en termes de la part real. Si la funció és $u(z) + iv(z)$ amb u i v reals i es normalitza adequadament, llavors tenim que $v(x) = H(u)(x)$ per x real. És precisament aquesta fórmula que fa que la transformada de Hilbert sigui un operador tant conegut i utilitzat pels enginyers que treballen en teoria del senyal(vegeu [Ma]).

La transformada de Hilbert és, mòdul una constant, una isometria de $L^2(\mathbb{R})$,

$$\|Hf\|_2 = \pi \|f\|_2$$

Hi ha versions n-dimensionals de la transformada de Hilbert que apareixen de la forma següent. Per funcions infinitament diferenciables amb el suport compacte se sap que el laplacià determina la funció. Això a la recta és una conseqüència immediata del teorema fonamental del càlcul aplicat dues vegades. En dimensions superiors hi ha una forma d'expressar la funció en termes del laplacià, que s'obté d'una elegant i senzilla aplicació de la fórmula de Green-Stokes. En dimensió 2 tenim

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int \log \frac{1}{|\zeta|} \triangle f(z-\zeta) du dv$$

on entenem que $\zeta = u + \imath v$. En dimensió $n \geq 3$

$$f(x) = c_n \int \frac{1}{|y|^{n-2}} \triangle f(x-y) dy,$$

on c_n és una constant que depèn de la dimensió i el valor concret de la qual no ens cal saber. Si volem obtenir una expressió per les derivades segones de f en termes del laplacià només hem de derivar dues vegades sota el signe integral. La primera derivada és fàcil : considerant només el cas $n = 2$ obtenim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{u}{|\zeta|^2} \, \triangle f(z-\zeta) du dv,$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{v}{|\zeta|^2} \, \triangle f(z-\zeta) du dv,$$

on hem posat $z = x + \imath y$ i $\zeta = u + \imath v$.

Al derivar una segona vegada s'ha de vigilar més perquè el nucli que apareix no és localment integrable. És per aquesta raó que a l'aplicar Green-Stokes s'obté una fórmula que conté una integral no absolutament convergent que s'ha d'entendre en el sentit del valor principal

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z) = -\frac{1}{\pi} V.P. \int \frac{uv}{|\zeta|^4} \, \triangle f(z-\zeta) du dv.$$

Igual que en el cas de la transformada de Hilbert, el valor principal a la formula precedent és

$$V.P. \int = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|\zeta - z| > \epsilon} .$$

Anàlogament s'obtenen les elegants identitats

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z) = \frac{1}{2} \triangle f(z) + \frac{1}{2\pi} V.P. \int \frac{|\zeta|^2 - 2u^2}{|\zeta|^4} \, \triangle f(z-\zeta) du dv$$

i

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z) = \frac{1}{2} \triangle f(z) + \frac{1}{2\pi} V.P. \int \frac{|\zeta|^2 - 2v^2}{|\zeta|^4} \, \triangle f(z-\zeta) du dv.$$

Les integrals en el sentit del valor principal a les tres fórmules precedents són exemples d'integrals singulars al pla. El nucli té homogeneïtat -2 i, doncs, no és localment integrable, però quasi. Ara el nucli és parell però hi ha propietats de cancel·lació que expliquen l'existència del valor principal. Per exemple, els nuclis que apareixen a les tres fórmules de dalt,

$$\frac{xy}{|z|^4}, \; \frac{|z|^2 - 2x^2}{|z|^4} \text{ i } \frac{|z|^2 - 2y^2}{|z|^4},$$

tenen valor mitjà zero a qualsevol circumferència centrada a l'origen.

El fet que s'ha de retenir i que les fórmules precedents suggereixen és que les integrals singulars jugaran un paper fonamental en la teoria de les EDP. Calderón i Zygmund varen desenvolupar als anys cinquanta la teoria de variable real de les integrals singulars a $\mathbb{R}^n$. Per exemple, si T és l'operador de convolució determinat per un nucli del tipus descrit abans, llavors hom té les desigualtats $L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|T(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p \, , 1 < p < \infty,$$

on C_p és una constant que depèn de p però no de f. Per tant, si una funció (amb prou decreixement a l'∞) té el seu laplacià a $L^p(\mathbb{R}^n)$, llavors totes les derivades segones són automàticament de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Anys després Calderón va obtenir aplicacions notables de les integrals singulars a certs problemes de EDP's, per exemple, a la unicitat del problema de Cauchy per equacions el·líptiques i hiperbòliques. Aquestes aplicacions es basaven en l'ús d'un càlcul simbòlic en certes àlgebres d'operadors integrals singulars, el qual, per cert, és el precedent de la teoria de Kohn i Hörmander dels operadors pseudodiferencials. El programa de Calderón consistia en refinar aquest càlcul simbòlic per a obtenir millores i extensions de la teoria de De Giorgi i Nash sobre les EDP's el·líptiques amb condicions minimals de regularitat sobre els coeficients de l'equació.

Per tenir un càlcul simbòlic convé disposar d'àlgebres i, per tant, convé que la composició d'operadors d'una certa classe sigui un operador de la mateixa classe. En el cas que interessava Calderón i en dimensió 1, tot es feia mòdul operadors acotats a $L^2(\mathbb{R})$. Component operadors senzills s'arriba de forma natural a considerar certs commutadors $[T, S] = TS - ST$. Per exemple, el commutador entre l'operador M_A de multiplicació per A i l'operador $\frac{d}{dx}$ de derivació és l'operador $M_{A'}$ de multiplicació per la derivada A'. Així que aquest commutador és acotat en L^2 si i només si A' és una funció acotada, o dit d'una altra forma, A compleix una condició de Lipschitz:

$$|A(x) - A(y)| \leq L|x - y| \, , \; x, \, y \varepsilon \mathbb{R},$$

on L és una constant positiva. El següent cas en ordre de dificultat és el commutador entre M_A i l'operador $H\frac{d}{dx}$, on H és la transformada de Hilbert. Un càlcul elemental mostra que aquest commutador és l'operador integral singular

$$C_1 f(x) = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A(y) - A(x)}{y - x} \right) \frac{f(y)}{y - x} \, dy,$$

que es coneix pel nom de primer commutador de Calderón. El fet que aquest operador és acotat a $L^2(\mathbb{R})$ si A és lipschitziana és un resultat fonamental que va ser demostrat per Calderón l'any 1965 en un article que va introduir diverses idees noves relatives als espais de Hardy de funcions analítiques al semiplà superior. El lector pot copsar fàcilment la diferència entre la transformada de Hilbert i el primer commutador : el primer és un operador de convolució i el segon no. Això fa que per la transformada de Hilbert hom pugui utilitzar directament la transformada de Fourier mentre que pel primer commutador això no és possible i el problema esdevé difícil.

Els commutadors d'ordre superior són els operadors integrals singulars

$$C_n f(x) = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A(y) - A(x)}{y - x} \right)^n \frac{f(y)}{y - x} \, dy,$$

on A és una funció lipschitziana. Els mètodes emprats per al primer commutador no s'aplicaven al cas $n \geq 2$. Al cap d'un temps es va fer clar que la solució de les dificultats lligades als commutadors estava íntimament associada a entendre un vell operador que, de fet, representava la fita mai assolida per la teoria de les integrals singulars: la integral de Cauchy sobre la gràfica d'una funció lipschitziana. Aquest operador és

$$C(f)(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

on f és una funció definida sobre la corba

$$\Gamma = \{x + \imath A(x) : x \varepsilon \mathbb{R}\},$$

i la integral s'ha d'entendre com un valor principal si z està a Γ.
Parametritzant la corba veiem que la integral de Cauchy és, essencialment, l'operador

$$C(f)(x) = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)(1 + \imath A'(y))}{x - y + \imath(A(x) - A(y))} dy,$$

que actua sobre una funció f definida a la recta i dóna una funció $C(f)$ també definida a la recta. Notem que el factor $1 + \imath A'(y)$ és acotat i, per tant, no representa cap perill. Fins i tot podríem ignorar-lo incorporant-lo a f.

Si suposem que $|A'(x)| < 1$, per x a $\mathbb{R}$, podem desenvolupar el nucli en sèrie de potències:

$$\frac{1}{x - y + \imath(A(x) - A(y))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\imath)^n \frac{(A(x) - A(y))^n}{(x - y)^{n+1}}.$$

La conclusió és que la integral de Cauchy és una suma de commutadors d'ordre superior.

Coifman i Meyer varen desenvolupar a mitjans dels anys setanta nous mètodes d'anàlisi multilineal per a l'acotació dels commutadors a $L^2(\mathbb{R})$.

Malauradament la desigualtat que obtingueren per la norma del commutador d'ordre n creixia exponencialment en n i això no els permetia sumar per assolir l'acotació de la integral de Cauchy. En Calderón es va avançar novament a l'any 1977 al demostrar que la integral de Cauchy era un operador acotat a $L^2(\mathbb{R})$ sempre que la gràfica de A fos extremadament propera a una recta. Dit amb més precisió, s'havia de complir que $\|A'\|_\infty \leq \epsilon_0$ per a cert nombre ϵ_0 molt petit. El mètode de demostració, molt diferent de les idees de variable real introduïdes per Coifman i Meyer, consistia en un argument de deformació que utilitzava fortament el rerefons d'anàlisi complexa del problema. No va ser fins al 1981 que Coifman i Meyer, amb l'ajuda final de McIntosh, van trobar una acotació polinomial del tipus $O(1+n^9)$ per al commutador d'ordre n i varen poder sumar la sèrie adequada per concloure que la integral de Cauchy també és un operador acotat per a qualsevol funció lipschitziana.

Al cap de vint anys tots aquests resultats s'entenen molt millor i s'han obtingut demostracions prou senzilles de l'acotació a $L^2(\mathbb{R})$ tant pels commutadors com per la integral de Cauchy. De fet, avui sabem que el primer commutador controla la integral de Cauchy i que hi ha un argument directe per acotar el primer commutador utilitzant la transformada de Fourier. Així que no només el vell resultat de Calderón del 1965 ja ho conté tot, sinó que es pot demostrar per arguments clàssics d'anàlisi de Fourier amb l'ajut d'una astúcia tant subtil com simple (vegeu [Ve]).

Diversos deixebles d'en Meyer es varen encarregar durant els anys vuitanta d'avançar en la comprensió del problema d'acotar en L^2 operadors integrals singulars més generals que la integral de Cauchy sobre una corba lipschitziana. En particular David, Journé i Semmes varen obtenir l'anomenat teorema $T(b)$, que és un criteri extremadament potent per a l'acotació en L^2 de certa classe d'operadors T : és suficient que $T(b)$ sigui una funció acotada per només una funció acotada b que compleixi certes condicions de no-trivialitat, que en particular exclouen el cas $b = 0$. El teorema $T(b)$ ha obtingut recentment dos èxits espectaculars i en els dos hi han intervingut deixebles d'en Meyer. El primer és la demostració de la conjectura de Vitushkin per la capacitat analítica deguda a Guy David (vegeu el survey [Da]). Mencionem, de pas, que J. Mateu, X.Tolsa i el segon autor han aplicat variants del teorema $T(b)$ per a resoldre altres vells problemes relacionats amb la capacitat analítica (vegeu [MTV] i [T]). El segon és la solució de la conjectura de Kato sobre el domini de l'arrel quadrada d'operadors acretius, en què han intervingut, entre altres, en Pascal Auscher i P.Tchamitchan, deixebles d'en Meyer, i, com no, en McIntosh (vegeu [AHLMT]).

Apèndix 2: Les bases d'ondetes.

La teoria d'ondetes té antecedents en la teoria del senyal i, dins l'Anàlisi Harmònica, en la teoria de Littlewood-Paley i les descomposicions atòmiques de certs espais de funcions, particularment els espais de Hardy. És un àmbit que ultrapassa el de l'anàlisi, fins i tot el de les matemàtiques, es tracta d'una teoria veritablement transversal, on hi treballen amb múltiples punts de vista tant teòrics com aplicats, comunitats científiques molt variades: matemàtics, físics teòrics, enginyers de telecomunicacions, geòlegs, i molts especialistes en so i imatge. Doncs bé, certament Yves Meyer és segurament el principal responsable del fenomenal desenvolupament d'aquesta teoria i del seu bon estat de salut, tant per les contribucions personals com per l'impuls que molts dels seus estudiants hi han donat després.

Aquesta història comença a França amb els treballs de A. Grossmann i J. Morlet, però té els orígens en el que s'anomena l'anàlisi en temps-freqüència, on els referents clàssics són D. Gabor i E. Wigner (ambdós premi Nobel). En tractament del senyal era costum, per fer una anàlisi del component local freqüèncial d'un senyal, utilitzar la transformada de Fourier amb finestra, també anomenada "short time Fourier transform"; senzillament es pren una "finestra"G, que en principi potser qualsevol funció de $L^2(\mathbb{R})$ i que podem pensar com una gaussiana normalitzada o quelcom semblant (centrada en zero i amb un ràpid decreixement en infinit), i per fer l'anàlisi local en freqüència al voltant d'un punt u d'una funció f multipliquem f per $G(t-u)$, la traslladada de G a u, i fem l'anàlisi de Fourier:

$$\tilde{f}_G(u,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)G(t-u)e^{-2\pi i\omega t}\,dt$$

Això pot escriure's com la correlació o producte escalar de f amb l'"àtom"$G_{u,\omega}(t) = e^{2\pi i\omega t}G(t-u)$. Podem pensar que els àtoms són versions localitzades al voltant d'u de sinus i cosinus (parametritzats per la freqüència ω). Com en la transformació de Fourier, hom pot reconstruir f:

$$f(t) = \int\int G_{u,\omega}(t)\tilde{f}(u,\omega)\,d\omega\,du, \tag{1}$$

que és millor escriure

$$f = \int\int < f, G_{u,\omega} > G_{u,\omega}\,d\omega\,du,$$

perquè ens fa veure que els àtoms $G_{u,\omega} \in L^2(\mathbb{R})$ (que aquí anomenarem "gaborlets") formen una "base ortonormal" contínua de $L^2(\mathbb{R})$; de fet hi ha també un teorema de Pitàgores-Parseval:

$$\int |f(t)|^2\, dt = c \int\int |\tilde{f}(u,\omega)|^2\, d\omega\, du.$$

L'inconvenient d'això és que la finestra té mida fixa, tan sols la traslladem. Si tenim un sinus d'una freqüència ω que desconeixem, per poder dir, dins un cert marge d'error que el valor de ω és ω_0, ens és suficient observar aquest sinus en un interval petit quan ω_0 és gran, però en necessitem un de més gran quan ω_0 és petit. Semblaria doncs natural fer l'anàlisi local en freqüència amb finestres de mida variable, amples per a baixes freqüències i estretes per a freqüències altes. Això és el que Morlet assajà substituint el paràmetre de freqüència per un paràmetre d'escala: substitueix la finestra G per una funció real Ψ complint

$$\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi}\, d\xi = 1, \tag{2}$$

que s'anomena l'*ondeta bàsica* o *ondeta analitzant*, i substitueix els gaborlets $G_{u,\omega}$ per les ondetes

$$\Psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\Psi(\frac{t-u}{s}).$$

Aquí $s > 0$ és un paràmetre d'*escala* i $u \in \mathbb{R}$ és un paràmetre de *posició*. El factor $1/\sqrt{s}$ hi és per obtenir la normalització

$$\int |\Psi_{u,s}(t)|^2\, dt = \int |\Psi(t)|^2\, dt.$$

Amb aquest nous àtoms hom procedeix com abans per analitzar– trencar en peces–un senyal f: mirem les correlacions

$$Wf(u,s) =< f, \Psi_{u,s} >= \int f(t)\overline{\Psi_{u,s}(t)}\, dt.$$

Hom pot veure fàcilment que si Ψ és triada convenientment, per exemple amb contingut freqüencial amb suport compacte separat del zero, aquests coeficients serveixen veritablement el propòsit, detecten la component de freqüència ω amb una finestra de mida inversament proporcional a ω. I la formula de reconstrucció? En aquest punt, quan ja Morlet i Grossmann treballaven junts, varen provar la fórmula de reconstrucció, que aquí és

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} Wf(u,s)\Psi_{u,s}(t)\frac{du\, ds}{s^2}. \tag{3}$$

Aquesta és vàlida només quan Ψ compleix la condició (2) anomenada d'admissibilitat.

En aquest moment s'esdevé la trobada a la fotocopiadora i és quan Yves Meyer entra en escena. Per aquesta casualitat– que per cert no s'hagués produït si com fa uns anys a les nostres universitats hom podia encarregar al bidell de fer-te unes fotocòpies– Yves Meyer conegué el treball de Morlet i Grossmann. Ràpidament s'adonà que allò era "música coneguda", més precisament, aquest procés d'anàlisi-síntesi va resultar ser una reformulació del que en anàlisi harmònica s'anomena la formula de Calderón. Malgrat això, la presentació en aquest context, i sobretot obrir les portes a la utilitat d'aquest concepte en tractament del senyal, és quelcom certament molt meritori i ens ensenya que les reformulacions poden ser útils. En aquest punt comença un doble desenvolupament de la teoria d'ondetes: el teòric de fonamentació i les aplicacions. Yves Meyer es convertí en el principal referent de la nova teoria matemàtica d'ondetes. Cal observar que això no representava cap trencament amb el seu tema de treball anterior, perquè precisament un dels punts de vista de Meyer és que les ondetes són l'eina adequada per entendre els espais de funcions i els operadors de Calderón-Zygmund, com després explicarem breument.

Meyer abordà una qüestió molt natural. En les fórmules anteriors, on representem f mitjançant unes integrals dobles amb gaborlets i wavelets respectivament, hi ha molta redundància. L'ideal fóra tenir una quantitat "discreta"d'informació a retenir per codificar f enlloc d'un continu (doble) de coeficients. En el cas de la integral (3) és raonable prendre les sumes de Riemann corresponent a la xarxa regular $u = na, n \in \mathbb{Z}, \omega = kb, k \in \mathbb{Z}$ i plantejar-se si

$$\sum_{n,k} < f, G_{na,kb} > G_{na,kb} = f$$

o en altres paraules si la família $\{G_{na,kb}, n, k \in \mathbb{Z}\}$ forma una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. En el cas de les ondetes, la discretització que toca considerar es la corresponent a una xarxa hiperbòlicament regular, posem $s = 2^{-k}, u = n2^{-k}$. En aquest cas obtenim $\Psi_{n,k} = 2^{\frac{k}{2}}\Psi(2^k t - n)$ i ens preguntem quan

$$\sum_{n,k} < f, \Psi_{n,k} > \Psi_{n,k} = f, f \in L^2$$

és a dir, quan la família $\{\Psi_{n,k}, n, k \in \mathbb{Z}\}$ forma una base ortonormal, i llavors hom diu que Ψ és una ondeta ortonormal. Un teorema clàssic en anàlisi temps-freqüència, el teorema de Balian-Low, estableix que bases del tipus $\{G_{na,mb}\}$ només existeixen quan la finestra G té dispersió (en el sentit de la variància) infinita o bé temporalment o bé en freqüència (un exemple obvi es la funció característica de l'interval unitat, que en freqüència té dispersió infinita). D'altra banda, Haar havia demostrat a la seva tesi a l'any 1907 que la funció que val 1 en l'interval $[0, \frac{1}{2}]$, -1 en $[\frac{1}{2}, 1]$ i zero arreu és una ondeta ortonormal. De fet la funció de Haar era l'únic exemple d'ondeta ortonormal conegut llavors. Tot això semblava indicar que hi hauria un anàleg del teorema de Balian-Low per a ondetes, és a dir, que tampoc podria haver-hi ondetes ortonormals ben localitzades simultàniament en temps i freqüència (la de Haar té dispersió infinita en freqüència). Yves Meyer es posà a intentar provar aquest resultat, ben convençut. Al cap d'un temps, però, es va adonar del contrari, i va construir una ondeta ortonormal Ψ amb $\hat{\Psi}$ una funció C^∞ amb suport compacte, per tant, ben localitzada simultàniament. De fet, en un article que no havia rebut prou atenció i que no es va conèixer pels especialistes fins llavors, J. Strömberg havia construït uns anys abans una ondeta ortonormal, però menys regular i amb pitjor localització en freqüència. Després de Meyer, altres varen construir altres bases. Aquests resultats obrien un nou món, tant en fonamentació teòrica com en aplicacions. Per a algunes d'aquestes, especialment a imatges, eren molt útils ondetes ortonormals amb suport compacte i molt regulars. Ràpidament es va comprovar que no poden haver-hi ondetes ortonormals amb suport compacte que siguin de classe C^∞, però quedava oberta la possibilitat de construir-ne amb un nombre finit, arbitràriament gran, de derivades, fita que fou aconseguida poc després per I.Daubechies. D'altra banda, es va veure que era possible modificar els gaborlets (que pel teorema de Balian-Low no poden donar lloc a bases) per tal d'obtenir bases útils; el resultat són les bases locals trigonomètriques de Malvar-Wilson.

Mentrestant va aparèixer un concepte fonamental, l'anàlisi multiresolució (MRA). La idea de l'anàlisi resolució va ser elaborada inicialment per Coifman i Meyer, i en un cert punt es nodrí d'una aportació fonamental d'un jove estudiant de doctorat francès de 23 anys, Stephane Mallat. Aquest, que havia tingut Meyer com a professor a l'Ecole Polytechnique i havia marxat a Philadelphia per fer la tesi, va anar a trobar Yves Meyer durant una de les visites d'aquest a Chicago. Mallat havia trobat la relació entre les ondetes i certs algorismes que simultàniament s'estaven desenvolupant per especialistes de tractament del senyal (els filtres de quadratura d'Esteban i Galand, que al seu torn milloren els anomenats algorismes piramidals de Burt-Adelson).Un altre precedent és l'algorisme d'interpolació diàdica de Deslauriers i Dubuc. Segons Meyer mateix, va ser en aquest moments que els especialistes més aplicats en l'àmbit del tractament del senyal es van convéncer de la utilitat de les ondetes i els MRA.

Per explicar què és una MRA, considerem una ondeta ortonormal, pensem en la de Haar per exemple. Recordem que $\Psi_{n,k}(t) = 2^{\frac{k}{2}}\Psi(2^k t - n)$. Convé interpretar que els coeficients $< f, \Psi_{n,k} >$ porten les variacions del senyal a escala 2^{-k}, resolució 2^k (la *resolució* és l'invers de l'escala, les altes resolucions corresponen a escales petites). Per a k fixat, la suma

$$\sum_n < f, \Psi_{n,k} > \Psi_{n,k}$$

s'interpreta com el "detall"a la resolució 2^k, i la suma de tots els detalls a les resolucions anteriors,

$$\sum_{j=-\infty}^{k} \sum_n < f, \Psi_{n,j} \Psi_{n,j} >= P_k f$$

és l'aproximació de f a la resolució 2^k. L'espai de les aproximacions a la resolució 2^k constitueixen l'espai V_k, generat per les ondetes $\Psi_{n,j}$ amb $j \leq k, n \in \mathbb{Z}$, i $P_k f$ és la projecció de f sobre V_k. Aquests subespais V_k creixen amb k i $P_k f \rightarrow f$, és a dir, el "límit"dels V_k és tot $L^2(\mathbb{R})$.

Una *anàlisi multiresolució* de $L^2(\mathbb{R})$ és una successió $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de subespais tancats de $L^2(\mathbb{R})$ que compleixen les propietats:

1. $V_k \subset V_{k+1}$.
2. $f(\cdot) \in V_k$ si i només si $f(2\cdot) \in V_{k+1}$.
3. La intersecció de tots els V_k es redueix a la funció zero.
4. La reunió dels V_k és densa en $L^2(\mathbb{R})$.
5. Hi ha una funció $\phi \in V_0$ tal que les traslladades enteres de $\phi, \phi_{0,n}(t) = \phi(t-n)$ formen una base de Riesz de V_0.

La darrera condició permetrà *discretitzar* ; significa que tota $f \in V_0$ té una única expressió del tipus $f(t) = \sum_n a_n \phi(t-n)$ amb $\sum_n |a_n|^2$ comparable a $\|f\|^2$. La funció ϕ s'anomena la *funció d'escala* del MRA i pot veure's que pot ser modificada de forma que les $\phi_{0,n}$ siguin una base ortonormal de V_0; observi's que ϕ determina tot el MRA. Cada V_k és una versió escalada de V_0, i les condicions impliquen que $\phi_{k,n}(t) = 2^{\frac{k}{2}} \phi(2^k t - n), n \in \mathbb{Z}$, amb k fix, formen una base de V_k.

Com abans, el subespai V_k ha d'interpretar-se com el conjunt de totes les possibles aproximacions a la resolució 2^k; si $f \in L^2(\mathbb{R})$, la seva aproximació a la resolució 2^k és la projecció $P_k f$ de f en V_k. Tot allò que es veu a una resolució es veu a la següent amb resolució doble. Els "detalls" corresponents a la resolució 2^{k+1} constitueixen W_k, el complement ortogonal de V_k dins V_{k+1}. Per passar d'una resolució a la següent afegim aquest "detall": $P_{k+1} f = P_k f + Q_k f$, essent $Q_k f$ la projecció sobre W_k. El significat de les condicions tercera i quarta és que P_k tendeix a f quan k tendeix a $+\infty$ (és a dir, es pot aproximar f de forma tan precisa com es vulgui) i a zero quan k tendeix a $-\infty$. O també, la suma dels espais W_k és tot L^2: tota funció és la suma de tots els detalls.

El fet sorprenent és que es pot anar al revés, és a dir, que associada a cada MRA hi ha *sempre* una ondeta ortonormal, que a més es pot construir explícitament . Més precisament, es pot provar l'existència de $\Psi \in W_0$ tal que les $\Psi_{0,n}$ formen una base de W_0; per tant les $\{\Psi_{k,n}\}_n$ formen una base de W_k i totes juntes, $\{\Psi_{k,n}\}_{k,n}$ una base ortonormal de tot l'espai. La vàlua d'aquest resultat està en que és relativament fàcil exhibir una estructura de MRA. Per exemple els splines d'ordre arbitrari constitueixen un MRA. Podem pensar que els MRA són màquines de construir ondetes ortonormals. Va ser utilitzant aquesta eina de Mallat-Meyer que Ingrid Daubechies [D]va construir ondetes ortonormals amb suport compacte i arbitràriament regulars.

La tercera gran aportació de Meyer en el món de les ondetes ha estat mostrar-ne la seva utilitat en l'anàlisi en general i l'anàlisi harmònica en particular. Les ondetes són importants en les aplicacions i, al mateix temps, faciliten enormement la comprensió i en alguns casos la demostració de molts resultats importants en anàlisi. Per exemple, la versió periòdica de les ondetes, les ondetes periòdiques, tenen propietats en alguns aspectes millors que la base de Fourier de sinus i cosinus. La principal diferència és que les funcions "bones"tenen pocs coeficients significatius si les expressem en bases d'ondetes; això es deu a la capacitat de les ondetes per detectar la regularitat local, els coeficients només són grans prop de les singularitats. Per tenir funcions patològiques calen series d'ondetes molt denses. En canvi, el revés passa amb sèries de Fourier, les funcions patològiques s'acostumen a construir amb sèries de Fourier molt poc denses (sèries lacunars).

En aquesta línia, una aportació fonamental de Meyer és establir una connexió conceptual entre les bases d'ondetes d'una banda i els operadors de Calderón-Zygmund i el programa de Calderón de l'altra. Les bases d'ondetes són bases incondicionals en pràcticament tots els espais de l'anàlisi (els que en tenen, és a dir, llevat dels construïts basats en la norma L^1 o L^∞). Una base incondicional en un espai de Banach B és una família v_i de vectors de B tal que tot $f \in B$ té una única expressió $f = \sum c_i v_i$, essent la sèrie incondicionalment convergent (és a dir, insensible a reordenacions). Les ondetes també són bases incondicionals de l'espai de Hardy H^1, de fet les funcions de H^1 són exactament aquelles funcions de L^1 per a les quals la sèrie d'ondetes convergeix incondicionalment cap a la funció. L'essencial d'aquesta afirmació és el fet següent: si f està en un espai funcional B i considerem el seu desenvolupament en una base d'ondetes e_i, és a dir, $f = \sum_i < f, e_i > e_i$ i λ_i són escalars acotats, aleshores $Tf = \sum_i \lambda_i < f, e_i > e_i$ també és a B.

Es tracta per tant de veure que l'operador T és acotat en B. Doncs bé, tots aquests operadors T són operadors de Calderón-Zygmund. Recíprocament, per a certs operadors del tipus de Calderón-Zygmund T (els que compleixen que $T(1) = T^*(1) = 0$), la seva "matriu" en la base e_i, $b_{i,j} =< Te_i, e_j >$ és pràcticament diagonal, en el sentit que $b_{i,j}$ decau en $|i-j|$ ràpidament. Aquesta "quasi-diagonalització" en bases d'ondetes és, no cal dir-ho, una eina important; de fet, hom pot provar versions dels teoremes $T(1)$ i $T(b)$ amb aquest punt de vista.

Acabem amb una afirmació d'Yves Meyer que es troba a la seva gran obra de referència [Me2]:

"L'identité fondamentale $f = \sum_I < f, \Psi_I > \Psi_I$, que l'on peut coupler pour toute resolution 2^{-N} avec l'identité plus précise

$$f(x) = \sum_{|I| \leq 2^{-N}} < f, \Psi_I > \Psi_I + \sum_{|I| = 2^{-N}} < f, \Phi_I > \Phi_I$$

fournissent la réponse à un vieux rêve des analystes: trouver une analyse de Fourier locale à toutes les échelles. L'analyse en série d'ondelettes est peut-être destinée à concurrencer à la fois les séries et les intégrales de Fourier et l'analyse de Fourier traditionnelle".

Referències

[AHLMT] P. Auscher, S. Hofmann, M. Lacey, A. McIntosh and P. Tchamitchian, The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on $\mathbb{R}^n$, *Ann. of Math. 156 (2) (2002), 633–654.*

[D] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math., 41 (1988), 909–996.*

[Da] G.David, Analytic capacity, Calderón-Zygmund operators and rectifiability, *Publ. Mat. 43 (1999), 3–25.*

[GM] A. Grossmann and J. Morlet, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal. 15 (1984), 723–736.*

[Ma] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, New York, 1998.

[MTV] J. Mateu, X. Tolsa and J. Verdera, The planar Cantor sets of zero analytic capacity and the local $T(b)$) Theorem, *J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 16–28.*

[Me1] Y. Meyer, *Algebraic numbers and harmonic Analysis*, Noth Holland, Amsterdam and New York, 1972.

[Me2] Y. Meyer, *Ondelettes et operateurs, vols I-II-III*, Hermann, Paris, 1990.

[Me3] Y. Meyer, *Les ondelettes, algorithmes et applications*, Armand Colin, Paris, 1992.

[Me4] Y. Meyer, Por qué y como se hace investigación en matemática, *Gaceta de la RSME 5(1) (2002), 57–61.*

[Mo] J. Morlet, *Sampling theory and wave propagation*, NATO ASI Series Issues in Acoustic signals/Image processing and recognition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[To] X. Tolsa, Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity, *Acta Math. 190 (2003), 105–149.*

[Ve] J. Verdera, The L^2 boundedness of the Cauchy Integral and Menger curvature, *Contemp. Math. 277 (2001), 139–158.*

[W] www.claymath.org/prizeproblems.