MATHÉMATIQUES

Ensembles effaçables, ensembles invisibles et le problème du voyageur de commerce, ou comment l'analyse réelle aide l'analyse complexe*

Joan Verdera[1]

Résumé. L'objectif de cet article est d'expliquer comment les méthodes d'analyse réelle aident à la résolution de problèmes d'analyse complexe posés il y a environ 35 ans. Les outils d'analyse réelle utilisés dans la résolution de ces problèmes ont été développés indépendamment de l'analyse complexe. Ce sont la théorie de Besicovitch des ensembles du plan de longueur finie, une version du problème du voyageur de commerce et les intégrales singulières de Calderón-Zygmund.

La vida es breu e l'art se mostra llonga
Ausiàs March (1397-1459)

1. Introduction

Récemment, divers théorèmes d'analyse complexe ont été démontrés et répondent à des problèmes dont certains furent posés il y a environ 35 ans ([D1], [D2], [MTV] et [T]). La question générale est très simple et consiste à comprendre la nature des ensembles que sont les singularités effaçables pour les fonctions analytiques bornées. Ces ensembles sont ceux qui possèdent la propriété suivante : toute fonction analytique bornée en dehors de l'ensemble peut s'étendre en une fonction analytique sur tout l'ensemble. Le problème principal est de découvrir s'il y a des conditions géométriques qui caractérisent ces ensembles effaçables. Un long travail a permis de conjecturer des conditions s'appuyant sur la théorie géométrique de la mesure qui, à première vue, paraissent très éloignées de la définition des ensembles effaçables qui, elle, est purement analytique. Il faut avoir recours à des méthodes d'analyse réelle pour établir une relation avec certains énoncés géométriques faisant intervenir la notion de courbure. La magie est que ces énoncés se retrouveront liés au fameux problème de géométrie combinatoire qu'est le problème du voyageur de commerce.

* Traduction du catalan [V0] de Nicolas Marco.

1 Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Barcelona (Spain) jvm@mat.uab.es

L'objectif de cet article est de présenter de la manière la plus claire possible le fond du problème que nous venons d'ébaucher, et d'expliquer également les contributions diverses qui, au cours des trois dernières décennies, ont permis de mieux appréhender le problème.

Cette histoire que nous allons raconter relève d'un phénomène connu et courant en mathématiques comme dans d'autres sciences : il est possible de poser des problèmes naturels, plausibles, d'énoncé simple, mais dont la solution est hors de portée pour les connaissances de l'époque. L'exemple typique, à une échelle différente, est le fameux Théorème de Fermat.

Les méthodes et les idées utilisées dans la résolution de ces problèmes ont été découvertes petit à petit et, dans certains cas, sans que les auteurs soient conscients des applications possibles de leur théorème dans le domaine qui nous intéresse. Ce sont des résultats à la fois simples et profonds, quelques-uns avec un aspect géométrique très marqué, comme une variante du problème du voyageur de commerce ou la théorie de Besicovitch des ensembles du plan de longueur finie. Cependant, l'outil essentiel est la théorie de Calderón-Zygmund, technique sophistiquée d'analyse réelle, qui fut développée pour ces possibles applications dans le domaine des équations aux dérivées partielles.

On ne demande pas naturellement au lecteur de cet article de regarder les détails, ni même de manière approximative. Nous présenterons les résultats et les idées centrales en évitant les aspects techniques compliqués mais en introduisant les outils auxiliaires nécessaires. Malgré tout, par moments, il sera nécessaire de faire appel à l'imagination du lecteur ainsi qu'à sa complicité pour éviter quelques complications. Certaines sections peuvent être lues quasi indépendamment des autres, comme la six, dans laquelle on explique le problème du voyageur de commerce et les nombres bêta, ou la sept dans laquelle on parle de l'intégrale de Cauchy. Dans la section huit où l'on traite de la relation entre la courbure de Menger et l'intégrale de Cauchy, le lecteur tenace et audacieux trouvera le germe d'où sont venues les avancées les plus récentes sur ce thème.

2. Le problème de Painlevé

On trouve un certain théorème de Riemann dans presque tous les cours d'analyse complexe de licence au monde : c'est le théorème de la singularité effaçable, qui dit que, quand on a une fonction analytique f sur un disque privé de son centre c, et que l'on sait que les valeurs $f(z)$ restent bornées au voisinage de c, alors on peut définir f en c de telle manière que la nouvelle fonction ainsi obtenue soit analytique sur tout le disque. Cela surprend beaucoup la première fois que l'on voit ce résultat, car on sait qu'en analyse réelle une fonction peut être bornée autour d'un point sans y avoir de limite. L'exemple que l'on a tous à l'esprit est celui de la fonction définie sur l'intervalle $(-1,1)$ privé de 0 et qui vaut 0 à gauche de 0 et 1 à droite. La preuve du théorème de la singularité effaçable est un exemple de l'élégance et de la puissance des méthodes complexes. La voici : supposons que le disque est centré en 0 et développons la fonction en série de Laurent

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots .$$

L'expression des coefficients d'indice négatif est donnée par

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} f(z) z^{n-1} dz, \ n = 1, 2, \dots$$

où ε est un réel positif quelconque plus petit que le rayon du disque. En passant à la valeur absolue, on obtient alors l'inégalité

$$|a_{-n}| \leqslant M\varepsilon^n,$$

où M désigne ici une borne supérieure de $|f(z)|$, pour z dans le disque. Faisant $\varepsilon \to 0$ on obtient $a_{-n} = 0$, $n = 1, 2, \dots$ d'où $f(z)$ est une série de Taylor, et donc f est analytique dans le disque donné. Ainsi la mystérieuse valeur que l'on doit donner à f au point 0 pour obtenir le prolongement désiré est donnée par l'intégrale (qui ne dépend pas de ε)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z} dz \, .$$

Après cela, il paraît naturel de se demander quels sont les ensembles du plan qui possèdent cette propriété d'être « singularité effaçable » pour les fonctions analytiques bornées. De manière plus formelle, voici la définition de cette notion :
On dit qu'un compact K du plan est un ensemble effaçable pour les fonctions analytiques bornées si, pour tout ouvert Ω contenant K, toute fonction analytique bornée f sur $\Omega \setminus K$ peut s'étendre en une fonction analytique sur tout Ω.
Autrement dit, chaque fois que l'on se donne une fonction f analytique et bornée ayant K comme ensemble éventuel de singularité (points sur lesquels il n'est pas possible de définir f analytiquement) alors, de fait, il résulte que f n'a pas de singularités sur K.

Par exemple, d'après le théorème de Riemann, un point est effaçable. Un ensemble fini également et, si le lecteur aime bien l'analyse fonctionnelle et se souvient de la notion de catégorie de Baire, il lui sera clair qu'un compact dénombrable est aussi effaçable. Réciproquement, par exemple, un disque (fermé) n'est pas effaçable, comme il est possible de le voir en considérant la fonction $f(z) = \frac{1}{z-c}$ définie sur le complémentaire d'un disque fermé dont le centre est désigné par c.

Mais comment peut-on décider si un compact est effaçable ou non ? Par exemple est-ce que le fameux ensemble triadique de Cantor est effaçable ? Le principe général est assez simple et il suffit juste de se souvenir de la formule intégrale de Cauchy. Supposons que K nous est donné, que Ω est un ouvert contenant K et que f est analytique bornée sur $\Omega \setminus K$. Considérons alors les courbes $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ de manière que $\Gamma' = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_n$ entoure K comme indiqué sur la figure 1.

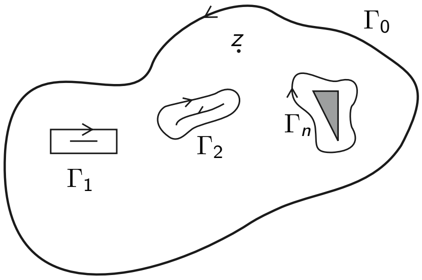

Figure 1

Alors d'après la formule de Cauchy, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{2.1}$$

pour z entre Γ_0 et Γ'.

Remarquons que l'intégrale sur Γ_0 est une fonction analytique de la variable z pour z dans le domaine encerclé par Γ_0, en particulier pour z dans K. Ainsi, si l'on conjecture pour une raison ou une autre que K est effaçable, la méthode la plus simple consiste à démontrer que l'intégrale sur Γ' est nulle. Si K est un compact assez petit et l'ensemble des courbes Γ' assez proche de K, il y a de réelles possibilités de montrer que l'intégrale sur Γ' est aussi petite que l'on le désire, c'est-à-dire nulle. Si le lecteur aime bien écrire des inégalités, nous lui recommandons de considérer le cas où K est un ensemble triadique de Cantor. Dans ce cas, pour tout n on peut prendre Γ' comme l'union de 2^n lacets homothétiques au lacet Γ_1 de la figure 1 et dans lequel chaque segment intérieur a pour longueur $1/3^n$. La borne supérieure pour la valeur absolue de l'intégrale sur Γ' que l'on obtient alors est $\frac{4}{\pi} \frac{2^n}{3^n} \frac{M}{d(z)}$ où M est une borne supérieure du module de $f(z)$ pour $z \in \Omega \setminus K$ et $d(z)$ est la distance de z à K. Ainsi, on montre que l'ensemble triadique de Cantor est effaçable bien qu'il ne soit pas dénombrable.

Réciproquement, de quelles méthodes dispose-t-on pour vérifier qu'un compact donné n'est pas effaçable ? D'après la définition, on doit trouver un ouvert Ω qui contienne K ainsi qu'une fonction analytique bornée sur $\Omega \setminus K$ qui ne soit pas prolongeable analytiquement à Ω. On supposera que $\Omega = \mathbb{C}$ (ce qui est, en réalité, équivalent). La difficulté est alors de construire une fonction analytique bornée dans $\mathbb{C} \setminus K$ et qui ne soit pas constante. Remarquons qu'une telle fonction f ne pourra s'étendre en une fonction analytique sur tout le plan car si c'était le cas, f serait une fonction entière bornée et d'après le théorème de Liouville, f serait constante.

Testons l'efficacité de cette stratégie en essayant de découvrir si le segment $[0, 1]$ est un ensemble effaçable. Si l'on pense que oui, alors, reprenons les précédents lacets Γ_0 et Γ'. On a $\Gamma' = \Gamma_1$ et l'on se rend compte qu'il n'y a pas de manière évidente de majorer l'intégrale sur Γ_1 par un nombre arbitrairement petit. La raison est que $[0, 1]$ est essentiellement le domaine de l'intégrale et qu'il n'y a aucune raison pour que l'intégrande soit petite.

En fait, $[0, 1]$ *n'est pas effaçable !* On peut le voir immédiatement en utilisant une représentation conforme : le complémentaire de $[0, 1]$ sur la sphère de Riemann est un domaine simplement connexe qui n'est pas le plan tout entier, donc le disque unité est conforme à $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ et l'on dispose d'une application analytique de $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ dans le disque qui est clairement bornée et non constante.

Finalement, l'idée qui sort de cette discussion c'est que lorsqu'un ensemble est assez petit, il est effaçable et lorsqu'il est trop grand il ne l'est pas. Imaginons maintenant que l'on s'entête à caractériser les ensembles effaçables d'une manière raisonnablement transparente. L'idéal serait alors de disposer d'une méthode (la plus simple possible) pour mesurer les ensembles du plan de telle façon qu'avoir une mesure nulle corresponde aux ensembles effaçables et qu'une mesure strictement positive corresponde aux ensembles non effaçables. Il est clair que l'on ne peut pas choisir la mesure d'aire (mesure de Lebesgue du plan) car l'aire du segment $[0,1]$ est nulle et, pourtant, il n'est pas effaçable. Le fait qu'il y ait des ensembles de dimension 1 qui ne soient pas effaçables, nous amène à penser qu'il serait plus adéquat d'utiliser la « longueur » à la place de l'aire pour mesurer les ensembles.

Mais en choisissant la longueur on arrive immédiatement à une autre difficulté, qui est d'éclaircir ce que l'on entend par longueur d'un compact arbitraire du plan. Rappelons que, pour les courbes, il y a une notion naturelle de longueur. On sait que l'on a une formule classique et élégante qui exprime la longueur d'une courbe en terme de la dérivée d'une paramétrisation ; mais que fait-on avec des compacts quelconques ? La réponse est qu'il existe une méthode pour assigner un nombre $\Lambda(E)$ à tout sous-ensemble E du plan, de telle manière que $0 \leqslant \Lambda(E) \leqslant \infty$, et que pour le cas des courbes rectifiables, $\Lambda(E)$ coïncide avec la longueur de l'arc. La fonction d'ensemble Λ en question est la mesure de Hausdorff unidimensionnelle et c'est une véritable mesure lorsqu'on la restreint à des ensembles satisfaisant $\Lambda(E) < \infty$. Par exemple, $\Lambda(Q) = \infty$ lorsque Q est un carré et Λ restreint à l'axe des abscisses est la mesure de Lebesgue de l'axe réel. La définition de cette mesure n'est pas vraiment compliquée, mais nous nous contenterons pour le moment de dire que $\Lambda(E) = 0$ si et seulement si E peut être recouvert par une famille dénombrable (Q_n) de carrés aux côtés parallèles aux axes et telle que la somme $\sum_n l(Q_n)$ est arbitrairement petite. Ici, $l(Q)$ est employé pour désigner la longueur d'un des côtés de Q. Par exemple l'ensemble triadique de Cantor a une longueur nulle car on peut le recouvrir pour tout n par 2^n carrés de côté $\frac{1}{3^n}$.

Le premier résultat remarquable postérieur à Riemann sur l'effaçabilité a été obtenu par Painlevé au cours de sa thèse et dit la chose suivante :

Théorème 2.1. — *Un ensemble de longueur nulle est effaçable.*

Le lecteur qui aime bien les inégalités et qui s'est convaincu du fait que l'ensemble triadique de Cantor est effaçable saura certainement modifier ses arguments pour démontrer le théorème de Painlevé.

À la fin du XIX^{e} siècle et début du XX^{e} il y eut à Paris beaucoup d'activité autour de la notion d'effaçabilité ainsi qu'autour de ses variantes, surtout après que l'intégrale de Lebesgue fut devenue de plus en plus populaire. Il y eut des contributions significatives, de Denjoy, Pompeiu et, plus tard, de Besicovitch. Mais le problème suivant, reste encore ouvert aujourd'hui :

Le problème de Painlevé : *Trouver des conditions nécessaires et suffisantes (de type géométrique) pour qu'un ensemble soit effaçable.*[2]

[2] Lors de la dernière révision de l'article, un résultat nouveau est apparu et nous permet d'affirmer que le problème est résolu (voir les pages suivantes).

Si on a la chance de séjourner dans une université de qualité, on réalise que la qualité commence en premier lieu par une question de budget. Entre autres merveilles inexistantes dans la majorité des Campus catalans, on trouvera une excellente bibliothèque de mathématiques avec son propre personnel, efficace, souriant et aimable. Les œuvres complètes de Painlevé peut être n'y seront pas, mais elles arriveront rapidement d'une autre bibliothèque. En les consultant on s'apercevra que malgré toute la bonne volonté et l'enthousiasme dont on fait preuve, on ne trouvera pas l'énoncé du problème de Painlevé. On en conclura que Painlevé n'a jamais formulé par écrit le problème qui porte son nom et que, soit la transmission fut orale, soit son attribution est due au fait que Painlevé fut le premier à s'en occuper. La plus vielle référence à ce problème que l'auteur connaisse se trouve dans un article d'Ahlfors de l'année 1947 [A] dans lequel on insiste sur le fait que les conditions que l'on recherche doivent être de type géométrique.

Paul Painlevé (1863-1933), naquit à Paris où il vécut la majeure partie de sa vie. Il fut un personnage extraordinaire. Outre le fait qu'il fut professeur de mathématiques dans les plus prestigieuses grandes écoles de la ville (l'École normale supérieure et l'École polytechnique entre autres) ainsi qu'un mathématicien déjà renommé à son époque, il s'intéressa aussi à une multitude de questions en physique (mécanique) et aéronautique. Il fit l'un des premiers voyages dans un avion avec passagers lors d'un vol piloté par Wilbur Wright en 1908. Il fut également un homme politique important : il dirigea le ministère de la Guerre à plusieurs reprises (1917, 1925-1929), fut également président du conseil (sep-nov 1917, avr-nov 1925) et fut ensuite ministre de l'Air (1930-31, 1932-33). Il repose au Panthéon, où sont enterrés les grands hommes de France, juste à côté de Louis Braille.

Paul Painlevé

Parmi les plus grands théorèmes sur le problème de Painlevé, un des plus récents est celui d'un mathématicien catalan de l'université autonome de Barcelone, Xavier Tolsa[3][T].

Théorème 2.2. — *Un compact K du plan n'est pas effaçable si et seulement si on peut construire une mesure positive μ non nulle de support K et telle que*

$$\mu(D) \leqslant \textit{rayon}(D), \text{ pour tout disque } D$$

et

$$\iiint_{K^3} \frac{1}{R(z,w,\zeta)^2}\, d\mu(z)d\mu(w)d\mu(\zeta) < \infty,$$

où $R(z,w,\zeta)$ est le rayon du cercle qui passe par z, w et ζ.

Notons que, dans cet énoncé, la condition qui caractérise la non-effaçabilité ne fait aucune référence aux fonctions analytiques et réduit le problème de la non-effaçabilité à la construction d'une mesure positive ayant certaines propriétés. La condition contient des éléments clairement géométriques comme le rayon $R(z,w,\zeta)$, ainsi que d'autres qui apparemment ne le sont pas comme l'existence d'une mesure possédant certaines propriétés. En conséquence, on ne peut considérer cette condition comme géométrique sans y réfléchir plus.

On peut arguer (avec raison) que le terme « condition géométrique » est assez vague mais comme nous allons voir, en usant de la géométrie bilipschitzienne cette objection disparaît. Une application T du plan est dite bilipschitzienne lorsqu'elle est bijective et lorsque l'écart entre les couples de points est contrôlé uniformément inférieurement et supérieurement :

$$C^{-1}|z-w| \leqslant |T(z)-T(w)| \leqslant C|z-w|, \qquad z,w \in \mathbb{C}.$$

Dès lors, une possible concrétisation du problème de Painlevé consiste à demander des conditions géométriques, au sens où elles seraient des invariants bilipschtiziens, caractérisant les ensembles effaçables. Malgré de fortes présomptions ([GV]), il n'est pas du tout clair que la condition du théorème précédent soit un invariant bilipschitzien. Le problème de l'invariance bilipschitzienne des ensembles effaçables fut posé pour la première fois dans [V1]. La conclusion est qu'en un peu plus d'un siècle, on s'est approché énormément de la solution du problème de Painlevé mais sans y aboutir.[4]

Dans la section suivante, nous allons décrire une classe de compacts pour lesquels on sait résoudre le problème de Painlevé. L'exposé nous montrera la simplicité de la relation entre l'effaçabilité et l'intégrale de Cauchy entendue comme une intégrale singulière du type de Calderón-Zygmund.

[3] Pour ce théorème, X. Tolsa reçut le prix Salem de l'année 2002 ; ce prix est une prestigieuse distinction attribuée aux jeunes analystes. C'est la première fois qu'il est attribué à un chercheur catalan (et même espagnol).
[4] Lors d'une conférence le 1er février 2003 X. Tolsa a annoncé qu'il avait trouvé une démonstration de l'invariance bilipschitzienne de la capacité analytique ce qui résout, brillamment, le problème de Painlevé.

3. La conjecture de Denjoy

On peut vérifier directement sans utiliser les représentations conformes que $[0,1]$ n'est pas un ensemble effaçable. Décrivons cette méthode afin de mieux comprendre quel est le rôle des intégrales singulières dans cette notion d'effaçabilité.

Supposons que f soit une fonction analytique bornée sur $\mathbb{C}\setminus[0,1]$. On peut voir facilement en appliquant la formule intégrale de Cauchy au domaine $\mathbb{C}\setminus[0,1]$, que f est l'intégrale de Cauchy de ses propres valeurs sur la frontière :

$$f(z)=f(\infty)-\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{f(t)}{t-z}dt,\qquad z\notin[0,1]\,.$$

Donc, si on veut construire une fonction analytique bornée qui ne soit pas constante sur $\mathbb{C}\setminus[0,1]$, une bonne idée serait de commencer par considérer des expressions de la forme

$$f(z)=\int_0^1\frac{g(t)}{t-z}dt,\ z\notin[0,1]\,,$$

où g est une fonction sur $[0,1]$. Le choix le plus simple pour g est $g(t)=1$, $t\in[0,1]$, et la fonction f obtenue est alors

$$f(z)=\int_0^1\frac{1}{t-z}dt=\log\frac{z-1}{z},\ z\notin[0,1]\,,$$

qui est analytique, non constante sur $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ mais clairement non bornée. Remarquons que les uniques singularités (points en lesquels la fonction est infinie) sont des singularités logarithmiques (donc très modérées), aux points $z=1$ et $z=0$. Qui aura travaillé sur les intégrales singulières de Calderón-Zygmund reconnaîtra ici le phénomène fondamental que la transformée de Hilbert n'envoie pas l'espace L^∞ sur lui-même. L'idée est alors d'annuler la singularité logarithmique en choisissant une fonction g qui s'annule en 0 et 1 comme par exemple la fonction représentée ci-dessous sur la figure 2.

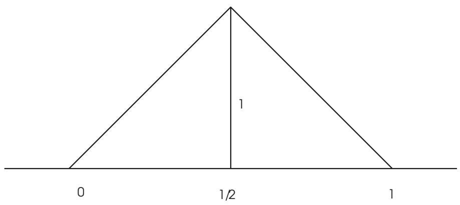

Figure 2

Le calcul de l'intégrale donne

$$f(z)=L(z+\frac{1}{2})+L(z-\frac{1}{2})-2L(z),\ z\notin[0,1]\,,$$

où

$$L(z)=-(z-\frac{1}{2})\log(z-\frac{1}{2})\,.$$

Dans l'expression précédente, le lecteur savant reconnaîtra le fait que la transformée de Hilbert envoie les fonctions Lipschitz sur celles de la classe de Zygmund. Mais l'important, c'est que maintenant la fonction f est analytique bornée et trivialement non constante d'où la preuve que $[0,1]$ n'est pas un ensemble effaçable.

Denjoy au début du XX^e siècle trouva un argument pour montrer qu'en fait aucun ensemble compact de la droite réelle de longueur strictement positive n'est effaçable. Ce n'est pas trivial, mais c'est à portée de main de quiconque a fait (récemment) un cours d'analyse réelle et se souvient que le noyau de Poisson n'est autre que la partie réelle du noyau de Cauchy. C'est un résultat extrêmement intéressant au moins pour deux raisons : la première est qu'il montre que le théorème de Painlevé n'est dans un certain sens pas améliorable. La seconde est qu'en le combinant avec le théorème de Painlevé on caractérise les ensembles effaçables de la droite réelle comme ceux qui ont une longueur nulle. Notons que cette condition est clairement de type géométrique (c'est un invariant bilipschitzien) et, par conséquent, le problème de Painlevé pour les sous-ensembles de la droite a une solution magnifique.

En ce qui concerne le résultat, Denjoy pensait que sa démonstration s'étendait au cas général pour les compacts de longueur positive inclus dans une courbe rectifiable quelconque. En réalité, l'argument ne s'appliquait pas au cas général et lorsqu'on s'en rendit compte on commença à parler de la conjecture de Denjoy.

La conjecture de Denjoy. — *Un sous-ensemble compact d'une courbe rectifiable est effaçable si et seulement si sa longueur est nulle.*

Notons qu'une réponse positive à la conjecture de Denjoy résout le problème de Painlevé pour les sous-ensembles des courbes rectifiables. En fait cette conjecture est un de ces problèmes dont la solution nécessite des idées et des techniques dont on ne disposait pas au moment de sa formulation. Elle fut démontrée en 1977 par Calderón dans un célèbre article sur l'intégrale de Cauchy et les graphes lipschitziens. Pour cet article de 4 pages il lui fut décerné en 1979 le prix Bocher, prix prestigieux attribué par *The American Mathematical Society* au travail le plus significatif en analyse publié dans les cinq années précédentes dans une revue américaine. Calderón à l'époque, avait fait ce travail dans le but de l'appliquer aux équations aux dérivées partielles et pas plus d'une poignée d'experts parmi lesquels, curieusement, il ne figurait pas, ne savaient que la conjecture de Denjoy se réduisait à son résultat. Donald Marshall, un élève de J. Garnett, le savait et écrivit une note expliquant cela. Finalement dans l'écrit d'acceptation du prix Bocher, Calderón mentionnait la solution de la conjecture de Denjoy comme une des applications les plus significatives de son article (voir [C3]).

Le reste de cette section est consacré à expliquer comment le résultat de Calderón résout la conjecture de Denjoy. En premier lieu, on étudie un cas plus simple où la courbe est le graphe Γ d'une fonction A continûment différentiable sur la droite réelle et avec des dérivées dont la valeur absolue est bornée par un nombre ε_0 petit (géométriquement, cela se traduit par le fait que les pentes sont inférieures en valeur absolue à ε_0).

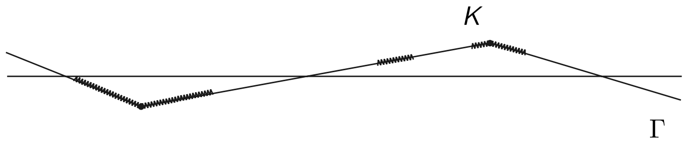

Figure 3

Considérons donc un sous-ensemble compact K de Γ, de longueur positive, et essayons de construire une fonction analytique bornée non constante sur $\mathbb{C} \setminus K$. Comme dans le cas de la droite réelle, la tentative naïve de poser

$$f(z) = \int_K \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus K, \tag{3.0}$$

ne donne pas une fonction bornée. D'autres essais du type

$$f(z) = \int_K \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus K, \tag{3.1}$$

avec une fonction g spéciale ne marchent pas non plus.

L'immense progrès conceptuel sera de renoncer à borner f uniformément et se satisfaire de conditions de type $L^2(ds)$ où $ds = \mid d\zeta \mid$ est l'élément infinitésimal de longueur de Γ. C'est-à-dire, il s'agit de chercher

$$\int_\Gamma |f(z)|^2 |dz| < \infty, \tag{3.2}$$

au lieu de se préoccuper d'avoir

$$\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus K} |f(z)| < \infty\,.$$

L'idée même que changer l'espace L^∞ par l'espace L^2 puisse être avantageux n'est concevable qu'après avoir développé toute la théorie des espaces de Hilbert et assimilé le fait que la géométrie L^2 est sensiblement plus simple que celle de L^∞ et ceci est le travail de toute une génération...

Garabedian, un élève d'Ahlfors, montra dans sa thèse en 1949 que l'on peut effectivement se restreindre au cas L^2. Il ne restait donc « plus qu'à » montrer que (3.2) est satisfaite pour la fonction f définie par (3.0). Mais cela n'a nullement un aspect facile car la définition même de $f(z)$ pour $z \in K$ est problématique car elle touche à la singularité du noyau dans (3.0) ou (3.1). L'intégrale de Cauchy (3.1) peut se définir pour g assez régulière (de classe C^1 c'est suffisant) à support compact et en tout point z du support de g comme la valeur principale

$$C(g)(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\zeta - z| > \varepsilon} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\,, \tag{3.3}$$

où l'intégrale se prend sur les points $\zeta \in \Gamma$ qui sont à une distance de z supérieure à ε. Pour le cas exceptionnellement simple où Γ est la droite réelle $\mathbb{R}$ (le graphe de $A = 0$) l'intégrale de Cauchy est alors un fameux opérateur connu sous le nom de transformée de Hilbert :

$$H(g)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y - x| > \varepsilon} \frac{g(y)}{y - x} dy\,. \tag{3.4}$$

Malgré l'aspect si concret et explicite de l'expression précédente, la transformée de Hilbert est un objet subtil et difficile à appréhender, jusqu'à sa propre définition. Nous invitons le lecteur à considérer un moment la formule (3.4) dans le cas le plus favorable possible où g est une fonction de classe C^1 à support compact. On a alors clairement une obstruction à l'existence de la limite, qui est que $g(y)/(y-x)$ n'est pas en général intégrable comme une fonction de y avec x fixe. Ceci devient très clair si l'on prend par exemple g égal à 1 au voisinage de x. En effet, $g(y)/(y-x)$ n'est pas intégrable puisque le noyau $1/(y-x)$ n'est pas localement intégrable.

L'argument nécessaire pour démontrer l'existence de la limite de (3.4) pour les fonctions g que nous considérons est très intéressant et instructif car il fait appel, dans un contexte simple, aux phénomènes d'annulation associés au noyau, ce qui est un des axes centraux dans le traitement des intégrales singulières de Calderón-Zygmund. Dans le cas du noyau $1/(y-x)$ de la transformée de Hilbert, l'annulation se produit pour x fixe, entre les valeurs positives que l'on a lorsque y est à droite de x et les valeurs négatives lorsque y est à gauche de x.

Supposons pour simplifier que le support de g est contenu dans $[-1,1]$ et que $x=0$. Alors on a

$$\int_{|y|>\varepsilon} \frac{g(y)}{y} dy = \int_{1\geqslant|y|>\varepsilon} \frac{g(y)}{y} dy = \int_{1\geqslant|y|>\varepsilon} \frac{g(y)-g(0)}{y} dy, \tag{3.5}$$

où la dernière égalité est due au fait que

$$\int_{1\geqslant|y|>\varepsilon} \frac{dy}{y} = 0\,.$$

La raison de cela est que la fonction $1/y$ est impaire ; il résulte donc une annulation entre les valeurs positives et les valeurs négatives sur les intervalles symétriques par rapport à l'origine. Notons maintenant qu'il s'est passé quelque chose de magique : comme g est de classe C^1, l'expression sous la dernière intégrale de (3.5) est une fonction bornée et donc localement intégrable.

Faisant tendre ε vers 0 dans (3.5) on obtient l'existence de la limite des intégrales tronquées et, qui plus est, la valeur explicite

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{g(y)}{y} dy = \int_{1\geqslant|y|} \frac{g(y)-g(0)}{y} dy\,.$$

Pour les fonctions génériques de L^2, sans plus de propriété de régularité, la limite (3.4) existe pour presque tout $x\in\mathbb{R}$. C'est un résultat difficile réellement fascinant qui s'explique grâce à des phénomènes d'annulation extrêmement subtils liés au noyau. Les toutes premières démonstrations combinaient les méthodes d'analyse de Fourier et d'analyse complexe, et ce n'est qu'avec le temps qu'elles n'utilisèrent plus que des arguments strictement d'analyse réelle ; c'est-à-dire des arguments qui n'utilisent que les notions les plus basiques de la théorie de la mesure.

Dans le cas général du graphe d'une fonction de classe C^1, l'existence de la valeur principale (3.3) pour g dans $L^2(ds)$ et pour presque tout z est un résultat difficile qui se déduit d'inégalités que l'on démontre pour le cas où g est régulière. Mais de ce point-là, nous n'en parlerons pas.

En plus d'être un modèle pour les intégrales singulières de Calderón-Zygmund, la transformée de Hilbert est un opérateur très étudié et utilisé par les ingénieurs en télécommunications et traitement du signal. En effet, faisant un calcul avec les transformations de Fourier, on obtient facilement l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(g)(x)^2 dx = \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 dx \,,$$

que les ingénieurs interprètent comme une loi de conservation de l'énergie du signal.

Dans le cas du graphe d'une fonction A de classe $C^1(\mathbb{R})$ avec $\|A'\|_\infty < \infty$ le résultat que l'on voulait obtenir dans les années soixante était l'inégalité

$$\int_\Gamma |C(g)(z)|^2 |dz| \leqslant C \int_\Gamma |g(z)|^2 |dz|, \tag{3.6}$$

où C est une constante qui ne dépend que de $\|A'\|_\infty$. En effet cette inégalité combinée avec la réduction au cas L^2 de Garabedian, prouverait la conjecture de Denjoy. Pendant plusieurs années, les méthodes classiques de l'analyse de Fourier ne semblaient pas cadrer avec le problème et menaient systématiquement à une impasse. Finalement, Calderón, sous l'hypothèse que $\|A'\|_\infty$ soit suffisamment petite, démontra (3.6) de manière absolument originale en appliquant des méthodes d'analyse complexe.

Par la suite, l'obtention de l'inégalité (3.6) pour les graphes de fonction de classe C^1 avec pour unique restriction $\|A'\|_\infty < \infty$ (ou, de manière un peu plus générale pour les graphes de fonctions Lipschitz) est devenue à la fin des années 70 une question centrale en analyse harmonique. Le résultat est considéré comme un succès des plus remarquables des méthodes d'analyse réelle de l'école de Calderón-Zygmund ; il fut obtenu en 1981 par Coifman, McIntosh et Meyer [CMM]. Quelques années plus tard, les méthodes s'étaient tellement affinées qu'un élève d'Yves Meyer, Guy David, alla jusqu'à décrire les courbes rectifiables pour lesquelles on a (3.6) : il montra que ce sont exactement celles qui satisfont

$$\text{longueur}\,(\Gamma \cap D(z,r)) \leqslant C\ r\,,$$

pour tout disque $D(z,r)$ de centre z et rayon r.

4. Ensembles invisibles

Jusqu'à présent, presque tous les exemples que nous avons considérés du point de vue de l'effaçabilité ont été des sous-ensembles de la droite réelle ou de courbes rectifiables, lesquels ont clairement une nature unidimensionnelle. Nous avons vu que pour ceux-là, l'effaçabilité équivaut à être de longueur nulle. Préparons-nous maintenant à affronter un défi : est-ce que pour qu'un sous-ensemble quelconque du plan soit effaçable, il faut qu'il soit de longueur nulle ? Si c'était vrai, alors avec le théorème de Painlevé, nous aurions l'équivalence entre effaçabilité et longueur nulle. Malheureusement (ou heureusement), ce n'est pas le cas, il existe des ensembles de longueur positive qui sont effaçables. Les exemples connus, bien qu'ils aient une longueur positive ont tous une propriété de petitesse dont nous parlerons dans les lignes qui suivent. Passons maintenant à la description de l'exemple le plus simple.

On va construire un ensemble de type Cantor pour le plan. Sa construction s'appuie sur l'algorithme suivant : commençons avec un carré $[0,1] \times [0,1]$ que l'on divise en 16 carrés semblables de côté $1/4$. On garde alors les 4 carrés contenant les sommets du carré d'origine. À ce point nous avons terminé l'étape 1 du processus.

Pour l'étape 2 on recommence la construction de l'étape 1 dans les quatre carrés de côté $1/4$ que nous avons gardés. On obtient alors 16 carrés de côté $1/16$ comme l'on voit sur la figure 4 :

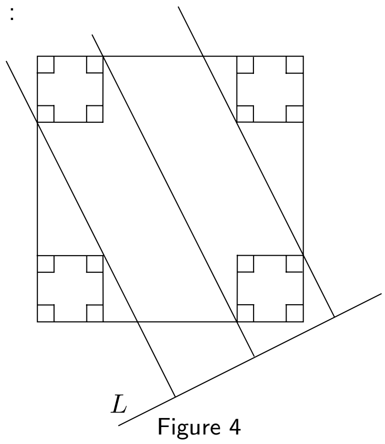

Figure 4

On répète alors le processus de telle manière qu'à l'étape n on obtient 4^n carrés Q_j^n, $1 \leqslant j \leqslant 4^n$, de côté 4^{-n}. On pose

$$K_n = \bigcup_j Q_j^n \qquad \text{et} \qquad K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\,.$$

Alors K est un genre d'ensemble de Cantor que nous appellerons, pour des raisons évidentes, Cantor $1/4$. Remarquons que sa projection orthogonale sur la droite L représentée sur la figure 4 est tout un intervalle. Intuitivement, quelle que soit la notion de longueur choisie, il est clair qu'une projection orthogonale ne peut augmenter la longueur ; on en déduit donc que K doit avoir une longueur strictement positive. Ce point deviendra plus clair, lorsque finalement nous donnerons la définition de longueur, mais la raison essentielle c'est que la somme de la longueur des côtés des carrés Q_j^n de la n-ième génération n'augmente pas avec n mais reste toujours égale à 1.

Remarquons que, du point de vue de la longueur, K est similaire à $[0,1]$: en particulier, tous deux ont une longueur strictement positive finie. En revanche, ils ont une différence fondamentale dans le sens où l'un est connexe, tandis que l'autre est totalement disconnexe (toutes les composantes connexes sont des points). John Garnett [G] démontra, il y a plus de 30 ans dans un magnifique petit article, que K est effaçable. Il obtint ainsi l'exemple le plus simple qui soit d'ensemble effaçable de longueur positive. Comme K est effaçable, il doit être d'une manière ou d'une autre plus petit que $[0,1]$ qui lui n'est pas effaçable. Bien que ce ne soit pas facile à démontrer (voir [F] ou [Ma]), K possède une propriété de petitesse surprenante. En effet, pour tout $\theta \in [0,\pi]$, considérons la projection orthogonale sur la direction θ ; c'est-à-dire sur la droite passant par l'origine et formant un angle de mesure θ avec l'axe des abscisses. Alors, la projection de K sur la direction θ est un ensemble de longueur nulle pour presque tout $\theta \in [0,\pi]$ (le « presque tout » étant à entendre au sens de la mesure de Lebesgue). Un tel ensemble est alors dit *invisible*. Notons que pour $[0,1]$, c'est tout le contraire : il se projette toujours sur un intervalle de longueur strictement positive, sauf pour $\theta = \pi/2$. Dans le cas d'une courbe qui n'est pas contenue dans une droite, il est clair, par un argument de connexité, qu'elle se projette sur un intervalle de longueur strictement positive dans toutes les directions. Cette terminologie d'invisibilité s'explique, par exemple, en imaginant qu'un être bidimensionnel fasse des photos unidimensionnelles. Alors K n'apparaît jamais sur les photos, une véritable tragédie pour certains !

La propriété d'invisibilité fut découverte par Besicovitch dans les années trente en développant sa propre théorie des ensembles de longueur finie. Bien qu'il soit possible de comprendre la théorie de Besicovitch sans connaître la définition formelle de longueur, nous la donnerons dès maintenant, afin de satisfaire la curiosité de certains lecteurs et soulager la gêne de certains autres. Soit ε un nombre positif et E un sous-ensemble quelconque du plan. Posons

$$\Lambda_\varepsilon(E) = \inf \sum_n \ell(Q_n)\,,$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrements dénombrables de E par des carrés Q_n de côtés parallèles aux axes et tels que $\ell(Q_n) \leqslant \varepsilon$. La notation $\ell(Q)$ représente la longueur du côté de Q. Nous définissons alors la longueur de E par

$$\Lambda(E) = \sup_\varepsilon \Lambda_\varepsilon(\mathrm{E})\,.$$

La définition que nous venons de donner dépend des coordonnées, mais elle a l'avantage de la simplicité et donne rapidement l'idée centrale. On pourra trouver des définitions plus intrinsèques dans [Ma]. Par exemple, un calcul montre que pour $Q = [0,1] \times [0,1]$ le carré unité, on a $\Lambda_{1/2^n}(Q) \approx 2^n$ et donc $\Lambda(Q) = \infty$ comme on s'y attendait. D'autre part, on peut s'amuser à vérifier que pour le Cantor $1/4$ on obtient $\Lambda(K) \approx 1$ et, enfin, lorsque Γ est une courbe rectifiable et $E \subset \Gamma$ alors $\Lambda(E)$ est comparable à la longueur de l'arc de E.

Considérons maintenant les deux exemples fondamentaux d'ensembles de longueur strictement positive que nous connaissons : les courbes rectifiables et les ensembles invisibles. Ce sont deux cas extrêmes avec des propriétés de projection totalement différentes. Besicovitch montra la caractérisation surprenante qu'un ensemble E de longueur finie est invisible si et seulement si son intersection avec toute courbe rectifiable est de longueur nulle. Autrement dit, le fait de pouvoir voir E ne dépend que des sous-ensembles de E de longueur positive inclus dans une courbe rectifiable. Notons en particulier que si E est effaçable alors il doit être invisible ; en effet si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un sous-ensemble de E de longueur strictement positive inclus dans une courbe rectifiable. Alors, d'après la conjecture de Denjoy (qui n'en est plus une) ce sous-ensemble n'est pas effaçable et donc E n'est pas non plus effaçable. Nous reparlerons plus tard de cette relation entre invisibilité et effaçabilité.

Le fait central de la théorie de Besicovitch est que si E est un ensemble mesurable de longueur finie, alors E est l'union de deux sous-ensembles, disons R et I, tels que R est rectifiable et I est invisible ; c'est-à-dire que E est l'union dénombrable de sous-ensembles de courbes rectifiables et d'un sous-ensemble invisible. D'après ce qui précède, on sait qu'un ensemble qui est rectifiable et invisible en même temps est de longueur nulle. Ainsi les parties rectifiables et invisibles de E sont uniques modulo un ensemble de longueur nulle. Besicovitch trouva d'autres caractérisations très élégantes ayant des relations très intéressantes avec les phénomènes d'existence de tangente ou de densité. Le lecteur intéressé pourra consulter [F, Gu ou Ma].

5. La conjecture de Vitushkin

Les années soixante virent se développer une grande activité pour comprendre quelles sont les fonctions qui peuvent être approchées uniformément sur un compact K du plan par des fractions rationnelles aux pôles en dehors de K. Deux conditions nécessaires sont évidentes sur la fonction que l'on veut approcher : elle doit être continue sur K et analytique à l'intérieur de K (si l'intérieur est non vide). On peut construire des exemples ingénieux (et pas trop compliqués) montrant que ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes. D'autre part, le théorème de Runge donne une condition suffisante très loin d'être nécessaire, qui consiste à demander que la fonction que l'on veut approcher soit holomorphe au voisinage de K. La différence entre un voisinage arbitraire de K et l'intérieur de K étant justement la frontière, tout semble indiquer que pour trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour approcher une fonction, il faudrait penser à des conditions d'analyticité faibles probablement subtiles et qui mesurent la frontière de K. Cette intuition s'est avérée correcte, et fut démontrée en 1967 par le mathématicien russe de Moscou : Anatoly Vitushkin [Vi]. Les conditions de Vitushkin s'expriment au moyen d'une fonction d'ensemble appelée capacité analytique qui fut introduite par Ahlfors vingt ans auparavant. La capacité analytique d'un compact K est un nombre positif qui mesure l'ensemble des fonctions analytiques dont le module est borné par 1 dans $\mathbb{C} \setminus K$. On peut montrer (et ce n'est pas très difficile) que la capacité analytique d'un compact K est nulle si et seulement si K est effaçable. C'est ainsi qu'apparut une relation entre l'effaçabilité et d'autres problèmes d'analyse apparemment lointains, ce qui réveilla l'intérêt porté aux ensembles effaçables. Vitushkin dans son article de 1967 formula divers problèmes dont le plus connu est le suivant :

La conjecture de Vitushkin. — *Un compact du plan est effaçable si et seulement si il est invisible.*

L'existence d'ensembles effaçables de longueur positive est certainement ce qui conduisit Vitushkin à énoncer cette conjecture. De fait, il fut le premier à en construire un exemple, avant même que l'on ne démontre que le Cantor $1/4$ en était un. À cette époque, peu d'indices allaient dans le sens de la conjecture. Dans les années quatre-vingt, Mattila construisit un contre-exemple montrant que l'équivalence n'était pas correcte, et qui resta enveloppé d'un mystère pendant des années car sa preuve curieusement n'indiquait pas quelle était l'implication fausse. En fait, il démontra que la notion d'invisibilité n'était pas un invariant conforme contrairement à l'effaçabilité qui en est clairement un. Quelques années plus tard, Jones et Murai construisirent un compact invisible mais non effaçable, ce qui contredit la condition suffisante de la conjecture de Vitushkin. Aujourd'hui encore, on ne sait pas conclure sur la condition nécessaire de cette conjecture.

Dans la section précédente, on a présenté un argument simple reposant sur la conjecture de Denjoy et la théorie de Besicovitch, qui montre que les ensembles effaçables de longueur finie sont invisibles. Ainsi, la condition nécessaire de la conjecture de Vitushkin est vraie pour les ensembles de longueur finie. D'autre part, il se trouve que l'exemple construit par Jones et Murai est de longueur infinie, et donc il n'y a aucune obstruction à la modification suivante de la conjecture de Vitushkin.

La conjecture faible de Vitushkin : *Parmi les compacts de longueur finie, les ensembles effaçables sont précisément ceux qui sont invisibles.*

Remarquons que si l'énoncé précédent est correct, alors le problème de Painlevé dans le contexte des ensembles de longueur finie est résolu car l'invisibilité (étant un invariant bilipschitzien) est une notion géométrique.

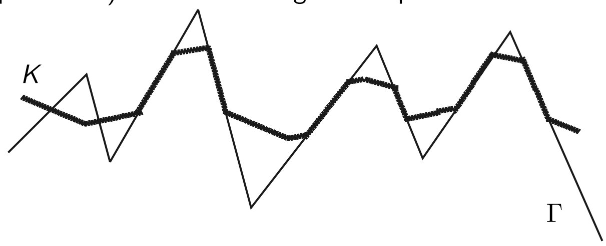

Figure 5

Il est clair que la direction que l'on ne sait pas montrer est celle qui va d'invisible à effaçable. Autrement dit, si on a un compact de longueur finie non effaçable, alors on doit démontrer qu'il n'est pas invisible. En explicitant un peu plus l'énoncé précédent il s'agit de montrer que pour un compact K donné de longueur finie tel qu'il existe une fonction analytique bornée et non constante sur $\mathbb{C} \setminus K$, on peut construire une courbe rectifiable Γ telle que longueur$(K \cap \Gamma) \neq 0$ (voir figure 5).

Si le lecteur y réfléchit un peu, il ne saura probablement pas comment faire ni même comment commencer. Il n'y a aucune relation claire entre une propriété de type analytique comme l'existence d'une fonction qui satisfait certaines conditions et une propriété plutôt géométrique comme l'existence d'une courbe rectifiable qui satisfait d'autres conditions. Avec le recul d'aujourd'hui, il y avait quatre étapes très difficiles à passer pour établir un lien entre la condition géométrique et la condition analytique. Ceci explique le laps de temps écoulé entre l'article de Vitushkin de 1967 et celui de Guy David [D1] en 1998 dans lequel est démontrée la conjecture faible de Vitushkin. Les quatre prochaines sections seront consacrées à chacune de ces étapes. Nous nous limiterons presque toujours au cas homogène, qui nous facilitera la compréhension des idées centrales mais qui en contrepartie nous obligera à renoncer à comprendre la contribution de G. David et P. Mattila dans la partie finale que constitue l'étape 4. La figure 6 ci-dessous schématise les trois premières étapes du cas homogène.

Dans la section suivante, qui correspond à la dernière flèche de la figure 6, nous parlerons d'un critère à la fois pratique et élégant pour savoir s'il est possible de construire une courbe rectifiable qui passe par un ensemble donné.

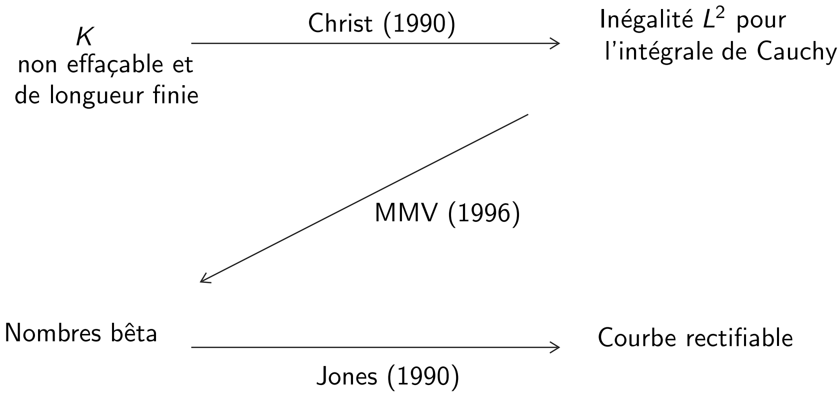

Figure 6

6. Le voyageur de commerce et les nombres bêta

Le voyageur de commerce, c'est celui qui va de ville en ville pour servir ses clients habituels et en trouver de nouveaux. Supposons qu'un voyageur de commerce doive passer par N villes dont on connaît les distances mutuelles. Le problème qui lui est posé est de trouver un itinéraire qui soit le plus court possible, qui le fasse passer une seule fois par chaque ville et qui le fasse revenir à son point de départ. Quelques instants de réflexion suffisent à se convaincre qu'il existe effectivement des solutions. Il est également clair que si N est grand et si le voyageur ne dispose pas de beaucoup de temps, mieux vaut pour lui trouver un algorithme efficace au lieu d'essayer l'un après l'autre les $(N-1)!$ cas possibles. Rappelons que l'ordre de grandeur de $N!$ est très grand, inférieur à celui de N^N mais supérieur à n'importe quelle suite exponentielle a^N.

Le problème du voyageur de commerce (ou TSP, pour *traveling salesman problem*) est un problème typique de complexité des méthodes de calcul : on veut trouver des algorithmes qui résolvent le problème en un minimum de temps possible ; ce qui correspond pour un ordinateur à un nombre minimum d'opérations. On dit qu'un problème de calcul peut se résoudre en un temps polynômial (ou qu'il appartient à la classe P) s'il existe un entier naturel k et un algorithme de calcul tel que l'algorithme résolve les problèmes de grandeur N avec un nombre d'opérations de l'ordre de $O(N^k)$. Ces problèmes de classe (P) se trouvent être justement ceux pour lesquels on a de fortes chances de les implanter efficacement sur un ordinateur. Par exemple, le problème de trier N nombres donnés du plus petit au plus grand peut se résoudre facilement en un temps de l'ordre de $O(N^2)$, et en sophistiquant l'argument on peut baisser l'exposant 2 et y arriver en temps $O(N \log N)$. Une surprise monumentale, c'est que l'on ne sait toujours pas si le TSP peut se résoudre en un temps polynômial.

Aux États-Unis, des multimillionnaires investissent des quantités astronomiques d'argent pour des œuvres philanthropiques comme par exemples les musées, les hôpitaux, les centres de recherche, pour avoir, entre autres raisons, leur nom dessus et ainsi être sûrs de passer à la postérité (au moins pour un bout de temps).

C'est par exemple le cas de Landon T. Clay, qui créa l'institut *Clay Mathematics Institute* avec pour louable objectif d'augmenter et de disséminer les connaissances mathématiques. Il est extraordinairement instructif de lire les premières lignes de la page [W1] dans laquelle les activités de l'institut sont décrites. D'ailleurs, tout irait nettement mieux pour les mathématiques en Espagne si les responsables de certains ministères s'en étaient inspirés, chose qui ne risque pas d'arriver dans un futur proche. L'institut donnera une récompense d'un million de dollars à qui résoudra un des problèmes d'une liste qui en contient sept, liste rédigée sur commande de l'institut par une commission d'experts. À titre d'exemple, pour mieux se rendre compte du niveau de difficulté, l'un d'eux est la fameuse conjecture de Riemann. Celui qui nous intéresse concerne le TSP.

Un problème de calcul est de classe NP (l'abréviation de *Non-deterministic Polynomial*) si on peut vérifier en un temps polynômial qu'une solution présumée du problème en est une. Intuitivement, c'est plus facile que de construire un algorithme qui résolve le problème en un temps polynômial. Ainsi on a $P \subset NP$. Un exemple qui illustre parfaitement la relation entre P et NP est celui du puzzle à N pièces tel que chaque pièce s'encastre exactement avec un nombre fixé de pièces (par exemple 5) (voir [W2]). Alors, il est évident que si on nous présente une solution possible du puzzle, on pourra vérifier si elle est correcte en un temps $O(N)$ simplement en regardant si chaque pièce s'encastre avec ses voisines. Mais l'expérience montre qu'il est beaucoup plus difficile d'inventer un algorithme efficace pour faire le puzzle. En conséquence, il n'est pas clair que le puzzle soit de classe P mais il est clair qu'il est de classe NP.

Depuis les années soixante-dix, on a démontré le fait étrange que si l'on sait résoudre le TSP en un temps polynômial, alors il en est de même de tout problème NP et par conséquent, $P = NP$. Les experts pensent en réalité que ce n'est pas vrai mais personne ne sait le démontrer. Il y a un million de dollars pour celui qui saura dire si $P = NP$ ou non... À bien y réfléchir, offrir d'énormes sommes d'argent est un moyen excellent pour convaincre les gens d'affronter les immenses difficultés que l'on rencontre quand on travaille sur des problèmes si complexes. Si l'exemple de l'Institut Clay proliférait, il est sûr que le nombre d'inscrits pour des études mathématiques augmenterait d'une façon spectaculaire.

Il y a des variantes du TSP qui peuvent se résoudre en temps polynômial, comme par exemple se contenter de trouver un itinéraire passant par les N villes et tel que sa longueur ne dépasse pas le double de la longueur minimale possible (ou plus généralement pas plus de C fois la longueur du chemin le plus court). De même en autorisant le voyageur à repasser par des villes déjà traversées, on peut résoudre le problème en un temps $O(N \log N)$. Laissons maintenant de côté les problèmes de complexité combinatoire et intéressons-nous au lien que l'on peut faire avec la conjecture faible de Vitushkin.

Considérons un compact K de longueur finie qui ne soit pas effaçable. Comme nous avons vu dans la section précédente, la conjecture faible de Vitushkin revient à la construction d'une courbe rectifiable qui *intersecte* K sur un ensemble de longueur positive. Cela n'a rien d'évident, et pour nous en convaincre, changeons légèrement le problème de la manière suivante : prenons H un sous-ensemble compact de K (par exemple K lui-même) et demandons-nous si H est inclus dans une courbe rectifiable. La réponse est que parfois oui, parfois non. Par exemple, prenons pour K l'union de $[0,1]$ avec l'ensemble de Cantor $1/4$; alors si $H=[0,1]$, la réponse est évidemment oui, on peut faire passer par H une courbe rectifiable de longueur positive, tandis que si H est le Cantor $1/4$, la réponse est non car H est invisible.

Le problème qui nous est maintenant posé de manière naturelle est de trouver un critère pour savoir si par un compact K sans propriétés particulières on peut faire passer une courbe rectifiable (dans le sens où K est inclus dans cette courbe). Ce problème là est déjà plus basique que le précédent. Une fois que nous aurons ce critère à disposition, lorsque nous aurons un compact K non effaçable et de longueur finie, il nous « suffira » pour résoudre la conjecture faible de Vitushkin de trouver un sous-compact qui remplisse les conditions du critère. Comme nous verrons un peu plus loin, heureusement cette stratégie marche, mais il n'est pas simple du tout de la mettre en œuvre car on doit surmonter une foule de petites difficultés. Le lien avec le TSP c'est que l'on peut se ramener à considérer des ensembles finis et à s'interroger sur la longueur minimale (modulo constantes universelles) d'une ligne polygonale qui passe par tous les points de l'ensemble.

Prenons donc un compact K du plan et essayons de voir s'il est contenu dans une courbe rectifiable. Il est clair que comme une courbe rectifiable a une longueur finie, K aussi doit avoir une longueur finie. Il est également évident que cette condition nécessaire n'est pas suffisante comme le montre le Cantor $1/4$. La condition que nous aurons à ajouter à celle d'avoir une longueur finie devra tenir compte du fait qu'une courbe rectifiable admet des tangentes en presque tous points et donc qu'en beaucoup d'endroits il est possible de l'approcher localement par des droites. Peter Jones introduisit certaines quantités qui donnent les clefs de la résolution du problème. Pour de simples raisons de notation, ces quantités furent nommées nombres bêta [J1, J2]. Les méthodes sont inspirées des méthodes L^2 de l'analyse harmonique classique sur la droite réelle et la motivation première fut de donner une démonstration nouvelle de l'inégalité L^2 pour les intégrales de Cauchy sur les graphes de fonctions lipschitziennes. L'idée centrale est que les graphes de fonctions lipschitziennes sont localement très bien approchées par des droites et que la continuité L^2 est déjà connue pour les droites.

Les nombres bêta se définissent de la manière suivante : soit Q un carré dont le côté sera interprété comme l'échelle à laquelle on regarde le compact K et le centre comme le lieu autour duquel on fait l'observation. Posons

$$\beta_K(Q)=\beta(Q)=\inf_L \sup_{z\in K\cap Q} \frac{\mathrm{dist}(z,L)}{\ell(Q)},$$

où l'infimum se prend sur toutes les droites L. La figure 7 suivante, représente la droite L qui réalise l'infimum.

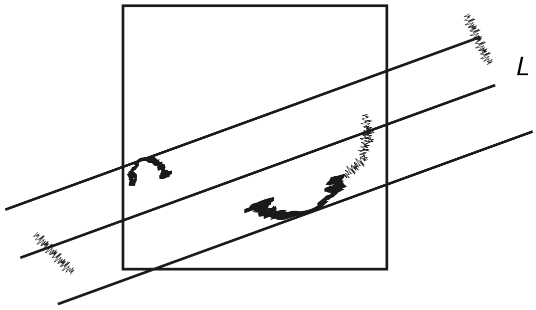

Figure 7

Notons que $\beta(Q)$ est un nombre sans dimension car dans la définition nous avons divisé par l'échelle. Le nombre $2\beta(Q)\ell(Q)$ est la largeur de la bande la plus étroite possible qui contient $K \cap Q$; donc on peut interpréter $2\beta(Q)$ comme la fraction (ou si l'on veut le pourcentage) de $\ell(Q)$ que l'on doit prendre pour obtenir cette largeur.

Par exemple, si K est un segment, $\beta_K(Q) = 0$ pour tout Q. Si K est l'arc de la parabole $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ et Q est un carré de côtés parallèles aux axes, inclus dans le premier cadran dont les points 0 et 2^{-n} sont des sommets, alors $\beta_K(Q) \approx 2^{-n}$.

Un fait très utile est que nous n'aurons pas à travailler avec tous les carrés, car nous pourrons nous limiter à considérer les carrés d'une suite spéciale : les carrés dyadiques.

On dit qu'un carré est *dyadique* s'il est de la forme

$$\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right] \times \left[\frac{l}{2^j}, \frac{l+1}{2^j}\right], \qquad \text{où} \quad j, k, l \in \mathbb{Z}\,.$$

Si le lecteur n'a jamais travaillé avec ces carrés, nous l'invitons à faire un petit dessin des carrés dyadiques de côté 1 ($j = 0$) et qu'il remarque que chacun d'eux contient 4 carrés de côté 1/2 (ses fils) et qu'il est contenu dans un carré unique de côté 2 (le père). Cette structure familiale se reproduit à toutes les échelles. On peut penser ces carrés comme des sous-divisions de la carte d'un territoire énorme qui donnerait des informations à une certaine échelle (le côté) et en un lieu déterminé (le centre).

Le théorème de Peter Jones s'énonce de la manière suivante [J2].

Théorème 6.1. — *Un compact K est inclus dans une courbe rectifiable si et seulement si*

$$\sum_{Q \ \text{dyadique}} \beta_K^2(Q)\ell(Q) < \infty\,.$$

On a de plus la relation suivante pour la longueur la plus courte de la courbe contenant K

$$\inf_{\Gamma \supset K} \ell(\Gamma) \simeq \operatorname{diam}(K) + \sum_{Q\ \text{dyadique}} \beta_K^2(Q)\ \ell(Q). \tag{6.1}$$

Voici quelques exemples pour comprendre le résultat précédent.

Le premier est le carré unité $K = [0,1] \times [0,1]$. On a $\beta(Q) = 1/2$ si Q est un carré dyadique contenu dans K. Donc,

$$\sum_{Q \text{ dyadique}} \beta^2(Q)\ \ell(Q) \geqslant \sum_{n \geqslant 0} \sum_{\ell(Q)=2^{-n}} \frac{1}{2^{n+2}} = \sum_{n\geqslant 0} 2^{n-2} = \infty\,,$$

et comme on s'en doutait, on ne peut pas faire passer une courbe rectifiable par K.

Le deuxième exemple est le Cantor $1/4$. Dans ce cas, on obtient $\beta(Q) = 1/2$ seulement pour les 4^n carrés de type Q_j^n de côté $1/4^n$ (voir la section 4). Ainsi,

$$\sum_{Q \text{ dyadique}} \beta^2(Q)\ \ell(Q) \geqslant \sum_{n\geqslant 0} \sum_{j=0}^{4^n} \frac{1}{4^{n+1}} = \infty$$

donc il n'y a aucune courbe rectifiable qui contienne K.

Il est également instructif de prendre comme exemple le compact K des 4^N villes situées au centre des carrés Q_j^N. On trouve alors que

$$\sum_{Q \text{ dyadique}} \beta^2(Q)\ \ell(Q) \simeq \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=0}^{4^N} \frac{1}{4^{N+1}} \simeq \sum_{n=0}^{N} 1 \simeq N\,.$$

Dans ce cas précis, on peut sans trop de difficultés identifier quel est le chemin le plus court (modulo les constantes numériques) qui passe par les 4^N villes : c'est la ligne brisée dessinée sur la figure 8, dans laquelle on a pris $N = 2$.

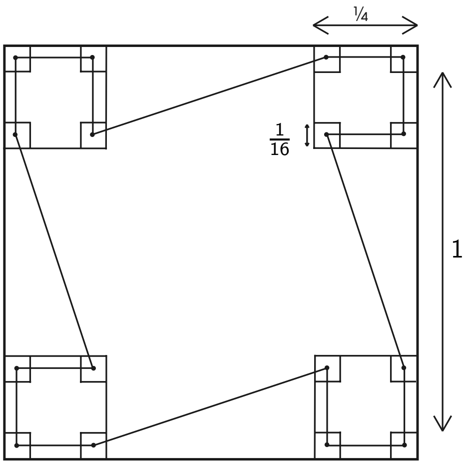

Figure 8

Notons, qu'il est clair qu'à chaque génération, il faut ajouter une longueur comparable à l'unité pour pouvoir passer par toutes les villes. Ainsi, dans ce cas spécial, le théorème de Peter Jones se vérifie directement.

On a donc un superbe critère pour savoir si un compact peut être contenu dans une courbe rectifiable. On veut maintenant s'en servir pour résoudre la conjecture faible de Vitushkin, problème pour lequel nous avons besoin d'établir une relation entre non effaçabilité d'un compact de longueur finie et nombres bêta. Ces deux points sont encore immensément éloignés et il reste du chemin à parcourir. Dans la prochaine section, nous verrons comment obtenir des conclusions sur la continuité L^2 de l'intégrale de Cauchy pour la mesure de « longueur » sur K, à partir de la simple existence d'une fonction analytique bornée et non constante sur $\mathbb{C} \setminus K$. Enfin, dans l'autre section, nous ferons le saut définitif de l'analyse à la géométrie en faisant le lien entre l'intégrale de Cauchy et les nombres bêta.

7. L'intégrale de Cauchy

Dans cette section, nous décrirons une des idées centrales de la démonstration qui nous amènera jusqu'à la solution de la conjecture faible de Vitushkin. Il s'agit de voir comment de l'hypothèse faite sur K (sa non effaçabilité et sa longueur finie) on peut déduire que l'opérateur intégral de Cauchy a un bon comportement dans certains espaces L^2. C'est un peu comme le chemin inverse de celui que nous avons pris pour résoudre la conjecture de Denjoy. Rappelons que nous avions utilisé les inégalités L^2 de Calderón pour l'intégrale de Cauchy sur des graphes lipschitziens et que nous en avions conclu l'effaçabilité de certains compacts.

De même que pour une courbe rectifiable on a une mesure naturelle qui est la longueur d'arc, pour un compact K de longueur finie, la restriction à K de la mesure de longueur Λ joue le rôle de mesure de base. On la notera Λ_K.

Supposons donc que f soit une fonction non constante, analytique et bornée sur $\mathbb{C} \setminus K$. On voudrait que soient définies les valeurs de f sur la frontière de K ou au moins disposer de celles-ci dans un sens faible. En appliquant la formule de Cauchy à des suites de familles de courbes de $\mathbb{C} \setminus K$ qui s'approchent de K et en utilisant un argument standard de compacité, on obtient la formule

$$f(z) = f(\infty) - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{b(\zeta)}{\zeta - z} \, d\Lambda_K(\zeta), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus K, \tag{7.1}$$

où b est une fonction bornée Λ_K-presque partout sur K. On peut alors voir la fonction b comme les valeurs frontières de f et ce malgré le fait que nous n'avons pas parlé de convergence ponctuelle d'aucune sorte. La formule (7.1) dit en particulier que l'intégrale de Cauchy de la fonction bornée b est également bornée (car c'est tout simplement $f - f(\infty)$). L'inconvénient de (7.1), c'est qu'il n'est pas possible de donner un sens clair à l'intégrale pour les points $z \in K$, et c'est un point crucial pour pouvoir parler de l'opérateur de Cauchy comme d'un opérateur qui envoie les fonctions définies sur K sur des fonctions définies sur K. Par analogie avec ce qui se passe pour les courbes de classe C^1, on peut espérer que la valeur principale

$$C(b)(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\zeta - z| > \varepsilon} \frac{b(\zeta)}{\zeta - z} \, d\Lambda_K(\zeta), \tag{7.2}$$

puisse être définie pour Λ_K-presque tout z dans K. Mais pour le moment nous n'avons pas encore les outils nécessaires pour le faire. On utilise donc une alternative très connue en théorie classique de Calderón-Zygmund, qui est de renoncer à avoir un opérateur défini par une identité explicite de type (7.2) et penser plutôt que l'opérateur est en réalité une famille d'opérateurs tronqués $(C_\varepsilon(g))_{\varepsilon>0}$ où

$$C_\varepsilon(g)(z) = \int_{|\zeta - z|>\varepsilon} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\Lambda_K(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Notons que l'intégrale précédente converge absolument pour tout z et même pour toute fonction g intégrable par rapport à Λ_K. Travailler avec les intégrales tronquées s'avère une bonne méthode comme le montre le résultat suivant : si f est une fonction bornée sur $\mathbb{C} \setminus K$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|C_\varepsilon(b)(z)| \leqslant C\,, \quad z \in K\,, \quad \varepsilon > 0\,. \tag{7.3}$$

C'est-à-dire, l'intégrale de Cauchy envoie la fonction bornée b sur une fonction bornée (en réalité, sur la famille de fonctions uniformément bornées $C_\varepsilon(b)$, $\varepsilon > 0$).

Et maintenant, il entre en scène un des résultats les plus sophistiqués de la théorie de Calderón-Zygmund, c'est le théorème $T(b)$ de David, Journé et Semmes. Ce théorème dit qu'un opérateur d'intégrales singulières comme celui de l'intégrale de Cauchy par rapport à la mesure de longueur, est continu sur L^2 lorsqu'on peut trouver une fonction b bornée telle que $T(b)$ soit aussi bornée et telle que b satisfasse de plus une condition de non-trivialité qui exclut en particulier le cas $b = 0$. Cette condition que l'on appelle para-accretivité dit simplement que les moyennes de b dans des disques centrés sur le support de Λ_K sont bornées inférieurement.

$$\frac{1}{\Lambda_K(D(z,r))}\left|\int_{D(z,r)} b(\zeta)\, d\Lambda_K(\zeta)\right| \geqslant \delta, \qquad z \in \text{support } \Lambda_K\,, \tag{7.4}$$

où δ est un réel positif. Le théorème $T(b)$ est extrêmement puissant car il suffit juste de vérifier l'action de T sur une fonction particulière pour pouvoir conclure à la continuité L^2. L'inconvénient, c'est que l'hypothèse de para-accretivité n'est pas très facile à vérifier dans des cas concrets car elle fait appel à tous les disques centrés sur le support de Λ_K. Dans notre cas, on peut supposer que la fonction b qui représente les valeurs frontières de f, satisfait $\int b\, d\Lambda_K \neq 0$ car f est non constante. Donc, (7.4) est vrai pour un δ approprié chaque fois que $D(z,r) \supset K$. Malheureusement, il n'y a a priori rien qui empêche que l'intégrale de b s'annule sur un petit disque et donc que (7.4) soit fausse.

Michael Christ, un élève de Calderón, démontra avec un argument de temps d'arrêt que si on enlève certains morceaux de K où les choses se passent mal, on obtient un sous-ensemble K_0 pour lequel on a encore une longueur positive et (7.4) est satisfaite. Remarquons que du coup (7.3) n'est peut-être plus vraie car en changeant K par K_0, on change aussi $C_\varepsilon(b)$. Mais cette dernière difficulté peut se surmonter au prix de quelques efforts supplémentaires. En appliquant le théorème $T(b)$ on obtient alors l'inégalité L^2

$$\int |C_\varepsilon(g)(z)|^2 d\Lambda_{K_0}(z) \leqslant C \int |g(z)|^2 d\Lambda_{K_0}(z)\,, \tag{7.5}$$

où C est une constante qui ne dépend ni de g ni de ε. En résumant, on peut écrire le théorème de Michael Christ de la manière suivante.

Théorème 7.1. — *Si K est un compact non effaçable, de longueur finie, alors il existe un sous-ensemble compact K_0 de longueur positive pour lequel l'inégalité (7.5) est vraie.*

En fait, dans l'article original de Michael Christ, figure une hypothèse supplémentaire sur K demandant que sa longueur soit localement uniformément positive et finie, c'est-à-dire que

$$C^{-1}r \leqslant \Lambda(K \cap D(z,r)) \leqslant Cr, \quad z \in K, \quad r \leqslant \operatorname{diam}(K)\,. \tag{7.6}$$

Le fait que l'on puisse se débarrasser de cette dernière hypothèse n'a rien de trivial, et nécessite tout un arsenal technique qui n'est pas à sous estimer (voir [D1], [D2], [NTV]).

Bien que nous ayons extrait de la non effaçabilité la précieuse information contenue dans (7.5), rien ne nous indique que (7.5) a un rapport avec les nombres bêta. Ceci est l'objet de la section suivante, où nous verrons comment passer de la condition analytique (7.5) à une condition géométrique proche des nombres bêta.

8. La courbure de Menger

Pour compléter la démonstration de la conjecture faible de Vitushkin, il ne nous reste qu'à transformer les inégalités L^2 de la section précédente pour l'intégrale de Cauchy en un énoncé géométrique. Rappelons que la situation est la suivante : nous avons un compact K (le K_0 de la section précédente) de longueur positive finie pour lequel on a l'inégalité

$$\int |C_\varepsilon(g)(z)|^2 d\Lambda_K(z) \leqslant C \int |g(z)|^2 d\Lambda_K(z)\,, \tag{8.1}$$

où C est une constante qui ne dépend ni de g ni de ε. Si l'on veut travailler dans une situation plus commode, on peut aussi supposer que la mesure de longueur sur K a la propriété d'homogénéité suivante :

$$C^{-1}r \leqslant \Lambda(K \cap D(z,r)) \leqslant Cr, \quad z \in K, \quad r \leqslant \operatorname{diam}(K)\,. \tag{8.2}$$

Le but est maintenant d'extraire de (8.1) l'information géométrique sur K qui nous permette de conclure que la condition de Jones

$$\sum_{Q \text{ dyadique}} \beta_K^2(Q)\ell(Q) < \infty$$

est satisfaite. Le Théorème 6.1 nous dira alors qu'il existe une courbe rectifiable qui passe par K, ce qui achèvera la preuve de la conjecture faible de Vitushkin.

Si étrange que cela puisse paraître, la condition analytique (8.1) peut se formuler en terme d'une notion appropriée de courbure qui porte le nom du mathématicien autrichien qui l'a étudiée : la courbure de Menger. Le nom de Menger est également associé à un ensemble fractal très pittoresque en forme d'éponge ainsi qu'à certaines courbes spéciales. Par coïncidence, Menger popularisa le problème du voyageur de commerce au sein du cercle des mathématiciens autrichiens et allemands des années trente.

La courbure de Menger de trois points z_1, z_2 et z_3 du plan est la quantité

$$c(z_1,z_2,z_3) = R^{-1}\,,$$

où R est le rayon du cercle qui passe par les trois points. Si les trois points sont alignés alors $R = \infty$ et donc $c(z_1, z_2, z_3) = 0$. Par analogie, on définit également $c(z_1, z_2, z_3) = 0$ lorsque deux points sont confondus. À titre d'exemple, si $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ et z_3 est très voisin de $1/2$ alors R est énorme et $c(z_1, z_2, z_3)$ est petite. Mais cela ne doit pas nous faire penser que la courbure est petite chaque fois que le troisième point est presque aligné avec les deux autres. En effet, si l'on prend $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{i\varepsilon}$, alors $c(0, 1, z_3) \equiv 2$ malgré le fait que lorsque ε est petit le point z_3 est très prés de l'axe réel.

On a une relation extraordinairement simple entre le noyau de Cauchy et la courbure de Menger, laquelle fut découverte par Melnikov [Me] lorsqu'il essayait de trouver une version discrète de la capacité analytique. Pour trois points distincts du plan considérons la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z_1 - z_2} & \frac{1}{z_1 - z_3} \\ \frac{1}{z_2 - z_1} & 0 & \frac{1}{z_2 - z_3} \\ \frac{1}{z_3 - z_1} & \frac{1}{z_3 - z_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathbf{1}$ pour le vecteur $(1, 1, 1) \in \mathbb{C}^3$ et soit

$$\langle z, w \rangle = \sum z_i \overline{w_i}, \qquad \text{pour} \quad z, w \in \mathbb{C}^3, \tag{8.3}$$

le produit hermitien de $\mathbb{C}^3$. Rappelons que la matrice adjointe de C (notée C^*) par rapport au produit hermitien (8.3) s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes et en conjuguant. On s'intéresse alors à la matrice C^*C qui est clairement définie positive car $\langle C^*C(v), v \rangle = \|C(v)\|^2 \geqslant 0$. En faisant le calcul explicite, les termes de la diagonale de C^*C sont de la forme

$$\frac{1}{|z_j - z_i|^2} + \frac{1}{|z_k - z_i|^2}\,, \quad j \neq i, \quad k \neq i\,,$$

pour $i = 1, 2, 3$. Les termes hors de la diagonale sont de la forme

$$\frac{1}{(z_j - z_i)\overline{(z_k - z_i)}} \quad j \neq i, \quad k \neq i\,.$$

On voudrait calculer $\|C(\mathbf{1})\|^2 = \langle C^*C(\mathbf{1}), \mathbf{1} \rangle$. Il est immédiat de se convaincre que pour toute matrice M de taille 3×3 l'expression $\langle M(\mathbf{1}), \mathbf{1} \rangle$ est la somme des neuf coefficients de la matrice, et donc

$$\|C(\mathbf{1})\|^2 = \sum_{i \neq j} |z_i - z_j|^{-2} + \sum_{\sigma} \frac{1}{(z_{\sigma(2)} - z_{\sigma(1)})\overline{(z_{\sigma(3)} - z_{\sigma(1)})}}\,, \tag{8.3}$$

où la seconde somme est prise sur toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$. On voit donc que le carré de la norme du vecteur $C(\mathbf{1})$ est la somme de deux termes dont le premier est la trace de la matrice C^*C et est strictement positif (en accord avec le fait que C^*C est définie positive), et le second au vu de (8.3) est clairement un nombre réel. La chose inespérée c'est que c'est un nombre positif. Plus concrètement, on a l'identité

$$\sum_{\sigma} \frac{1}{(z_{\sigma(2)} - z_{\sigma(1)})(\overline{z_{\sigma(3)} - z_{\sigma(1)}})} = c(z_1, z_2, z_3)^2\,, \tag{8.4}$$

qui se démontre facilement en tenant compte du fait que pour la somme sur σ il suffit de considérer trois termes car les autres sont leur conjugués [Me]. D'où

$$\|C(\mathbf{1})\|^2 = \sum_{i \neq j} |z_i - z_j|^{-2} + c(z_1, z_2, z_3)^2\,. \tag{8.5}$$

L'auteur de cet article, découvrit que l'identité précédente peut s'exploiter pour comprendre les inégalités L^2 de l'intégrale de Cauchy par rapport à des mesures très générales. Dans notre cas, avec (8.2) cela donne

$$\begin{aligned} &\int_D |C_\varepsilon(\chi_D)(z)|^2 \; d\Lambda_K(z) \\ &= \iiint_{D^3} c(z_1, z_2, z_3)^2 \; d\Lambda_K(z_1) \; d\Lambda_K(z_2) \; d\Lambda_K(z_3) + O(\Lambda_K(D)), \end{aligned} \tag{8.6}$$

pour tout disque D. L'identité précédente est en fait une version continue de (8.5) dans laquelle le vecteur $\mathbf{1}$ s'est converti en la fonction χ_D, le terme de la diagonale correspond au terme $O(\Lambda_K(D))$ et le terme de courbure en l'intégrale triple sur D^3. Afin d'illustrer la puissance de (8.6), examinons avec attention le cas du compact $K = [0, 1]$. On a $c(z_1, z_2, z_3) = 0$ sur K^3, et donc on obtient pour tout intervalle $I \subset [0, 1]$ de longueur $|I|$,

$$\int_I H(\chi_I)^2(x)dx \leqslant C|I|\,, \tag{8.7}$$

qui est simplement l'inégalité L^2 pour la transformée de Hilbert de la fonction caractéristique de l'intervalle I. Le lecteur qui a déjà travaillé avec la transformée de Hilbert aura déjà observé que $H(\chi_I)$ peut se calculer explicitement ainsi que sa norme sur L^2, et donc (8.7) n'est pas un grand résultat (même en s'interdisant l'usage de la transformée de Fourier). Mais, ici, ce qui nous intéresse ce sont les méthodes et non les résultats. En fait, si K est un arc de graphe lipschitzien, nous savons que localement K peut être approché par des droites. On peut traduire cela en terme de l'intégrale triple de (8.6) et l'on peut terminer en usant d'un argument rapide et raisonnablement élémentaire [V2] pour démontrer la continuité L^2 de Coifman, McIntosh et Meyer (voir (3.6)). En fait, la même idée permet de démontrer que l'intégrale de Cauchy est contrôlée par le premier commutateur [V3] un opérateur très simple pour lequel Calderón avait déjà obtenu la continuité L^2 en 1965. L'ironie du sort est que cet article de 1965 qui initia tout un pan important et influent de recherche contenait déjà en germe la solution finale.

Mais revenons à ce qui nous intéresse. On voit clairement, que si l'on suppose (8.1) vraie, alors en prenant $f = \chi_D$ on a

$$\int |C_\varepsilon(\chi_D)|^2 d\Lambda_K \leqslant C\Lambda_K(D)\,,$$

qui avec (8.6), donne

$$\iiint_{D^3} c(z_1, z_2, z_3)^2 \; d\Lambda_K(z_1) \; d\Lambda_K(z_2) \; d\Lambda_K(z_3) \leqslant C\Lambda_K(D). \tag{8.8}$$

En prenant comme disque D un disque qui contient K et de rayon comparable au diamètre de K, (8.8) devient

$$\iiint c(z_1, z_2, z_3)^2 d\Lambda_K(z_1) \; d\Lambda_K(z_2) \; d\Lambda_K(z_3) \leqslant C \operatorname{diam}(K). \tag{8.9}$$

Cette dernière inégalité a un contenu clairement géométrique que nous avons su déduire de l'inégalité L^2 initiale (8.1). Mais peut-on déduire quelque chose de (8.9) à propos des nombres bêta ? La réponse est oui, mais hélas, la démonstration complète de ce point n'est pas facile, ni même en se restreignant simplement au cas homogène (8.2) [MMV]. C'est pourquoi nous ne donnerons aucune indication sur cette partie. Néanmoins notons que si nous pouvions majorer la somme

$$\sum_{Q \text{ dyadique}} \beta_K^2(Q) \; \ell(Q)\,, \tag{8.10}$$

par une constante fois

$$\iiint c(z_1, z_2, z_3)^2 d\Lambda_K(z_1) \; d\Lambda_K(z_2) \; d\Lambda_K(z_3)\,,$$

nous aurions fini, car en appliquant (8.9), la somme (8.10) serait finie et par conséquent d'après le Théorème 6.1, K serait un sous-ensemble d'une courbe rectifiable. Que la dernière majoration que nous venons d'écrire soit plausible, on peut le voir sur la figure 9 où l'on voit que si à l'échelle et à l'endroit déterminé par le carré Q, la quantité $\beta(Q)$ est positive, alors la courbure de Menger est aussi positive.

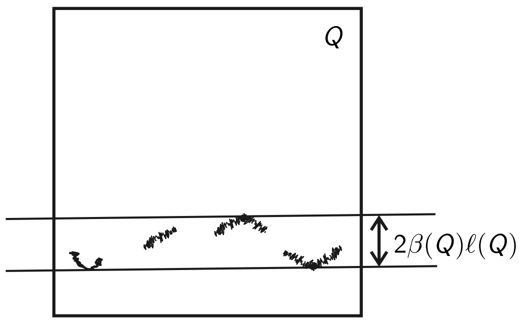

Figure 9

Le lecteur intéressé qui voudrait en savoir plus peut consulter l'excellent livre de Pajot [P].

Ceci termine la partie sur la relation entre inégalité L^2 pour l'intégrale de Cauchy et les nombres bêta et ainsi nous terminons le survol de la démonstration de la conjecture faible de Vitushkin, au moins pour le cas homogène (8.2). Dans la prochaine section nous parlerons très brièvement du cas non homogène et nous verrons que l'on peut le traiter avec des variantes compliquées des méthodes que nous avons utilisées jusque là.

9. Le cas non homogène

Dans tout ce que nous avons dit dans les sections précédentes, nous n'avons pas eu à nous préoccuper de la difficulté technique majeure de toute la démonstration que nous venons de voir et qui est l'absence de condition d'homogénéité

$$C^{-1}r \leqslant \Lambda(K \cap D(z,r)) \leqslant Cr\,, \quad z \in K, \quad r \leqslant \operatorname{diam}(K)$$

dans le cas général. Le passage de cette difficulté n'est en rien facile, et invoque de nouvelles idées. Les personnes qui y ont contribué (en plus de G. David à qui l'on doit la première démonstration de la conjecture faible de Vitushkin) sont J. C. Léger, un élève de G. David qui démontra un analogue non homogène de la relation entre les nombres bêta et la courbure de Menger, P. Mattila qui résolu avec G. David le cas « réel » de la conjecture faible de Vitushkin, Nazarov, Treil et Volberg qui introduisirent de nouvelles méthodes pour le théorème $T(b)$ dans le cas non homogène et X. Tolsa qui développa divers aspects de la théorie de Calderón-Zygmund non homogène, en particulier la théorie de l'espace *BMO* (*Bounded Mean Oscillation*) non homogène.

Mentionnons, pour finir, que les méthodes que nous avons présentées dans les sections antérieures, s'appliquent également pour résoudre d'autres vieux problèmes liés à la notion d'ensemble effaçable : la caractérisation des ensembles de Cantor qui sont effaçables [MTV] et la semi-additivité de la capacité analytique [T].

Remerciements

À José Luis Fernández pour m'avoir invité, il y a longtemps déjà, à écrire cet article pour la « *Gaceta* ». À Ferran Hurtado, expert pour les questions relatives au TSP, à Joan Orobitg qui corrigea deux versions préliminaires du manuscrit, à Lluís Alsedà, qui me convainquit de changer l'introduction ainsi qu'à Adolfo Quirós qui eut l'amabilité de relire tout l'article et me suggéra des changements qui ont largement contribué à l'amélioration de l'exposition. À Jesús Bastero qui m'aida sur tous les points de l'article. L'infinie patience de Teresa Arnal a rendu possible (dans la version catalane) une correction orthographique et grammaticale efficace et pacifique. Sandrine Grellier m'a aidé avec la version française. Enfin, j'ai bénéficié d'une aide dans le cadre du *Programme de mobilité* du ministère espagnol de l'Éducation et de la Culture, ainsi que des supports BMF 2000-0361 du ministère espagnol et SGR 2001 00431 du gouvernement de la Catalogne (Generalitat de Catalunya).

Références

[A] L. Ahlfors, Bounded analytic functions, Duke Math. J. 14(1947), 1–11.

[C1] A. P. Calderón, Commutators of singular integral operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **53** (1965), 1092–1099.

[C2] A. P. Calderón, Cauchy Integrals on Lipschitz curves and related operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **74** (1977), 1324–1327.

[C3] A. P. Calderón, Acceptance speech for the Bocher Price, Notices of the A.M.S. 26(1979), 97–99.

[Ch] M. Christ, A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy Integral, *Colloq. Math.* **60/61** (1990), 1367–1381.

[CMM] R. R. Coifman, A. McIntosh and Y. Meyer, L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes, *Ann. of Math.* **116** (1982), 361–387.

[D1] G. David, Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity, *Rev. Mat. Iberoamericana* **14(2)** (1998), 369–479.

[D2] G. David, Analytic capacity, Calderón-Zygmund operators, and rectifiability, *Publ. Mat.* **43** (1999), 3–25.

[F] K.J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[G] J. Garnett, Positive length but zero analytic capacity, *Proc. Amer. Math. Soc.* **21**(1970),696–699.

[GV] J. Garnett and J. Verdera, Analytic capacity, bilipschitz mappings and Cantor sets, *Math. Res. Lett.* **10(4)** (2003), 515–522.

[Gu] M. de Guzmán, *Real Variable methods in Fourier Analysis*, Noth-Holland Mathematical Studies 46, North-Holland Publishing Co., Amsterdam and NewYork, 1981.

[J1] P. Jones, Square functions, Cauchy integrals, analytic capacity, and harmonic measure, in : *Proc. Conf. on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations*, El Escorial 1987 (J. García-Cuerva, ed.), Lecture Notes in Math. **1384**, Springer-Verlag, 1989, pp. 24–68.

[J2] P. Jones, Rectifiable sets and the traveling salesman problem, *Invent. Math.* **102** (1990), 1–16.

[K] S. Kass, Karl Menger, *Notices of the A.M.S.* **43(5)** (1996), 558–561.

[MTV] J. Mateu, X. Tolsa and J. Verdera, The planar Cantor sets of zero analytic capacity and the local $T(b))$ theorem, *J. Amer. Math. Soc.* **16(1)** (2003), 19–28.

[Ma] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean space*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **44**, Cambridge Univ. Press, 1995.

[MMV] P. Mattila, M. Melnikov and J. Verdera, The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability, *Ann. of Math.* **144** (1996), 127–136.

[Me] M. Melnikov, Analytic capacity : discrete approach and curvature of measure, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* **186** (1995), 827–846.

[MV] M. Melnikov and J. Verdera, A geometric proof of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz graphs, *Internat. Math. Res. Notices* **7** (1995), 325–331.

[NTV] F. Nazarov, S. Treil and A. Volberg, *Tb* Theorems for non-homogeneous spaces, Preprint.

[P] H. Pajot, *Analytic capacity, Rectifiability, Menger curvature and the Cauchy Integral*, Lecture Notes in Math. 1799, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[T] X. Tolsa, Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity, *Acta Math.* **190(1)** (2003), 105–149.

[V0] J. Verdera, Conjunts evitables, conjunts invisibles i el viatjant de comerç, o com l'anàlisi real ajuda l'anàlisi complexa, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* **18(2)** (2003), 73–104.

[V1] J. Verdera, Removability, capacity and approximation, in : *Complex Potential Theory*, NATO ASI Series, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1994, pp. 419–473.

[V2] J. Verdera, A new elementary proof of L^2 estimates for the Cauchy Integral on Lipschitz graphs, Manuscript from a lecture given at the *Conference on Geometric and Algebraic Aspects in Several Complex Variables* (Cetraro, 1994), www.mat.uab.es/∼jvm.

[V3] J. Verdera, The L^2 boundedness of the Cauchy integral and Menger curvature, *Contemp. Math.* **277** (2001), 139–158.

[Vi] A. G. Vitushkin, The analytic capacity of sets in problems of approximation theory, *Uspekhi Mat. Nauk* **22** (1967), 141–199 (English trans.) ; *Math. Surveys Monographs* **22** (1967), 139–200 (in Russian).

[W1] `http ://www.claymath.org/aboutcmi/vision.htm`

[W2] `http ://www.claymath.org/prizeproblems/milliondollarminesweeper.htm`