Anàlisi Real i Funcional
Notes de classe

Joan Verdera

Prefaci

Del 2008 al 2011 em vaig encarregar de l'assignatura semestral optativa de quart curs del grau de matemàtiques de la UAB anomenada "Anàlisi real i funcional". El primer any disposàvem de tres hores de teoria i dues de problemes a la setmana. La primera part del curs es dedicava a la integral de Lebesgue i la segona a una introducció a l'anàlisi funcional, que incloïa la teoria espectral dels operadors compactes autoadjunts i aplicacions a Sturm-Liouville.

A partir del segon any la tempesta bolonyesa havia reduït les hores a dues de teoria i una de problemes per setmana, més un "seminari" mensual de dues hores.

El programa no havia canviat i, per tant, jo em vaig atribuir el paper d'aplicar les retallades pertinents. Les primeres víctimes van ser els espais L^p, $1 < p < \infty$, amb la desigualtat de Hölder inclosa. Després Egoroff i Lusin van caure, però vaig salvar Fubini i el canvi de variable. L'espai per l'anàlisi funcional s'anava reduint i, després de la teoria L^2 de les sèries de Fourier, el final de curs s'entreveia a l'horitzó. Els operadors compactes van ser foragitats i ens vàrem quedar només amb els operadors fitats entre espais de Banach i les seves relacions amb les equacions integrals de Fredholm i de Volterra. He de confessar que no vaig ser capaç de trobar un tema alhora complet i interessant que cabés en l'espai disponible. Estic segur que els meus successors sabran arreglar-ho.

Amb la inestimable col·laboració de la Rosa Rodríguez vaig polir les notes manuscrites que m'acompanyaven a classe i el resultat és el text que el lector té entre mans. Aquestes notes van ser útils als meus estudiants i espero que ho puguin ser a altres persones en el futur.

Agraeixo a l'Albert Clop i al Joan Orobitg l'ajuda per detectar errades tipogràfiques i distraccions en algunes demostracions. Si el lector detecta algún error agrairé rebre'n una notícia al meu correu.

Joan Verdera

Bellaterra, 29 de setembre de 2013

Part I

La mesura i la integral de Lebesgue

1. La integral de Riemann: repàs

Considerem una funció fitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida a l'interval $[a,b]$. Pensem, de moment, que pren valors no negatius ($f \geq 0$).

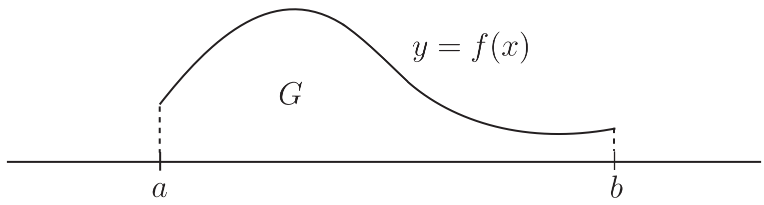


Figura 1

Voldríem definir la noció d'àrea de la regió G entre la gràfica de f i l'interval $[a,b]$, és a dir,

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ i } 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

Hi ha casos en que això és senzill de fer. Per exemple, si f és una funció constant, diguem $f(x) = c$, $a \leq x \leq b$, llavors G és un rectangle i la seva àrea és $c(b-a)$.

Si la funció f és esglaonada (pren un nombre finit de valors en subintervals de $[a,b]$)

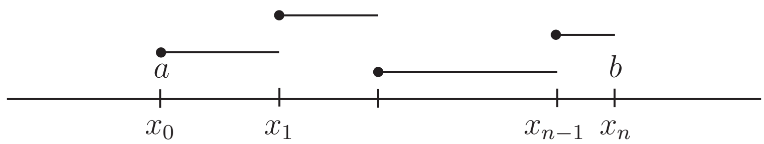


Figura 2

diguem, $f(x) = c_i$, $x_{i-1} \leq x < x_i$, on $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$, llavors la regió G és la unió dels rectangles de base $[x_{i-1}, x_i]$ i altura c_i i la seva àrea és

$$\sum_{i=0}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}).$$

Ara tornem al cas general de la figura 1. La idea és aproximar la regió G per unions finites de rectangles i definir l'àrea de G com el límit de les àrees d'aquestes regions aproximants. De fet el que farem és aproximar la funció f per funcions esglaonades, per les quals ja sabem definir l'àrea de G. Per implementar aquesta idea cal partir l'interval $[a, b]$ en un nombre finit de subintervals. La noció que formalitza això és la de partició.

Definició. Una partició de l'interval $[a, b]$ és un subconjunt finit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Associada a una partició tenim la noció de suma de Riemann.

Definició. Una suma de Riemann de la funció f relativa a una partició $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ és el número

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

on ξ_i és un punt qualsevol de l'interval $[x_{i-1}, x_i]$.

Notem que $S(f, P)$ depèn de l'elecció dels punts $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, però aquesta dependència no la farem explícita a la notació per no complicar-la.

Exemple. Suposem que $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $P = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$. Llavors $[x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $1 \leq i \leq n$, i podem escollir $\xi_i = \frac{i-1}{n}$. El resultat és

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}. \tag{1.1}$$

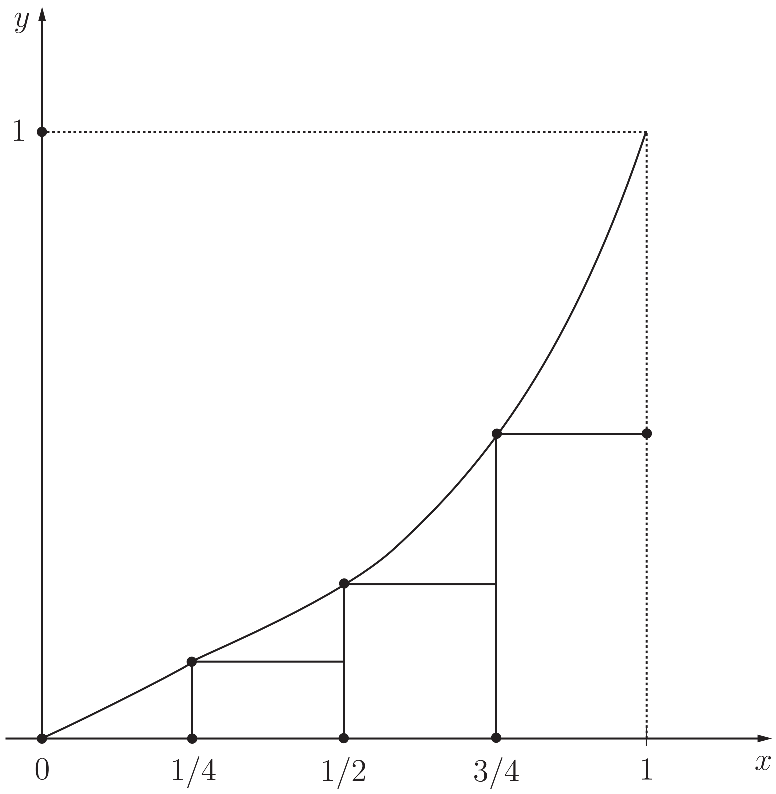


Figura 3

Per $n = 4$, com a la figura 3, obtenim

$$S(f, P) = 0,21875$$

que està lluny de $0,3333...$ Per $n = 10$ i 100 obtenim respectivament $0,285...$ i $0,32835...$ També puc escollir $\xi_i = \frac{i}{n}$ i llavors obtinc

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.2}$$

Per $n = 4$

$$S(f, P) = 0,46875$$

i per $n = 10$ i $n = 100$ obtenim $0,385...$ i $0,338...$ respectivament. Així que la convergència és lenta. Fent que $n \to \infty$ a (1.1) o (1.2) trobem que l'àrea de la regió entre la parabola $y = x^2$ i l'interval $[0, 1]$ hauria de ser $\frac{1}{3}$.

Podríem definir l'àrea de la regió G en el cas d'una funció general partint l'interval $[a, b]$ en n intervals iguals i prenent límit, quan $n \to \infty$, de les corresponents sumes de Riemann. Això és senzill, però poc elaborat, i no és el camí correcte. S'ha de fer una definició que tingui en compte totes les particions de $[a, b]$.

Definició. El diàmetre d'una partició $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ és $\delta(P) = \max\limits_{1 \le i \le n} x_i - x_{i-1}$, és a dir, la longitud de l'interval més gran de la partició.

Doncs, si $\delta(P)$ és molt petit, el nombre d'intervals de la partició és molt gran.

Definició. La integral de Riemann de f o àrea de la regió G és

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta(P) \to 0} S(f, P), \tag{1.3}$$

sempre que aquest límit existeixi.

El límit $\lim\limits_{\delta(P) \to 0} S(f, P)$ s'ha d'entendre així: diem que un número $L = \lim\limits_{\delta(P) \to 0} S(f, P)$ si per a qualsevol $\varepsilon > 0$ hi ha $\delta > 0$ tal que si P és una partició and diàmetre $\delta(P) < \delta$, llavors $|S(f, P) - L| < \varepsilon$.

Si el límit a (1.3) existeix es diu que f és integrable Riemann a $[a, b]$.

Fixem-nos que no és senzill demostrar que la funció $y = x^2$ és integrable Riemann a $[0, 1]$ i que $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$. De fet és un exercici molt instructiu sobre la noció de continuïtat uniforme demostrar el següent teorema:

Teorema. *Tota funció contínua a un interval tancat és integrable Riemann.*

Exemples

1. Una funció fitada que no és integrable Riemann. És la funció de Dirichlet (o "pop corn function", funció crispeta) a $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Donada una partició qualsevol de $[0,1]$, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ puc agafar $\xi_i \in \mathbb{Q}$, $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ i $t_i \notin \mathbb{Q}$, $x_{i-1} < t_i < x_i$. Llavors

$$S(f, P, \xi_i) = 1$$

i

$$S(f, P, t_i) = 0.$$

2. Agafem $a < \alpha < \beta < b$. Llavors la funció característica de l'interval (α, β) és integrable Riemann, malgrat que no és contínua a $[a, b]$, i

$$\int_a^b \chi_{(\alpha,\beta)}(x)\, dx = \beta - \alpha.$$

El teorema fonamental del càlcul diu com es calcula la integral de Riemann d'una funció contínua i estableix que "derivar i integrar són operacions inverses".

Teorema fonamental del càlcul. *Tota funció contínua f a $[a, b]$ té una primitiva F, és a dir, $F'(x) = f(x)$, $a \le x \le b$. Si F és una primitiva qualsevol de f, llavors*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Demostració. Posem $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, $a \le x \le b$. Per a calcular la derivada de F al punt x escrivim els quocients incrementals per $h > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f - f(x)] + f(x). \end{aligned}$$

Ara

$$\frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h} (f - f(x))\right| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f - f(x)| \le \omega(f, h)$$

on

$$\omega(f, h) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b],\ |x - y| \le h\}$$

és el "mòdul de continuïtat" de f a nivell h. La continuïtat uniforme de f és exactament que

$$\omega(f, h) \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad h \longrightarrow 0.$$

Doncs $F'(x) = f(x)$, $a \le x \le b$, i $\int_a^b f = F(b)$.

Si G és qualsevol altra primitiva de f,

$$G(x) = F(x) + c, \quad a \le x \le b,$$

per certa constant c. Doncs

$$G(b) - G(a) = F(b) = \int_a^b f. \qquad \square$$

El teorema fonamental del càlcul no resol completament el problema del càlcul d'integrals perquè hi ha funcions contínues que no tenen una primitiva que es pugui expressar en termes de funcions elementals. Per exemple, $f(x) = e^{x^2}$. Així que els mètodes del càlcul numèric són una eina bàsica en el càlcul d'integrals.

Molt sovint es presenta el problema de calcular el límit de les integrals d'una successió de funcions integrables. El següent resultat resol les situacions més senzilles.

Teorema. *Suposem que f_n és integrable Riemann a l'interval $[a,b]$ per $n = 1, 2, \ldots$ Si $f_n \to f$ uniformement a $[a,b]$, llavors*

$$\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f.$$

Demostració. Donem $\varepsilon > 0$. Llavors hi ha un índex n_0 tal que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0, \quad x \in [a,b].$$

Doncs

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \varepsilon(b-a). \qquad \square$$

El següent exemple demostra que es pot obtenir la conclusió $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ sense que hi hagi convergència uniforme de f_n cap a f.

Exemple. $f_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$. Llavors

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1, \end{cases} \qquad \int_0^1 f_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

i és un exercici convèncer-se que

$$\int_0^1 f = 0.$$

Els dos exemples de sota mostren un comportament "patològic" de la integral de Riemann respecte del límit.

Exemple 1. Sigui $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ la funció de Dirichlet. Sabem que f no és integrable Riemann. Numerem el conjunt $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \ldots\}$. Posem

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_1, q_2, \ldots, q_n\} \\ 0 & \text{si } x \notin \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}. \end{cases}$$

Llavors

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

però f no és integrable Riemann a $[0,1]$. La "patologia" aquí és que el límit puntual d'una successió creixent ($f_n \leq f_{n+1}$) de funcions integrables Riemann, uniformement acotades per 1, no sigui integrable Riemann. De fet, ja és un mal senyal que una funció que val 0 excepte en un conjunt numerable no sigui integrable Riemann. El resultat natural hauria de ser que una tal funció és integrable amb integral 0 (perquè l'àrea que hi ha per sota de la gràfica i l'eix de les x hauria de ser 0).

Exemple 2. Aquest exemple mostra que no sempre es podrà commutar el límit amb la integral.

Sigui

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \dfrac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Llavors f_n és integrable Riemann i

$$\int_0^1 f_n = 1.$$

És clar que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

El problema amb aquesta funció límit és que prèn el valor ∞ al punt 0 i, per tant, ni tan sols podem parlar de la seva integral. Però és clar que si la integral existís hauria de ser 0.

Les diverses mancances de la integral de Riemann que es poden detectar es poden resumir en una única dificultat monumental relacionada amb l'anàlisi funcional. La mencionem ara breument i en parlarem de nou més endavant. Quan hom treballa amb sèries de Fourier o amb equacions diferencials sorgeix la necessitat de considerar espais (vectorials) de funcions. Per exemple, l'espai de totes les funcions integrables Riemann a un interval $[a,b]$, que denotem per $R[a,b]$. Resulta que es pot definir una noció natural de "distància" entre dues funcions f i g de $R[a,b]$, posant

$$d(f,g) = \int_a^b |f-g|.$$

Per exemple, quan $g=0$, la distància entre f i 0 és $\int_a^b |f|$. Pensant en $f_n(x) = x^{n+1}$, $0 \leq x \leq 1$, veiem que

$$d(x^{n+1},0) = \frac{1}{n+1},$$

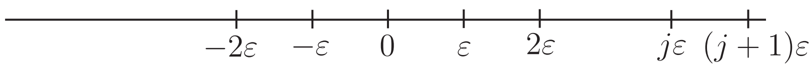
que ja respon a la intuició que la funció x^n s'acosta a la funció nul·la quan $n \to \infty$ i som a l'interval $[0,1]$. Aquesta "distància" defineix una noció de límit d'una successió de funcions $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a $R[a,b]$. Diem que $f_n \to f$ a $R[a,b]$ si $d(f_n,f) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ té límit a $R[a,b]$, llavors compleix la condició de Cauchy: donat $\varepsilon > 0$ hi ha n_0 tal que si $n,m \geq n_0$ tenim $d(f_n,f_m) < \varepsilon$. Això es degut a la desigualtat triangular

$$d(f_n,f_m) \leq d(f_n,f) + d(f,f_m).$$

Resulta que no és cert que tota successió de Cauchy sigui convergent. La conclusió és que $R[a,b]$ no és complet, tal com li passa a $\mathbb{Q}$. Aquesta és una limitació essencial de la integral de Riemann, que resoldrà la integral de Lebesgue.

2. Idea intuïtiva de la integral de Lebesgue

En comptes de partir el domini de la funció en trossets tal com ho fa Riemann, partirem la imatge. Considerem una funció qualsevol $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Fixem un $\varepsilon > 0$ que jugarà el paper de "pas". Divideixo $\mathbb{R}$ en intervals de longitud ε:



i defineixo

$$A_j = \{x \in [a,b] : j\varepsilon < f(x) \leq (j+1)\varepsilon\}.$$

Llavors els A_j són 2 a 2 disjunts i recobreixen $[a,b]$. O sigui que hem partit $[a,b]$ en trossos partint primer el conjunt imatge de f d'acord amb els intervals $(j\varepsilon,(j+1)\varepsilon]$, $j \in \mathbb{Z}$.

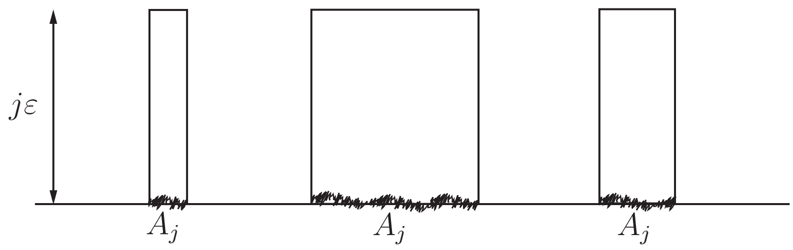
Sobre A_j $f(x)$ prèn valors entre $j\varepsilon$ i $(j+1)\varepsilon$, així que una "bona" aproximació de $f(x)$ a A_j és la funció constant $j\varepsilon$:

$$|f(x) - j\varepsilon| = f(x) - j\varepsilon \leq \varepsilon, \quad x \in A_j.$$

Posem

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} j\varepsilon\chi_{A_j}(x).$$

La funció f_ε és constant a A_j i val $j\varepsilon$:



Així que la integral de f_ε hauria de ser la "longitud" de la base A_j per l'altura $j\varepsilon$. El problema és que ara A_j no és un interval i, de fet, pot ser un conjunt tan complicat com vulguem. Per tant no disposem d'una noció de "longitud" de A_j. Oblidant de moment aquesta dificultat, denotem per

$m(A_j)$ la longitud (o mesura) de A_j. Així que la integral de f_ε a $[a, b]$ és

$$\int_a^b f_\varepsilon = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j\varepsilon\, m(A_j).$$

Llavors definiríem la integral de Lebesgue de f sobre $[a, b]$ com el límit de les integrals de f_ε sobre $[a, b]$, és a dir,

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=-\infty}^{\infty} j\varepsilon\, m(A_j).$$

Prescindint del problema de comprovar que el límit precedent en ε existeix, l'obstrucció més gran al plan esbossat és que no sabem què significa "longitud" d'un subconjunt de la recta. Si estiguéssim amb funcions de dues variables necessitaríem saber què significa "àrea" d'un subconjunt del pla. Amb funcions de 3 variables voldríem parlar de "volum" d'un subconjunt de $\mathbb{R}^3$ i amb funcions de n variables, de "volum" n-dimensional o mesura de Lebesgue d'un subconjunt de $\mathbb{R}^n$. Això és el que estudiarem en el capítol següent.

3. La mesura exterior

Volem definir la mesura n-dimensional d'un subconjunt de $\mathbb{R}^n$. Per $n = 1$ això correspon a la longitud d'un subconjunt de la recta, per $n = 2$ a l'àrea d'un subconjunt del pla i per $n = 3$ al volum d'un subconjunt de l'espai. La definició que busquem ha d'estar d'acord amb una sèrie d'intuïcions bàsiques la més important de les quals és que la mesura ha de ser additiva:

$$m(E \cup F) = m(E) \cup m(F) \quad \text{per } E \text{ i } F \text{ disjunts.}$$

Com veurem, l'additivitat és el nucli de la qüestió i no és fàcil treure'n l'entrellat.

Es comença per la noció de mesura exterior.

Recordem que els intervals a la recta són tancats

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

oberts

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

o semi-oberts (semi-tancats)

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Un rectangle I a $\mathbb{R}^n$ és un producte de n intervals, un per cada eix,

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

i, com a la recta, poden ser tancats, oberts o semi-oberts.

Definim el volum (n-dimensional) del rectangle I com

$$v(I) = \prod_{j=1}^{n} b_j - a_j,$$

sigui I obert, tancat o semi-obert. Això concorda amb la idea intuïtiva que un punt a la recta té longitud 0, un segment al pla té àrea zero o la cara d'un paral·lelepípede a l'espai té volum zero.

La mesura exterior de Lebesgue d'un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ és

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j) : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j,\ I_j \text{ rectangle} \right\}$$

on l'ínfim es pren sobre tots els recobriments de A, finits o numerables, per rectangles I_j.

Exemples

1. $m^*\{a\} = 0$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Recobrim per un sol rectangle de costats arbitràriament petits. Per exemple $[a, a+\varepsilon) \times \overset{n)}{\cdots} \times [a, a+\varepsilon)$. Obtenim $m^*\{a\} \leq \varepsilon^n$, $\varepsilon > 0$.

2. Sigui S un segment a $\mathbb{R}^n$ amb $n > 1$. Llavors $m^*(S) = 0$. Si, per exemple, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ y = 0\}$, llavors $(0,1) \times [0, \varepsilon)$ recobreix S. Doncs $m^*(S) \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

3. El quadrat a $\mathbb{R}^3$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ z = 0\}$$

té volum zero.

4. El conjunt ternari de Cantor. Recordem-ne la definició. Es comença amb l'interval $[0, 1]$ i es divideix en tres intervals iguals. Anomenem $I_1^{(1)}$ i $I_2^{(1)}$ els dos intervals que no són el central.

Ara repeteixo l'operació a cada un dels intervals $I_1^{(1)}$ i $I_2^{(1)}$: els divideixo en 3 intervals iguals i em quedo amb els que no són l'interval central. Obtinc 4 intervals de segona generació $I_j^{(2)}$, $1 \leq j \leq 4$, de longitud 3^{-2}. Repetint el procés n vegades obtinc 2^n intervals de longitud 3^{-n}, $I_j^{(n)}$, $1 \leq j \leq 2^n$. El conjunt de Cantor és $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^n} I_j^{(n)}$ i $\bigcup_{j=1}^{2^n} I_j^{(n)}$ representa una "aproximació d'ordre n" de E. Un moment de reflexió porta a $m^*(E) \leq (\frac{2}{3})^n$, $n \geq 0$. Doncs $m^*(E) = 0$.

Lema. *La mesura exterior de Lebesgue es pot definir mitjançant recobriments per rectangles oberts. És a dir*

$$m^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j) : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j,\ I_j \textit{ rectangle obert} \right\}. \tag{3.1}$$

Demostració. És un exercici que anticipa el fet que la teoria elemental de la mesura consisteix bàsicament en una combinació de teoria de conjunts i càlcul amb sèries.

Anomenem m l'ínfim del membre dret a (3.1). És obvi que $m^*(A) \leq m$. Per demostrar que $m \leq m^*(A)$ hem de considerar un recobriment de A per rectangles I_j qualssevol i aconseguir-ne un altre per rectangles *oberts* de volum arbitràriament proper. Fixem-nos que si canviem I_j per l'interior $\mathring{I}_j$ de I_j potser ja no recobrim A. El problema s'arregla "inflant" $\mathring{I}_j$.

Per formalitzar la noció d'inflar un rectangle $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ convé posar $(a_j, b_j) = (c_j - \frac{\ell_j}{2}, c_j + \frac{\ell_j}{2})$ on $c_j = \frac{a_j + b_j}{2}$ és el centre de (a_j, b_j) i $\ell_j = b_j - a_j$ la longitud de (a_j, b_j). Donat $\lambda > 0$ posem

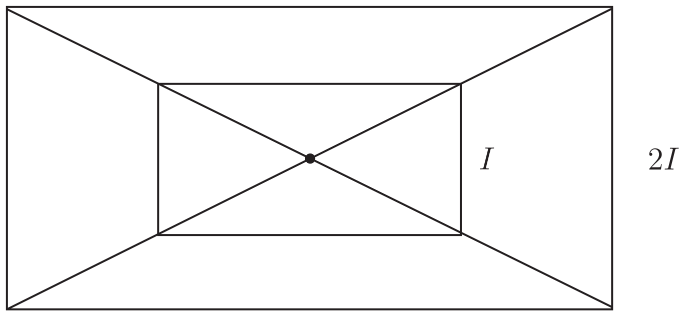
$$\lambda\,(a_j, b_j) = \left(c_j - \lambda\frac{\ell_j}{2}, c_j + \lambda\frac{\ell_j}{2}\right),$$

que és l'interval concèntric amb (a_j, b_j) que té longitud λ vegades la longitud de (a_j, b_j). Definim

$$\lambda I = \prod_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b_j),$$

que és un rectangle que té el mateix centre que I i volum

$$v(\lambda I) = \lambda^n v(I).$$



$$v(2I) = 4v(I).$$

Tornem ara a la demostració del lema. Si $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ i $\lambda > 1$, llavors $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \lambda \mathring{I}_j$ i doncs $m \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n v(I_j)$. Agafant l'ínfim sobre els recobriments de A per rectangles arbitraris obtenim $m \leq \lambda^n m^*(A)$. Fent $\lambda \searrow 1$, $m \leq m^*(A)$. $\square$

Convé saber calcular la mesura exterior de Lebesgue de conjunts senzills.

Lema. *Si I és un rectangle de $\mathbb{R}^n$, $m^*(I) = v(I)$.*

Demostració. Clarament $m^*(I) \leq v(I)$, així que només cal demostrar la desigualtat contrària. Ara $v(I) \leq m^*(I)$ significa exactament que si $I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ llavors

$$v(I) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j). \tag{3.2}$$

Fixem-nos que si acceptem que el "volum" $v(I)$ es comporta com esperem, llavors la desigualtat precedent és intuïtivament òbvia. Però, naturalment, es tracta de comprovar que efectivament és així. Veureu que l'argument no és immediat.

Observem primer ens podem reduir al cas en que I és tancat. Clarament $m^*(\lambda A) = \lambda^n m^*(A)$ per $\lambda > 0$ i A qualsevol. Llavors de $(1-\epsilon)\overline{I} \subset \overset{\circ}{I}$ deduïm que $(1-\epsilon)^n m^*(\overline{I}) \leq m^*(\overset{\circ}{I})$ i fent $\epsilon \to 0$ concloem que $m^*(\overset{\circ}{I}) = m^*(I) = m^*(\overline{I})$.

Suposem doncs que I és un rectangle tancat. Pel lema només cal demostrar (3.2) per un recobriment de I per rectangles oberts I_j. Com que I és compacte un nombre finit de rectangles I_j ja recobreixen I :

$$I \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_j.$$

Ja que les adherències dels I_j també recobreixen I hem reduït el problema al cas en què I és un rectangle tancat, recobert per un nombre finit de rectangles I_j, que puc suposar tancats. Volem veure que

$$v(I) \leq \sum_{j=1}^{N} v(I_j). \tag{3.3}$$

Exercici. Escriviu una demostració formal de (3.3) en el cas $n = 1$.

Demostrem ara (3.3) per $n = 2$ (el cas $n \geq 3$ es fa igual). Com que $I = \bigcup_{j=1}^{N} I \cap I_j$ puc suposar també que $I = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$. La situació, per exemple, pot ser la següent

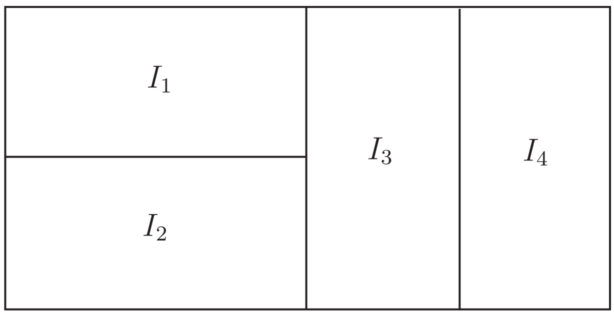


Figura 8

A la figura 8 els I_j tenen interiors 2 a 2 disjunts però res no exclou que els interiors dels I_j s'intersectin (veure la figura 10 més endavant). Considero tots els vèrtexs dels I_j i els projecto sobre els eixos coordenats. Si $I = J_1 \times J_2$ obtinc particions P_1 de J_1 i P_2 de J_2. Ara multiplico cada interval de la partició P_1 per cada interval de la partició P_2 i anomeno R_k els rectangles obtinguts. Els rectangles R_k recobreixen I.

Un càlcul senzill dóna que, si $I = \bigcup_{k=1}^{M} R_k$ i els R_k surten de multiplicar dos a dos els intervals d'una partició de J_1 pels d'una partició de J_2, llavors $v(I) = \sum_{k=1}^{M} v(R_k)$. Observem ara que cada I_j és unió d'uns quants R_k, que venen de multiplicar els intervals de dues particions de les projeccions de I_j sobre els eixos (veieu la figura 9). Doncs, si els intervals I_j són disjunts, $v(I) = \sum_{k=1}^{M} v(R_k) = \sum_{j=1}^{N} v(I_j)$.

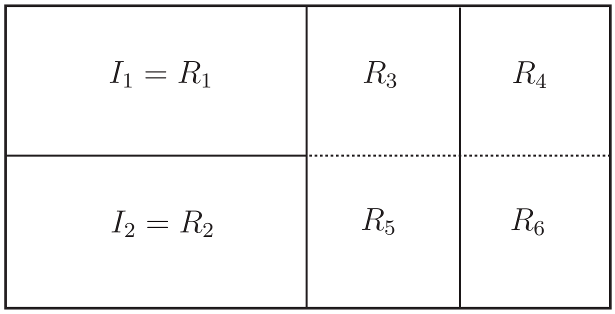


Figura 9

En el cas que els I_j no fossin disjunts hi hauria "repeticions" i obtindríem la desigualtat $v(I) = \sum_{k=1}^{M} v(R_k) \leq \sum_{j=1}^{N} v(I_j)$. És el cas de la figura 10,

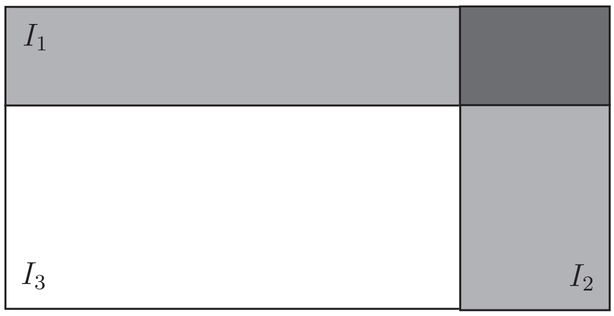


Figura 10

en la qual els rectangles I_1 i I_2 s'intersecten en el rectangle de dalt a la dreta. $\square$

La mesura exterior té dues propietats bàsiques:

(1) m^* és creixent: $m^*(A) \leq m^*(B)$ si $A \subset B$.

(2) m^* és numerablement subadditiva

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j).$$

Demostració de (2). Donat $\varepsilon > 0$ recobrim A_j per rectangles $\{I_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ de manera que $\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k^j) < m^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$. Llavors $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^j$ i per tant

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k^j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \varepsilon.$$

$\square$

Noteu que (2) dóna que si A és finit o numerable, llavors $m^*(A) = 0$.

3.1 Conjunts mesurables

Resulta que m^* no és additiva, és a dir, no és cert que $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ si A i B són disjunts. No és fàcil trobar l'exemple i el postposem.

El fet que m^* no sigui additiva és un seriós contratemps perquè no podem definir la mesura de Lebesgue d'un conjunt A de $\mathbb{R}^n$ com $m^*(A)$ perquè perdríem la propietat més òbvia de la longitud, l'àrea o el volum, que és l'additivitat. Hi ha un remei que passa per la noció de conjunt mesurable. Sigui E un subconjunt de $\mathbb{R}^n$. Llavors si A és qualsevol altre subconjunt de $\mathbb{R}^n$ tenim que

$$m^*(A) = m^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

per la subadditivitat de m^*.

Com hem dit, la igualtat pot no ser certa.

Definició. Diem que $E \subset \mathbb{R}^n$ és mesurable si per tot $A \subset \mathbb{R}^n$ es compleix que

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A) \tag{3.4}$$

o, equivalentment,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

En altres paraules E no pot trencar cap altre conjunt A en dos trossos de tal manera que es perdi l'additivitat.

Exemples

1. $\mathbb{R}^n$ és mesurable. Això és conseqüència immediata del fet que la mesura exterior del conjunt buit és zero. En efecte, si $A \subset \mathbb{R}^n$

$$m^*(A \cap \mathbb{R}^n) + m^*(A \cap \emptyset) = m^*(A).$$

2. El conjunt buit és mesurable. De fet, és obvi que un conjunt i el seu complementari són simultàniament mesurables o no mesurables, perquè la definició de mesurabilitat és simètrica.

3. Si $m^*(E) = 0$, llavors E és mesurable: si $A \subset \mathbb{R}^n$, llavors

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A).$$

Anomenem $\mathcal{M}$ el conjunt de tots els subconjunts mesurables de $\mathbb{R}^n$. Resulta que $\mathcal{M}$ és estable per pas al complementari, per unions i interseccions finites i per l'operació de prendre diferències de conjunts.

Només cal argumentar l'enunciat relatiu a les unions finites perquè la resta segueix immediatament. Per inducció, és suficient demostrar que la unió de dos conjunts mesurables és mesurable. Així doncs, siguin E i F dos conjunts mesurables i comprovem que $E \cup F$ ho és. Si $A \subset \mathbb{R}^n$, llavors

$$\begin{aligned}
&m^*(A \cap (E \cup F)) + m^*(A \cap (E \cup F)^c) \\
&= m^*((A \cap E) \cup (A \cap F)) + m^*(A \cap E^c \cap F^c) \\
&= m^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c \cap F)) + m^*(A \cap E^c \cap F^c) \\
&\leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c \cap F) + m^*(A \cap E^c \cap F^c) \\
&\leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \qquad F \text{ mesurable i } A \cap E^c \text{ conjunt “test”} \\
&\leq m^*(A) \qquad E \text{ mesurable.}
\end{aligned}$$

Volem ara estudiar les propietats d'additivitat de m^*.

Additivitat finita de m^*. *Si $E_1, \dots, E_N$ són conjunts mesurables dos a dos disjunts ($E_j \cap E_k = \emptyset$ si $j \neq k$), llavors per qualsevol $A \subset \mathbb{R}^n$*

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{N} m^*(A \cap E_j).$$

En particular ($A = \mathbb{R}^n$),

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right) = \sum_{j=1}^{N} m^*(E_j).$$

Demostració. Ja que E_N és mesurable

$$\begin{aligned} & m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)\right) \\ &= m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right) \cap E_N\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right) \cap E_N^c\right) \\ &= m^*(A \cap E_N) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{N-1} E_j\right)\right) \end{aligned}$$

i ara seguim per inducció.

σ-additivitat de m^* (o additivitat numerable).

(1) Si E_j és mesurable per $j \geq 1$, llavors $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ és mesurable.

(2) Si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ és una successió de conjunts mesurables dos a dos disjunts, llavors

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E_j).$$

Demostració de (1). Primer fem una reducció al cas en què els E_j són 2 a 2 disjunts. Posem

$$F_1 = E_1, \quad F_2 = E_2 \setminus E_1, \quad F_3 = E_3 \setminus (E_1 \cup E_2), \dots, F_j = E_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} E_k$$

i notem que els F_j són mesurables dos a dos disjunts i $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$.

Ara ja podem suposar que els E_j són dos a dos disjunts.

Si $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
&m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c\right) \\
&= m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap E_j\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c\right) \\
&\le \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A \cap E_j) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c\right).
\end{aligned}$$

Ara considero una suma finita al primer terme de dalt

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} m^*(A \cap E_j) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c\right) \\
&\le \sum_{j=1}^{N} m^*(A \cap E_j) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)^c\right) \\
&= m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)^c\right) \\
&\le m^*(A) \quad \text{perquè } \bigcup_{j=1}^{N} E_j \text{ és mesurable.}
\end{aligned}$$

Fent $N \to \infty$ es completa la demostració. $\square$

Demostració de (2). Hem demostrat que

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A \cap E_j) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c\right) \le m^*(A).$$

Posant $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, obtenim (2). $\square$

Definició. La mesura de Lebesgue és $m = m^*$ sobre la classe $\mathcal{M}$ dels conjunts mesurables.

Ja sabem que m és additiva, de fet, σ-additiva. Ara convé emfasitzar algunes propietats elementals de $\mathcal{M}$.

Definició. Un subconjunt $\mathcal{A}$ del conjunt $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ de parts de $\mathbb{R}^n$ és una σ-àlgebra si conté el conjunt $\emptyset$ i és invariant per pas al complementari i per unions numerables. Formalment,

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(2) Si $E \in \mathcal{A}$, llavors $E^c \in \mathcal{A}$.

(3) Si $E_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, llavors $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$.

Per exemple, $\mathcal{M}$ és una σ-àlgebra.

Una mesura m sobre una σ-àlgebra $\mathcal{A}$ és una aplicació $m\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que $m(\phi) = 0$ i m és σ-additiva. La mesura de Lebesgue és una mesura sobre $\mathcal{M}$.

Estem ara preparats per demostrar l'existència d'un conjunt no mesurable. Noteu que l'argument utilitza l'axioma de l'elecció. De fet es pot demostrar que l'axioma de l'elecció és equivalent a l'existència d'un conjunt no mesurable.

Teorema. *Existeix un conjunt no mesurable.*

Demostració. Definim a $[0,1]$ la relació d'equivalència $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Q$. Llavors la classe d'un $x \in [0,1]$ és

$$[x] = \{y \in [0,1] : y - x \in Q\} = (x + Q) \cap [0,1].$$

Per l'axioma de l'elecció hi ha un conjunt E format agafant un element de cada classe. Veiem que E no és mesurable. Donat $x \in [0,1]$ hi ha $e \in E \cap [x]$. Doncs $x - e = q \in Q$ i $x \in q + E$ amb $q \in Q$, $-1 \leq q \leq 1$. Per tant, $[0,1] \subset \bigcup\limits_{q \in [-1,1] \cap Q} q + E \subset [-1, 2]$.

Suposem que $m^*(E) = 0$. Llavors, clarament, $m^*(q+E) = 0, \forall\, q$. Doncs $m^*[0,1] = 0$, que no és cert. Doncs $m^*(E) > 0$. Ara notem que si $q_1 \neq q_2$, llavors $(q_1 + E) \cap (q_2 + E) = \emptyset$. Si no, hi ha $x = q_1 + e_1 = q_2 + e_2$ amb e_1 i e_2 de E. Com que $e_1 - e_2 = q_2 - q_1 \in Q$, e_1 i e_2 són a la mateixa classe i això significa que $e_1 = e_2$, per com hem definit E. Doncs $q_1 = q_2$. Si E fos mesurable trobaríem la contradicció

$$\begin{aligned} 3 = m^*([-1,2]) &\geq m^*\left(\bigcup_{q \in [-1,1] \cap Q} q + E\right) \\ &= \sum_{q \in [-1,1] \cap Q} m^*(q + E) = \sum_{q \in [-1,1] \cap Q} m^*(E) = \infty. \end{aligned}$$ □

Ara volem entendre a fons com són els conjunts mesurables. Veurem que un conjunt mesurable es pot expressar de forma molt transparent en termes de conjunts oberts o compactes. Primer necessitem comprovar que un rectangle és mesurable.

Proposició. *Un rectangle és mesurable.*

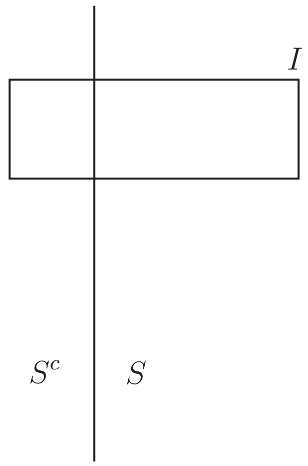
Demostració. Un semi-espai és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ del tipus $\{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq a\}$ o $\{x \in \mathbb{R}^n : x_j \leq a\}$. Llavors un rectangle és una intersecció de 2^n semi-espais. Per exemple, a la recta $[a,b] = [a, +\infty) \cap (-\infty, b]$ i al pla

$$\begin{aligned} [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq b_2\} &\cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq a_2\} \\ &\cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq b_1\} \\ &\cap \{(x,y) : x \geq a_1\}. \end{aligned}$$

Així que només cal veure que un semi-espai és mesurable.

Sigui S un semi-espai i I un rectangle. Clarament $I \cap S$ i $I \cap S^c$ són rectangles i

$$v(I) = v(I \cap S) + v(I \cap S^c)$$



Agafem $A \subset \mathbb{R}^n$ i un recobriment de A per rectangles $I_j : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Llavors

$$\begin{aligned} m^*(A \cap S) + m^*(A \cap S^c) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I_j \cap S) + \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I_j \cap S^c) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j \cap S) + v(I_j \cap S^c) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j). \end{aligned}$$

Per tant, prenent l'ínfim sobre tots els recobriments de A,

$$m^*(A \cap S) + m^*(A \cap S^c) \leq m^*(A).$$ □

Proposició. *Els conjunts oberts i els conjunts tancats són mesurables.*

Demostració. Només cal considerar el cas dels oberts. A $n = 1$ el resultat és obvi perquè tot obert és una unió finita o numerable d'intervals oberts.

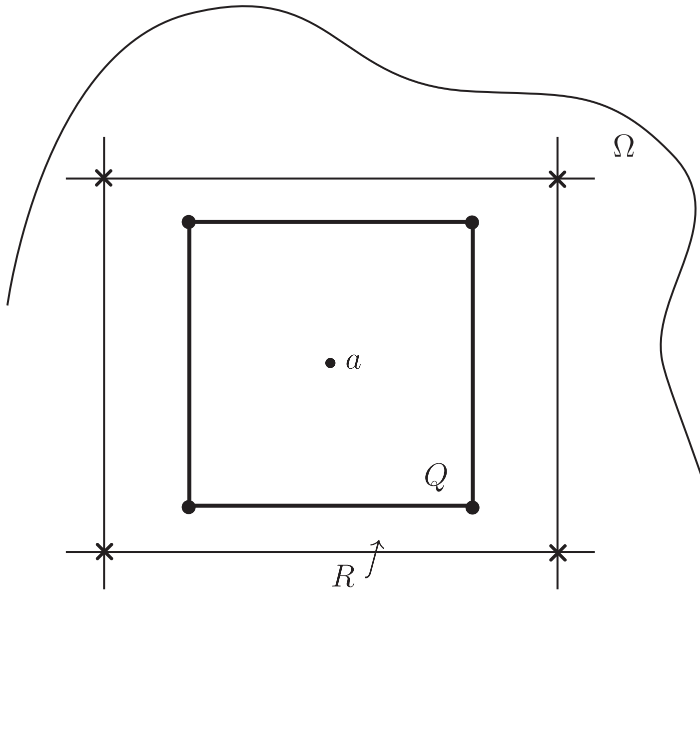
A $\mathbb{R}^n$ amb $n \geq 2$ l'argument és una mica més complicat. Denotem per $\mathcal{R}^n$ el conjunt de tots els rectangles de $\mathbb{R}^n$ que tenen tots els vèrtexs amb totes les coordenades racionals. Clarament $\mathcal{R}^n$ és numerable perquè hi ha una aplicació injectiva

$$\mathcal{R}^n \longrightarrow (\mathbb{Q}^n)^{2^n}$$

que envia cada rectangle de $\mathcal{R}^n$ a les coordenades dels seus 2^n vèrtexs. Ara sigui Ω un obert de $\mathbb{R}^n$. Si veiem que

$$\Omega = \bigcup_{R \in \mathcal{R}^n,\, R \subset \Omega} R \tag{3.5}$$

haurem expressat Ω com una unió numerable de rectangles i la demostració s'haurà acabat.



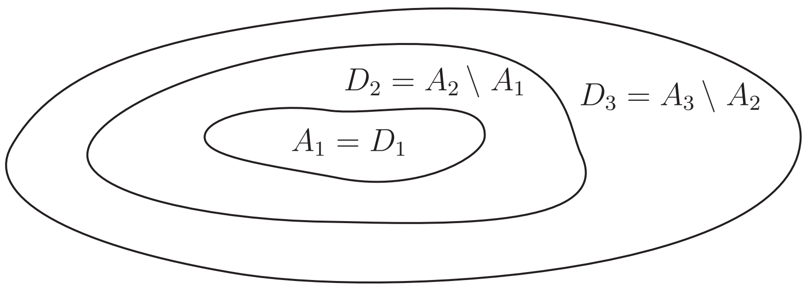
Donat un punt a de Ω hi ha un quadrat Q centrat al punt a i contingut a Ω. En la figura es suggereix com "perturbar" els vèrtexs de Q per tal de construir un rectangle R amb vèrtexs de coordenades racionals tals que $Q \subset R \subset \Omega$. □

Ara farem dos lemes, molt importants pels teoremes de convergència posteriors, que ens permetran "aproximar" un conjunt mesurable arbitrari per oberts o tancats.

Lema 1. *Si A_j és una successió creixent ($A_j \subset A_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$) de conjunts mesurables, llavors*

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(A_j).$$

Demostració.



Posem $D_j = A_j \setminus A_{j-1}$, $j = 2, 3, \ldots$ i $D_1 = A_1$. Llavors els D_j són 2 a

2 disjunts i $\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Per la σ-additivitat de m,

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} m(D_j) \\ &= m(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} m(A_j) - m(A_{j-1}) \\ &= \lim_{N\to\infty} m(A_N). \end{aligned}$$ □

Lema 2. *Si A_j és una successió decreixent ($A_j \supset A_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$) de conjunts mesurables i $m(A_1) < \infty$, llavors*

$$\lim_{j\to\infty} m(A_j) = m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

Abans o després de fer la demostració convé fer l'exercici de trobar un exemple de successió decreixent de conjunts mesurables amb $m(A_1) = \infty$ per la qual no valgui la conclusió del Lema 2.

Demostració. Com que els A_j decreixen cap a $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, els complementaris (a A_1) $A_1 \setminus A_j$ creixen cap a $A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$.

Pel Lema 1,

$$\begin{aligned} m(A_1) - \lim_{j\to\infty} m(A_j) = \lim_{j\to\infty} m(A_1 \setminus A_j) &= m\left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &= m(A_1) - m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right). \end{aligned}$$ □

Ara ja podem relacionar conjunts mesurables i oberts.

Teorema. *Si E és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$, són equivalents*

(1) E és mesurable.

(2) Donat $\varepsilon > 0$, hi ha un obert $G_\varepsilon \supset E$ tal que $m^*(G_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$.

(3) Donat $\varepsilon > 0$, hi ha un tancat $F_\varepsilon \subset E$ tal que $m^*(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

(4) Donat $\varepsilon > 0$, hi ha un obert G_ε i un tancat F_ε tals que $F_\varepsilon \subset E \subset G_\varepsilon$ i $m^*(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Demostració. (1) $\Rightarrow$ (2) Suposem primer que $m^*(E) < \infty$. Donat $\varepsilon > 0$ hi ha un recobriment de E per rectangles oberts I_j tal que

$$m^*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j) < m^*(E) + \varepsilon.$$

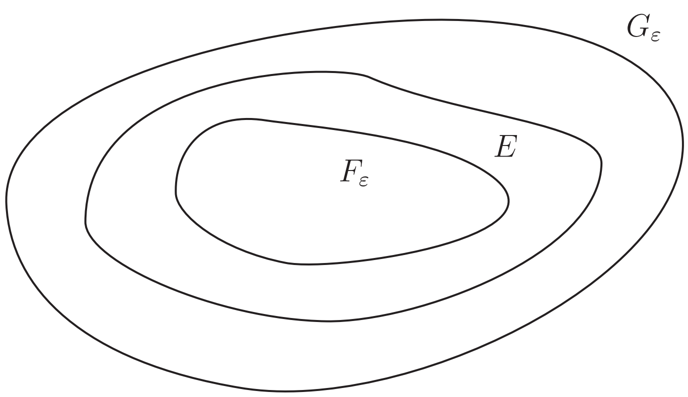
Posem $G_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset E$. Tenim

$$m^*(G_\varepsilon \setminus E) = m^*(G_\varepsilon) - m^*(E) \qquad \text{perquè } E \text{ és mesurable}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j) - m^*(E) < \varepsilon.$$

Si $m^*(E) = \infty$, utilitzem un truc habitual: intersequem E amb un quadrat tancat centrat a l'origen de costat $2N$ i obtenim un conjunt mesurable fitat $E_N = E \cap [-N, N]^n$. Doncs, $m^*(E_N) < \infty$ i podem trobar un obert $G_N \supset E_N$ tal que $m^*(G_N \setminus E_N) < \frac{\varepsilon}{2^N}$, $N = 1, 2, \ldots$. Posem $G_\varepsilon = \bigcup_{N=1}^{\infty} G_N \supset \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N = E$, de manera que G_ε és obert i

$$m^*(G_\varepsilon \setminus E) \leq \sum_{N=1}^{\infty} m^*(G_N \setminus E_N) < \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^N} = \varepsilon.$$



(2) $\Rightarrow$ (1) Per $n = 1, 2, \ldots$ hi ha un obert $G_n \supset E$ amb $m^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$. Llavors

$$m^*\left(\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m\right) \setminus E\right) = m^*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} (G_m \setminus E)\right) \leq \frac{1}{n},$$

per $n = 1, 2, \ldots$.

Així que $m^*\left(\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m\right) \setminus E\right) = 0$ i

$$E = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \setminus \left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \setminus E\right)$$

és mesurable perquè és una diferència entre una intersecció numerable d'oberts i un conjunt de mesura exterior nul·la.

(1) ⇒ (3) Apliquem (1) ⇒ (2) a E^c: hi ha un obert $G_\varepsilon \supset E^c$ amb $m^*(G_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$. Posem $F_\varepsilon = G_\varepsilon^c$. Llavors F_ε és un tancat contingut a E. Ara $E \setminus F_\varepsilon = G_\varepsilon \setminus E^c$ i doncs $m^*(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

(3) ⇒ (1) Per cada $n = 1, 2, \dots$ hi ha un tancat $F_n \subset E$ amb $m^*(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. Llavors

$$m^*\left(E \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right)\right) = m^*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E \setminus F_m\right) \le \frac{1}{n},$$

$n = 1, 2, \dots$. Per tant

$$E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cup \left(E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)\right)$$

és mesurable perquè eś unió d'una unió numerable de tancats i d'un conjunt de mesura exterior nul·la.

(1) ⇒ (4) És clar, perquè (1) ⇒ (2) i (1) ⇒ (3).

(4) ⇒ (1) Per cada $n = 1, 2, \dots$ hi ha un tancat $F_n \subset E$ i un obert $G_n \supset E$ amb $m^*(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. Llavors

$$m^*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right)\right) = m^*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m \setminus F_m\right) \le \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

i, per tant,

$$m^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)\right) = 0.$$

Ara

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)$$

i $E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ té mesura nul·la perquè és part de $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)$. Doncs E és mesurable (perquè és la unió d'un conjunt de mesura nul·la i d'un conjunt que és una unió numerable de tancats). □

Corol·lari.

(i) Per a qualsevol E

$$m^*(E) = \inf\{m(G) : G \text{ obert} \supset E\}.$$

(ii) Si E és mesurable

$$m(E) = \sup\{m(K) : K \text{ compacte} \subset E\}.$$

Demostració. (i) Exercici.

(ii) La desigualtat $\geq$ és òbvia. Sigui $\lambda < m(E)$. Donat $\varepsilon > 0$ agafem F_ε tancat, $F_\varepsilon \subset E$, tal que $m(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Llavors $\lambda < m(E) \leq m(F_\varepsilon) + \varepsilon$. Doncs $\lambda - \varepsilon < m(F_\varepsilon)$.

Sigui Q_N el quadrat tancat centrat a l'origen de costat $2N$. Ara, $m(F_\varepsilon \cap Q_N) \nearrow m(F_\varepsilon)$ si $N \to \infty$. Doncs, per cert N prou gran, $\lambda - \varepsilon < m(F_\varepsilon \cap Q_N)$. Posem $K = F_\varepsilon \cap Q_N$, que és un compacte. Llavors

$$\lambda - \varepsilon < m(K) \leq \sup\{m(K) : K \text{ compacte} \subset E\}.$$

Fent $\varepsilon \to 0$ i $\lambda \to m(E)$ obtenim la desigualtat que busquem. $\square$

Teorema d'estructura dels conjunts mesurables. *Un conjunt* $E \subset \mathbb{R}^n$ *és mesurable si i només si hi ha un conjunt* N *amb* $m^*(N) = 0$ *i una successió creixent de compactes* K_n *tals que*

$$E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \cup N.$$

Demostració. La condició suficient és clara.

Per la condició necessària, agafem, per cada $j = 1, 2, \ldots$ un tancat $F_j \subset E$ amb $m(E \setminus F_j) < \frac{1}{j}$. Sigui $N = E \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right)$, de manera que

$$m(N) \leq m(E \setminus F_j) < \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Doncs $m(N) = 0$. Posem

$$K_{j,m} = F_j \cap Q_m,$$

on Q_m és el quadrat tancat centrat a l'origen de costat $2m$. Per tant, $E = \left(\bigcup_{p=1}^{\infty} H_p\right) \cup N$ on H_p són els compactes $K_{j,m}$ renumerats. Posant $K_n = \bigcup_{p=1}^{n} H_p$ s'acaba la demostració. $\square$

3.2 Els conjunts borelians

En aquesta secció definirem els conjunts borelians (pel matemàtic francès Émile Borel). Hem trobat, fins ara, una σ-àlgebra notable, la dels conjunts mesurables. N'hi ha dues més senzilles: la formada per tots els subconjunts de $\mathbb{R}^n$, que es denota per $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (conjunt de les parts de $\mathbb{R}^n$) i la formada només pel conjunt buit i el seu complementari $\mathbb{R}^n$.

Una observació trivial és que si hom considera la intersecció d'una família arbitrària de σ-àlgebres, és a dir, els subconjunts de $\mathbb{R}^n$ que pertanyen a cada una de les σ-àlgebres de la família, llavors s'obté una σ-àlgebra. Això és obvi a partir de la definició de σ-àlgebra.

Considerem totes les σ-àlgebres que contenen els oberts (per exemple, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ o la σ-àlgebra $\mathcal{M}$ dels conjunts mesurables) i les intersequem. El resultat és una σ-àlgebra que conté els oberts i que és la més petita amb aquesta propietat. Els seus elements s'anomenen conjunts borelians. En resum, la σ-àlgebra dels borelians és

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \cap\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ és una } \sigma\text{-àlgebra que conté els oberts}\}.$$

Exemples de borelians són les interseccions numerables d'oberts, anomenats conjunts G_δ, o les unions numerables de tancats, anomenats F_σ. Per exemple, l'interval $(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a, b+\frac{1}{n})$ és un conjunt borelià G_δ que no és obert ni tancat. Fixem-nos que $(a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n}, b]$ també és un F_σ.

Altres borelians són conjunts del tipus $\bigcup_k \left(\bigcap_j \Omega_{jk}\right)$ on Ω_{jk} és obert per cada j i k.

Exercici. Hi ha unions numerables de G_δ que no són G_δ.

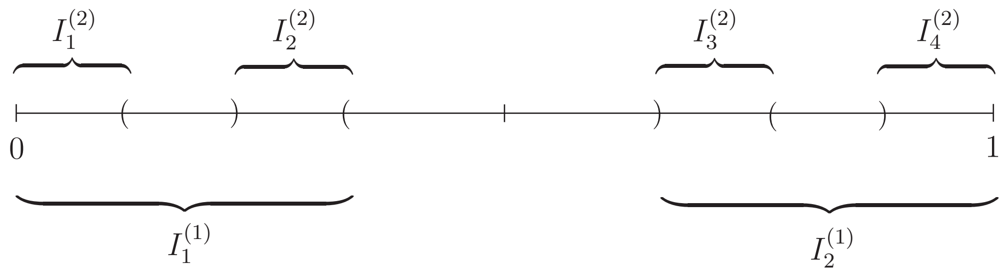
El teorema d'estructura dels conjunts mesurables implica que un conjunt $E \subset \mathbb{R}^n$ és mesurable $\Leftrightarrow E = B \cup N$ on B és un borelià i $m^*(N) = 0$. Hi ha exemples de conjunts amb $m^*(N) = 0$ (que són, per tant, mesurables) que no són borelians. Així que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{M}.$$

Problemes

1. Si $x \in \mathbb{R}$, demostreu que la recta $\mathbb{R}\times\{x\}$ té mesura nul·la en $\mathbb{R}^2$. Si $x \in \mathbb{R}$, demostreu que l'hiperplà $\mathbb{R}^{n-1}\times\{x\}$ té mesura nul·la en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ i, en general, proveu que tota varietat lineal $\mathbb{R}^k \times \{(x_{k+1}, \dots, x_n)\}$ $(k < n)$ té mesura nul·la en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.

2. Conjunts de Cantor. De l'interval $[0,1]$ treiem l'interval central de longitud ℓ_1, $0 < \ell_1 < 1$. Siguin $I_1^{(1)}$ i $I_2^{(1)}$ els dos intervals que queden.



Etapa 2: Treiem de cada $I_j^{(1)}$, $j = 1,2$, l'interval central de longitud ℓ_2, $0 < \ell_2 < \ell(I_j^{(1)})$. Queden $4 = 2^2$ intervals de la mateixa longitud.

Etapa n: Treiem de cada $I_j^{(n-1)}$, $1 \leq j \leq 2^{n-1}$ l'interval central de longitud ℓ_n, $0 < \ell_n < \ell(I_j^{(n-1)})$. Queden 2^n intervals de la mateixa longitud.

Comproveu que si $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\ell_n < 1$, el conjunt de Cantor

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^n} I_j^{(n)}$$

té mesura de Lebesgue positiva (i interior buit). Aquest és el cas si $\ell_n = 4^{-n}$, $n \geq 1$.

3. Sigui A el conjunt de tots els nombres racionals de l'interval $(0, 1)$.

a) Si $I_1, \ldots, I_n$ és una col·lecció finita d'intervals oberts que recobreixen A, demostreu que $l(I_1) + \cdots + l(I_n) \geq 1$.

b) Demostreu que existeix una successió d'intervals oberts $(I_k)_k$ que recobreixen A tal que $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) = \frac{1}{2}$.

4. Demostreu que els següents conjunts són mesurables i calculeu-ne la mesura:

a) $A \times B \times \{x\} \subset \mathbb{R}^3$, on $x \in \mathbb{R}$ i $A, B \subset \mathbb{R}$.

b) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ en $\mathbb{R}$.

c) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}^2$.

d) $\mathbb{Q}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

e) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = 1\}$.

f) $\bigcup_{k=3}^{\infty} A_k$, on $A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1/k \leq |x| + |y| \leq 1 - 1/k\}$.

g) $A \times A \times \{a\}$, on $a \in A$, i $A \subset \mathbb{R}$ no mesurable.

5. Sigui E el conjunt de punts de $[0, 1]$ tals que en el seu desenvolupament decimal mai apareix el dígit 5. Demostreu que E és mesurable i calculeu-ne la mesura.

6. Decidiu quins dels següents conjunts són mesurables i calculeu-ne la mesura exterior.

a) $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ al pla.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ al pla.

7. Si $A \subset \mathbb{R}^n$, demostreu que són equivalents:

a) A és mesurable Lebesgue.

b) $A = \left\{\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right\} \setminus Z$, on $\{G_k\}_k$ és una successió de conjunts oberts i Z un conjunt de mesura 0.

c) $A = \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right\} \cup Z$, on $\{F_k\}_k$ és una successió de conjunts tancats i Z un conjunt de mesura 0.

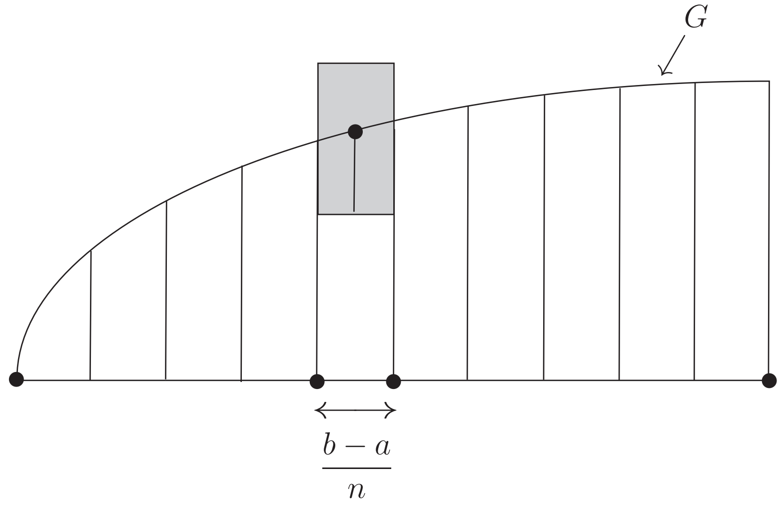
8. Si $\{q_n\}$ és una numeració de $\mathbb{Q}$, existeixen nombres irracionals que no pertanyen a $\cup_n (q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2)$.

9. Sigui $\mathcal{D} \in \mathcal{P}(X)$ $X \neq \varnothing$ amb les propietats següents:

a) $X \in \mathcal{D}$,
b) $A \setminus B \in \mathcal{D}$ si $A, B \in \mathcal{D}$, i
c) $\biguplus_{k \in N} A_k \in \mathcal{D}$ si $A_k \in \mathcal{D}$.

Demostreu que $\mathcal{D}$ es σ-àlgebra si, i només si, es compleix $A \cap B \in \mathcal{D}$ si $A, B \in \mathcal{D}$.

10. Sigui f una funció contínua a un interval $[a, b]$. Demostreu que l'àrea exterior de la seva gràfica $G = \{(x, y) : y = f(x)\}$ és zero.



11. a) Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ és mesurable, i m la mesura de Lebesgue. Demostreu que

$$m(A) = \sup\{m(K) \mid K \text{ compacte i } K \subset A\}.$$

b) Sigui $E \subset \mathbb{R}$ amb $|E| > 0$. Comproveu que

$$E - E = \{z \in \mathbb{R} : z = x - y, \quad x, y \in E\}$$

conté un entorn de zero.

(*Indicació:* Considereu un compacte $K \subset E$ de mesura positiva i un obert U, $K \subset U$ tal que $m(U) < 2m(K)$. Per a $\delta = d(K, U^c) > 0$ comproveu que $(-\delta, \delta) \subset E - E$.)

12. Sigui $|\bullet|$ la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Si $A \subset [0, 1]$ i $|A|^* > 0$,

$$\sup_{\{I \subset \mathbb{R}:\ \text{interval obert}\}} \frac{|A \cap I|^*}{|I|} = 1.$$

13. Donat $\varepsilon > 0$ contruïu:

a) Un subconjunt obert U dens de $\mathbb{R}$ tal que $|U| \leq \varepsilon$.
b) Un subconjunt tancat $C \subset \mathbb{R}$ amb interior buit i $|C| = \varepsilon$.

(*Indicació:* Si $F = \mathbb{R} \setminus U$, U obert dens amb $|U| \leq \varepsilon$, comproveu que l'aplicació $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, definida per $f(\alpha) = |F \bigcap [-\alpha, \alpha]|$, és exhaustiva.)

14. Sigui $\{A_n\}$ una successió de conjunts mesurables d'un espai de mesura (X, Σ, μ) que compleixen $\sum_n \mu(A_n) < \infty$. Comproveu que el conjunt

$$\{x \in X : x \in A_n \text{ per infinits } n\}$$

té mesura 0.

15. Sigui $\{E_n\}$ una successió de conjunts mesurables Lebesgue a $[0,1]$ que compleixen $\lim |E_n| = 1$.

a) Proveu que per a cada $0 < \varepsilon < 1$ existeix una subsuccessió $\{E_{k_n}\}$ de $\{E_n\}$ tal que

$$\left| \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n} \right| > \varepsilon.$$

b) Comproveu que és possible construir una successió $\{E_n\}$ de conjunts mesurables Lebesgue a $[0,1]$ que compleixen $\lim |E_n| = 1$ i a més $\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \varnothing$ per a tot n.

16. Sigui N un subconjunt de $\mathbb{R}$ amb $m(N) = 0$. Demostreu que el conjunt $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \in N\}$ és mesurable.

(*Indicació:* Si $I = [a,b]$ és un interval de la recta, calculeu l'àrea de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \in I \text{ i } |y| \leq M\}$ fent un dibuix.)

17. Sigui N un subconjunt de $\mathbb{R}$ amb $m^*(N) = 0$ i L una aplicació lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Demostreu que el conjunt $L^{-1}(N)$ és mesurable.

(*Indicació:* Considereu primer el cas $L(x,y) = x$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.)

4. La integral de Lebesgue

Així com només podem parlar de mesura de Lebesgue de conjunts mesurables, només podrem integrar funcions que tinguin determinades propietats de mesurabilitat.

4.1 Funcions mesurables

Recordem la idea de la definició de Lebesgue de la integral d'una funció $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Donem $\varepsilon > 0$ i expressem la recta com la unió dels intervals disjunts $[j\varepsilon, (j+1)\varepsilon)$, $j \in \mathbb{Z}$. Llavors posant

$$A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : j\varepsilon \le f(x) < (j+1)\varepsilon\} = f^{-1}[j\varepsilon, (j+1)\varepsilon)$$

tenim que

$$\operatorname{Im} f = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} f(A_j).$$

Ara f és aproximadament $\sum_{j=-\infty}^{\infty} j\varepsilon\chi_{A_j}(x)$ i és natural definir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=-\infty}^{\infty} j\varepsilon\, m(A_j)$$

sempre que el límit precedent existeixi. Implícitament estem suposant que els A_j són conjunts mesurables. Si admetéssim conjunts més generals hauríem de posar $m^*(A_j)$ a la suma precedent. Llavors perdríem l'additivitat de la integral (la integral de la suma és la suma d'integrals).

Definició. Una funció $f\colon E \to [-\infty, \infty]$ és mesurable si $f^{-1}(U)$ és un conjunt mesurable per a tot obert U de $[-\infty, \infty]$.

Notem que si f és mesurable, E és un conjunt mesurable. Recordem que $f\colon E \to [-\infty, \infty]$ és contínua si $f^{-1}(U)$ és un obert de E per a tot obert U de $[-\infty, \infty]$. Doncs, les funcions contínues definides a un conjunt mesurable són funcions mesurables.

La funció χ_E és mesurable si i només si E és un conjunt mesurable.

Els oberts de $[-\infty, \infty]$ són unions numerables d'intervals oberts de $\mathbb{R}$ (o sigui (a, b) amb $a, b \in \mathbb{R}$) i d'intervals del tipus $(a, +\infty]$ i $[-\infty, a)$ amb $a \in \mathbb{R}$. Així, doncs, tenim la següent descripció de les funcions mesurables.

Proposició. *Sigui $f\colon E \to [-\infty, \infty]$. Llavors són equivalents*

(i) *f és mesurable.*

(ii) *$f^{-1}((a, +\infty])$ és mesurable per $a \in \mathbb{R}$.*

(iii) *$f^{-1}([a, +\infty])$ és mesurable per $a \in \mathbb{R}$.*

(iv) *$f^{-1}([-\infty, a))$ és mesurable per $a \in \mathbb{R}$.*

(v) *$f^{-1}([-\infty, a])$ és mesurable per $a \in \mathbb{R}$.*

L'argument per (ii) $\Rightarrow$ (i) consisteix en observar que, per l'estructura dels oberts de $[-\infty, \infty]$, només cal veure que $f^{-1}([-\infty, a))$ i $f^{-1}(a, b)$ són mesurables per $a, b \in \mathbb{R}$. Ara $[-\infty, a] = (a, +\infty]^c$ i, per tant,

$$f^{-1}([-\infty, a]) = (f^{-1}(a, +\infty))^c$$

és mesurable per $a \in \mathbb{R}$.

També

$$(a, b) = (a, +\infty] \cap [-\infty, b) \qquad \text{i}$$

$$[-\infty, b) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left[-\infty, b + \frac{1}{j}\right].$$

Doncs, prenent imatges inverses, veiem que

$$f^{-1}(a, b) = f^{-1}(a, +\infty] \cap f^{-1}([-\infty, b))$$

i

$$f^{-1}[-\infty, b) = \bigcap_{j=1}^{\infty} f^{-1}\left[-\infty, b + \frac{1}{j}\right]$$

són mesurables. Les altres implicacions es demostren amb arguments similars.

Hi ha diverses propietats de les funcions mesurables que es poden demostrar mitjançant arguments senzills. En deixarem molts per al lector, per tal que s'exerciti. Per exemple,

Proposició. *Si $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ són mesurables, llavors $f+g$, $f \cdot g$ i cf, $c \in \mathbb{R}$, també ho són.*

Demostració. Fem només l'argument per la suma. Donat $a \in \mathbb{R}$ volem veure que $A = \{x \in E : f(x) + g(x) > a\}$ és mesurable. Si $x \in A$, per la densitat de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ hi ha nombres racionals p i q tals que $f(x) > p$, $g(x) > q$ i $p + q > a$. Doncs A és la unió de la família numerable de conjunts $\{x \in E : f(x) > p\} \cap \{x \in E : g(x) > q\}$ on $(p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ són tals que $p + q > a$. $\square$

Proposició. *Si $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ és una successió de funcions mesurables*

$$f_j\colon E \to [-\infty, \infty],$$

llavors

(i) $\sup_j f_j$ *i* $\inf_j f_j$ *són mesurables.*

(ii) $\limsup_{j\to\infty} f_j$ *i* $\liminf_{j\to\infty} f_j$ *són mesurables.*

Problemes

1. Siguin $f_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcions mesurables ($m \in \mathbb{N}$). Demostreu que els següents conjunts són mesurables:

a) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \lim_{m\to\infty} f_m(x)\}$.
b) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : (f_m(x))$ és una successió acotada$\}$.

2. Sigui $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Demostreu que si per a qualsevol $r \in \mathbb{Q}$, el conjunt $A_r = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > r\}$ és mesurable, aleshores f és mesurable.

3. Doneu un exemple d'una funció no mesurable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f|$ sigui mesurable.

4. Siguin f i g dues funcions reals i mesurables definides a $E \subset \mathbb{R}^n$ i sigui $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Demostreu que la funció $h(f(x), g(x))$, $x \in E$, és mesurable a E.

5. Una funció $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diu que és mesurable Borel si, per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$, els conjunts $\{x \in \mathbb{R} : g(x) > \alpha\}$ són borelians. Demostreu que si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és mesurable Borel i $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és mesurable Lebesgue, la composició $g \circ f$ és mesurable Lebesgue.

4.2 Propietats "gairebé per tot"

Una certa afirmació es diu que val "gairebé per tot" (o "quasi per tot") si val excepte en un conjunt de mesura nul·la. Per exemple, dues funcions $f, g\colon E \to [-\infty, \infty]$ són iguals g.p.t. (abreviació de gairebé per tot) si hi ha un conjunt N amb $m^*(N) = 0$ tal que

$$f(x) = g(x), \quad x \in E \setminus N.$$

Veurem en multitud de situacions que en teoria de la mesura i de la integral els conjunts de mesura zero juguen el paper de conjunts negligibles (no importa què hi passa). Per exemple:

Proposició. *Si* $f, g\colon E \to [-\infty, \infty]$ *són iguals g.p.t. i* f *és mesurable, llavors* g *és mesurable.*

Demostració. Sigui N amb $m^*(N) = 0$ tal que $f(x) = g(x)$, $x \in E \setminus N$. Llavors

$$g^{-1}(a, \infty] = (g^{-1}(a, \infty] \cap N) \cup (g^{-1}(a, \infty] \setminus N) = M \cup (f^{-1}(a, \infty] \setminus N)$$

amb $m^*(M) = 0$. Com que N, M i $f^{-1}(a, \infty]$ són mesurables, $g^{-1}(a, \infty]$ també ho és. $\square$

4.3 Integració de funcions positives

Definició. Una funció $s\colon E \to \mathbb{R}$ és simple si pren un nombre finit de valors.

Si els diferents valors de s són $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, llavors

$$s = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \chi_{A_j} \tag{4.1}$$

i $\bigcup_{j=1}^{N} A_j = E$, $A_j \cap A_k = \emptyset$ si $j \neq k$.

Doncs, una funció simple és una combinació lineal (finita) de funcions característiques de conjunts. Si aquests conjunts són disjunts i cobreixen E diem que la representació (4.1) és la normal. Si els λ_j no són diferents diem simplement que la representació és disjunta. Si els A_j no són dos a dos disjunts parlem d'una representació de s. Per exemple

$$s = \chi_{[0,1]} + \frac{1}{2}\chi_{[\frac{1}{2},2]}$$

és una representació de s. La representació normal és

$$s = \chi_{[0,\frac{1}{2})} + \frac{3}{2}\chi_{[\frac{1}{2},1]} + \frac{1}{2}\chi_{(1,2]}.$$

La funció simple $s = \chi_{[0,1]}$ té la representació disjunta

$$s = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} + \chi_{(\frac{1}{2},1]}.$$

Si $s = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \chi_{A_j}$ és una representació de s, llavors s és mesurable si tots els A_j ho són. Si la representació és la normal s és mesurable si i només si tots els A_j són mesurables.

Definició. Suposem que $s = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \chi_{A_j}$ és una representació disjunta de s i que els A_j són mesurables. Llavors la integral de s sobre E és

$$\int_E s = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m(A_j).$$

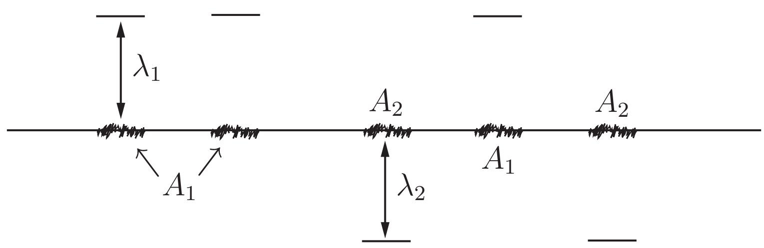
Notem que la definició, en dimensió 1, diu que la integral és l'àrea que hi ha per sota de la gràfica i sobre el domini E de s (l'àrea es compta amb un signe menys sobre una zona on la funció és negativa).

La primera cosa que s'ha de comprovar és que la definició no depèn de la representació disjunta. En efecte, suposem que

$$s = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \chi_{A_j} = \sum_{k=1}^{M} \mu_k \chi_{B_k}$$

són dues representacions disjuntes de s. Llavors

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j m(A_j) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \sum_{k=1}^{M} m(A_j \cap B_k).$$



Si $A_j \cap B_k \neq \emptyset$, llavors $\lambda_j = \mu_k$ i

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j m(A_j) = \sum_{k=1}^{M} \mu_k \sum_{j=1}^{N} m(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^{M} \mu_k m(B_k).$$

Hi ha una sèrie de propietats elementals però importants de la integral de les funcions simples que no demostrarem exhaustivament. Per exemple:

Proposició. *Si s_1 i s_2 són funcions simples mesurables, llavors*

(i) Si $s_1 \leq s_2$ g.p.t., llavors $\int s_1 \leq \int s_2$.

(ii) $\int s_1 + s_2 = \int s_1 + \int s_2$.

Demostració de (ii). Considerem representacions disjuntes de $s_1 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \chi_{A_j}$ i de $s_2 = \sum_{k=1}^{M} \mu_k \chi_{B_k}$. Llavors $s_1 + s_2 = \sum_{j,\,k} (\lambda_j + \mu_k) \chi_{A_j \cap B_k}$ i, per tant,

$$\begin{aligned} \int s_1 + s_2 &= \sum_{j,\,k} (\lambda_j + \mu_k)\, m(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_{j,\,k} \lambda_j\, m(A_j \cap B_k) + \sum_{j,\,k} \mu_k\, m(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_{j} \lambda_j\, m(A_j) + \sum_{k} \mu_k\, m(B_k) \\ &= \int s_1 + \int s_2. \end{aligned}$$

$\square$

Notem que aquesta última propietat dóna que si $s = \sum_j \lambda_j \chi_{A_j}$ és una representació qualsevol de s amb els A_j mesurables, llavors

$$\int s = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j m(A_j),$$

fins i tot quan els A_j no són necessàriament dos a dos disjunts.

Ara ja estem preparats per definir la integral de Lebesgue d'una funció mesurable no-negativa.

Definició. Sigui $f\colon E \to [0,+\infty]$ una funció mesurable. Definim la integral de Lebesgue de f sobre E com

$$\int_E f = \sup\left\{\int s : s\colon E \to \mathbb{R},\ s \text{ simple mesurable i } s \le f \text{ g.p.t.}\right\}.$$

Per exemple $\int_{\mathbb{R}^n} 1 = \infty$, perquè $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[-N,N]} = (2N)^n$.

Un altre exemple és el de les funcions contínues ≥ 0 a un interval $[a,b]$. Veiem ara que són integrables Lebesgue i que la integral de Lebesgue $\int_{[a,b]} f$ és igual a la integral de Riemann $\int_a^b f$.

Dividim $[a,b]$ en 2^n intervals iguals $[x_{j-1},x_j]$, $x_j = a + j\frac{b-a}{2^n}$, $0 \le j \le 2^n$. Sigui $t_j \in [x_{j-1},x_j]$ tal que $f(t_j) = \min\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$. Considerem les funcions simples mesurables

$$s_n = \sum_{j=1}^{2^n} f(t_j)\chi_{[x_{j-1},x_j]}.$$

La successió s_n és creixent i $s_n(x) \nearrow f(x)$, $a \le x \le b$. Això és degut al fet que

$$0 \le f(x) - s_n(x) \le \omega\left(f, \frac{b-a}{2^n}\right)$$

on $\omega(f,\delta)$ és el mòdul de continuïtat de f a nivell δ, és a dir,

$$\omega(f,\delta) = \sup\{|f(x)-f(y)| : |x-y| \le \delta\}.$$

La continuïtat uniforme de f es tradueix en $\omega(f,\delta) \to 0$ si $\delta \to 0$. Doncs

$$s_n(x) \le f(x) \le s_n(x) + \omega\left(f, \frac{b-a}{2^n}\right)$$

i, per la definició d'integral de Lebesgue de f i per la proposició precedent,

$$\int_{[a,b]} s_n \le \int_{[a,b]} f \le \int_{[a,b]} s_n + \omega\left(f, \frac{b-a}{2^n}\right)(b-a).$$

Fent $n \to \infty$ veiem que

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} s_n.$$

El mateix argument serveix per la integral de Riemann, que també té la propietat de monotonia utilitzada.

Exercici. Una funció contínua a un rectangle tancat de $\mathbb{R}^n$ és integrable Lebesgue i la integral de Lebesgue coincideix amb la de Riemann.

Hi ha una sèrie de propietats elementals de la integral de funcions positives que es dedueixen fàcilment de la definició. Són:

- **Monotonia:** Si $0 \le f \le g$ q.p.t. a E, llavors $\displaystyle\int_E f \le \int_E g$.

- Si F i E són mesurables, $F \subset E$ i $f\colon E \to [0,\infty]$ és mesurable, llavors $\displaystyle\int_F f \le \int_E f$.
- $\displaystyle\int_E cf = c\int_E f$, $c \ge 0$.

Hom es pot preguntar si hi ha una manera d'aproximar funcions mesurables per funcions simples que faci més explícit el càlcul de $\int_E f$.

El resultat és aquest:

Proposició. *Sigui $f\colon E \to [0,\infty]$ una funció mesurable. Hi ha una successió de funcions simples mesurables $(s_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $s_j \le s_{j+1}$ i $\lim\limits_{j\to\infty} s_j(x) = f(x)$, $x \in E$.*

De fet, si f és fitada, la convergència de les s_j cap a f és uniforme.

Demostració. Fixo $j = 1, 2, \dots$ i divideixo $[0, j)$ en $j2^j$ intervals iguals de longitud $\frac{1}{2^j}$. Aquests intervals són $I_{jk} = \left[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right)$, $1 \le k \le j2^j$. Poso $A_{jk} = f^{-1}(I_{jk})$, $B_j = f^{-1}[j,\infty)$ i

$$s_j(x) = \sum_{k=1}^{j2^j} \frac{k-1}{2^j}\chi_{A_{jk}}(x) + j\chi_{B_j}(x).$$

És fàcil comprovar que $s_j \le s_{j+1} \le f$, $j=1,2,\dots$ Veiem ara que $\lim\limits_{j\to\infty} s_j(x) = f(x)$, $x \in E$. Si $f(x) = \infty$, $s_j(x) = j \to \infty$. Si $f(x) < \infty$, agafo $j > f(x)$ i k tal que $\frac{k-1}{2^j} \le f(x) < \frac{k}{2^j}$. Llavors $0 \le f(x) - s_j(x) < \frac{1}{2^j}$ i doncs $s_j(x) \to f(x)$ si $j \to \infty$. Si f és fitada, $f(x) \le M$ per $x \in E$. Agafant $j > M$ veiem que la convergència és uniforme. □

Ara sigui $f\colon E \to [0,\infty]$ mesurable i $(s_j)_{j=1}^{\infty}$ la successió que hem construït. Llavors, clarament,

$$\int_E s_j \le \int_E f.$$

Ara, és cert que

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty} \int_E s_j \quad ?$$

Si això és així tindríem un algoritme (és a dir, un mètode general concret) per calcular $\int_E f$.

El teorema següent dóna una resposta afirmativa a la pregunta.

Teorema de la convergència monòtona. *Sigui $f_j\colon E \to [0,\infty]$ una successió de funcions mesurables tal que $f_j \le f_{j+1}$ g.p.t. Posem $f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$. Llavors*

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

Demostració.

$$\int_E f_j \le \int_E f_{j+1} \le \int_E f, \quad j = 0, 1, \dots$$

Doncs existeix $\lim_{j\to\infty} \int_E f_j$ i val la desigualtat $\lim_{j\to\infty} \int_E f_j \leq \int_E f$.

Hem de veure que $\int_E f \leq \lim_{j\to\infty} \int_E f_j$.

Per entendre millor la dificultat suposem que la convergència de f_j envers f és uniforme i que $m(E) < \infty$. Llavors, donat ϵ, hi ha un índex j_0 tal que

$$f(x) - \epsilon < f_{j_0}(x), \quad x \in E$$

i doncs

$$\int_E f - \epsilon\, m(E) \leq \int_E f_{j_0} \leq \lim_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

Fent $\epsilon \to 0$ obtenim el resultat desitjat. La dificultat és doncs que la convergència no és uniforme sinó només puntual gairebé per tot (el fet que també pugui ser $m(E) = \infty$ és una dificultat menor). Fem ara l'argument pel cas general.

Sigui s simple mesurable sobre E amb $s \leq f$ g.p.t. Volem veure que

$$\int_E s \leq \lim_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

Donat c amb $0 < c < 1$, definim

$$E_j = \{x \in E : c\, s(x) \leq f_j(x)\},$$

de manera que $E_j \subset E_{j+1}$ i $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E \setminus N$ per cert $N \subset E$ amb $m(N) = 0$ (N és $\{x \in E : s(x) > f(x)\}$). Posem $s = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \chi_{A_k}$, on els A_k són subconjunts mesurables de E, dos a dos disjunts i $\bigcup_{k=1}^{N} A_k = E$. Tenim que

$$s\chi_{E_j} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \chi_{A_k \cap E_j}$$

i doncs

$$\int_{E_j} s = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k m(A_k \cap E_j) \nearrow \sum_{k=1}^{N} \lambda_k m(A_k) = \int_E s$$

perquè els $A_k \cap E_j$ creixen envers A_k (menys un conjunt de mesura 0) quan j creix. Ara, per la definició de E_j,

$$c \int_{E_j} s \leq \int_{E_j} f_j \leq \int_E f_j$$

i, fent $j \to \infty$,

$$c \int_E s \leq \lim_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

Fent $c \to 1$

$$\int_E s \leq \lim_{j\to\infty} \int_E f_j$$

i, agafant el suprem sobre s,

$$\int_E f \leq \lim_{j\to\infty} \int_E f_j. \qquad \square$$

Exemples d'aplicació del teorema de la convergència monòtona

1. Si f i g són funcions mesurables no-negatives a $E \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$

Demostració. Aproximem f i g per una successió creixent de funcions simples.

2. Calculem $\displaystyle\int_0^1 \log \frac{1}{x}\, dx$.

Per $n = 1, 2, \dots$

$$\chi_{[\frac{1}{n},1)}(x) \log \frac{1}{x} \nearrow \chi_{[0,1)}(x) \log \frac{1}{x}, \quad 0 < x < 1.$$

Doncs, pel teorema de la convergència monòtona,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log \frac{1}{x}\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \log \frac{1}{x}\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} [x - x\log x]_{\frac{1}{n}}^1 = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\log\frac{1}{n} = 1.\end{aligned}$$

Exercici. Calculeu $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$, $0 < \alpha$.

3. Teorema de Beppo Levi. *Sigui $(f_j)_{j=1}^\infty$ una successió de funcions mesurables $f_j \colon E \to [0,\infty]$. Llavors*

$$\int \sum_{j=1}^\infty f_j(x)\, dm(x) = \sum_{j=1}^\infty \int f_j(x)\, dm(x).$$

Demostració. Apliqueu el teorema de la convergència monòtona a la successió de sumes parcials de la sèrie $\sum_{j=1}^\infty f_j$.

Una aplicació de "Beppo Levi" és la següent. Considerem el desenvolupament en sèrie de potències

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Sabem que podem prendre primitives terme a terme. Per tant

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x < 1.$$

Per Beppo Levi

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 \frac{x^n}{n}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)}.$$

Per altra banda

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x}\, dx = [(1-x)\log(1-x) - (1-x)]_0^1 = 1.$$

Doncs hem sumat la sèrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. De fet, la sèrie precedent és una sèrie telescòpica i es pot sumar directament, però l'exemple il·lustra els avantatges d'integrar terme a terme. □

Hi ha un altre teorema important de convergència per funcions positives.

El Lema de Fatou. *Sigui* $f_j \colon E \to [0,\infty]$ *una successió de funcions mesurables no-negatives. Llavors*

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j(x)\, dx \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j(x)\, dx.$$

Demostració. Recordeu que

$$\liminf_{j\to\infty} f_j(x) = \sup_k \inf_{j\ge k} f_j(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{j\ge k} f_j(x) \right).$$

Notem que $\inf\limits_{j\ge k} f_j(x) \le \inf\limits_{j\ge k+1} f_j(x)$.

Pel teorema de la convergència monòtona

$$\begin{aligned} \int_E \liminf_{j\to\infty} f_j(x)\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_E \inf_{j\ge k} f_j(x) \\ &\le \lim_{k\to\infty} \inf_{j\ge k} \int_E f_j(x) = \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j(x)\, dx, \end{aligned}$$

on hem utilitzat el fet obvi que la integral d'un ínfim és més petita o igual que l'ínfim de les integrals. □

Problemes

1. Sigui $E \subset \mathbb{R}^m$ un conjunt mesurable i $f_n \colon E \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funcions mesurables. Demostreu que si $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$, llavors $f_n \to 0$ g.p.t.

2. Sigui $f \colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ integrable tal que $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Es defineixen, per a tot $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = k\}$ i $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \ge k\}$. Demostreu:

a) $$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sum_{k=1}^{\infty} k|A_k|.$$

b) $$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|.$$

3. Siguin $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) funcions mesurables tals que la successió $(f_n)_n$ és puntualment convergent cap a 0. Suposem que, per a tot $n \in \mathbb{N}$ i tot $x \in \mathbb{R}$, es compleix $|f_n(x)| \leq |x|^{-1/2}e^{-|x|}$. Demostreu que la successió $(|A_n|)_n$ de les mesures dels conjunts $A_n = \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq 1\}$ és convergent i calculeu-ne el límit.

4. Sigui $(f_n)_n$ la successió de funcions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definides per $f_n(x) = \frac{1}{2n}\chi_{[0,n)}(|x|)$, on χ_A és la funció característica de A. Calculeu el límit de la successió $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n\right)_n$, estudieu la convergència de $(f_n)_n$ i calculeu la integral del límit. Per què no es pot aplicar cap teorema de convergència?

5. Sigui $f\colon \mathbb{R}^m \to [0, +\infty)$ una funció integrable.

a) Si, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x \in \mathbb{R}^m : 1/n \leq f(x) \leq n\}$, calculeu $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m \setminus A_n} f$.

b) Demostreu que, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $A \subset \mathbb{R}^m$ mesurable amb mesura finita tal que f és acotada sobre A i $\int_{\mathbb{R}^m \setminus A} f < \varepsilon$.

c) Deduïu que, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que si E és un conjunt mesurable amb $\mu(E) < \delta$, aleshores $\int_E f < \varepsilon$. D'això se'n diu "continuïtat absoluta de la integral".

6. Siguin $f_n \in L^1[0,1]$, $f_n(x) \geq 0$ tal que $f_n(x) \to f(x)$, $0 \leq x \leq 1$ i $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Pot ser

a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 3$?

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$?

7. Esbrineu si és certa o falsa l'afirmació següent:

Si $(f_n)_n$ es una successió de funcions integrables a $\mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ q.p.t. } x \in \mathbb{R}^m \quad \text{i} \quad \sup_k \int_{\mathbb{R}^m} |f_{2k}| < \infty$$

llavors f és integrable.

4.4 Integració de funcions qualssevol

Recordem que si $f\colon E \to [-\infty, \infty]$, es defineixen f^+, la part positiva de f, i f^-, la part negativa de f, com

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max(-f(x), 0) = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$

Notem que $f^- \geq 0$, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ i que $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Diem que si $f\colon E \to [-\infty, \infty]$ és integrable (en el sentit de Lebesgue) si f és mesurable i $\int_E f^+ < \infty$, $\int_E f^- < \infty$.

La integral de f es defineix com

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Els següents fets són conseqüències immediates de la definició.

- f és integrable $\Leftrightarrow \int_E |f| < \infty$ i en aquest cas
$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$
- **Linealitat de la integral.** Si f i g són integrables i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, llavors $\alpha f + \beta g$ és integrable i
$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$
- **Desigualtat de Txebitxev.**
$$m\{x \in E : |f(x)| > t\} \leq \frac{1}{t} \int_E |f|$$
que diu que "el conjunt de punts on f és gran és petit (en mesura)".

Demostració.

$$\int_E |f| \geq \int_{\{x \in E : |f(x)| > t\}} |f| \geq \int_{\{x \in E : |f(x)| > t\}} t = t\, m\{x \in E : |f(x)| > t\}. \qquad \square$$

- Si f és integrable, f és finita g.p.t.

Demostració. Tenim que

$$\{x \in E : |f(x)| = \infty\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x \in E : |f(x)| > j\}$$

i

$$m\{x \in E : |f(x)| > j\} \leq \frac{1}{j} \int_E |f|.$$

Per tant, $m\{x \in E : |f(x)| = \infty\} = 0$. $\square$

- Si $f \geq 0$ g.p.t., f és integrable i $\int_E f = 0$, llavors $f = 0$ g.p.t. a E.

Demostració. Tenim que

$$\{x \in E : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ x \in E : |f(x)| > \frac{1}{j} \right\}.$$

Per Txebitxev $m\{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{j}\} = 0$, $j = 1, 2, \ldots$ $\square$

- Si f és una funció contínua a un interval $[a,b]$ llavors f és integrable i la integral de Lebesgue $\int_{[a,b]} f$ és igual a la integral de Riemann $\int_a^b f$.

Demostració. Si f és contínua a $[a,b]$, f és mesurable i fitada. Diguem que $|f(x)| \le M$, $a \le x \le b$. Doncs $\int_{[a,b]} |f| \le \int_{[a,b]} M = M(b-a) < \infty$, i f és integrable a $[a,b]$.

Per cada $n = 1, 2, \dots$ dividim $[a,b]$ en n intervals iguals

$$I_{jn} = \left[a + (j-1)\frac{b-a}{n}, a + j\frac{b-a}{n}\right], \quad 1 \le j \le n,$$

i escollim un punt $t_j \in I_{jn}$. Posem

$$s_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\chi_{I_{jn}}(x), \quad a \le x \le b.$$

Notem que

$$|f(x) - s_n(x)| \le \omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right), \quad a \le x \le b,$$

on $\omega(f,\varepsilon)$ és el mòdul de continuïtat de f. Llavors

$$\left|\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} s_n\right| \le \int_{[a,b]} |f - s_n| \le \omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right)(b-a).$$

Doncs

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\frac{b-a}{n}.$$

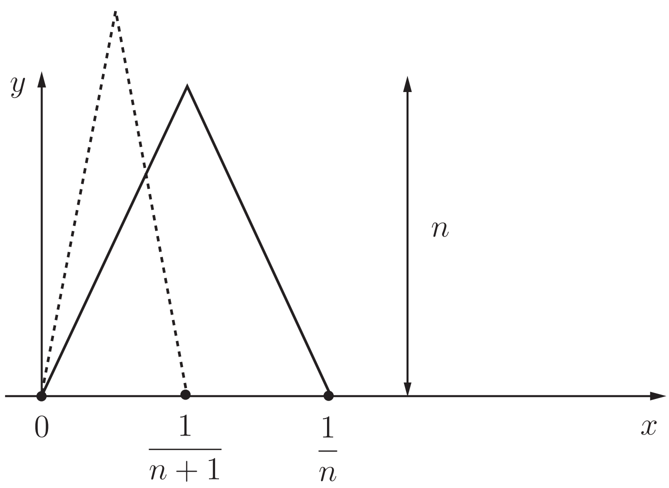
El mateix argument val per la integral de Riemann. $\square$

Nota. L'argument precedent es pot evitar passant a part positiva i part negativa. També l'enunciat anàleg és cert a $\mathbb{R}^n$.

Passem ara a estudiar en quines condicions integral i límit g.p.t. es poden intercanviar, és a dir, quan val $\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)$.

El següent exemple mostra que això no sempre es pot fer.

Sigui f_n la funció que té per gràfica el triangle isòsceles d'altura n de la figura següent.



Llavors

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

però

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

Les funcions f_n són positives, però la successió no és creixent i, per tant, no es pot aplicar el teorema de la convergència monòtona.

El resultat següent és el teorema de convergència més important de la teoria de la integral.

Teorema de la convergència dominada. *Sigui $f_j\colon E \to [-\infty, \infty]$ una successió de funcions mesurables tal que*

$$f_j(x) \xrightarrow{j\to\infty} f(x), \quad \text{g.p.t. } x \in E,$$

i $|f_j| \le g$ g.p.t. a E per una certa funció g integrable a E. Llavors f és integrable a E i $\int_E |f - f_j| \xrightarrow{j\to\infty} 0$. En particular

$$\int_E f_j \xrightarrow{j\to\infty} \int_E f.$$

Demostració. Com que $f_j \to f$ g.p.t. i $|f_j| \le g$ g.p.t. tenim que $|f| \le g$ g.p.t. i, doncs, f és integrable. Ara és molt fàcil reduir el problema al cas en que $f = 0$. Només cal posar $h_j = |f - f_j|$ i $G = 2g$, de manera que $0 \le h_j \le G$, G integrable a E i $h_j \to 0$ g.p.t. a E. Cal demostrar que $\int_E h_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$.

Ara farem servir que $\liminf\limits_{j\to\infty}(-a_j) = -\limsup\limits_{j\to\infty} a_j$, per successions de nombres reals a_j. Pel Lema de Fatou

$$\begin{aligned}\int_E G = \int_E \lim_{j\to\infty}(G - h_j) &\le \liminf_{j\to\infty} \int_E G - h_j \\ &= \int_E G + \liminf_{j\to\infty} \int_E -h_j = \int_E G - \limsup_{j\to\infty} \int_E h_j.\end{aligned}$$

Doncs $\limsup_{j\to\infty} \int_E h_j \le 0$.

Per altra banda sabem que $\liminf_{j\to\infty} \int_E h_j \ge 0$ (perquè $h_j \ge 0$) i, per tant, $\liminf_{j\to\infty} \int_E h_j = \limsup_{j\to\infty} \int_E h_j = 0$. Així que $\lim_{j\to\infty} \int_E h_j = 0$. □

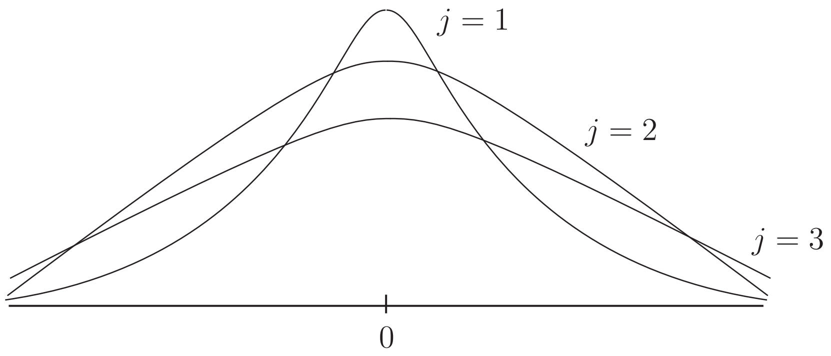
El següent exemple mostra un altre cas en què no s'aplica el teorema de la convergència dominada.

Posem

$$f_j(x) = \frac{j}{j^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Clarament

$$f_j(x) \xrightarrow{j\to\infty} 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Ara, com que $\chi_{[-n,n]} f_j \nearrow f_j$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_j = \lim_{n\to\infty} \int \chi_{[-n,n]} f_j = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{j}{j^2+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-n/j}^{n/j} \frac{dy}{1+y^2} = \lim_{n\to\infty} 2\arctan\frac{n}{j} = \pi.$$

Farem ara dues aplicacions del teorema de la convergència dominada a la transformada de Fourier.

Convé definir integrabilitat per funcions complexes (que prenen valors complexos). Una funció $f\colon E \to \mathbb{C}$ es pot escriure $f(x) = u(x) + iv(x)$, $x \in E$, on u i v són funcions reals definides a E. Diem que f és mesurable si i només si u i v ho són i diem que f és integrable si i només si f és mesurable i u i v són integrables. La integral de f sobre E és el nombre complex

$$\int_E f = \int_E u + i \int_E v.$$

És un exercici convèncer-se que f és integrable si i només si f és mesurable i $\int_E |f| < \infty$ (recordeu que $|u|, |v| \le |f| \le |u| + |v|$).

Definició. La transformada de Fourier d'una funció integrable a $\mathbb{R}$ és la funció

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Notem que per a tot $\xi \in \mathbb{R}$ la funció complexa $f(x)e^{-ix\xi} = f(x)\cos(x\xi) - if(x)\sin(x\xi)$ és integrable perquè

$$|f(x)e^{-ix\xi}| = |f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per tant $\hat{f}(\xi)$ està definida per a tot $\xi \in \mathbb{R}$.

- $\hat{f}$ és contínua a $\mathbb{R}$.

Demostració. Fixem $\xi \in \mathbb{R}$ i prenem una successió $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ amb $\xi_n \to \xi$. Hem de veure que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi_n}\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx. \tag{4.2}$$

Com que per cada x, $e^{-ix\xi}$ és una funció contínua de ξ,

$$f(x)e^{-ix\xi_n} \xrightarrow{n\to\infty} f(x)e^{-ix\xi}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

De fet, hauríem de dir per gairebé tot $x \in \mathbb{R}$ perquè hi ha un conjunt de punts de mesura 0 on $f(x) = \pm\infty$ i llavors $f(x)e^{-ix\xi}$ no té sentit. Això es pot resoldre d'entrada redefinint $f(x)$ com a 0 en aquests punts o, millor encara, ignorant el que passa en aquest conjunt excepcional. Observem que la convergència puntual g.p.t. (4.3) és dominada perquè $|f(x)e^{-ix\xi_n}| = |f(x)|$ i $|f|$ és integrable. Pel teorema de la convergència dominada obtenim (4.2). $\square$

Ara ens preguntem en quines condicions $\hat{f}(\xi)$ és derivable. La funció $\hat{f}(\xi)$ és la "suma" de les funcions $f(x)e^{-ix\xi}$ respecte de x i doncs, com que la derivada d'una suma és la suma de les derivades, hauria de ser

$$\frac{d\hat{f}(\xi)}{d\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}(-ix)\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Per tal que la integral precedent existeixi cal que la funció

$$|f(x)e^{-ix\xi}(-ix)| = |x||f(x)|$$

sigui integrable, cosa que pot passar o no. Per exemple, si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $|x||f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2}$ no és integrable.

- Suposem que f i $xf(x)$ són integrables. Llavors $\hat{f}(\xi)$ és derivable i

$$\frac{d\hat{f}(\xi)}{d\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)f(x)e^{-ix\xi}\,dx = (-ixf(x))^{\wedge}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Nota. Hi ha un teorema més general de derivació d'una integral que depèn d'un paràmetre, del qual l'enunciat precedent és un cas particular. La idea de la demostració del cas general es veu molt clarament en l'argument que segueix.

Demostració. Escrivim els quocients incrementals de $\hat{f}$ al punt $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-ix(\xi+h)}-e^{-ix\xi}}{h}\,dx.$$

Ara farem que $h \to 0$ a través d'una successió qualsevol $h_n \to 0$. Obtenim

$$f(x)\frac{e^{-ix(\xi+h_n)}-e^{-ix\xi}}{h_n} \xrightarrow{n\to\infty} f(x)e^{-ix\xi}(-ix),$$

per gairebé tot $x \in \mathbb{R}$. Per dominar la convergència escrivim

$$\begin{aligned}\left|f(x)\frac{e^{-ix(\xi+h_n)}-e^{-ix\xi}}{h_n}\right| &= |f(x)|\left|\frac{e^{-ixh_n}-1}{h_n}\right| \\ &= |f(x)||x|\left|\frac{e^{-ixh_n}-1}{xh_n}\right| \\ &= |f(x)||x|\left|\frac{1}{xh_n}\int_0^{xh_n} e^{-it}(-i)\,dt\right| \\ &\le |f(x)||x|.\end{aligned}$$

Com que $|f(x)||x|$ és integrable podem aplicar el teorema de la convergència dominada per concloure que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}(-ix)\,dx,$$

que és el que volíem demostrar. □

Exercici. Donada una funció f integrable a $(0,1)$, posem

$$F(\xi)=\int_0^1 f(x)\cos(x^2\xi)\,dx, \quad \xi\in\mathbb{R}.$$

Demostreu que F és derivable a $\mathbb{R}$ i trobeu una fórmula per la derivada.

Problemes

1. Calculeu els següents límits:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}x\,dx$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n}}$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx\sin x}{1+(nx)^\alpha}\,dx$, $\alpha>1$.

2. Demostreu que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+e^x}\,dx=\int_0^\infty \frac{\cos x}{e^x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nx}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}.$$

3. Sigui α un nombre positiu. Calculeu

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} n\sin\left(\frac{\sin(x^\alpha)}{n^\alpha}\right)\,dx.$$

(*Indicació:* Considereu $0<\alpha<1$, $\alpha=1$ i $1<\alpha$.)

4. Sigui f una funció integrable a $[0,1]$. Demostreu que $x^n f(x)$ és integrable a $[0,1]$ per a tot $n=1,2,\ldots$ i que $\int_0^1 x^n f(x)\,dx$ té límit.

5. Demostreu que existeixen els límits:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}\,dx,\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^n \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

però que $\frac{\sin x}{x}$ no és integrable a $[0,\infty)$. Per això últim noteu que $|\sin x|\geq \frac{1}{2}$ molt sovint per $x>0$.

6. Calculeu

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\cos(x^2+1)e^{-nx}\,dx$$

i

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-nx}\,dx.$$

7. Donada una funció f integrable a $[0,1]$, definim una funció f per

$$f(x)=\int_0^1 \cos(x,y)g(y)\,dy,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Demostreu que f és diferenciable a tot $x\in\mathbb{R}$. Quantes vegades es pot derivar f ?

8. Sigui E un conjunt mesurable de $\mathbb{R}^n$ amb $0<m(E)<\infty$ i posem

$$f_n=\chi_E \text{ si } n \text{ és senar,}$$
$$f_n=\chi_{E^c} \text{ si } n \text{ és parell,}$$

on $E^c=\mathbb{R}^n\setminus E$.

Quina és la rellevància d'aquest exemple en relació al lema de Fatou?

9. Sigui f una funció mesurable, $0\leq f\leq\infty$ amb $\int_{\mathbb{R}^n} f=c$, $0<c<\infty$. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} n\log\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right)dx=\begin{cases}\infty, & 0<\alpha<1\\ c, & \alpha=1\\ 0, & 1<\alpha<\infty\end{cases}.$$

Aquest és un problema del llibre del Rudin "Real and Complex Analysis".

10. Sigui $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt mesurable i $f\colon E \to (0,+\infty)$ una funció integrable. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f^{1/n}(x)\,dx = |E|$$

en els següents casos:

a) Si $f(x) \leq 1$ g.p.t. $x \in E$.
b) Si $f(x) \geq 1$ g.p.t. $x \in E$.
c) En el cas general.

11. Sigui K un compacte de $\mathbb{R}^n$ i, per a tot $n \geq 1$, $f_n\colon K \to \mathbb{R}$ funcions mesurables tals que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ g.p.t. $x \in K$. Suposem que existeix $M > 0$ tal que per a tot n, $\int_K |f_n| \leq M$.

a) Demostreu que f és integrable i mostreu, amb un contraexemple, que en general no és cert que $\lim_{n\to\infty} \int_K |f_n(x)|\,dx = \int_K |f(x)|\,dx$.
b) Demostreu que si la convergència $f_n \to f$ és uniforme es compleix $\lim_{n\to\infty} \int_K |f_n(x)|\,dx = \int_K |f(x)|\,dx$.

12. Sigui $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funció mesurable i fitada tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \delta$. Demostreu que per a tot $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a f(nx)\,dx = a\delta.$$

13. Sigui f una funció integrable a $\mathbb{R}^n$ que pren valors reals. Calculeu

$$\lim_{j\to\infty} j \int_{\mathbb{R}^n} \sin\left(\frac{f(x)}{j}\right) dx.$$

14. a) Comproveu que

$$(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})(x) = (x+2)\chi_{[-2,0]}(x) + (2-x)\chi_{[0,2]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Noteu que la convolució té un efecte "regularitzador": cada factor de la convolució és una funció fitada però no contínua, mentre que la convolució f compleix la condició de Lipschitz (té pendents fitats)

$$|f(x) - f(x)| \leq C|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Sigui g la funció Lipschitziana

$$g(x) = (x+1)\chi_{[-1,0]}(x) + (-1,x)\chi_{[0,1]}(x).$$

Comproveu que

$$(g * \chi_{[-1,1]})(x) = \frac{(x+2)^2}{2}\chi_{[-2,-1]}(x) + \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\chi_{[-1,1]}(x) + \frac{1}{2}(x-2)^2\chi_{[1,2]}(x).$$

La gràfica de la convolució, diguem-ne h, està formada per 3 arcs de paràbola i és de classe C^1 a $\mathbb{R}$, però no és de classe C^2 (la derivada segona no existeix als punts ± 1 i ± 2). Per simplificar els càlculs observeu que g i $\chi_{[-1,1]}(x)$ són funcions parelles i que la convolució de dues funcions parelles és parella.

15. Sigui f una funció mesurable a $(0,1)$ tal que $0 \leq f(x) < 1$ gairebé per tot $x \in (0,1)$. Calculeu $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n$. Suposem ara que f és mesurable a $(0,\infty)$ i compleix la mateixa desigualtat gairebé per tot $x \in (0,\infty)$. Quins són els possibles valors de $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f^n$?

16. Sigui f una funció mesurable $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ amb $\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 < \infty$. Calculeu

$$\lim_{j\to\infty} 2j^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 - \cos\left(\frac{f(x)}{j}\right)\right) dx.$$

5. El Teorema de Fubini-Tonelli

5.1 Tonelli, Fubini i Cavalieri

El teorema de Tonelli permet calcular integrals de funcions mesurables positives $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ en termes d'integrals **iterades**.

Posem $n = p + q$ i escrivim un punt de $\mathbb{R}^n$ com (x,y), amb $x = (x_1,\dots,x_p)$ i $y = (y_1,\dots,y_q)$.

Teorema de Tonelli. *Sigui $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ una funció mesurable no-negativa. Llavors per gairebé tot $x \in \mathbb{R}^p$ la funció $y \to f(x,y)$ és mesurable a $\mathbb{R}^q$ i per gairebé tot $y \in \mathbb{R}^q$ la funció $x \to f(x,y)$ és mesurable de $\mathbb{R}^p$. Les funcions $x \to \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$ i $y \to \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx$ són mesurables a $\mathbb{R}^p$ i $\mathbb{R}^q$ respectivament i tenim*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dm = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Per exemple, si $n = 2$ això redueix el càlcul d'una integral doble a 2 de simples. Per exemple,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|-|y|}\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-|y|}\,dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|y|}\,dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|}\,dy \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\,dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\,dx \right)^2.
\end{aligned}$$

Ara la integral simple és fàcil de calcular:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 2[-e^{-x}]_0^\infty = 2.$$

En el següent exemple es veu que la integral iterada en un sentit es pot calcular i en l'altre no.

Volem calcular $\int_E e^{-x^2}\,dx\,dy$ on

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x\}.$$

Apliquem Tonelli:

$$\int_E e^{-x^2}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\chi_E(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(0,\infty)}(x)e^{-x^2}\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,x]}(y)\,dy\right)\,dx$$
$$= \int_0^\infty e^{-x^2}x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Per altra banda, calculant la integral iterada en l'altra direcció

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\chi_E(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(0,\infty)}(y)\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{(y,\infty)}(x)e^{-x^2}\,dx\right)\,dy$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty e^{-x^2}\,dx\right)\,dy$$

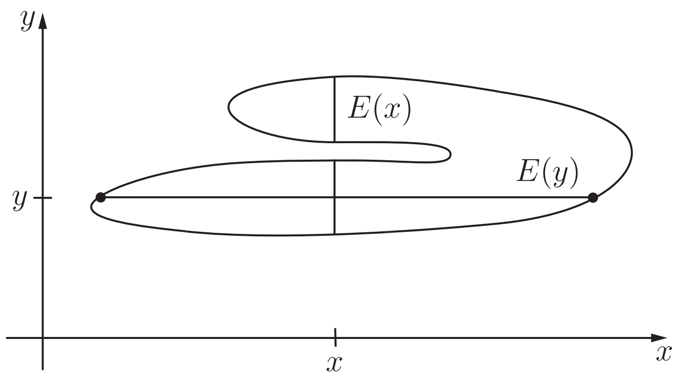
i la integral interior no la podem calcular explícitament perquè la primitiva de e^{-x^2} no es pot expressar en termes de funcions elementals.

El Principi de Cavalieri és el teorema de Tonelli en el cas particular en què la funció $f(x,y)$ és la funció característica $\chi_E(x,y)$ d'un conjunt mesurable E. Per cada $x \in \mathbb{R}^p$ la secció de E per x és

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^q : (x,y) \in E\}.$$

Anàlogament per $y \in \mathbb{R}^q$ posem

$$E(y) = \{x \in \mathbb{R}^p : (x,y) \in E\}.$$



Principi de Cavalieri. *Sigui E un conjunt mesurable a $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Llavors, per gairebé tot $x \in \mathbb{R}^p$, $E(x)$ és mesurable a $\mathbb{R}^q$, la funció $x \to m(E(x))$ és mesurable a R^p i*

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^p} m(E(x))\,dx.$$

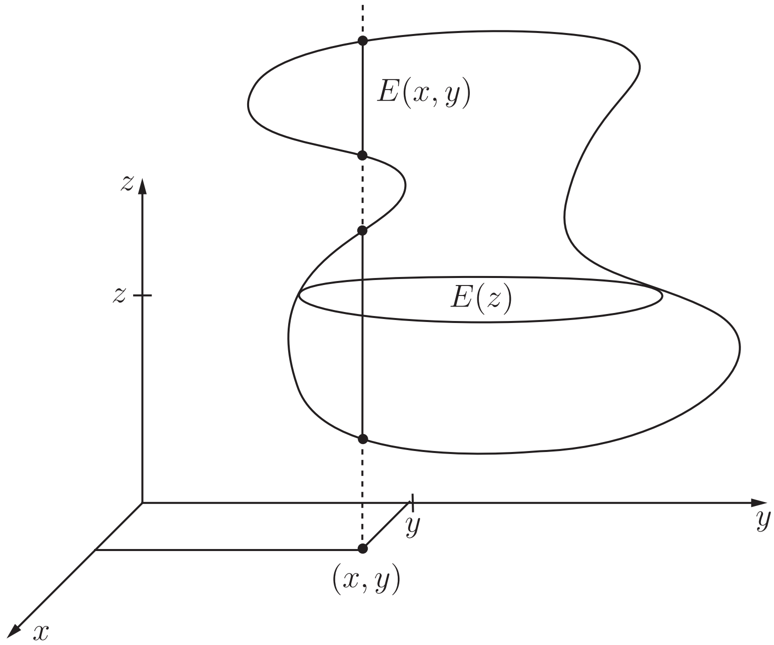
També, per gairebé tot $y \in \mathbb{R}^q$, $E(y)$ és mesurable a $\mathbb{R}^p$, la funció $y \to m(E(y))$ és mesurable a R^q i

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^q} m(E(y))\,dy.$$

Per exemple, si $n = 2$, $p = q = 1$,

$$\text{Àrea}(E) = \int_{\mathbb{R}} \text{longitud}(E(x))\, dx.$$

Si $n = 3$, $p = 2$, $q = 1$,



$$\text{Volum}(E) = \int_{\mathbb{R}} \text{Àrea}(E(z))\, dz = \int_{\mathbb{R}^2} \text{longitud}(E(x,y))\, dx\, dy.$$

Demostració del Principi de Cavalieri. És un argument típic amb conjunts mesurables que consisteix en demostrar l'enunciat primer per rectangles, després per oberts i finalment per conjunts mesurables generals passant abans pels conjunts de mesura 0.

Pas 1. Suposem que E és un rectangle, $E = I \times J$, on I i J són rectangles de $\mathbb{R}^p$ i $\mathbb{R}^q$ respectivament. Llavors, per $x \in \mathbb{R}^p$,

$$E(x) = \begin{cases} J & \text{si } x \in I \\ \emptyset & \text{si } x \notin I. \end{cases}$$

En qualsevol cas $E(x)$ és mesurable. Tenim

$$m(E(x)) = m(J)\chi_I(x)$$

i

$$\int_{\mathbb{R}^p} m(E(x))\, dx = m(J) \cdot m(I) = m(E).$$

Es raona anàlogament començant amb $y \in \mathbb{R}^q$.

Pas 2. E és un obert. Llavors sabem que $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, on els $(Q_j)_{j=1}^{\infty}$ són una successió de rectangles dos a dos disjunts (per una demostració d'aquest fet, veieu l'apèndix d'aquest capítol). Clarament

$$E(x) = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^p,$$

i doncs $E(x)$ és mesurable perquè $Q_j(x)$ és un rectangle. Ara

$$m(E(x)) = \sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j(x)), \quad x \in \mathbb{R}^p,$$

i, aplicant Beppo Levi,

$$\int_{\mathbb{R}^p} m(E(x))\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^p} m(Q_j(x))\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j) = m(E).$$

L'argument és el mateix començant amb $y \in \mathbb{R}^q$.

Pas 3. E compacte. Sigui B una bola oberta $B \supset E$. Llavors $\Omega = B \setminus E$ és obert i

$$E(x) = B(x) \setminus \Omega(x), \quad x \in \mathbb{R}^p,$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} m(E(x))\, dx &= \int_{\mathbb{R}^p} m(B(x))\, dx - \int_{\mathbb{R}^p} m(\Omega(x))\, dx \\ &= m(B) - m(\Omega) = m(E). \end{aligned}$$

Pas 4. E és un conjunt mesurable qualsevol. Sabem que $E = N \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right)$ on $m(N) = 0$ i la successió de compactes $(K_j)_{j=1}^{\infty}$ és creixent ($K_j \subset K_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$). Hem d'entendre què passa amb el conjunt N. Veiem que

$$m^*(N(x)) = 0, \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R}^p. \tag{5.1}$$

És suficient veure que per a qualsevol $\delta > 0$, $m^*\{x \in \mathbb{R}^p : m^*(N(x)) > \delta\} = 0$. Donat $\varepsilon > 0$ agafem un recobriment de N per rectangles $(I_j)_{j=1}^{\infty}$ amb $\sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) < \varepsilon$. Llavors

$$N(x) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j(x)$$

i

$$m^*(N(x)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j(x)).$$

Per Txebitxev

$$
\begin{aligned}
m^*\{x \in \mathbb{R}^p : m^*(N(x)) > \delta\} &\le m\left\{x \in \mathbb{R}^p : \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j(x)) > \delta\right\} \\
&\le \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}^p} \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j(x))\, dx \\
&= \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^p} m(I_j(x))\, dx \\
&= \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) < \frac{\varepsilon}{\delta}
\end{aligned}
$$

i això acaba la demostració de (5.1).

Això ens diu que $E(x) = N(x) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j(x) \right)$ és mesurable per gairebé tot $x \in \mathbb{R}^p$ i $m(K_j(x)) \nearrow m(E(x))$, g.p.t. $x \in \mathbb{R}^p$. Per tant la funció $x \to m(E(x))$ és mesurable i

$$
\int_{\mathbb{R}^p} m(E(x))\, dx = \lim_j \int_{\mathbb{R}^p} m(K_j(x))\, dx = \lim_j m(K_j) = m(E),
$$

tal com volíem demostrar. □

Demostració de Tonelli. Es fa una reducció al cas de funcions característiques de conjunts mesurables. Sabem que hi ha una successió creixent de funcions simples mesurables $(s_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $s_j(x,y) \nearrow f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^n$. Ara cada s_j és una combinació lineal finita de funcions característiques de conjunts mesurables, doncs el teorema de Tonelli val per cada s_j. Ara per passar a $f(x,y)$ es fa servir el teorema de la convergència monòtona. □

El teorema de Fubini és la versió més senzilla possible del teorema de Tonelli per funcions que canvien de signe.

Teorema de Fubini. *Sigui $f\colon \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ una funció integrable i $n = p + q$. Llavors*

(i) Per gairebé tot $x \in \mathbb{R}^p$ la funció $f_x(y) = f(x,y)$, $y \in \mathbb{R}^q$, és mesurable a $\mathbb{R}^q$ i per gairebé tot $y \in \mathbb{R}^q$ la funció $f^y(x) = f(x,y)$, $x \in \mathbb{R}^p$, és mesurable a $\mathbb{R}^p$.

(ii) Les funcions

$$
x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy
$$

$$
y \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dx
$$

són mesurables a $\mathbb{R}^p$ i $\mathbb{R}^q$ respectivament.

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Demostració. Fem una reducció a Tonelli posant $f(x,y)=f^+(x,y)-f^-(x,y)$ i notant que $f_x(y) = (f^+)_x(y) - (f^-)_x(y)$. □

Exemple d'aplicació de Fubini

Demostrarem la següent identitat:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{5.2}$$

Notem que $\frac{\sin x}{x}$ no és integrable a $(0,\infty)$. És mesurable perquè és contínua, però

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \geq \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\pi(n+1)}\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} |\sin(x)|\,dx$$
$$= \int_0^\pi |\sin x|\,dx \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\pi(n+1)} = \infty,$$

degut al fet que $|\sin x|$ és periòdica de període π. La integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ no és, doncs, una integral en el sentit de Lebesgue. Ara, succeeix, com al cas de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, que una funció $f(x)$ pot no ser integrable Lebesgue a l'interval $(0,\infty)$, però pot existir el $\lim_{A\to\infty}\int_0^A f(x)\,dx$, que s'anomena "valor principal (de Cauchy)" de la integral. Un exemple trivial és, canviant $(0,\infty)$ per $(-\infty,\infty)$,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty}\int_{\frac{1}{A}<|x|<A} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to\infty} 0 = 0.$$

L'anàleg en el món de les sèries són les sèries convergents però no absolutament convergents.

Demostració de (5.2). Notem que per $0 < x < \infty$,

$$\int_0^\infty e^{-xy}\,dy = \left[\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_0^\infty = \frac{1}{x}.$$

Ara voldríem escriure

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \sin x \int_0^\infty e^{-xy}\,dy\,dx = \int_0^\infty\int_0^\infty \sin x\, e^{-xy}\,dy\,dx$$

i el problema és que $\sin x\, e^{-xy}$ no és integrable al quadrant $Q = (0,\infty)\times(0,\infty)$. En efecte,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |\sin x| e^{-xy}\,dy\,dx = \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \infty.$$

Però, òbviament, $\sin x\, e^{-xy}$ és integrable a la banda $(0, A) \times (0, \infty)$. Per Fubini

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^A \int_0^\infty \sin x\, e^{-xy}\, dy\, dx = \int_0^\infty \left(\int_0^A \sin x\, e^{-xy}\, dx \right) dy.$$

Volem calcular una primitiva de $\sin x\, e^{-xy}$. Fem dues integracions per parts posant primer $u = \sin x$ i $dv = e^{-xy}\, dy$ i després $u = \cos x$ i $dv = e^{-xy}\, dy$. Concloem que

$$\int \sin x\, e^{-xy}\, dx = -\frac{1}{1+y^2} e^{-xy}(\cos x + y \sin x) + \text{constant}$$

i que

$$\int_0^A \sin x\, e^{-xy}\, dy = \frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-Ay}}{1+y^2}(\cos A + y \sin A).$$

Integrant en y entre 0 i ∞ obtenim

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-Ay}}{1+y^2}(\cos A + y \sin A)\, dy.$$

L'integrand de la integral de la dreta tendeix a 0 quan $A \to \infty$ per cada y. La convergència és dominada perquè per $A \geq 1$

$$\left| \frac{e^{-Ay}}{1+y^2}(\cos A + y \sin A) \right| \leq \frac{e^{-Ay}}{1+y^2}(1+y) \leq e^{-y} \frac{1+y}{1+y^2},$$

que és una funció integrable a $(0, \infty)$. $\square$

Farem una altra aplicació de Fubini a l'estudi de la convolució.

Problemes

1. Demostreu que:

a) Si $N \subset \mathbb{R}^p$ té mesura nul·la a $\mathbb{R}^p$, llavors $N \times \mathbb{R}^q$ té mesura nul·la a $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

b) Si $E \subset \mathbb{R}^p$ i $F \subset \mathbb{R}^q$ són mesurables, llavors $E \times F$ és mesurable a $\mathbb{R}^{p+q}$ i $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.

(*Indicació:* $E \times F = (E \times \mathbb{R}^q) \cap (\mathbb{R}^p \times F)$.)

c) Si f és mesurable sobre $\mathbb{R}^p$ i g és mesurable sobre $\mathbb{R}^q$, $h(x, y) = f(x)g(y)$ és mesurable sobre $\mathbb{R}^{p+q}$. A més si aquestes funcions són positives,

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x)g(y)\, dx\, dy = \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x)\, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^q} g(y)\, dy \right).$$

d) Si f és integrable sobre $\mathbb{R}^p$ i g és integrable sobre $\mathbb{R}^q$, $h(x, y) = f(x)g(y)$ és integrable $\mathbb{R}^{p+q}$, i

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x)g(y)\, dx\, dy = \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x)\, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^q} g(y)\, dy \right).$$

e)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-x_1^2 - \cdots - x_n^2)\, d(x_1, \ldots, x_n) = \pi^{n/2}.$$

2. Sobre un conjunt mesurable $E \subset \mathbb{R}^p$ considerem dues funcions mesurables $\varphi, \psi\colon E \to \mathbb{R}$ tals que $\varphi \le \psi$ i posem
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+1} : x \in E, \quad \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$
Comproveu que A és mesurable i que si f és mesurable no negativa o integrable sobre A, llavors
$$\int_A f(x, y)\, d(x, y) = \int_E \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

3. Sigui
$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad x, y \in [-1, 1]^2.$$

a) Per a $x_0, y_0 \in [-1, 1]$ fixats estudieu si les funcions parcials $f(x, y_0)$, $f(x_0, y)$ són integrables i calculeu les integrals dobles iterades de f a $[-1, 1]^2$.

b) Determineu si f és integrable a $[-1, 1]^2$.

c) Si $E = \{(x, y) : x, y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + (y-1)^2 \ge 1\}$, calculeu
$$\int_E f(x, y)\, dx\, dy.$$

4. Sigui $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}$ i $K \subset [0, 1]$ el conjunt ternari de Cantor. Donats $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ considerem la funció
$$f_{\alpha,\beta}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \in D \text{ i } x^2 + y^2 \notin K, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in D \text{ i } x^2 + y^2 \in K. \end{cases}$$

a) Demostreu que la funció $f_{\alpha,\beta}$ és mesurable.

b) Per a quins valors de α, β la funció $f_{\alpha,\beta}$ és integrable en D?

5. Sigui
$$I := \int_{(0,1)^2} \frac{dx\, dy}{|x - y|^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

a) Justifiqueu la següent igualtat
$$I = 2 \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{dy}{(x - y)^\alpha} \right) dx.$$

b) Calculeu el valor de I.

5.2 Convolució

Donades dues funcions f i g integrables a $\mathbb{R}^n$, la convolució de f i g es defineix com

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy,$$

per aquells x de $\mathbb{R}^n$ tals que el producte $f(x-y)g(y)$ sigui una funció integrable de y. Recordem que el producte de funcions integrables no ho és en general: $\frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1]}(x)$ és integrable a $\mathbb{R}$, però el quadrat $\frac{1}{x}\chi_{[0,1]}(x)$ no ho és. Per tant cal esbrinar per quins x es pot definir $(f * g)(x)$.

Exemple. Sigui $n = 1$, $f = \chi_{[0,1]}$. Llavors

$$(\chi_{[0,1]} * g)(x) = \int \chi_{[0,1]}(x-y)g(y)\,dy = \int_x^{x+1} g(y)\,dy.$$

Fixem-nos que conèixer les mitjanes de g sobre tots els intervals de longitud 1 dóna bastant informació sobre g. Si en comptes de $\chi_{[0,1]}$ agafo $\frac{1}{r}\chi_{[0,r]}(x)$ obtenim

$$\left(\frac{1}{r}\chi_{[0,r]} * g\right)(x) = \frac{1}{r}\int_x^{x+r} g(y)\,dy.$$

Es pot veure que conèixer totes aquestes mitjanes (per a tot $x \in \mathbb{R}$ i tot $r > 0$) determina g. Per exemple si g és contínua, clarament

$$g(x) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_x^{x+r} g(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En conclusió hem de pensar la convolució de f amb g com una "mitjana" de g respecte d'una trasladada de f.

Abans d'estudiar l'existència de $(f * g)(x)$ fem dues observacions preliminars: la mesura de Lebesgue és invariant per traslacions, és a dir,

$$m(a + E) = m(E), \quad a \in \mathbb{R}^n,\ E \text{ mesurable}$$

i per inversió:

$$m(-E) = m(E), \quad E \text{ mesurable}.$$

Doncs, passant de funcions simples a funcions mesurables,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

i

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

si f és integrable.

Els x pels quals $(f * g)(x)$ està ben definida són aquells pels quals

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\,dy < \infty.$$

Integrem en x i apliquem Tonelli:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)||g(y)|\,dy\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,dx\right)|g(y)|\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx\right)|g(y)|\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\,dy<\infty.\end{aligned}$$

Doncs

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)||g(y)|\,dy<\infty, \quad \text{g.p.t. } x\in\mathbb{R}^n,$$

i concloem que $(f*g)(x)$ està definida per g.p.t. $x\in\mathbb{R}^n$.

El problema amb l'argument precedent és que per aplicar Tonelli cal saber que $|f(x-y)||g(y)$ és mesurable a $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Lema. *Si f és mesurable a $\mathbb{R}^n$, les funcions, definides a $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$*

$$h(x,y)=f(y), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,$$

i

$$H(x,y)=f(x-y), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,$$

són mesurables a $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Demostració. La funció h és composició de

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & [-\infty,\infty]\\ (x,y) & \longrightarrow & y & \longrightarrow & f(y).\end{array}$$

Ara, $h^{-1}(\alpha,\infty)=\phi^{-1}(f^{-1}(\alpha,\infty))$, $\alpha\in\mathbb{R}$, i, per tant, cal veure que $\phi^{-1}(E)$ és mesurable a $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ per cada E mesurable de $\mathbb{R}^n$. Sabem que hi ha oberts $G_j\supset G_{j+1}$ tals que $E=\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}G_j\right)\setminus N$ amb $m(N)=0$. Com que ϕ és contínua $\phi^{-1}(G_j)$ és obert per a tot j. Doncs $\phi^{-1}(E)=\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\phi^{-1}(G_j)\right)\cup\phi^{-1}(N)$ serà mesurable sempre que $m(\phi^{-1}(N))=0$.

Ara $\phi^{-1}(N)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n : y\in N\}$.

Veiem que $m(\phi^{-1}(N)\cap Q_M)=0$, per a tot $M>0$, on $Q_M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n : |x_j|\le M,\ 1\le j\le n\}$. Donat $\varepsilon>0$, recobrim N per rectangles $(I_j)_{j=1}^{\infty}$ amb $\sum_{j=1}^{\infty}m(I_j)<\varepsilon$. Posem $\widetilde{I_j}=[-M,M]^n\times I_j$, que és un rectangle amb $m(\widetilde{I_j})=(2M)^n m(I_j)$. Com que $\phi^{-1}(N)\cap Q_M\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}\widetilde{I_j}$ tenim que $m^*(\phi^{-1}(N)\cap Q_M)\le(2M)^n\sum_{j=1}^{\infty}m(I_j)<(2M)^n\varepsilon$.

Un argument semblant dóna la mesurabilitat de H. $\square$

Així doncs $f(x-y)g(y)$ és mesurable a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ i, a més, és integrable a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tal com hem vist més amunt.

Per Fubini, la funció

$$x \longrightarrow \int f(x-y)g(y)\,dy = (f*g)(x)$$

és mesurable a $\mathbb{R}^n$ i, a més, és integrable a $\mathbb{R}^n$ i

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy.$$

Un fet remarcable és que transformada de Fourier i producte de convolució es relacionen de manera perfecta.

Teorema. *Si f i g són funcions integrables a $\mathbb{R}$, llavors*

$$(f*g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Demostració. Aplicant Fubini tenim

$$\begin{aligned}
(f*g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x) e^{-ix\xi}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy \right) e^{-ix\xi}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-i(x-y)\xi} g(y) e^{-iy\xi}\,dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-i(x-y)\xi}\,dx \right) g(y)e^{-iy\xi}\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \right) g(y)e^{-i\xi y}\,dy \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Hi ha versions discretes dels resultats precedents en què la mesurabilitat no hi juga cap paper. Per exemple, donades dues successions $a = (a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ i $b = (b_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ amb índex n que varia a tot $\mathbb{Z}$, tals que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$ i $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n| < \infty$, definim el producte de convolució de a i b com la successió

$$(a*b)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{n-m}b_m.$$

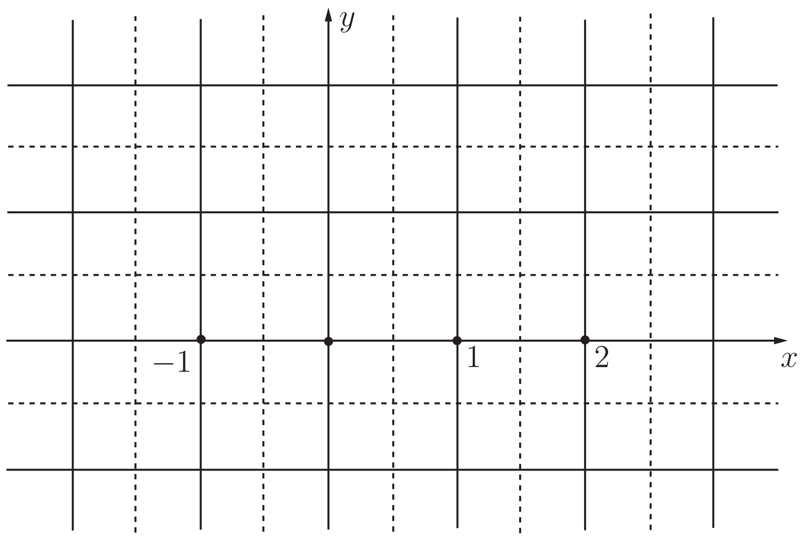
Llavors tenim que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(a*b)(n)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|.$$

Demostreu-ho com a exercici.

5.3 Apèndix: cubs diàdics

Un cub diàdic de mida 1 a $\mathbb{R}^n$ és un cub de costat 1 amb vèrtexs que tenen coordenades enteres.



Un cub diàdic de mida 2^{-N}, $N \in \mathbb{Z}$, és un cub de costat 2^{-N} amb vèrtexs que tenen coordenades de la forma $k2^{-N}$ amb $k \in \mathbb{Z}$.

A la figura es poden veure els cubs diàdics de mida 1 i mida 1/2. Per comoditat considerarem només cubs diàdics tancats per l'esquerra i oberts per la dreta, és a dir, del tipus

$$\prod_{j=1}^{n}[k_j 2^{-N}, (k_j+1)2^{-N}), \quad k_j \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

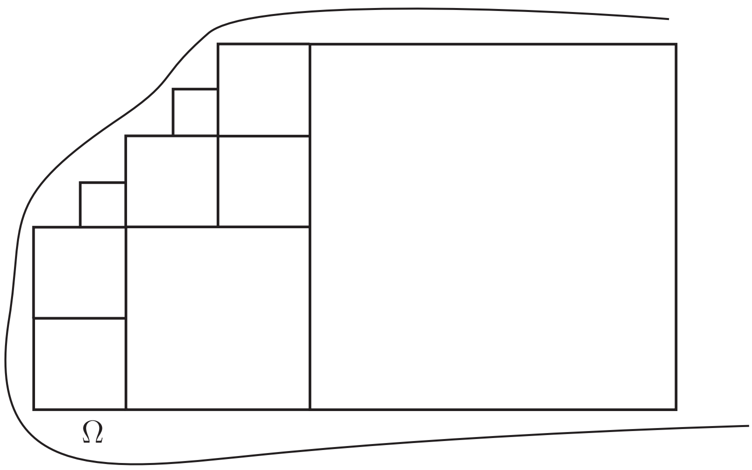
D'aquesta manera els cubs diàdics tenen les següents propietats

(1) Els cubs d'una mida donada són 2 a 2 disjunts i recobreixen $\mathbb{R}^n$.

(2) Donats dos cubs diàdics o són disjunts o un està contingut en l'altre.

Proposició. *Tot obert de $\mathbb{R}^n$ és unió d'una família disjunta de cubs diàdics.*

Demostració. Sigui Ω l'obert i $x \in \Omega$. Per cada N hi ha un únic cub diàdic de mida 2^{-N}, diguem-ne Q_N, que conté x. Com que Ω és obert si N és prou gran $Q_N \subset \Omega$. Per tant Ω és la unió de tots els cubs diàdics que conté. El problema és que aquesta família no és disjunta. Per arreglar-ho procedim de la forma següent. Considerem la família $\mathfrak{Q}_1$ dels cubs diàdics de mida 1 continguts a Ω (pot ser buida). Sigui $\mathfrak{Q}_2$ la família dels cubs diàdics de mida 2^{-1} continguts a Ω però no continguts a cap cub de la família $\mathfrak{Q}_1$. Inductivament definim $\mathfrak{Q}_N$ com la família dels cubs diàdics de mida 2^{-N} continguts a Ω però no continguts a cap cub de la família $\mathfrak{Q}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{Q}_{N-1}$. Poso $\mathfrak{Q} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathfrak{Q}_j$. Llavors $\mathfrak{Q}$ és una família de cubs diàdics dos a dos disjunts que té per unió Ω.



$\square$

6. El Teorema del canvi de variable

6.1 El cas d'una variable: repàs

Suposem que volem calcular $\int_a^b f$ on f és integrable Lebesgue a (a, b). Sabem que sovint el càlcul es simplifica si canviem de variable. Això significa que passem d'una variable antiga x a una de nova y mitjançant una funció diferenciable amb continuïtat

$$\begin{aligned} \phi\colon (\alpha,\beta) &\longrightarrow (a,b) \\ y &\longrightarrow \phi(y) = x \end{aligned}$$

que té una inversa, també diferenciable amb continuïtat,

$$\begin{aligned} \phi^{-1}\colon (a,b) &\longrightarrow (\alpha,\beta) \\ x &\longrightarrow \phi^{-1}(x) = y. \end{aligned}$$

Per exemple, per calcular

$$\int_0^2 e^{-x^2} x\,dx$$

va bé fer el canvi $y = x^2$. Llavors la recepta que sabem consisteix en posar $dy = 2x\,dx$ i substituir la variable x per la nova variable y

$$\int_0^2 e^{-x^2} x\,dx = \int_0^4 e^{-y}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}[-e^{-y}]_0^4 = \frac{1}{2}(1-e^{-4}).$$

Els nous límits d'integració es justifiquen notant que si x es mou entre 0 i 2 $y = x^2$ es mou entre 0 i 4. Aquí el difeomorfisme ϕ és

$$\begin{aligned} \phi\colon (0,4) &\longrightarrow (0,2) \\ y &\longrightarrow x = \phi(y) = \sqrt{y} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \phi^{-1}\colon (0,2) &\longrightarrow (0,4) \\ x &\longrightarrow y = \phi^{-1}(x) = x^2. \end{aligned}$$

El teorema del canvi de variable diu que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(y))\phi'(y)\,dy$$

i la demostració es redueix a notar que si $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$, llavors $F(\phi(y))$ és una primitiva de $f(\phi(y))\phi'(y)$ (per la regla de la cadena) i, doncs,

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(y))\phi'(y)\,dy = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Fixem-nos que estem implícitament suposant que $\alpha < \beta$. Llavors ϕ ha de ser creixent i $\phi'(y) \geq 0$. Però hi ha casos en què ϕ decreix. Per exemple, per calcular

$$\int_0^1 e^{-x}\,dx$$

va bé posar $y = -x$. Llavors $dy = -dx$ i

$$\int_0^1 e^{-x}\,dx = -\int_0^{-1} e^y\,dy$$

on els nous límits d'integració es justifiquen pel fet que si x es mou entre 0 i 1, $-x$ es mou entre 0 i -1. Per conveni es posa $\int_\beta^\alpha g = -\int_\alpha^\beta g$ si $\alpha < \beta$ i, doncs,

$$\int_0^1 e^{-x}\,dx = \int_{-1}^0 e^y\,dy = [e^y]_{-1}^0 = 1 - e^{-1}.$$

En aquest cas

$$\begin{aligned} \phi\colon (-1,0) &\longrightarrow (0,1) \\ y &\longrightarrow x = \phi(y) = -y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^{-1}\colon (0,1) &\longrightarrow (-1,0) \\ x &\longrightarrow y = \phi^{-1}(x) = -x. \end{aligned}$$

Si ϕ decreix el teorema del canvi de variable diu que

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(\phi(y))\phi'(y)\,dy$$

i la demostració és la d'abans.

Com que $\phi'(y)$ és negatiu, $-\phi'(y) = |\phi'(y)|$, així que el teorema del canvi de variable es pot enunciar en una dimensió i sense explicitar si ϕ creix o decreix així:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(y))|\phi'(y)|\,dy.$$

6.2 L'enunciat en dimensions superiors

Siguin U i V dos oberts de $\mathbb{R}^n$ i $\phi\colon U \to V$ un difeomorfisme. Recordem que això significa que ϕ és diferenciable amb continuïtat i té una inversa que també és diferenciable amb continuïtat. La diferencial de ϕ al punt x és la matriu

$$D\phi(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial\phi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial\phi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

on $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$. El determinant de $D\phi(x)$ s'anomena el Jacobià de ϕ al punt x i es denota per $J\phi(x)$.

El teorema del canvi de variable. *Si $f\colon V \to [-\infty,\infty]$ és integrable, llavors $f\circ\phi$ és integrable a U i*

$$\int_V f(x)\,dx = \int_U f(\phi(y))|J\phi(y)|\,dy. \tag{6.1}$$

L'exemple clàssic al pla és el canvi a polars. $U = (0,\infty)\times(0,2\pi)$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0 \text{ i } x \geq 0\}$ i

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & U & \longrightarrow & V \\ & (r,\theta) & \longrightarrow & \phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

Tenim que

$$D\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

i $J\phi(r,\theta) = r$.

Calculem ara, com a exemple, la integral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

Per Tonelli aquesta integral és $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^2$.

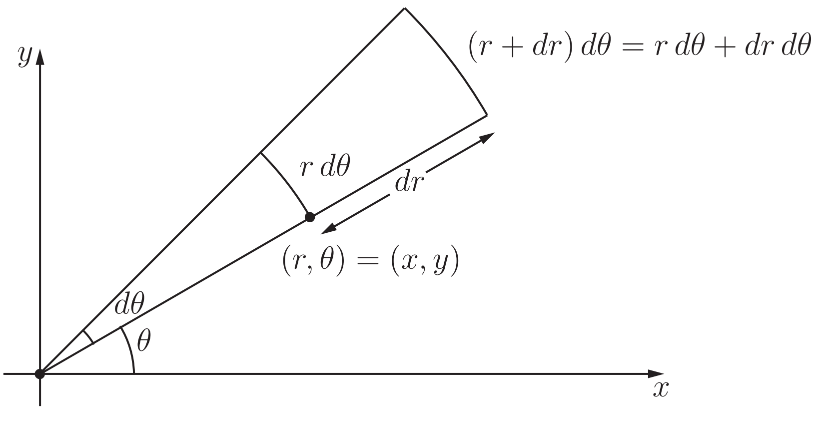
Fent el canvi a polars obtenim

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{(0,2\pi)\times(0,\infty)} e^{-r^2} r\,d\theta\,dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr = \pi.$$

Per tant, s'obté la famosa fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Una manera més intuïtiva d'obtenir la fórmula del canvi a polars $dx\,dy = r\,d\theta\,dr$ es basa en el següent dibuix



En el pla $x - y$ considerem el punt (x,y) que en coordenades polars és (r,θ). L'element d'àrea $dx\,dy$ es pot obtenir incrementant l'angle θ per una quantitat $d\theta$ i la distància a l'origen r per una quantitat dr. Les "dues dimensions" de $dx\,dy$ són $r\,d\theta$ i dr i, doncs, $r\,d\theta\,dr$ és aproximadament $dx\,dy$. És clar que hi ha un error, que pot ser despreciat, perquè també podem prendre com a "dues dimensions" de $dx\,dy$, dr i $(r+dr)\,d\theta = r\,d\theta + dr\,d\theta$ i, doncs,

$$dx\,dy = r\,d\theta\,dr + (dr)^2\,d\theta$$

i l'error $(dr)^2\,d\theta$ és d'un ordre més petit i, en conseqüència, despreciable. L'error desapareix a l'integrar.

Exercici. Calculeu el jacobià del canvi a coordenades cilíndriques i esfèriques a $\mathbb{R}^3$ i feu l'argument intuïtiu corresponent.

6.3 Reduccions per la demostració de la fórmula del canvi de variable

Discutim la fórmula (6.1). La primera cosa que observem és que podem suposar que $f \geq 0$, passant a f^+ i f^-. La segona és que només cal demostrar la desigualtat

$$\int_V f \leq \int_U (f \circ \phi)|J\phi|. \tag{6.2}$$

La raó és que aplicant (6.2) a ϕ^{-1} i a la funció $g = (f \circ \phi)|J\phi|$ obtenim

$$\int_U (f \circ \phi)|J\phi| \leq \int_V f\left(|J\phi| \circ \phi^{-1}\right)|J\phi^{-1}| = \int_V f.$$

Ara la demostració de (6.2) es redueix, per l'argument habitual de funcions simples, al cas $f = \chi_E$, on E és un subconjunt mesurable de V. És a dir, posant $F = \phi^{-1}(E)$, hem de veure que F és un subconjunt mesurable de U i que

$$m(\phi(F)) \leq \int_F |J\phi|. \tag{6.3}$$

Equivalentment, s'ha de veure que si F és un subconjunt mesurable de U llavors $\phi(F)$ és un conjunt mesurable de V i val (6.3).

Ara, podem expressar F com $F = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j\right) \setminus N$ on els G_j són oberts que decreixen i N té mesura nul·la. Així que només cal veure que (6.3) val per $F = G$ obert (notem que $\phi(G)$ també és obert perquè ϕ és oberta) i que $\phi(N)$ té mesura nul·la si N té mesura nul·la. Expressant un obert G com a unió de quadrats amb interiors disjunts reduim (6.3) per un obert al cas $F = Q$ quadrat. De fet, de propina, la fórmula (6.3) per oberts ja dóna que $m^*(\phi(N)) = 0$ si $m^*(N) = 0$. La raó és que si $m^*(N) = 0$, llavors donat $\varepsilon > 0$ puc trobar un obert G tal que $U \supset G \supset N$ i $m(G) < \varepsilon$. Doncs

$$m^*(\phi(N)) \leq m(\phi(G)) \leq \int_G |J\phi|.$$

Si $|J\phi|$ és una funció fitada per M a U,

$$m^*(\phi(N)) \leq M m(G) < \varepsilon M,$$

que dóna $m^*(\phi(N)) = 0$. Ara, canviant U per l'obert

$$U_m = \{x \in U : |J\phi(x)| < m\}$$

podem suposar que $|J\phi|$ és fitada a U (noteu que la unió dels U_m, $m = 1, 2, \ldots$ és U).

En resum, es pot reduir (6.3) al cas en què $F = Q$ és un quadrat i aquest és el cas que tractarem en detall.

6.4 El cas de canvis de variable lineals

Primer considerarem el cas en què $\phi = L$ és una aplicació lineal invertible de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Sigui Q un quadrat, ℓ la longitud del costat i a el vèrtex inferior esquerre (el lector pot concentrar-se en el pla, però l'argument funciona en qualsevol dimensió). Llavors $Q = a + \ell\, Q_0$ on Q_0 és el quadrat unitat $[0,1]^n$. Per linealitat

$$L(Q) = L(a) + \ell L(Q_0)$$

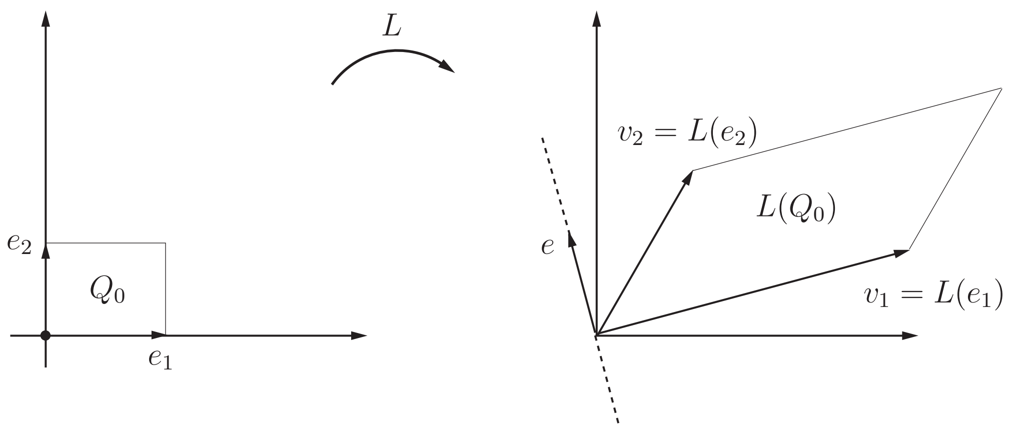
i

$$m(L(Q)) = \ell^n m(L(Q_0)) = m(L(Q_0))m(Q).$$

Així que hem de veure que

$$m(L(Q_0)) = |\det L|. \tag{6.4}$$

Demostració de (6.4) *per* $n = 2$.



$L(Q_0)$ és un rombe, generat pels vectors $v_1 = L(e_1)$ i $v_2 = L(e_2)$. La seva àrea $m(L(Q_0))$ és el producte de la base $\|v_1\|$ per l'altura $|\langle v_2, e\rangle|$ on e és un vector unitari perpendicular a v_1 i $\langle\ ,\ \rangle$ és el producte escalar. Per altra banda

$$v_2 = \langle v_2, e\rangle e + w$$

on w és un múltiple de v_1.

Doncs

$$\begin{aligned}
\det L = \det(v_1, v_2) &= \det(v_1, \langle v_2, e\rangle e + w) \\
&= \det(v_1, \langle v_2, e\rangle e) + 0 \\
&= \langle v_2, e\rangle \det\left(\|v_1\| \frac{v_1}{\|v_1\|}, e\right) \\
&= \langle v_2, e\rangle \|v_1\| \det\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, e\right).
\end{aligned}$$

Com que $\frac{v_1}{\|v_1\|}$ i e són dos vectors unitaris perpendiculars, el seu determinant és ± 1. Així que

$$|\det L| = |\det(v_1, v_2)| = |\langle v_2, e\rangle| \|v_1\| = m(L(Q_0)). \qquad \square$$

Per demostrar (6.4) en dimensions superiors primer cal veure que la mesura de Lebesgue és invariant per isometries lineals (aplicacions lineals que conserven la distància euclidiana), és a dir que si L és una isometria lineal, llavors

$$m(L(E)) = m(E), \quad E \text{ mesurable} \subset \mathbb{R}^n. \tag{6.5}$$

Sigui, doncs, L una isometria i demostrem (6.5). Clarament L transforma una bola en una altra bola del mateix radi i, doncs, (6.5) val per boles. La identitat

$$m(L(Q)) = m(L(Q_0))\, m(Q)$$

es transporta de quadrats a boles, perquè una bola oberta és una unió disjunta d'una família numerable de quadrats. Doncs

$$m(L(B))) = m(L(Q_0))\, m(B)$$

si B és una bola. Aplicant-ho al cas en què L és una isometria obtenim $m(L(Q_0)) = 1$. Per altra banda sabem que les isometries tenen determinant ± 1. Doncs (6.4) val per les isometries lineals.

Ara és fàcil demostrar el cas general de (6.4). Notem que $L(Q_0)$ és el paral·lelepípede generat per $v_1 = L(e_1), \ldots, v_n = L(e_n)$, on e_j és el vector que té totes les components nul·les excepte la j-èsima que és 1. Anomenem $P(v_1, \ldots, v_n) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j v_j : 0 \leq t_j \leq v_j \right\}$ el paral·lelepípede generat per $v_1, \ldots, v_n$. Cal veure que

$$\text{Volum}\, P(v_1, \ldots, v_n) = |\det(v_1, \ldots, v_n)|. \tag{6.6}$$

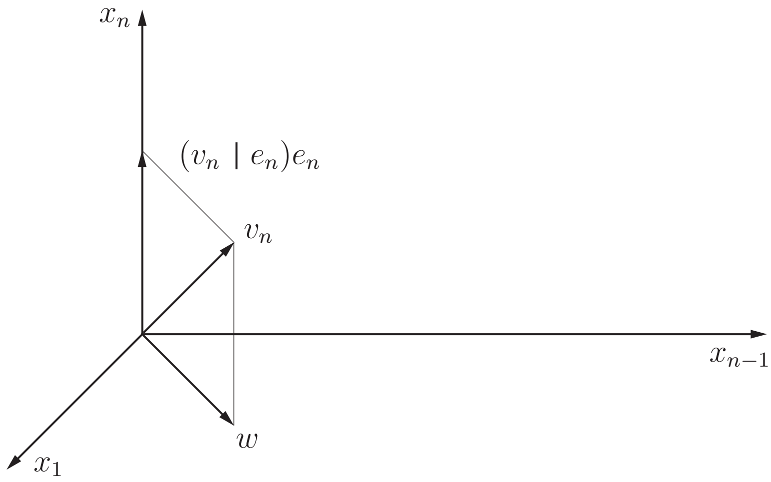
Demostració. Fent una rotació (isometria amb determinant 1) puc suposar que $v_1, \ldots, v_{n-1}$ són a l'hiperplà $x_n = 0$.

Clarament

$$v_n = \langle v_n \mid e_n\rangle e_n + w$$

on $w \in \{x_n = 0\}$. Ara $\det(v_1, \ldots, v_n) = \langle v_n \mid e_n\rangle \det(v_1, \ldots, v_{n-1})$ i, per hipòtesi d'inducció,

$$|\det(v_1, \ldots, v_n)| = |\langle v_n \mid e_n\rangle|\, \text{Vol}(P(v_1, \ldots, v_{n-1})).$$



Aplicant el principi de Cavalieri al paral·lelepípede $P(v_1, \dots, v_n)$ obtenim que

$$\mathrm{Vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\langle v_n \mid e_n \rangle| \, \mathrm{Vol}(P(v_1, \dots, v_{n-1}))$$

la qual cosa acaba la demostració de (6.6). □

6.5 Reducció al cas lineal

Ens queda per demostrar que

$$m(\phi(Q)) \leq \int_Q |J\phi(x)| \, dx$$

si Q és un quadrat tancat $\subset U$.

Concentrem-nos en el cas $n = 2$. Com que ϕ és diferenciable amb continuïtat

$$\phi(x) = \phi(a) + D\phi(a)(x - a) + E(x, a)$$

on l'error $E(x, a)$ té la propietat que

$$\frac{|E(x - a)|}{|x - a|} \xrightarrow{x-a} 0, \quad \text{uniformement en } a.$$

Així que, donat $\varepsilon > 0$ hi ha δ tal que si x, $a \in Q$ i $|x - a| < \delta$, llavors $|E(x, a)| \leq \varepsilon |x - a|$.

Ara partim Q en N^2 quadrats Q_j (N^n cubs si som a $\mathbb{R}^n$) de costat $\ell(Q)/N$. Triem el número N prou gran de manera que

$$\mathrm{diam}(Q_j) = \sqrt{2} \frac{\ell(Q_j)}{N} < \delta$$

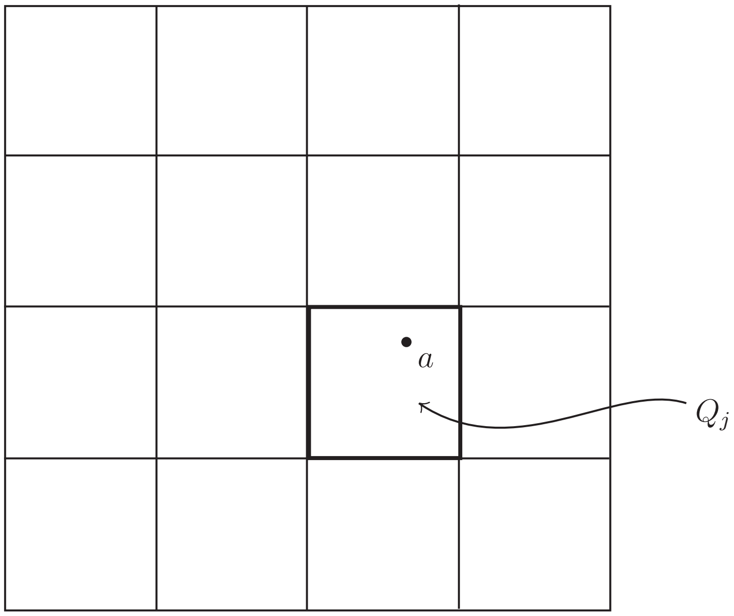
($\sqrt{2}$ es canvia per $\sqrt{n}$ a $\mathbb{R}^n$).

Fixem un Q_j i agafem un punt a de Q_j tal que

$$|J\phi(a)| \leq |J\phi(x)|, \quad x \in Q_j.$$

Tenim

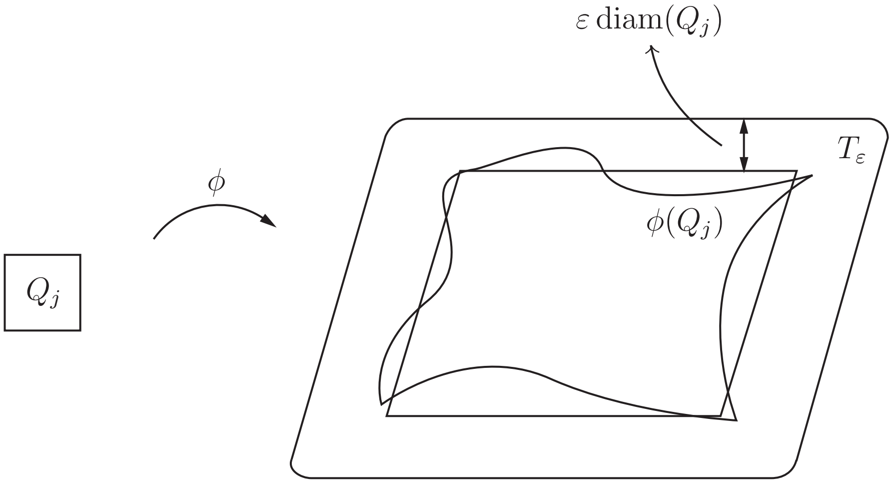
$$\phi(Q_j) = \phi(a) + D\phi(a)(Q_j - a) + E(Q_j, a)$$



i doncs

$$\phi(Q_j) \subset (\phi(a) + D\phi(a)(Q_j - a)) \cup T_\varepsilon \tag{6.7}$$

on T_ε és el "tub" d'amplada $\varepsilon \operatorname{diam}(Q_j)$ al voltant del rombe $\phi(a) + D\phi(a)(Q_j - a)$. Notem que el tub T_ε té dues "dimensions", una



és $\varepsilon \operatorname{diam}(Q_j)$ i l'altra és

$$\text{diàmetre}(\phi(a)+D\phi(a)(Q_j-a)) = \sup_{y,z\in Q_j} |D\phi(a)(y-z)| \leq \|D\phi(a)\| \operatorname{diam} Q_j.$$

Com que $\|D\phi(x)\| \leq C$, $x \in Q$, perquè Q és compacte i $D\phi(x)$ és contínua, concloem que la segona dimensió de T_ε és menor que $C \operatorname{diam} Q_j$. Doncs

$$m(T_\varepsilon) \leq C\, \varepsilon\, m(Q_j)$$

on C és una constant que no depèn de ε i j. Llavors de (6.7), aplicant el cas lineal, obtenim

$$m(\phi(Q_j)) \leq |J\phi(a)| m(Q_j) + C\, \varepsilon\, m(Q_j) \leq \int_{Q_j} |J(x)|\, dx + C\, \varepsilon\, m(Q_j),$$

perquè $|J\phi|$ es minimitza sobre Q_j al punt a. Sumant sobre j

$$m(\phi(Q)) \leq \int_Q |J(x)|\,dx + C\,\varepsilon\, m(Q)$$

i fent $\varepsilon \to 0$

$$m(\phi(Q)) \leq \int_Q |J(x)|\,dx.$$

Nota. L'argument per la fitació de l'àrea del tub T_ε ha consistit en multiplicar les dues "dimensions" de T_ε, que són $\varepsilon\,\mathrm{diam}(Q_j)$ i la segona que es pot fitar per $C\,\mathrm{diam}(Q_j)$. Certament hi ha un element intuïtiu en el raonament precedent. Es pot fer un argument més rigorós considerant una xarxa de quadrats disjunts que cobreixin el pla, de costat $\varepsilon\,\mathrm{diam}(Q_j)$. Es recobreix T_ε per aquells quadrats de la xarxa que intersecten T_ε i llavors es compta el nombre màxim d'aquests quadrats, que resulta ser inferior a $\frac{C}{\varepsilon}$ per certa constant C. Doncs l'àrea de T_ε és menor que $\frac{C}{\varepsilon}(\varepsilon\,\mathrm{diam}(Q_j))^2 = C\,\varepsilon\,\mathrm{diam}(Q_j)^2$.

Problemes

1. Sigui $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfisme C^1 tal que $|D_F(x)| \leq r < 1$, per a tot $x \in A$. Es denota per F^k la composició $F \circ F \circ \overset{k}{\cdots} \circ F$. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt mesurable i fitat tal que $F(A) \subset A$, demostreu que

$$\left| \bigcap_k F^k(A) \right| = 0.$$

2. Sigui $f(x) = \frac{1}{1+|x|^\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^n$ amb $n = 1, 2$ o 3 i $\alpha > n$. Demostreu que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Part II

Anàlisi funcional

7. Normes a $\mathbb{R}^n$ i a $\mathbb{C}^n$

Els espais vectorials $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ tenen una estructura molt rica. En particular, a $\mathbb{R}^n$ hi tenim un producte escalar (que dóna l'angle entre 2 vectors)

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \tag{7.1}$$

on $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ són vectors de $\mathbb{R}^n$. A $\mathbb{C}^n$ hi ha un producte hermític

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j, \tag{7.2}$$

on $z = (z_1, \ldots, z_n)$ i $w = (w_1, \ldots, w_n)$ són de $\mathbb{C}^n$.

El producte escalar a $\mathbb{R}^n$ és bilineal i

$$\langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geq 0.$$

Anàlogament el producte hermític a $\mathbb{C}^n$ és $\mathbb{C}$-lineal en la primera variable i $\mathbb{C}$-anti-lineal en la segona (els escalars surten fora conjugats):

$$\langle z, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle z, w\rangle, \quad z, w \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

La no linealitat en la segona variable és el preu que s'ha de pagar per tal que

$$\langle z, z\rangle = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \geq 0.$$

Sabem que

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{7.3}$$

i

$$\|z\| = \langle z, z\rangle^{1/2}, \quad z \in \mathbb{C}^n \tag{7.4}$$

són normes a $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ respectivament (s'anomenen normes euclidianes).

Recordem que una norma a un espai vectorial E sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ és una aplicació

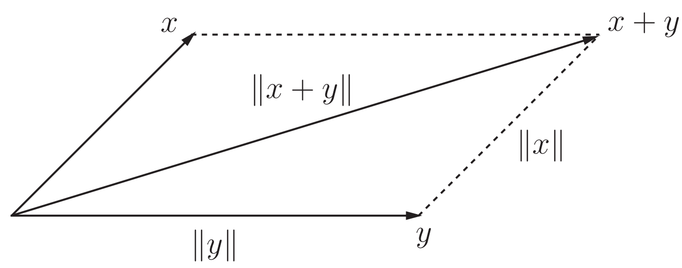
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \|x\| \end{array}$$

que compleix les tres condicions següents:

(1) $\|x\| \geq 0$ i $\|x\| = 0$ si i només si $x = 0$.

(2) La desigualtat triangular:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in E.$$



Com indica la figura, la desigualtat triangular diu que un costat d'un triangle és més petit que la suma dels altres dos.

(3) Homogeneitat: $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $x \in E$, on λ és un escalar (real o complex, segons que E sigui un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$).

L'arrel quadrada a (7.3) i (7.4) fa que valgui la propietat (3). No és immediat demostrar que l'expressió (7.3) compleix la desigualtat triangular:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Presentarem ara un argument per demostrar la desigualtat precedent, que s'anomena la desigualtat de Minkowski, que té l'avantatge que s'estén a situacions més generals. Farem primer el cas de $\mathbb{R}^n$ i després indicarem les variacions que cal fer per obtenir la desigualtat anàloga $\mathbb{C}^n$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |z_j + w_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comencem demostrant la desigualtat de Schwarz:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{7.5}$$

Demostració. Recordem la desigualtat elemental

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Apliquem-ho a x_j, y_j i sumem en j:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ara homogeneitzem, és a dir, apliquem la desigualtat precedent a

$$x' = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{i} \quad y' = \frac{y}{\|y\|}.$$

Obtenim

$$\frac{1}{\|x\|\|y\|} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \frac{1}{2}(\|x'\|^2 + \|y'\|^2) = 1,$$

o sigui

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|.$$

Aplicant-ho a $-x$ enlloc de x:

$$-\langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|,$$

d'on es dedueix (7.5). $\square$

Ara demostrem la desigualtat de Schwarz per $\mathbb{C}^n$:

$$|\langle z, w \rangle| \leq \|z\|\|w\|, \quad z, w \in \mathbb{C}^n. \tag{7.6}$$

Demostració. Notem que $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ és també un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$. Identifiquem $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ amb $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ on $z_j = x_j + iy_j$, $1 \leq j \leq n$. Ara l'expressió $\mathrm{Re}\langle z, w \rangle$ és el producte escalar sobre aquest espai vectorial real, com és fàcil de comprovar. Doncs

$$\mathrm{Re}\langle z, w \rangle \leq \|z\|\|w\|. \tag{7.7}$$

El nombre complex $\langle z, w \rangle$ es pot escriure com $\langle z, w \rangle = re^{i\theta}$ on $r \geq 0$ i $\theta \in [0, 2\pi]$. Apliquem (7.7) a $ze^{-i\theta}$ i w:

$$|\langle z, w \rangle| = \mathrm{Re}\langle e^{-i\theta} z, w \rangle \leq \|e^{-i\theta} z\|\|w\| = \|z\|\|w\|. \qquad \square$$

Fi de la demostració de la desigualtat triangular per la norma euclidiana. Tenint en compte que $\langle w, z\rangle = \overline{\langle z, w\rangle}$,

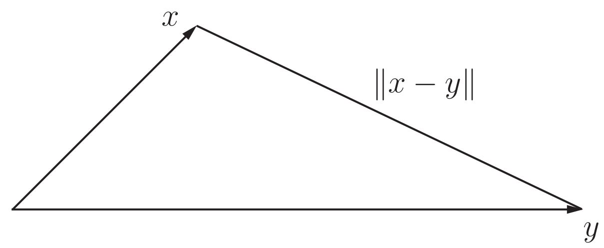
$$\begin{aligned}\|z+w\|^2 &= \|z\|^2 + \|w\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle z, w\rangle \\ &\le \|z\|^2 + \|w\|^2 + 2\|z\|\|w\| \\ &= (\|z\| + \|w\|)^2.\end{aligned}$$

□

□

Una norma a un espai vectorial E indueix una distància a E posant

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in E.$$



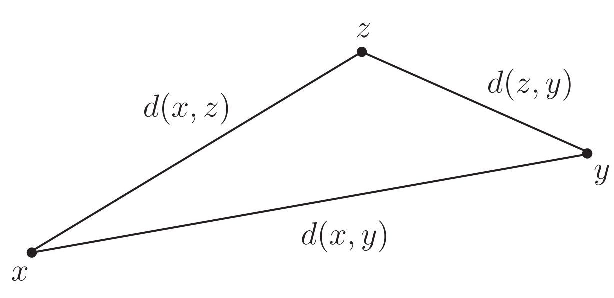
És immediat que es compleixen les propietats que defineixen una distància a un conjunt:

(1) $d(x, y) \ge 0$ i $d(x, y) = 0$ si i només si $x = y$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in E$.

(3) Desigualtat triangular

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in E.$$



Així que tenim a E la topologia induïda per aquesta distància i també les nocions de successió de Cauchy i de successió convergent.

En el cas que E sigui $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ i la norma la euclidiana tenim espais mètrics complets (tota sucessió de Cauchy és convergent).

Una observació important és que hi ha altres normes naturals a $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ que donen la mateixa noció de convergència.

Per exemple,

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

o

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |x_j|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

o les mateixes expressions a $\mathbb{C}^n$. Hi ha desigualtats elementals, que el lector hauria de demostrar com a exercici, entre les tres normes introduides. Són

$$\|x\|_\infty \le \|x\| \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.8}$$

Pel vector $(1, 0, \dots, 0)$ hi ha igualtat a les primeres dues desigualtats i pel vector $(1, 1, \dots, 1)$ hi ha igualtat a la tercera.

Exercici. Demostreu que

$$\|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

i què val la igualtat per cert vector.

Les desigualtats (7.8) mostren fàcilment que les nocions de successió de Cauchy o de sucessió convergent per les normes $\| \ \|$, $\| \ \|_1$ i $\| \ \|_\infty$ coincideixen. Així que diferents normes a un espai vectorial poden induir-hi la mateixa estructura topològica.

Problemes

1. Demostreu que tota norma a $\mathbb{R}^n$ és equivalent a la norma euclidiana, és a dir, que si $\| \ \|_*$ és una norma a $\mathbb{R}^n$ i $\| \ \|$ és la norma euclidiana, llavors hi ha una constant $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C}\|x\| \le \|x\|_* \le C\|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Indicació: Comproveu que $\|x\|_*$ és una funció contínua a $\mathbb{R}^n$ i restringiu-la a l'esfera unitat.

8. Espais de Banach

Un espai de Banach és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ dotat d'una norma tal que l'espai mètric induït és complet. Òbviament $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ són espais de Banach dotats de la norma euclidiana o de les normes $\| \|_1$ i $\| \|_\infty$. Veurem ara altres exemples en dimensió infinita.

Exemple 3. $C(K)$.

Donat un compacte $K \subset \mathbb{R}^n$ sigui $C(K)$ l'espai vectorial de les funcions contínues sobre K a valors reals (també podem considerar les funcions contínues a valors complexos i llavors obtenim un espai vectorial complex). Definim, per $f \in C(K)$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

que es comprova fàcilment que és una norma a $C(K)$. Resulta que $C(K)$ dotat d'aquesta norma és un espai de Banach. Per demostrar-ho prenem una successió de Cauchy $(f_n)_{n=1}^\infty$ a $C(K)$ i veiem que és convergent. La condició de Cauchy a $C(K)$ és: per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha un nombre natural n_0 tal que

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon, \quad n, m \geq n_0.$$

Fixem un $x \in K$. Obtenim que donat $\varepsilon > 0$ hi ha n_0 tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon, \quad n, m \geq n_0. \tag{8.1}$$

Així que la successió de nombres reals $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ és de Cauchy. Com que $\mathbb{R}$ és complet hi ha el $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, que anomenem $f(x)$. Hem definit, doncs, una funció f sobre K i volem veure que f és contínua a K i que $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ a $C(K)$.

Fent que $m \to \infty$ a (8.1) obtenim

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0. \tag{8.2}$$

Això ens diu que $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ uniformement a K. Com que el límit uniforme de funcions contínues és una funció contínua, deduim que $f \in C(K)$. Prenent suprem sobre $x \in K$ a (8.2) concloem que, donat $\varepsilon > 0$, hi ha n_0 tal que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0,$$

o sigui $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ a $C(K)$.

Notem que hem vist, en particular, que convergència per la norma de $C(K)$ és el mateix que convergència uniforme a K.

Exemple 4. ℓ^1 i ℓ^∞.

L'espai ℓ^1 és el conjunt de les successions $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ de nombres reals (o complexos) tals que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. Posant

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

obtenim una norma (és clar que ℓ^1 és un espai vectorial).

L'espai ℓ^∞ és el conjunt de les successions $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ de nombres reals (o complexos) que són fitades, és a dir, tals que

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \le n} |x_n| < \infty.$$

L'expressió precedent és una norma a ℓ^∞ (que clarament és un espai vectorial). Noteu que ℓ^1 i ℓ^∞ són versions de dimensió infinita de $\mathbb{R}^n$ dotat de la norma $\| \ \|_1$ i $\| \ \|_\infty$ respectivament. Els espais ℓ^1 i ℓ^∞ dotats de les corresponents normes són de Banach. L'argument per ℓ^∞ és una variant del que ja hem discutit a l'Exemple 3 i no hi insistim.

Demostració que ℓ^1 és complet. Hem de considerar una successió d'elements de ℓ^1 que sigui de Cauchy per la norma $\| \ \|_1$. Aquesta successió és una successió de successions i es crea un problema de notació. Podríem denotar la primera successió per $(x_p^{(1)})_{p=1}^\infty$, la segona per $(x_p^{(2)})_{p=1}^\infty$ i la n-èsima per $(x_p^{(n)})_{p=1}^\infty$. Hi ha una alternativa que simplifica una mica la notació que consisteix en recordar que una successió x és una funció definida a $\mathbb{N}$, o a $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ si vull començar per $n = 1$. El valor près per x a n és $x(n)$ i la successió és $(x(n))_{n=1}^\infty$. Per tant puc denotar per $(x_n)_{n=1}^\infty$ una successió d'elements de ℓ^1.

La sucessió n-èsima és

$$x_n(1), x_n(2), \ldots, x_n(p), \ldots$$

La relació amb la notació anterior és $x_n(p) = x_p^{(n)}$, de tal manera que x_n és la successió $(x_p^{(n)})_{p=1}^\infty$.

Suposem ara que la successió $(x_n)_{n=1}^\infty$ és de Cauchy a ℓ^1 i demostrem que és convergent a ℓ^1. Veurem que per cada $p = 1, 2, \ldots$ existeix $\lim_{n\to\infty} x_n(p)$, que denotarem per $x(p)$. Després comprovarem que la successió x és de ℓ^1 i que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ a ℓ^1.

La condició de Cauchy a ℓ^1 és: per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha un nombre natural n_0 tal que

$$\|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon, \quad n, m \ge n_0.$$

Donat $p = 1, 2, \ldots$ notem que

$$|x_n(p) - x_m(p)| \le \sum_{q=1}^{\infty} |x_n(q) - x_m(q)| = \|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon \qquad (8.3)$$

sempre que $n, m \geq n_0$. Concloem que la successió $(x_n(p))_{n=1}^{\infty}$ és de Cauchy a $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) i, per tant, té un límit $x(p)$. Fent que $m \to \infty$ a (8.3) obtenim

$$\sum_{q=1}^{\infty} |x_n(q) - x(q)| \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0. \tag{8.4}$$

Doncs $x_n - x \in \ell^1$, $n \geq n_0$, i per tant $x = x - x_n + x_n \in \ell^1$, perquè ℓ^1 és un espai vectorial. Notem que (8.4) diu que $\|x_n - x\|_1 \leq \varepsilon$, $n \geq n_0$, és a dir, que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ a ℓ^1. $\square$

Exemple 5. ℓ^2.

Aquest espai és una variant de ℓ^1 que més endavant reconeixerem com el prototip d'espai de Hilbert. L'espai ℓ^2 consisteix en les succession reals (o complexes) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ "de quadrat sumable", és a dir, tals que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Que ℓ^2 és un espai vectorial es dedueix de la desigualtat elemental

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Posem, per $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$,

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{1/2}.$$

Per la desigualtat de Minkowski

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 \right)^{1/2}$$

i, fent que $n \to \infty$, deduïm

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2, \quad x, y \in \ell^2,$$

que és la desigualtat triangular a ℓ^2. Resulta que ℓ^2 dotat de la norma $\| \ \|_2$ és un espai de Banach.

Demostració. L'argument és una variació del que ja hem vist per ℓ^1. La condició de Cauchy per la successió $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de ℓ^2 és: donat $\varepsilon > 0$ hi ha un nombre natural n_0 tal que

$$\|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon, \quad n, m \geq n_0. \tag{8.5}$$

Fix $p = 1, 2, \ldots$, obtenim que

$$|x_n(p) - x_m(p)| \leq \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon, \quad n, m \geq n_0,$$

que és la condició de Cauchy per la successió numèrica $(x_n(p))_{n=1}^{\infty}$. Doncs existeix $x(p) = \lim_{n\to\infty} x_n(p)$. Fent que $m \to \infty$ a (8.5) obtenim

$$\|x_n - x\|_2 \leq \varepsilon, \quad n, m \geq n_0, \tag{8.6}$$

d'on deduim que $x_{n_0} - x \in \ell^2$ i, doncs, que $x \in \ell^2$. Ara (8.6) diu que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ a ℓ^2. $\square$

Exercici. Demostreu la desigualtat de Schwarz a ℓ^2: si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ són successions de ℓ^2, llavors $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$ és absolutament convergent i

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Exemple 6. $C^1[a, b]$.

Sigui $C^1[a, b]$ l'espai de les funcions reals (o complexes) que són contínuament diferenciables amb continuïtat a l'interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Posem

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad f \in C^1[a, b],$$

on les normes del suprem són sobre $[a, b]$. Clarament $\| \ \|_{C^1}$ és una norma a $C^1[a, b]$. Es tracta de veure que $C^1[a, b]$ és complet. La condició de Cauchy per la successió $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funcions de $C^1[a, b]$ és: donat $\varepsilon > 0$ existeix un nombre natural n_0 tal que

$$\|f_n - f_m\|_{C^1} < \varepsilon, \quad n, m \geq n_0. \tag{8.7}$$

En particular

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon, \quad n, m \geq n_0$$

i

$$\|f_n' - f_m'\|_\infty < \varepsilon, \quad n, m \geq n_0.$$

Com que ja sabem que $C[a, b]$ és complet hi ha funcions $f, g \in C[a, b]$ tals que

$$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \text{ uniformement a } [a, b]$$

i

$$f_n' \xrightarrow{n\to\infty} g \text{ uniformement a } [a, b].$$

Veiem que $f \in C^1[a, b]$ i que $f' = g$. Pel Teorema fonamental del càlcul

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\, dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Fent $n \to \infty$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\, dt, \quad a \leq x \leq b,$$

i, com que g és contínua,

$$f'(x) = g(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Fent que $m \to \infty$ a (8.7):

$$\|f_n - f\|_{C^1} = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty \leq \varepsilon, \quad n, m \geq n_0,$$

la qual cosa diu que $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ a $C^1[a, b]$.

Exercici. Sigui $C^2[a, b]$ l'espai de les funcions dues vegades contínuament diferenciables a $[a, b]$ amb la norma

$$\|f\|_{C^2} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty.$$

Demostreu que $C^2[a, b]$ és un espai de Banach.

Exemple 7. $L^1(E)$.

Sigui $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt mesurable i posem

$$\mathcal{L}^1(E) = \left\{ f\colon E \longrightarrow [-\infty, \infty] : f \text{ mesurable i } \int_E |f| < \infty \right\}.$$

Sabem que $\mathcal{L}^1(E)$ és un espai vectorial.

L'expressió

$$\|f\|_1 = \int_E |f|$$

compleix la desigualtat triangular, és homogènea, però $\|f\|_1 = 0$ no implica $f = 0$ a E, sinó només $f = 0$ g.p.t. a E. Per tant $\| \ \|_1$ no és una norma a $\mathcal{L}^1(E)$. Sigui

$$N = \{f \in \mathcal{L}^1(E) : f(x) = 0 \text{ g.p.t. } x \in E\}.$$

Llavors N és un subespai vectorial de $\mathcal{L}^1(E)$ i puc definir el quocient $L^1(E) = \mathcal{L}^1(E)/N$. Els elements de $L^1(E)$ són classes d'equivalència $[f]$ i

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^1(E) : g(x) = f(x) \text{ g.p.t. } x \in E\}.$$

Si poso

$$\|[f]\|_1 = \int_E |f|$$

obtinc una norma a $L^1(E)$. En la pràctica, per comoditat, no es distingeix entre f i la seva classe $[f]$: hom pensa que pot canviar f per qualsevol altre element de la classe i els enunciats no canviaran degut al fet que els conjunts de mesura nul·la són negligibles per la integral. Resulta que $L^1(E)$ és un espai de Banach.

Necessitem recordar un resultat elemental de convergència de successions numèriques.

Lema. *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ és una successió de nombres complexos tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n+1}| < \infty,$$

llavors $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ té límit.

Demostració. Si $m > n$

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\ &\le \sum_{p=n}^{\infty} |x_p - x_{p+1}| \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

□

Considerem ara una successió $(f_p)_{p=1}^{\infty}$ de Cauchy a $L^1(E)$. Doncs, donat $\varepsilon > 0$, hi ha un nombre natural p_0 tal que

$$\|f_p - f_q\|_1 < \varepsilon, \quad p, q \ge p_0.$$

Agafant $\varepsilon = \frac{1}{2^j}$ obtinc un nombre natural p_j tal que

$$\|f_p - f_{p_j}\|_1 < \frac{1}{2^j}, \quad p \geq p_j.$$

Puc suposar que $p_1 < p_2 < \cdots < p_j < p_{j+1} < \cdots$ Per Beppo Levi

$$\int_E \sum_{j=1}^{\infty} |f_{p_{j+1}}(x) - f_{p_j}(x)| = \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{p_{j+1}} - f_{p_j}\|_1 < 1$$

i, doncs,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_{p_{j+1}}(x) - f_{p_j}(x)| < \infty, \text{ g.p.t. } x \in E.$$

Pel lema, existeix $\lim_{j\to\infty} f_{p_j}(x) = f(x)$ g.p.t. $x \in E$. La funció mesuarable f és la candidata a ser límit a $L^1(E)$ de la successió $(f_p)_{p=1}^{\infty}$. Notem que si j és gran $p_j \geq p_0$. Per Fatou, si $p \geq p_0$,

$$\int_E |f_p(x) - f(x)| \leq \liminf_{j\to\infty} \int_E |f_p(x) - f_{p_j}(x)) \leq \varepsilon,$$

la qual cosa diu que $f_p \xrightarrow{p\to\infty} f$ a $L^1(E)$.

Problemes

1. Siguin $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$ els espais de les successions $x = (x_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexos convergents a 0 i convergents respectivament. Demostreu que c i c_0 són espais de Banach amb la norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|$.

2. Sigui $\mathrm{Lip}_1[0,1]$ el conjunt format per totes les funcions $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tals que

$$M(f) = \sup\left\{\frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|};\ s,t \in [0,1],\ s \neq t\right\} < \infty.$$

a) Comproveu que $\mathrm{Lip}_1[0,1]$ és un subespai vectorial propi de $C[0,1]$.
b) Demostreu que $\mathrm{Lip}_1[0,1]$ amb la norma $\|f\|_{\mathrm{Lip}_1} = \|f\|_\infty + M(f)$ és un espai de Banach.
c) Comproveu que $C^1[0,1] \subset \mathrm{Lip}_1[0,1]$ amb inclusió estricta i que $\|f\|_{\mathrm{Lip}_1} = \|f\|_{C^1}$ per a tota $f \in C^1[0,1]$.

3. Sigui E un subconjunt mesurable de $\mathbb{R}^n$. Una funció mesurable $f : E \to \mathbb{C}$ és essencialment fitada si hi ha $C > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq C, \quad \text{g.p.t. } x \in E.$$

Posem

$$\|f\|_\infty = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \quad \text{g.p.t. } x \in E\}.$$

Demostreu que

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty, \quad \text{g.p.t. } x \in E.$$

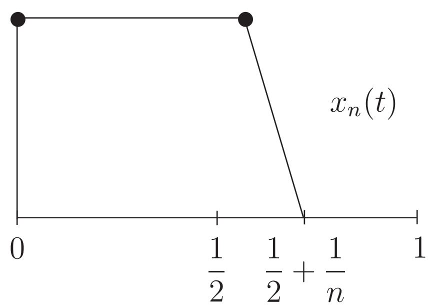
Sigui $L^\infty(E)$ el conjunt de totes les funcions essencialment fitades sobre E (amb el conveni habitual d'identificar dues funcions si són iguals gairebé per tot a E). Demostreu que $L^\infty(E)$ és un espai de Banach.

4. Demostreu que no hi ha cap conjunt numerable dens a $L^\infty([0,1]$. Recordeu que un conjunt A és dens a un espai metric M si tot element de M és límit d'una successió d'elements de A.

5. Es consideren en $C[0,1]$ les normes $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_1$.

a) Demostreu que la norma $\|\cdot\|_1$ no és completa, i que $\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty$, per a tota $x \in C[0,1]$.
Indicació: Estudieu la successió

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - n(t - 1/2) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$



b) Si $x_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{n} t^n$, $n \geq 1$, comproveu que $\sum x_n$ és convergent per a $\|\cdot\|_\infty$ però no absolutament convergent ($\sum_{n=0}^\infty \|x_n\|_\infty = \infty$).

c) Existeix una successió $(x_n)_n$ en $C[0,1]$ tal que $\|x_n\|_\infty \leq 1$, per a tot n, però que no té cap parcial convergent (per $\|\cdot\|_\infty$). Per tant la bola unitat tancada a $C[0,1]$ no és compacta.

6. És l'espai vectorial $C[0,1]$ complet si se'l dota de la norma

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx \quad ?$$

I $C^1[0,1]$ dotat de la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$?

7. Demostreu que la bola unitat tancada de ℓ^p, $p = 1, 2$, no és compacta.

Hint: Considereu les successions

$$e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$
$$\downarrow$$
$$\text{lloc } n$$

i calculeu $\|e_n - e_m\|_p$ si $n \neq m$.

8. Sigui $\chi_n = \chi_{(n,n+1)}$ la funció característica de l'interval $(n, n+1) \subset \mathbb{R}$. Demostreu que cap parcial de $(\chi_n)_{n=0}^{\infty}$ és convergent a $L^1(\mathbb{R})$. Concloeu que la bola unitat tancada de $L^1(\mathbb{R})$ no és compacta. Podeu demostrar el mateix per la bola unitat tancada de $L^1(\mathbb{R}^n)$?

9. Sigui E un espai de Banach i $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ una successió d'elements de E. Diem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és convergent si existeix el límit a E de la successió de sumes parcials $(\sum_{n=0}^{N} x_n)_{N=0}^{\infty}$. La suma de la sèrie és aquest límit. Diem que la sèrie és absolutament convergent si $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

(i) Demostreu que si una sèrie és convergent llavors el terme general x_n té límit 0 a E.

(ii) Demostreu que si una sèrie és absolutament convergent llavors és convergent i que $\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$.

(iii) Sigui $E = \ell^2$ i e_n la successió de ℓ^2 que pren el valor 1 al lloc n i el valor 0 als altres llocs. Demostreu que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$$

és convergent però no absolutament convergent.

(iv) Noteu que la sèrie precedent no és convergent a ℓ^1.

És convergent a ℓ^{∞} ?

10. (i) Trobeu un subespai d'un espai de Banach que no sigui tancat.

(ii) Si F és un subespai de dimensió finita d'un espai de Banach E, llavors F és tancat a E.

9. L'espai de Hilbert

Sigui H un espai vectorial real. Un producte escalar a H és una aplicació

$$\begin{array}{rcl} H \times H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & \langle x, y \rangle \end{array}$$

que és bilineal, simètrica ($\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$) i definida positiva ($\langle x, x \rangle \geq 0$ i $\langle x, x \rangle = 0$ si i només si $x = 0$).

El producte escalar habitual a $\mathbb{R}^n$ és l'exemple que coneixem (veieu la secció 7).

Exemple 8. Sigui $H = \ell^2$, l'espai de les successions reals de quadrat sumable considerat a la secció 8. Recordem que si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$$

és la norma de ℓ^2 i que val la desigualtat de Schwarz

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n||y_n| \leq \|x\|_2 \|y\|_2, \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty},\, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2. \tag{9.1}$$

Posant

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

obtenim un producte escalar a ℓ^2. Noteu que $\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2 \geq 0$.

Exemple 9. Sigui E un conjunt mesurable de $\mathbb{R}^n$ i posem $H = L^2(E)$ l'espai de les funcions mesurables a E de quadrat sumable, és a dir, tals que $\int_E |f|^2 < \infty$. Posem

$$\|f\|_2 = \left(\int_E |f|^2 \right)^{1/2}, \quad f \in L^2(E). \tag{9.2}$$

Com que a $L^2(E)$ identifiquem dues funcions si coincideixen g.p.t. a E, l'única dificultat per comprovar que (9.2) és una norma és la desigualtat triangular. L'argument per veure que (9.2) compleix la desigualtat triangular segueix l'esquema utilitzat a la secció 7 per la norma euclidiana a $\mathbb{R}^n$.

Primer es demostra la desigualtat de Schwarz, que diu que si $f, g \in L^2(E)$, llavors el producte fg és integrable a E i

$$\int_E |f||g| \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \tag{9.3}$$

Per veure (9.3) apliquem la desigualtat elemental $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, per obtenir

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right), \quad x \in E.$$

Integrant

$$\int_E |f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\right). \tag{9.4}$$

Ara apliquem (9.4) a $\frac{f}{\|f\|_2}$ i $\frac{g}{\|g\|_2}$ i (9.3) segueix.

Amb la desigualtat de Schwarz a la nostra disposició és fàcil demostrar la desigualtat triangular:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_2^2 &= \int_E |f(x)+g(x)|^2 \\
&= \int_E (|f(x)|^2 + |g(x)|^2 + 2f(x)g(x)) \\
&= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\int_E fg \\
&\leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\int_e |f||g| \\
&\leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.
\end{aligned}$$

Definim el producte escalar a $L^2(E)$ com

$$\langle f, g\rangle = \int_E f(x)g(x). \tag{9.5}$$

Notem que $\langle f, f\rangle = \|f\|_2^2 \geq 0$, la qual cosa dóna que (9.5) és definida positiva.

Una variant de l'argument descrit a la secció 8 per la completesa de $L^1(E)$ dóna que $L^2(E)$ dotat de la norma $\| \ \|_2$ és un espai de Banach.

Si l'espai vectorial H és complex per obtenir una forma definida positiva s'ha de posar un conjugat a la segona variable i llavors es perd la bilinealitat. Això ha quedat clar a la secció 7 amb l'exemple de $\mathbb{C}^n$.

Definim un producte hermític a un espai vectorial complex H com una aplicació

$$\begin{array}{rcl} H \times H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longrightarrow & \langle x, y\rangle \end{array}$$

que compleix:

(1) És lineal en la primera variable

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle, \quad x, y, z \in E, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

(2) És conjugada lineal en la segona variable

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle, \quad x, y, z \in E, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

(3) És simètrica conjugada

$$\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}, \quad x, y \in E.$$

(4) És definida positiva

$$\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \text{i} \quad \langle x, x\rangle = 0 \text{ si i només si } x = 0.$$

L'exemple que sabem és $\mathbb{C}^n$ amb el producte hermític

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j, \quad z, w \in \mathbb{C}^n.$$

Exemple 10. Sigui $H = \ell^2_{\mathbb{C}}$ el conjunt de les successions complexes de quadrat sumable. Sabem que H és un espai vectorial ($|a+b|^2 \leq 2|a^2 + b^2|$, $a, b \in \mathbb{C}$) i que val la desigualtat de Schwarz

$$\sum_{y=1}^{\infty} |x_n||y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2 \|y\|_2$$

per a $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\ell^2_{\mathbb{C}}$. Definim el producte hermític a $\ell^2_{\mathbb{C}}$ com

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n, \quad x, y \in \ell^2_{\mathbb{C}}.$$

Notem que $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|_2^2$.

Exemple 11. Sigui $H = L^2_{\mathbb{C}}(E)$ la classe de les funcions complexes mesurables a E de quadrat sumable, és a dir, tals que $\int_E |f|^2 < \infty$. Sabem que $L^2_{\mathbb{C}}(E)$ és un espai vectorial ja que $|f(x) + g(x)|^2 \leq 2(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$ i que val la desigualtat de Schwarz

$$\int_E |f||g| \leq \left(\int_E |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_E |g|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Definim el producte hermític a $L^2_{\mathbb{C}}(E)$ com

$$\langle f, g\rangle = \int_E f \cdot \overline{g}.$$

Noteu que $\langle f, f\rangle = \int_E |f|^2 = \|f\|_2^2$.

En resum, els espais de Banach reals ℓ^2 i $L^2(E)$ estan dotats d'un producte escalar relacionat amb la norma per la identitat

$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2. \tag{9.6}$$

Anàlogament els espais de Banach complexos $\ell^2_{\mathbb{C}}$ i $L^2_{\mathbb{C}}(E)$ estan dotats d'un producte hermític que es relaciona amb la norma per la identitat (9.6).

Sigui ara H un espai vectorial real (complex) dotat d'un producte escalar (d'un producte hermític). Definim

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}, \quad x \in H, \tag{9.7}$$

que té sentit degut al fet que el producte escalar (el producte hermític) és definit positiu. Volem veure que l'expressió (9.7) és una norma i l'única dificultat, com al cas euclidià, és la desigualtat triangular. Necessitem primer demostrar la desigualtat de Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|, \quad x, y \in H. \tag{9.8}$$

Demostració. Suposem primer que $\langle\ ,\ \rangle$ és un producte hermític sobre l'espai vectorial complex H. Pel camí anirem assenyalant les simplificacions que hi ha quan el producte hermític és un producte escalar sobre l'espai vectorial real H.

Per qualsevol $\lambda \in \mathbb{C}$ tenim

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle) + |\lambda|^2\langle y, y\rangle. \end{aligned}$$

Agafo ara $\lambda \in \mathbb{R}$ i obtinc

$$0 \le \langle x, x\rangle + 2\lambda \operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle.$$

El discriminant no pot ser positiu i doncs

$$|\operatorname{Re}\langle x, y\rangle| \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \tag{9.9}$$

Si som al cas real ja tenim (9.8). Si som al cas complex posem

$$\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| e^{i\theta}$$

i apliquem (9.9) amb $e^{i\theta}y$ en comptes de y:

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle| &= e^{-i\theta}\langle x, y\rangle = \langle x, e^{i\theta}y\rangle \\ &\le \langle x, x\rangle\langle e^{i\theta}y, e^{i\theta}y\rangle = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \end{aligned}$$ □

La desigualtat triangular per l'expressió (9.7) segueix immediatament:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \\ &\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \\ &\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Definició. Un espai de Hilbert real (complex) és un espai vectorial real (complex) dotat d'un producte escalar (hermític) de manera que és un espai de Banach amb la norma (9.7) associada al producte escalar (hermític).

Els exemples que coneixem són $\mathbb{R}^n$, ℓ^2 i $L^2(E)$ pel cas real i $\mathbb{C}^n$, $\ell^2_{\mathbb{C}}(E)$ i $L^2_{\mathbb{C}}(E)$ pel cas complex. Noteu que, qualsevol subespai tancat d'un espai de Hilbert també és un espai de Hilbert.

Problemes

1. Tot subespai tancat d'un espai de Hilbert és un espai de Hilbert dotat del producte escalar apropiat.

2. Sigui H el conjunt de funcions mesurables a $\mathbb{R}$ tals que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \frac{dx}{1+x^2} < \infty.$$

Hi ha una manera de fer de H un espai de Hilbert?

3. La llei del paral·lelogram.
Sigui H un espai de Hilbert. Demostreu que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Deduïu que no hi ha cap producte escalar $\langle\ ,\ \rangle$ a $C[0,1]$ tal que $\langle f, g\rangle = \|f\|_\infty^2$.

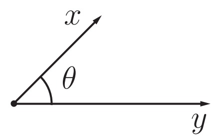
10. Ortogonalitat

Sigui H un espai de Hilbert. Diem que x és ortogonal a y si $\langle x, y\rangle = 0$. Si l'espai de Hilbert és real i $x, y \in H$, llavors $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$ és un nombre real entre -1 i 1, per la desigualtat de Schwarz. Doncs hi ha un angle $\theta \in [0, \pi]$ tal que

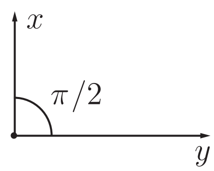
$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Aquest θ és, per definició, l'angle entre x i y. La situació relativa dels vectors x i y queda descrita pel signe de $\langle x, y\rangle$:

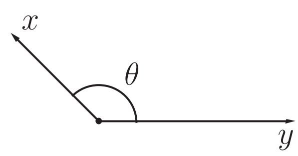
$\langle x, y\rangle > 0$



$\langle x, y\rangle = 0$



$\langle x, y\rangle < 0$



Exemple 12. Posem $H = \ell^2$ i

$$e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots), \quad n = 1, 2, \ldots$$

És a dir e_n és la successió que sempre pren el valor 0 excepte en el lloc n-èssim on pren el valor 1.

Clarament $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ si $n \neq m$ i $\langle e_n, e_n\rangle = 1$.

Exemple 13. Posem $H = L^2(-\pi, \pi)$. Observem que les funcions $\sin(nt)$ i

$\cos(nt)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ són contínues a $[-\pi, \pi]$ i doncs de H. Tenim que

$$\langle \sin(nt), \sin(mt) \rangle = 0 \quad n \neq m \tag{10.1}$$
$$\langle \sin(nt), \sin(nt) \rangle = \pi \quad n = 1, 2, \ldots \tag{10.2}$$
$$\langle \cos(nt), \sin(mt) \rangle = 0 \quad n, m = 1, 2, \ldots \tag{10.3}$$
$$\langle \cos(nt), \cos(mt) \rangle = 0 \quad n \neq m \tag{10.4}$$
$$\langle \cos(nt), \cos(nt) \rangle = \pi \quad n = 1, 2, \ldots \tag{10.5}$$

Per (10.2) i (10.5) fem

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} [\cos^2(nt) + \sin^2(nt)]\, dt = 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\, dt,$$

perquè

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\, dt$$

(mireu la gràfica per $n = 1$ o féu servir que $\sin x = \cos(x - \pi/2)$).

Per (10.1) sumeu les fórmules per $\sin(\alpha + \beta)$ i $\sin(\alpha - \beta)$ i obteniu

$$2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta).$$

Poseu $\alpha = nt$, $\beta = mt$ i integreu entre $-\pi$ i π. Resulta

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)t)\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n-m)t)\, dt = 0$$

perquè el sinus és una funció senar i estem integrant a un interval simètric respecte de l'origen. Les altres identitats es poden provar amb arguments semblants. A l'espai $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi]$ de les funcions complexes de quadrat sumable tenim que

$$\langle e^{int}, e^{imt} \rangle = 0 \quad \text{si } n \neq m,\ n, m \in \mathbb{Z} \tag{10.6}$$
$$\langle e^{int}, e^{int} \rangle = 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{10.7}$$

Per (10.6) tinguem en compte que $e^{i(n-m)t}$ és periòdica de període 2π i té per primitiva $\frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)}$ si $n \neq m$.

El Teorema de Pitàgores. *Si $x \perp y$, llavors*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Demostració.

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2. \qquad \square$$

Exemple 14. Un polinomi trigonomètric és una funció del tipus

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}, \quad c_n \in \mathbb{C}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

La funció $P(t)$ és contínua i periòdica de període 2π i, doncs, pertany a $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$.

Com que e^{int} i e^{imt} són ortogonals si $n \neq m$ obtenim, aplicant Pitàgores diverses vegades, que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |P(t)|^2 \, dt = 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.$$

Exemple 15. A l'espai ℓ^2 tenim que

$$\sum_{n=1}^{N} x_n e_n = (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, \dots)$$

i, per la definició de la norma a ℓ^2,

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} x_n^2,$$

que és Pitàgores, com abans, perquè els e_n són 2 a 2 ortogonals i tenen norma 1.

Problemes

1. Sigui H una espai de Hilbert de dimensió infinita. Construïu inductivament una successió $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de vectors de norma 1 dos a dos ortogonals ($\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$). Concloeu que la bola unitat tancada de H no és compacta.

2. Sigui H un espai de Hilbert i S un subespai tancat.

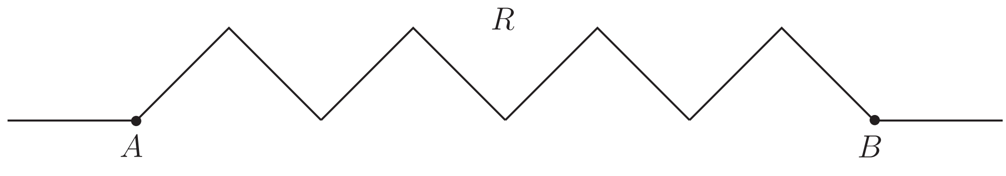
(i) Donat $x \in H$ hi ha un únic element $y \in S$ tal que $\text{dist}(x, S) = \|x - y\|$, on $\text{dist}(x, S) = \inf\{\|x - z\| : z \in S\}$. *Hint:* feu servir la llei del paral·lelogram (problema 3 de la secció precedent).

(ii)L'element y de (i) queda caracteritzat per la propietat de ser un element de S tal que $x - y$ és ortogonal a S ($\langle x - y, z \rangle = 0$, $z \in S$).

11. Perquè L^2 ?

Sabem que $L^2(E)$ és un espai de Hilbert. Es pot demostrar que ni $L^1(\mathbb{R}^n)$ ni $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ho són. Això situa $L^2(E)$ en una posició privilegiada que es pot explicar de moltes maneres, per exemple, recorrent a la física. De fet, la situació que discutirem ara prové de l'enginyeria. En teoria del senyal es considera que un senyal és una funció del temps. Per exemple, el so d'un diapasón és un senyal i la veu també. La veu genera una vibració de l'aire que mitjançant un micròfon es transforma en un corrent elèctric (el micròfon crea un camp magnètic, el qual és alterat per les oscil·lacions de l'aire produïdes per la veu i sabem que un camp magnètic variable genera un corrent elèctric). Un corrent elèctric es descriu per la seva intensitat $I(t)$ que és una funció del temps. Recordem que la intensitat d'un corrent és el nombre de càrregues que circulen per unitat de temps a través d'una secció del conductor. Al revés, quan es té el corrent d'intensitat $I(t)$ es poden reproduir les variacions del camp magnètic, i aquestes generen oscil·lacions d'una membrana, les quals es transformen en un so que és la veu original. Així que és el mateix tenir la veu original que el corrent elèctric $I(t)$. Naturalment hem obviat totes les pèrdues que es produeixen en els processos de transformació descrits.

Quan en un conductor elèctric s'hi introdueix una resistència R



apareix una diferència de potencial entre els borns A i B de la resistència. Aquesta diferència de potencial $V(t)$ és el treball que es dissipa per portar la càrrega unitat d'un born a l'altre i pot dependre de t. La llei d'Ohm diu que $V(t)$ i $I(t)$ són proporcionals i el factor de proporcionalitat s'anomena resistència: $V(t) = R\,I(t)$.

Això s'ha d'entendre intuïtivament en el sentit que una diferència de potencial més gran forçarà una circulació de càrregues per unitat de temps més gran.

Suposem ara que som a l'instant t i que a l'instant $t+\Delta t$ han passat ΔQ càrregues a través de la resistència. L'energia (treball) dissipada en aquest trànsit és

$$\Delta E = V(t)\Delta Q$$

i, dividint per Δt i fent que $\Delta t \to 0$,

$$\frac{dE(t)}{dt} = V(t)I(t)$$

que és l'energia dissipada per unitat de temps a l'instant t. Recordem que l'energia per unitat de temps s'anomena potència. Aplicant la llei d'Ohm

$$\frac{dE}{dt} = RI(t)^2,$$

i apareix un quadrat! Podem normalitzar de manera que $R = 1$ i llavors l'energia dissipada entre l'instant t_0 i l'instant t_1 és

$$E = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dE}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} I(t)^2\, dt.$$

Dividint pel temps transcorregut obtenim que

$$\frac{E}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} I(t)^2\, dt.$$

En altres paraules, la potència mitjana entre t_0 i t_1 és la mitjana de $I(t)^2$ a l'interval $[t_0 t_1]$. Doncs $\int_{t_0}^{t_1} I(t)^2\, dt$ representa $(t_1 - t_0)$ vegades l'energia del senyal $I(t)$.

Els senyals més senzills, com els sons d'un diapason, són periòdics. Si el período és 2π llavors els senyals periòdics de període 2π més senzills són $\sin t$ i $\cos t$ i els "harmònics" de freqüència n:

$$\sin(nt),\ \cos(nt), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

El terme "harmònics" es refereix al fet que el el senyal es repeteix n vegades en intervals de longitud $\frac{2\pi}{n}$. L'energia de $\sin(nt)$ i $\cos(nt)$ a un interval de longitud 2π es calcula fàcilment:

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} [\sin^2(nt) + \cos^2(nt)]\, dt = 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\, dt$$

perquè $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$. Doncs

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt)\, dt = \pi.$$

Estem utilitzant el fet que si $f(t)$ és una funció periòdica de període 2π, llavors la seva integral sobre un interval de longitud 2π no depèn de l'interval:

$$\int_{a}^{a+2\pi} f(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Això es comprova fàcilment.

Altres senyals periòdics s'obtenen per "superposició" dels senyals precedents, és a dir, fent-ne combinacions lineals:

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nt). \tag{11.1}$$

Per calcular l'energia de (11.1) cal utilitzar les relacions d'ortogonalitat entre sinus i cosinus ((10.1), (10.3), (10.4)). Obtenim

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(t)^2\, dt = 2\pi a_0 + \pi \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2). \tag{11.2}$$

Voldríem ara fer $N \to \infty$ a (11.1) per obtenir senyals més generals i la bona idea per fer-ho correctament la dóna (11.2): com que els senyals que trobem a la vida tenen energia finita considerarem successions $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ de ℓ^2 i donarem sentit a la sèrie

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nt). \tag{11.3}$$

Veurem que les sumes parcials de (11.3) convergeixen en $L^2(-\pi,\pi)$ (cap a certa funció de $L^2(-\pi,\pi)$). Per això cal comprovar la condició de Cauchy:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nt) - \left(\sum_{n=1}^{M} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{M} b_n \sin(nt) \right) \right\|_2^2$$

$$= \left\| \sum_{n=N+1}^{M} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right\|_2^2$$

$$= \pi \sum_{n=N+1}^{M} (a_n^2 + b_n^2) \le \pi \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

La conclusió és que la sèrie (11.3) defineix un senyal de $L^2(-\pi,\pi)$ si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$. L'energia del senyal (11.3) és

$$2\pi a_0 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Veurem més endavant que, recíprocament, donada una funció f de $L^2(-\pi,\pi)$ hi ha successions $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ de ℓ^2 tals que f és precisament la suma a $L^2(-\pi,\pi)$ de la sèrie (11.3). Amb això volem dir que

$$\left\| f(t) - \left(a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right) \right\|_2 \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

12. Sèries de Fourier

Considerem un senyal amb energia finita, és a dir,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt),$$

amb $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < \infty$. Hi ha una fórmula que permet escriure a_n i b_n en termes de f. Per a_0 només cal integrar $f(t)$ i recordar que $\cos(nt)$ i $\sin(nt)$ tenen integral 0 a $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt &= 2\pi a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \\ &= 2\pi a_0.\end{aligned}$$

Doncs

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt. \tag{12.1}$$

La integral s'ha pogut commutar amb la suma perquè la sèrie és convergent a $L^2(-\pi, \pi)$ i el producte escalar és continu a un espai de Hilbert (per Schwarz):

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \langle f, 1\rangle &= \left\langle \lim_{N\to\infty} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nt) \right), 1 \right\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} \left\langle a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nt), 1 \right\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} 2\pi a_0 = 2\pi a_0.\end{aligned}$$

Anàlogament

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,dt \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)\cos(nt)\,dt \\ &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt)\,dt = \pi a_n.\end{aligned}$$

Doncs

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \quad n \geq 1, \tag{12.2}$$

i

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \quad n \geq 1. \tag{12.3}$$

Aquestes fórmules són degudes a Fourier i és per això que dels nombres a_n i b_n se'n diu coeficients de Fourier de f.

Observem que, en termes del producte escalar de $L^2(-\pi,\pi)$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\langle f, \cos(nt)\rangle, \quad n \geq 1$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\langle f, 1\rangle$$

i

$$b_n = \frac{1}{\pi}\langle f, \sin(nt)\rangle, \quad n \geq 1.$$

Donada una funció qualsevol de $L^2(-\pi,\pi)$ els coeficients a_n i b_n tenen sentit i per tant ens podem preguntar si la sèrie de Fourier de f, que per definició és

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nt), \tag{12.4}$$

convergeix envers f a $L^2(-\pi,\pi)$. Això diria, en particular, que els coeficients de Fourier determinen la funció. Encara no estem preparats per resoldre la qüestió.

Notem que les fórmules (12.2) i (12.3) tenen sentit per qualsevol funció $f \in L^1(-\pi,\pi)$ perquè les funcions $\cos(nt)$ i $\sin(nt)$ són fitades, per tant, també tota funció de $L^1(-\pi,\pi)$ té una sèrie de Fourier associada. Un dels problemes clàssics de les sèries de Fourier és entendre de quina manera la sèrie determina la funció.

Exemple. Considerem la funció

$$f(t) = \chi_{(-\alpha,\alpha)}(t), \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Calculem la seva sèrie de Fourier. Com que la funció és parella els coeficients b_n són tots nuls perquè $f(t)\sin(nt)$ és una funció senar i per tant té integral nul·la sobre $(-\pi,\pi)$. Calculant obtenim

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} dt = \frac{\alpha}{\pi},$$

i, per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\alpha}^{\alpha} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\sin(n\alpha)}{n}. \end{aligned}$$

Com que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$ la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nt)$ és convergent a $L^2(-\pi,\pi)$ però no podem dir, de moment, que aquesta funció sigui $\chi_{(-\alpha,\alpha)}(t)$.

Abans de continuar discutirem la forma complexa d'una sèrie de Fourier. Sigui f una funció de $L^1(-\pi,\pi)$ amb sèrie de Fourier

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nt). \tag{12.5}$$

Això simplement vol dir què valen les fórmules (12.1), (12.2) i (12.3). Utilitzem les fórmules d'Euler

$$\begin{aligned} \cos(nt) &= \frac{e^{int}+e^{-int}}{2}, \\ \sin(nt) &= \frac{e^{int}-e^{-int}}{2i} \end{aligned}$$

per escriure (12.5) com

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \tag{12.6}$$

on

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{12.7}$$

L'expressió (12.6) de la sèrie de Fourier de f és molt més concisa que (12.5) i també l'expressió (12.7) pels coeficients de Fourier "complexos". Notem, que si $f \in L^2(-\pi,\pi)$, llavors

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\langle f, e^{int}\rangle, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La relació entre a_n, b_n i c_n és

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad n \geq 0 \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n > 0. \end{aligned}$$

Per exemple,

$$\chi_{(-\alpha,\alpha)}(t) \sim \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n\alpha)}{n}\cos(nt) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{0\neq n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{\pi n}e^{int},$$

on hem fet servir la notació $\sim$ per indicar que la funció de l'esquerra té per sèrie de Fourier la de la dreta.

Encarem ara el problema de la convergència puntual de les sèries de Fourier, que consisteix en donar condicions sobre un punt $t \in [-\pi, \pi]$ per tal que la sèrie numèrica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ sigui convergent envers $f(t)$, és a dir, per tal que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} = f(t).$$

Fixem-nos que com que volem parlar de "$f(t)$" ens convé suposar que f és contínua al punt t. Hi ha exemples que mostren que la continuïtat no és suficient per obtenir la convergència de la sèrie de Fourier. Arribarem a una condició suficient natural una mica més forta que la continuïtat.

Donada una $f \in L^1(-\pi, \pi)$ denotem per

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

el coeficient de Fourier n-èssim de f.

Lema de Riemann-Lebesgue. *Si $f \in L^1(-\pi, \pi)$, llavors $\hat{f}(n) \xrightarrow{|n|\to\infty} 0$.*

Demostració. Suposem que hem trobat un subespai S de $L^1(-\pi, \pi)$, dens a $L^1(-\pi, \pi)$, tal que el lema val per les funcions de S. Llavors el lema val. En efecte, donat $\varepsilon > 0$, sigui $g \in S$ tal que $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Tenim

$$|\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(n) - \hat{g}(n)| + |\hat{g}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\|f - g\|_1 + |\hat{g}(n)| < \frac{\varepsilon}{2\pi} + |\hat{g}(n)|.$$

Per tant

$$\limsup_{|n|\to\infty} |\hat{f}(n)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

i el lema queda demostrat. Ara podem agafar com S el conjunt de combinacions lineals de funcions característiques d'intervals.

Que S és dens a $L^1(-\pi, \pi)$ és un exercici. Per comprovar que el lema val per funcions de S només cal considerar les funcions característiques d'intervals. Si $f = \chi_{(\alpha,\beta)}$, $-\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi$, i $|n| \neq 0$,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-in\beta} - e^{-in\alpha}}{-in}$$

i $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{\pi|n|}$. □

Test de Dini

Sigui f una funció periòdica de període 2π tal que $f \in L^1(-\pi, \pi)$ i suposem que per cert $t \in [-\pi, \pi]$ hi ha un $\delta > 0$ amb

$$\int_{|\theta|<\delta} \left| \frac{f(t+\theta) - f(t)}{\theta} \right| d\theta < \infty. \qquad (*)$$

Llavors $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ és convergent amb suma $f(t)$.

Abans de la demostració donem tres condicions suficients per $(*)$ cada una més forta que la següent:

(1) f és diferenciable al punt t.

(2) f compleix una condició de Lipschitz d'ordre α, $0 < \alpha \leq 1$, al punt t:

$$|f(\theta) - f(t)| \leq C|\theta - t|^{\alpha}, \quad |\theta| < \delta.$$

(3) f és contínua al punt t en el sentit de Dini: $\int_0^{\delta} \frac{\omega(\theta)}{\theta}\, d\theta < \infty$ on $\omega(\theta) = \sup\{|f(\delta) - f(t)| : |\delta - t| \leq \theta\}$, $\theta > 0$. La funció $f(t) = \frac{1}{\log^2 \frac{1}{|t|}}$, $0 < |t| < \pi$ és Dini contínua al punt 0, però no compleix cap condició de Lipschitz al punt 0.

Demostració del test de Dini. Primer calcularem més explícitament una suma parcial de la sèrie de Fourier:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int} &= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta \right) e^{int} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(t-\theta)}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\theta) \sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta}\, d\theta,
\end{aligned}$$

on l'última igualtat surt del canvi de variable $\theta' = t - \theta$ i del fet que la integral d'una funció periòdica de període 2π és independent de l'interval de longitud 2π sobre el que s'integra.

La funció $D_N(\theta) = \sum\limits_{n=-N}^{N} e^{in\theta}$ s'anomena nucli de Dirichlet.

Lema. $D_N(\theta) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$, $0 \neq |\theta| \leq \pi$ *i* $D_N(0) = 2N + 1$.

Demostració.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} e^{int} &= \frac{e^{i(N+1)\theta} - e^{-iN\theta}}{e^{i\theta} - 1} \\
&= \frac{e^{i\theta/2}\big[e^{i(N+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\theta}\big]}{e^{i\theta/2}\big(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}\big)} \\
&= \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta)2i}{\sin(\theta/2)2i}.
\end{aligned}$$

□

Notem que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta)\,d\theta = 1$. Doncs, pel lema,

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int} - f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t-\theta)-f(t)]D_N(\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t-\theta)-f(t)]\sin(N\theta)\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}\,d\theta$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t-\theta)-f(t)]\cos(N\theta)\,d\theta \equiv I_N + II_N.$$

El terme II_N és un coeficient de Fourier de la funció $F(\theta) = f(t-\theta) - f(t)$, que és de $L^1(-\pi,\pi)$. De fet,

$$II_N = \frac{\hat{F}(N) + \hat{F}(-N)}{2} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

pel Lema de Riemann-Lebesgue. Així que només hem de mirar el terme I_N. Sigui

$$G(\theta) = [f(t-\theta)-f(t)]\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Si veiem que $G \in L^1(-\pi,\pi)$, llavors

$$I_N = \frac{\hat{G}(N) - \hat{G}(-N)}{2i} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

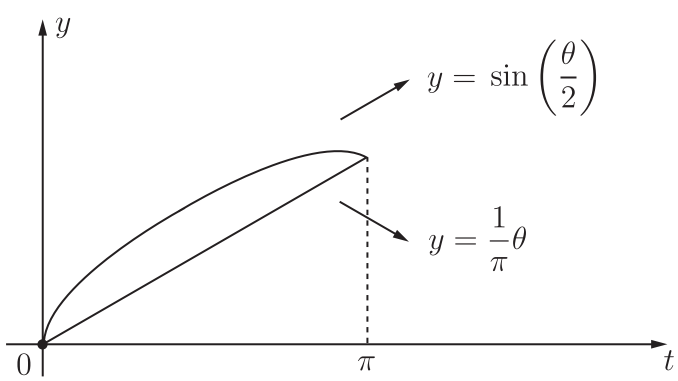
per Riemann-Lebesgue. Ara

$$\int_{-\pi}^{\pi}|G(\theta)|\,d\theta = \int_{-\delta}^{\delta}|G(\theta)|\,d\theta + \int_{\delta<|\theta|<\pi}|G(\theta)|\,d\theta.$$

A l'interval $(-\delta,\delta)$ faig servir la desigualtat

$$\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \geq \frac{|\theta|}{\pi}, \quad |\theta| < \pi,$$

que és simplement la concavitat de $\sin(\theta/2)$:



Obtenim

$$\int_{-\delta}^{\delta}|G(\theta)|\,d\theta \leq \pi\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|f(t-\theta)-f(t)|}{|\theta|}\,d\theta < \infty$$

per hipòtesi.

A l'interval $[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)$ utilitzem $|\sin(\frac{\theta}{2})|\geq\sin(\frac{\delta}{2})$ per concloure que

$$\int_{\delta<|\theta|<\pi}|G(\theta)|\,d\theta\leq\frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\int_{\delta<|\theta|<\pi}|f(t-\theta)|\,d\theta+\frac{|f(t)|}{\sin(\frac{\delta}{2})}2\pi<\infty. \qquad \square$$

Exemple 16. Sabem que

$$\chi_{(-\pi/2,\pi/2)}(t)\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}\cos(nt).$$

Ara, $\sin(n\pi/2)$ val 0 si n és parell i ±1 si n és senar. Doncs

$$\chi_{(-\pi/2,\pi/2)}(t)\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos((2n+1)t).$$

Com que $\chi_{(-\pi/2,\pi/2)}(t)$ és diferenciable per $t\in[-\pi,\pi]\setminus\{\pi/2,-\pi/2\}$ obtenim que

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos((2n+1)t)=\begin{cases}1 & \text{si } |t|<\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \text{si } \dfrac{\pi}{2}<|t|\leq\pi.\end{cases}$$

Per exemple, si $t=0$ obtenim

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

En els punts crítics $t=\pm\frac{\pi}{2}$ la sèrie queda reduïda al primer terme, que és $1/2$. Observem que $1/2$ és la mitjana aritmètica dels límits per la dreta i per l'esquerra als punts en qüestió.

Com una aplicació del test de Dini demostrarem un teorema de densitat que és també conseqüència immediata d'altres resultats més potents de sèries de Fourier (relatius al nucli de Fejer) o d'anàlisi funcional (el teorema d'aproximació de Weierstrass). Aquest teorema de densitat és un element clau en la teoria L^2 de les sèries de Fourier, que estudiarem en la secció següent en el context dels espais de Hilbert.

Teorema. *Els polinomis trigonomètrics formen un subespai dens a* $L^2(-\pi,\pi)$.

Un polinomi trigonomètric és una funció del tipus

$$\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{int},\quad t\in\mathbb{R},$$

o sigui una combinació lineal d'exponencials. Són senyals d'energia finita molt senzills. Per Pitàgores, l'energia d'un polinomi trigonomètric és

$$\left\|\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{int}\right\|_2^2=2\pi\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2.$$

El terme "polinomi trigonomètric" s'explica de la manera següent. Un polinomi a coeficients reals en dues variables reals

$$P(x,y) = \sum_{n,m=0}^{N} c_{n,m} x^n y^m$$

es pot escriure en termes de la variable complexa $z = x + iy$ fent servir que

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{i} \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Llavors

$$P(x,y) = \sum_{n,m=0}^{N} \gamma_{n,m} z^n \overline{z}^m$$

per certs $\gamma_{n,m} \in \mathbb{C}$. Restringint $P(x,y)$ a la circumferència unitat, on $z\overline{z} = 1$, obtenim, posant $z = e^{it}$,

$$P(x,y) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n + \sum_{n=1}^{N} c_{-n} \overline{z}^n = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}.$$

Recíprocament, donat un polinomi trigonomètric que pren valors reals ($c_{-n} = \overline{c}_n$) hi ha un polinomi $P(x,y)$ amb coeficients reals tal que la seva restricció a la circumferència unitat és el polinomi trigonomètric donat. Per exemple,

$$P(x,y) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n z^n + \overline{c}_n \overline{z}^n), \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Demostració del teorema. Sabem que una funció de $L^2(-\pi,\pi)$ es pot aproximar a $L^2(-\pi,\pi)$ per combinacions lineals de funcions característiques d'intervals. L'esquema per demostrar això és estàndard: primer ens reduïm al cas en què la funció és positiva i després l'expressem com a límit puntual creixent g.p.t. de funcions simples. Aquesta convergència és $L^2(-\pi,\pi)$ pel Teorema de la convergència dominada i, doncs, puc suposar que la funció donada és χ_E amb $E \subset (-\pi,\pi)$ mesurable. Aproximant E per dalt per oberts, puc suposar que E és obert. Ara expresso E com a unió finita o numerable d'intervals oberts i l'afirmació queda demostrada.

Agafo doncs $\chi_{(\alpha,\beta)}$, $-\pi \le \alpha < \beta \le \pi$, i he de veure que $\chi_{(\alpha,\beta)}$ es pot aproximar a $L^2(-\pi,\pi)$ per polinomis trigonomètrics. Sabem que

$$\chi_{(\alpha,\beta)}(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

amb $|c_n| \le \frac{c}{|n|}$, $n \neq 0$, i, per tant, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Ja hem argumentat abans que en aquestes condicions la sèrie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ convergeix a $L^2(-\pi,\pi)$ envers certa funció $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Si sabessim que $f = \chi_{(\alpha,\beta)}$, ja hauríem acabat.

Per altra banda, pel test de Dini, la sèrie de Fourier de $\chi_{(\alpha,\beta)}(t)$ convergeix puntualment envers $\chi_{(\alpha,\beta)}(t)$ per $t \in [-\pi,\pi] \setminus \{\alpha,\beta\}$. Posem

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La situació és la següent:

$$S_N \xrightarrow{N\to\infty} f \quad \text{a} \quad L^2(-\pi,\pi)$$

i

$$S_N(t) \longrightarrow \chi_{(\alpha,\beta)}(t), \quad \text{g.p.t.} \quad t \in [-\pi,\pi].$$

Això no ens permet concloure que $f = \chi_{(\alpha,\beta)}$ g.p.t. sense un petit argument addicional.

Resulta que, tal com vàrem veure a la demostració de la completesa de $L^1(-\pi,\pi)$, si una successió de funcions de $L^2(-\pi,\pi)$, diguem $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, convergeix envers f a $L^2(-\pi,\pi)$, llavors una subsuccessió $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergeix puntualment g.p.t. envers f. Tornant al nostre cas, hi ha una subsuccessió $(S_{N_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que

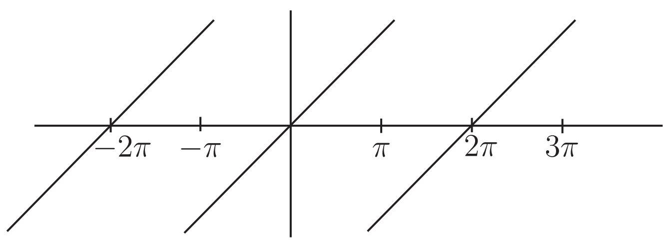
$$S_{N_k}(t) \xrightarrow{k\to\infty} f(t), \quad \text{g.p.t.} \quad t \in [-\pi,\pi].$$

Doncs $f = \chi_{(\alpha,\beta)}$ g.p.t. $\square$

Problemes

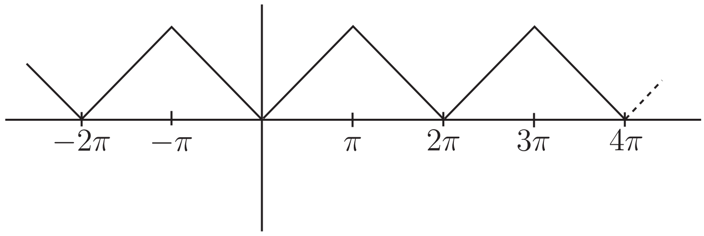
1. Calculeu la sèrie de Fourier de les funcions

1) $f(t) = t$, $-\pi \le t \le \pi$.



Surt: $\displaystyle\sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{int} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt).$

2) $f(t) = |t|$, $-\pi < t < \pi$.



Surt: $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos((2n-1)t)}{(2n-1)^2}$.

Trobeu-ne també la forma complexa.

2. Calculeu la sèrie de Fourier de la funció periòdica de període 2π que a l'interval $(0, 2\pi)$ és

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2}.$$

Apliqueu el test de Dini al punt $t = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Calculeu la sèrie de Fourier de la funció periòdica de període 2π que a l'interval $(0, 2\pi)$ és

$$f(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi^2}{6}.$$

Indicació: Noteu que$f'(t) = \dfrac{t-\pi}{2}$. Apliqueu el test de Dini per sumar la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

13. Bases hilbertianes

Recordem que la successió que pren el valor 0, excepte en el lloc n-èsim on pren el valor 1, s'escriu e_n. A ℓ^2 la successió $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ juga un paper anàleg al dels vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^n$ (o de $\mathbb{C}^n$). De fet tenim que, si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$, llavors

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n \right\|_2^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} x_n^2 \xrightarrow{N\to\infty} 0, \tag{13.1}$$

Això s'escriu $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ i es diu que la sèrie és convergent cap a x a ℓ^2 (és a dir, les sumes parcials tenen límit x a ℓ^2).

Sigui H un espai de Hilbert i $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una successió d'elements de H. Es diu que els e_n formen un sistema ortogonal si $\langle e_n, e_m\rangle = 0$, $n \neq m$ i ortonormal si a més $\|e_n\| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ El sistema $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es diu que és complet si el subespai de les combinacions lineals finites dels e_n és dens a H (recordem que això vol dir que tot $x \in H$ és límit a H d'una successió de combinacions lineals finites dels e_n).

Una base hilbertiana de H és un sistema ortonormal complet.

Per exemple, hem vist abans que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ és una base hilbertiana a ℓ^2. El sistema trigonomètric $(\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}})_{n=-\infty}^{\infty}$ és ortonormal i és complet, tal com hem vist a la secció precedent. Doncs és una base hilbertiana de $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, -\pi)$. Anàlogament, el sistema

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

és complet i, com que és ortonormal, forma una base hilbertiana de $L^2_{\mathbb{R}}(-\pi, \pi)$.

Volem veure ara que tot vector d'un espai de Hilbert es pot escriure com una "combinació lineal infinita" dels elements d'una base hilbertiana i que aquesta expressió és única. Així que les bases hilbertianes fan honor al seu nom. Comencem amb una desigualtat bàsica.

La desigualtat de Bessel. *Sigui $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal a un espai de Hilbert H. Llavors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad x \in H. \tag{13.2}$$

Demostració. Posem, per $N = 1, 2, \dots$

$$y_N = x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Veiem que y_N és ortogonal a e_n, $1 \le n \le N$. En efecte, per l'ortonormalitat dels e_n,

$$\begin{aligned}\langle y_N, e_n \rangle &= \left\langle x - \sum_{m=1}^{N} \langle x,\ e_m \rangle e_m, e_n \right\rangle \\ &= \langle x, e_n \rangle - \sum_{m=1}^{N} \langle x, e_m \rangle \langle e_m, e_n \rangle \\ &= \langle x, e_n \rangle - \langle x, e_n \rangle = 0.\end{aligned}$$

Ara

$$x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n + y_N$$

i y_N és ortogonal a $\sum\limits_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n$.

Per Pitàgores

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 + \|y_N\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2 + \|y_N\|^2 \ge \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

i això dóna la desigualtat de Besel fent que $N \to \infty$. $\square$

Apliquem (13.2) a $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ i al sistema ortonormal $(\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}})_{n=-\infty}^{\infty}$. Donada $f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ obtenim que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \left\langle f, \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \right|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt$$

o sigui

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt.$$

Veurem més endavant que, de fet, la desigualtat precedent és una igualtat.

Així doncs, si $f \in L^2(-\pi, \pi)$ la successió dels seus coeficients de Fourier és de quadrat sumable. Havíem vist (al considerar els senyals d'energia finita) que això permet definir una funció de $L^2(-\pi, \pi)$ com la suma a $L^2(-\pi, \pi)$ de la sèrie $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} \equiv g(t)$. La funció g té els mateixos coeficients de Fourier que f i, de fet, és f, tal com veurem en breu. Així doncs tenim el següent fet notable.

Corol·lari. *Sigui $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Llavors $f \in L^2(-\pi, \pi)$ si i només si $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$.*

El teorema fonamental de les bases hilbertianes és el següent.

Teorema. *Sigui* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *una base hilbertiana de l'espai de Hilbert* H*. Llavors per a tot* $x \in H$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

on la sèrie és convergent a H*, és a dir,*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n \right\| = 0.$$

Demés tenim la identitat de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, \quad x \in H.$$

Exemple. La identitat de Parseval per $H = L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ i la base hilbertiana $(\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}})_{n=-\infty}^{\infty}$ és

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Per la funció

$$t \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) = \sum_{0 \neq n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{in} e^{int}$$

tenim que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{\pi^2}{3}$$

i

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Per tant, Parseval dóna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Demostració del Teorema. Comencem per veure que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ és convergent a H. Si $M > N$, per Pitàgores,

$$\left\| \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle e_n - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2$$

$$= \sum_{n=N+1}^{M} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

perquè, per Bessel, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 < \infty$.

Sigui $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$. Volem veure que $x = y$ i per això només cal verificar que

$$\langle x - y, e_n\rangle = 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{13.3}$$

En efecte (13.3) dóna que

$$\left\langle x - y, \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \right\rangle = 0$$

per qualsevol elecció dels escalars λ_n. Com que sabem que el sistema $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ és complet, $x - y$ és límit a H d'un a successió $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ de combinacions lineals dels e_n. Ara, recordant que el producte escalar (o l'hermític) és continu,

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle &= \langle x - y, \lim_{m\to\infty} z_m\rangle \\ &= \lim_{m\to\infty} \langle x - y, z_m\rangle = 0. \end{aligned}$$

Per veure (13.3) tornem a utilitzar la continuïtat del producte escalar (o hermític) i que $y = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \langle x, e_m\rangle e_m$:

$$\begin{aligned} \langle x - y, e_n\rangle &= \langle x, e_n\rangle - \left\langle \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \langle x,\ e_n\rangle e_m, e_n \right\rangle \\ &= \langle x, e_n\rangle - \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \langle x, e_m\rangle\langle e_m, e_n\rangle \\ &= \langle x, e_n\rangle - \langle x, e_n\rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Exemple. Per l'espai de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ i la base hilbertiana $(\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}})_{n=-\infty}^{\infty}$ el teorema precedent diu que es pot recuperar una funció f de $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ de la seva sèrie de Fourier mitjançant la fórmula

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}, \tag{13.4}$$

on la convergència de la sèrie és a $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$:

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{int} \right\|_2^2 \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

La identitat de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

dóna un resultat sorprenent: els espais de Hilbert $L^2(-\pi,\pi)$ i ℓ^2 són el mateix. De fet, és més còmode canviar ℓ^2 per

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{\infty} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

La isometria lineal entre $L^2(-\pi,\pi)$ i $\ell^2(\mathbb{Z})$ és

$$\begin{array}{rcl} L^2(-\pi,\pi) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f & \longrightarrow & (\hat{f}(n))_{n=-\infty}^{\infty} \end{array}.$$

Parseval diu que l'aplicació de dalt conserva la norma (excepte pel factor $\frac{1}{2\pi}$) i la demostració del teorema precedent que és exhaustiva. $\square$

Sabem que el fet que la sèrie (13.4) convergeixi a $L^2(-\pi,\pi)$ no diu res sobre la convergència puntual. Lusin, un matemàtic rus, va conjecturar que si $f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, llavors la sèrie (13.4) és convergent per gairebé tot t i la suma és $f(t)$. Va costar molts esforços demostrar la conjectura de Lusin, cosa que va aconseguir un matemàtic suec, Lennart Carleson, l'any 1966. De fet, les idees de Carleson s'estan reprenent actualment per tractar altres problemes d'anàlisi de Fourier.

El problema principal que tracta la teoria clàssica de les sèries de Fourier és el de recuperar $f \in L^1(-\pi,\pi)$ a partir de la sèrie de Fourier. Es desenvolupen mètodes de "sumabilitat" per esquivar les dificultats que planteja la convergència puntual de la sèrtie de Fourier. Es pot veure, sense gaire dificultats, que les mitjanes aritmètiques

$$\frac{S_0 f(t) + \cdots + S_N f(t)}{N+1} \equiv \sigma_N f(t) \tag{13.5}$$

de les sumes parcials de la sèrie de Fourier

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{int}$$

convergeixen a $L^1(-\pi,\pi)$ (i també a $L^2(-\pi,\pi)$) cap a f. Això, naturalment, permet recuperar f a partir de la seva sèrie de Fourier. El mètode és molt natural i s'aplica a molts espais de funcions. Per exemple, si f és contínua $\sigma_N \xrightarrow{N\to\infty} f$ uniformement a $[-\pi,\pi]$. Si f és de classe $C^1[-\pi,\pi]$, llavors la convergència és a $C^1[-\pi,\pi]$.

Un altre problema clàssic de la teoria de les sèries de Fourier és el de descriure les funcions d'un cert espai funcional mitjançant el comportament dels seus coeficients de Fourier. Per exemple, sabem que $f \in L^2(-\pi,\pi)$ si i només si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$. No hi ha cap descripció semblant per $L^1(-\pi,\pi)$ ni per l'espai de funcions contínues. Es pot desenvolupar un mètode (la teoria de Littlewood-Paley) que permet descriure la majoria dels espais "raonables", com per exemple, l'espai de funcions que compleixen una condició de Lipschitz d'ordre α, $0 < \alpha < 1$:

$$|f(t) - f(z)| \leq C|t-z|^\alpha, \quad t, z \in [-\pi,\pi].$$

En resum, el món de les sèries de Fourier ha estat per molts anys un camp de recerca difícil que ha generat instruments molt potents que llavors s'han aplicat amb gran èxit a altres camps, com les EDPs o la teoria de nombres.

Problemes

1. Sigui f una funció periòdica de període 2π de classe $C^1(\mathbb{R})$. Demostreu que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty.$$

Hint: $\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$, Parseval i Schwarz.

2. Sigui f una funció periòdica de període 2π, integrable a $(0, 2\pi)$. Llavors f és la primitiva d'una funció de $L^2(0, 2\pi)$ si i només si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|\hat{f}(n)|^2 < \infty.$$

14. Operadors fitats

14.1 Aplicacions lineals fitades

Hi ha operadors (aplicacions lineals) entre espais de Banach que apareixen de forma natural en resoldre equacions diferencials. Per exemple, considerem l'equació de segon ordre

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

on $b, c, f \in C[a, b]$ i posem la condició inicial

$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = \beta$$

o la condició de contorn

$$\begin{aligned} Ay(a) + By'(a) &= 0 \\ Cy(b) + Dy'(b) &= 0 \end{aligned}$$

amb $AD - CB \neq 0$.

Un cas elemental és

$$y'' = -f(x), \quad y(0) = y'(1) = 0, \quad f \in C[0, 1]. \tag{14.1}$$

El problema es resol fent dues integracions.

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\int_0^x f(t)\,dt + C_1 \\ y(x) &= -\int_0^x \left(\int_0^t f(s)\,ds\right) dt + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

$y(0) = 0$ dóna $C_2 = 0$ i $y'(1) = 0$ dóna $C_1 = \int_0^1 f$. Doncs, per Fubini,

$$\begin{aligned} y(x) &= -\int_0^x \left(\int_0^t f(s)\,ds\right) dt + x\int_0^1 f \\ &= -\int_0^x (x - s)f(s)\,ds + x\int_0^1 f \\ &= \int_x^1 xf(s)\,ds + \int_0^x sf(s)\,ds \\ &= \int_0^1 \min(x, s)f(s)\,ds. \end{aligned}$$

La solució del problema de contorn (14.1) amb terme independent $f \in C[0,1]$ és la funció

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,s) f(s)\, ds, \quad 0 \le x \le 1, \tag{14.2}$$

on $K(x,s) = \min(x,s)$ és el "nucli" de l'operador T. Clarament T és lineal, en el sentit que $T(f_1+f_2) = Tf_1+Tf_2$ i $T(\lambda f) = \lambda Tf$. També $T\colon C[0,1] \to C^2[0,1]$ perquè la funció $Tf(x)$ és de classe C^2 ($(Tf)''(x) = -f(x)$). Volem veure que T envia contínuament $C[0,1]$ en $C^2[0,1]$, de manera que una petita variació en $C[0,1]$ del terme independent provoca una petita variació en $C^2[0,1]$ de la solució. Recordem que $C^2[0,1]$ és un espai de Banach amb la norma

$$\|f\| = \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|f''\|_\infty).$$

Hi ha un criteri de continuïtat molt útil per aplicacions lineals entre espais de Banach.

Teorema. *Sigui $T\colon E \to F$ una aplicació lineal (operador) entre els espais de Banach E i F. Llavors són equivalents*

1) T és contínua,

2) T és contínua al 0,

3) T és "fitada" (fitada sobre la bola unitat de E),

és a dir, hi ha una constant $C > 0$ tal que

$$\|Tx\| \le C\|x\|, \quad x \in E.$$

Exemple. L'operador (14.2) és continu. Per això comprovarem que és fitat

$$|Tf(x)| \le \int_0^1 \min(x,s)|f(s)|\, ds \le \|f\|_\infty, \quad 0 \le x \le 1.$$

Doncs $\|Tf\|_\infty \le \|f\|_\infty$. Ara

$$(Tf)'(x) = \int_x^1 f(s)\, ds$$

i

$$\begin{aligned} &|(Tf)'(x)| \le \|f\|_\infty (1-x), \quad 0 \le x \le 1, \\ &\|(Tf)'\|_\infty \le \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Com que $(Tf)''(x) = -f(x)$

$$\|(Tf)''\|_\infty \le \|f\|_\infty.$$

Concloem que

$$\|Tf\|_{C^2[0,1]} \le \|f\|_\infty$$

i, doncs, val la condició 3) amb $C = 1$.

Demostració del Teorema.

2) $\Rightarrow$ 3) Donat $\varepsilon = 1$ hi ha $\delta > 0$ tal que

$$\|x\| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < 1.$$

Sigui $x \neq 0$. Llavors $\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}$ té norma $\frac{\delta}{2}$. Per tant

$$\frac{\delta}{2\|x\|}\|T(x)\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| < 1$$

i

$$\|T(x)\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|, \quad x \in E.$$

Doncs val (3) amb $C = \frac{2}{\delta}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Veiem que T és contínua a x_0. Com que T és lineal i és fitada,

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq C\|x - x_0\|,$$

i això dóna la continuïtat al punt x_0. □

Exemple. Sigui T un operador lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Hi ha una matriu (a_{ij}) de manera que si $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$Tx = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{im}x_j\right). \tag{14.3}$$

Cada component és un polinomi de primer grau i, per tant, contínua. Doncs T és contínua i, per tant, hi ha una constant C de manera que $\|Tx\| \leq C\|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Noteu que anàleg continu de (14.3) és

$$Tf(x) = \int_E K(x,y)f(y)\,dy, \quad x \in E \tag{14.4}$$

on E és un compacte de $\mathbb{R}^n$ i K és una funció contínua a $E \times E$ a valors complexos. Veieu el problema 2 per una condició suficient de continuïtat d'aquest operador sobre diversos espais.

14.2 Invertibilitat d'operadors

La necessitat d'invertir operadors apareix en transformar un problema de contorn en una equació integral. Considerem, com a exemple, el problema de contorn

$$\lambda y'' - y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad f \in C[0,1], \quad \lambda \neq 0$$
$$y(0) = a, \quad y'(1) = b.$$

Posem $u(x) = y''(x)$. Integrant entre 0 i x:

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(t)\,dt,$$

i tornant a integrar (i fent Fubini)

$$\begin{aligned} y(x) - y(0) &= \int_0^x \left(y'(0) + \int_0^t u(s)\, ds \right) dt \\ &= y'(0)x + \int_0^x (x-t)u(t)\, dt. \end{aligned}$$

Utilitzant les condicions de contorn, obtenim

$$y(x) = a + \left(b - \int_0^1 u(t)\, dt \right) x + \int_0^x (x-t)u(t)\, dt.$$

Ara l'equació es reescriu

$$\lambda y'' - y = \lambda u(x) - \left(a + bx + \int_0^1 K(x,t)u(t)\, dt \right)$$

on

$$K(x,t) = \begin{cases} -t & \text{si } 0 \le t \le x \\ -x & \text{si } x \le t \le 1. \end{cases}$$

En termes de u l'equació queda

$$\lambda u - Tu = f(x) + a + bx \tag{14.5}$$

on $(Tu)(x) = \int_0^1 K(x,t)u(t)\, dt$.

L'equació (14.5) és un exemple d'una equació integral de Fredholm.

Dividint per λ

$$\left(I - \frac{T}{\lambda} \right)(u) = f(x) + a + bx.$$

Si $I - \frac{T}{\lambda}$ és un operador invertible,

$$u = \left(I - \frac{T}{\lambda} \right)^{-1} (f(x) + a + bx)$$

i haurem trobat u que és y''. Integrant dues vegades trobarem y. Notem que T és un operador continu de $C[0,1]$ en $C[0,1]$. De fet,

$$|(Tu)(x)| \le \int_0^1 |K(x,t)||u(t)|\, dt \le \|u\|_\infty, \quad 0 \le x \le 1.$$

Doncs

$$\|Tu\|_\infty \le \|u\|_\infty. \tag{14.6}$$

Estudiarem ara un criteri d'invertibilitat d'operadors. Siguin E i F espais de Banach. Denotem per $\mathcal{L}(E,F)$ el conjunt de totes les aplicacions lineals contínues de E en F. Clarament $\mathcal{L}(E,F)$ és un espai vectorial. Hi ha a $\mathcal{L}(E,F)$ una norma natural que és

$$\|T\| = \inf\{C : \|Tx\| \le C\|x\|,\ x \in E\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \le 1\}.$$

Resulta que l'expressió precedent és una norma i que $\mathcal{L}(E, F)$ és un espai de Banach si es dota d'aquesta norma (exercici).

Si $E = F$ puc compondre operadors continus i obtinc un altre operador continu. De fet,

$$\|T \circ S\| \leq \|T\| \|S\|$$

com es comprova fàcilment. També és fàcil veure que l'operador identitat I té norma 1. Posem $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ per un espai de Banach E.

Teorema. *La bola oberta de centre I i radi 1 a $\mathcal{L}(E)$ està formada per operadors invertibles.*

Demostració. Hem de veure que un operador del tipus $I - T$ amb $\|T\| < 1$ és invertible. La identitat

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1,$$

ens assenyala el camí. Notem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ és convergent perquè és absolutament convergent (veieu el problema 3 al final d'aquest capítol):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n < \infty,$$

ja que $\|T\| < 1$.

Ara

$$\begin{aligned}
(I - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n &= (I - T) \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} T^n \\
&= \lim_{N \to \infty} (I - T) \sum_{n=0}^{N} T^n \\
&= \lim_{N \to \infty} I - T^{N+1} = I.
\end{aligned}$$

Per tant

$$\frac{1}{I - T} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n. \qquad \square$$

Tornem al problema de contorn que és equivalent a l'equació de Fredholm (14.5). Ara $\|T\| \leq 1$ tal com diu (14.6). Doncs si $|\lambda| > 1$, $\|\frac{T}{\lambda}\| < 1$ i $I - \frac{T}{\lambda}$ és invertible. En aquest cas u (i doncs y) depèn contínuament de $f(x)$ i de a i b.

Amb aquest mètode no queda clar què passa si $0 < |\lambda| \leq 1$.

Exercici. Trobeu l'equació integral de Fredholm associada al problema de contorn

$$y'' + 4y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Surt

$$u + 4\int_0^1 K(x,s)u(s)\,ds = \sin x,$$

on

$$K(x,s) = \begin{cases} s-1 & \text{si } s \geq x \\ x-1 & \text{si } s \leq x. \end{cases}$$

Sigui $(Tu)(x) = \displaystyle\int_0^1 K(x,s)u(s)\,ds$.

Comproveu que $\|T\| \leq \dfrac{1}{2}$.

És $I + 4T$ invertible?

Veiem ara que un problema de valors inicials es converteix en una equació integral de Volterra. Per exemple,

$$y''(x) + y'(x) = \cos x, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq M. \tag{14.7}$$

Posem $u = y''$. Integrant entre 0 i x

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(t)\,dt,$$

$$y'(x) = 1 + \int_0^x u(t)\,dt.$$

Integrant una segona vegada entre 0 i x

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \left[1 + \int_0^t u(s)\,ds\right] dt \\ &= x + \int_0^x (x-s)u(s)\,ds. \end{aligned}$$

L'equació (14.7) es transforma en

$$u + \int_0^x (x-s)u(s)\,ds = \cos x - x. \tag{14.8}$$

Posem

$$Tu(x) = \int_0^x K(x,s)u(s)\,ds$$

on $K(x,s) = x - s$ és un nucli continu.

L'equació integral (14.8) s'escriu com

$$u + Tu = \cos x - x \tag{14.9}$$

que és un exemple d'una equació integral de Volterra.

L'equació (14.9) és

$$(I+T)(u) = \cos x - x$$

que dóna

$$u = (I+T)^{-1}(\cos x - x)$$

si $I + T$ és invertible. Resulta que $I + T$ és invertible per a qualsevol nucli $K(x, s)$ continu en (x, s), malgrat que no sempre $\|T\| < 1$. L'argument és el següent.

Clarament

$$|Tu(x)| \leq \|K\|_\infty \|u\|_\infty \, x, \quad 0 \leq x \leq M. \tag{14.10}$$

Doncs

$$\begin{aligned} \|Tu\|_\infty &\leq \|K\|_\infty \|u\|_\infty M \\ \|T\| &\leq \|K\|_\infty M. \end{aligned}$$

Ara fitarem $\|T^2\|$. Aplicant (14.10) (per obtenir la segona desigualtat):

$$\begin{aligned} |T(Tu)(x)| &\leq \|K\|_\infty \int_0^x |(Tu)(s)| \, ds \\ &\leq \|K\|_\infty \int_0^x \|K\|_\infty \|u\|_\infty s \, ds \\ &\leq \|K\|_\infty^2 \|u\|_\infty \frac{M^2}{2}, \\ \|T^2 u\|_\infty &\leq \|K\|_\infty^2 \frac{M^2}{2} \|u\|_\infty, \\ \|T^2\| &\leq \|K\|_\infty^2 \frac{M^2}{2}. \end{aligned}$$

Ara inductivament veiem que

$$\|T^n\| \leq \|K\|_\infty^n \frac{M^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Per tant

$$\sum_{n=0}^\infty \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{(\|K\|_\infty M)^n}{n!} = e^{\|K\|_\infty M} < \infty.$$

Doncs

$$\frac{1}{I + T} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n T^n.$$

La conclusió és que l'equació integral de Volterra

$$u(x) + \int_0^x K(x, s) u(s) \, ds = f(x),$$

té una solució única si el nucli $K(x, s)$ és continu en (x, s).

En el cas $K(x, s) = x - s$ podem calcular el valor exacte de $\|T\|$, on pensem que T és un operador fitat a $C[0, M]$, $M > 0$. La fita superior que hem trobat abans es pot millorar en el nostre cas:

$$\begin{aligned} |Tu(x)| &\leq \int_0^x (x - s) \|u\|_\infty \, ds = \|u\|_\infty \frac{x^2}{2} \leq \|u\|_\infty \frac{M^2}{2}, \\ \|Tu\|_\infty &\leq \frac{M^2}{2} \|u\|_\infty, \\ \|T\| &\leq \frac{M^2}{2}. \end{aligned}$$

Prenent la funció $u(x) = 1$, $0 \le x \le M$, obtenim

$$T1(x) = \int_0^x (x - s)\, ds = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \le x \le M.$$

Doncs

$$\|T1\|_\infty = \frac{M^2}{2}$$

i

$$\|T\| = \frac{M^2}{2}.$$

Doncs si $M = 2$ obtenim que $\|T\| = 2$ i que $I + T$ és invertible.

Problemes

1. Demostreu que si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és una aplicació lineal amb matriu (a_{ij}), llavors

$$\|Tx\| \le \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

de manera que $\|T\| \le \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Trobeu una aplicació lineal T per la qual la desigualtat precedent sigui estricta.

2. Sigui E un subconjunt mesurable de $\mathbb{R}^n$ i K una funció mesurable a $E \times E$ a valors complexos. Si f és una funció complexa mesurable a E posem

$$Tf(x) = \int_E K(x, y) f(y)\, dy, \tag{14.11}$$

pels x de E tals que $\int_E |K(x, y) f(y)|\, dy < \infty$.

(i)Demostreu que si E és compacte i K és una funció contínua, llavors T envia contínuament $L^1(E)$ en $C(E)$.

(ii) Suposem que, en el cas general, tenim les desigualtats

$$\int |K(x, y)|\, dy \le C, \quad x \in E,$$
$$\int |K(x, y)|\, dx \le C, \quad y \in E.$$

Llavors T envia contínuament $L^1(E)$ en $L^1(E)$ i $L^\infty(E)$ en $L^\infty(E)$.

(iii) En les hipòtesis de (ii) demostreu que T també envia continuament $L^2(E)$ en $L^2(E)$.

Hint : Poseu

$$|Tf(x)| \le \int_E |K(x, y)|^{\frac{1}{2}} |K(x, y)|^{\frac{1}{2}} |f(y)|\, dy$$

i apliqueu Schwarz.

3. Trobeu l'equació integral de Volterra equivalent al problema de valors inicials

$$y'' + y' - 2y = f(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

on $f \in C[0, \infty)$. Demostreu que hi ha una solució única.