

Anàlisi harmònica i teoria del senyal

v24.1

Martí Prats*

20 de gener de 2023

*Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Catalonia
martiprats@ub.edu

Índex

Introducció	v
1 Notes didàctiques	v
1 Sèries de Fourier	1
1.1 Una trucada	1
1.2 Qüestions fonamentals	4
1.3 Sèries de Fourier i coeficients de Fourier	6
1.3.1 Funcions 2π -periòdiques	9
1.3.2 Funcions L -periòdiques	11
1.4 Història i motivació	11
2 Interludi: conceptes d'anàlisi	15
2.1 Mesura de Lebesgue	15
2.1.1 La mesura exterior de Lebesgue	15
2.1.2 Espais de mesura	17
2.1.3 La mesura de Lebesgue	17
2.1.4 Funcions mesurables	19
2.2 Integral de Lebesgue	21
2.2.1 Funcions simples	21
2.2.2 Espais de Lebesgue	24
2.3 Intercanvi de límits	25
2.4 Densitat de funcions	27
3 Convergència puntual	29
3.1 Per què ens preguntem per la convergència puntual?	29
3.1.1 El fenomen de Gibbs	29
3.1.2 Les mitjanes de Cesàro	32
3.2 Suavitat i convergència	33
3.2.1 Un primer resultat	33
3.2.2 Suavitat i decaïment dels coeficients	35
3.2.3 Diferenciabilitat i velocitat de convergència	39
3.3 Una panoràmica dels teoremes de convergència	39
4 Mètodes sumatoris	45
4.1 Convolució	45
4.1.1 Propietats de la convolució	47
4.1.2 La convolució com a suavitzant	48
4.2 Aproximacions de la identitat	50

Índex

4.3	El nucli de Dirichlet	55
4.3.1	Fórmules pel nucli de Dirichlet	55
4.3.2	Propietats del nucli de Dirichlet	56
4.4	El nucli de Féjer i la successió de mitjanes de Cesàro	58
4.5	El nucli de Poisson i les mitjanes d'Abel	60
5	Funcions de quadrat integrable	63
5.1	Resultats bàsics a $L^2(\mathbb{T})$	63
5.2	Geometria dels espais de Hilbert	65
5.2.1	Definició i propietats elementals	65
5.2.2	Famílies ortonormals i bases	68
5.2.3	Projecció ortogonal	68
5.3	Completesa del sistema trigonomètric	71
5.3.1	Convergència quadràtica per a funcions de quadrat integrable	71
5.3.2	Identitat de Parseval	71
6	Un passeig per la transformada de Fourier discreta	73
6.1	Sèries de Fourier i base de Fourier discreta	73
6.1.1	Repàs de sèries de Fourier	73
6.1.2	Base de Fourier discreta	74
6.2	Bases duals a \mathbb{C}^N	78
6.3	Transformada de Fourier discreta i la seva inversa	80
6.4	La transformada ràpida de Fourier (FFT)	81
7	La transformada de Fourier com a integral	85
7.1	De les sèries de Fourier a les integrals de Fourier	85
7.2	La transformada de Fourier de funcions integrables	87
7.3	El diccionari temps-freqüència	89
7.3.1	Convolució de funcions integrables	92
7.4	Aproximació de la identitat	93
7.5	Transformada de Fourier inversa i identitat de Plancherel	97
8	Distribucions temperades i transformada de Fourier	101
8.1	La classe de Schwartz	101
8.1.1	Convolució a la classe de Schwartz	103
8.1.2	Invariància de la classe de Schwartz sota la transformada de Fourier	103
8.2	Distribucions temperades	104
8.3	El diccionari temps-freqüència	106
8.4	La delta de Dirac	109
8.5	Espais de Lebesgue i distribucions	111
8.5.1	Transformada de Fourier als espais de Lebesgue	113
8.6	Aplicacions de la transformada de Fourier	117
8.6.1	La fórmula del sumatori de Poisson	118
8.6.2	La fórmula de mostreig de Whittaker-Shannon	120

Índex

8.6.3	El principi d'incertesa de Heisenberg	121
9	Avaluació	125
9.1	Projectes del capítol Sèries de Fourier	126
9.2	Projectes del capítol Interludi: conceptes d'anàlisi	126
9.3	Projectes del capítol Convergència puntual	127
9.4	Projectes del capítol Mètodes sumatoris	127
9.5	Projectes del capítol Funcions de quadrat integrable	128
9.6	Projectes del capítol Un passeig per la transformada de Fourier discreta . . .	128
9.8	Projectes del capítol Més enllà del paradís	129
9.9	Projectes sobre anàlisi harmònica més enllà de Fourier	129
9.10	Projectes d'anàlisi harmònica avançada	130
9.11	Articles aptes per fer resum i esquema	131
9.11.1	Ondetes	131
9.11.2	GMT	132
9.11.3	Mesura harmònica	133
9.12	Possibles aplicacions a estudiar	133
10	Solucions	137

Introducció

Aquests apunts van començar com una adaptació (i traducció al català) del llibre “Harmonic Analysis; from Fourier to Wavelets” de Cristina Pereyra¹ i Lesley Ward² [PW12], i estan basats en un curs de 4t del grau de matemàtiques de la Universitat de Barcelona, que es va dur a terme entre febrer de 2022 i juny de 2022. El resultat final dista bastant del text original, però encara té algun fragment que n’és una traducció directa. També s’han afegit solucions a bona part dels exercicis proposats.

El llibre original treballa amb la integral de Riemann, de manera que he considerat que convenia refer el text per treballar directament sobre la integral de Lebesgue, amb la que els alumnes de la UB ja estan familiaritzats en arribar a quart.

La versió present és la final després de superar tot el curs múltiples revisions, després de posar-los a prova a classe. Vull agrair especialment la cooperació dels alumnes Daniel Fernández Benítez, Joaquim Duran Lamiel, Marc Piquer i Méndez, Oriol Franco Morro, Joan Domingo Pasarín, Núria Jorba Peña, Ferran Márquez Martínez i Alba Martí Vives per les seves aportacions, tant matemàtiques com ortogràfiques. També les observacions i contribucions dels professors Quim Ortega Cerdà amb qui hem debatut sobre el contingut i Jordi Marzo qui m’ha subministrat part dels problemes inclosos.

Si us plau, no distribuïu cap còpia del text. Moltes gràcies.

1 Notes didàctiques

El curs de 2022 va tenir un total de 26 sessions de 50’ de teoria i 26 més de resolució de problemes. La dedicació d’hores de teoria va ser la següent:

- Capítol 1 (introducció) 4 sessions.
- Capítol 2 (repàs de cursos anteriors) 0 sessions.
- Capítol 3 (convergència puntual) 5 sessions.
- Capítol 4 (mètodes sumatoris, excloent el nucli de Poisson) 4 sessions.
- Capítol 5 (funcions de quadrat integrable) 3 sessions.
- Capítol 6 (DFT) 1 sessió.
- Capítol 7 (Transformada com a integral) 4,5 sessions.

¹María Cristina Pereyra, (1964-).

²Lesley Ann Ward, (1963-)

Introducció

- Capítol 8 (Distribucions temperades) 4,5 sessions.

Alguns alumnes van optar per presentar algun fragment de teoria a classe (entre deu i vint minuts), ja que s'oferia l'opció d'obtenir punts de la nota final fent aquesta activitat, veure Capítol 9. Com que 12 alumnes van decidir fer-ho, les sessions van ser:

- Corollari 3.9 i teorema 3.10.
- Lema 3.17.
- Lema 3.23.
- Lema 4.8.
- Lema 4.9.
- Lema 5.23.
- Lema 7.3.
- Lema 8.11 i teorema 8.12.
- Teorema 7.24.
- Exemple 8.8.
- Teorema 8.50.
- Teorema 8.58.

Per altra banda, en les sessions de problemes es van anar resolent els exercicis proposats al text, a vegades per part dels alumnes, normalment per part del professor. A més, algunes sessions de problemes s'han utilitzat perquè alguns alumnes presentessin el seu projecte. Com que cada presentació ocupava mitja hora, i se'n van fer 8 en hores reservades per parcials i finals, en van quedar 6 per fer en horari de problemes, ocupant un total de 3 hores. Per tant, es van fer 23 hores de resolució de problemes.

De cara a futurs cursos, es recomana que a la segona setmana els alumnes decideixin el mètode d'avaluació per poder calendaritzar com abans millor l'assignatura, procurant que cap alumne tingui tots els treballs acumulats en un període curt de temps.

1 Sèries de Fourier

En aquests apunts explicarem tres tipus d'anàlisi de Fourier¹. En primer lloc les *sèries de Fourier* ens permetran reescriure una funció periòdica com una sèrie de dues cues, on la suma es fa sobre tot $n \in \mathbb{Z}$ (Capítols 1-5). En segon lloc descriurem l'*anàlisi de Fourier finita*, on convertim un vector de longitud N en un vector d'igual longitud (Capítol 6). Finalment la *transformada de Fourier* ens transformarà una funció de variable real en una altra (Capítols 7-8).

En aquest primer capítol fem els primers passos cap a la teoria de les sèries de Fourier. Comencem amb un exemple de processament i compressió del senyal a la Secció 1.1. Tot seguit, descrivim les principals qüestions sobre l'expansió en sèries trigonomètriques, comparant-les amb les sèries de Taylor a la Secció 1.2. Definim aleshores els coeficients i la sèrie de Fourier de funcions periòdiques a la Secció 1.3 i finalment descrivim el problema físic de la propagació d'una ona a la Secció 1.4

1.1 Una trucada

La idea central de l'anàlisi de Fourier consisteix a descompondre una funció o *senyal* com a suma de funcions més simples. Aquestes funcions simples es poden pensar com les *components* de la funció inicial. Ens interessa poder reconstruir la funció inicial a partir de les seves *components*. Una analogia força indicada és un prisma trencant un raig de llum blanca per crear un arc de Sant Martí. De fet, els diferents colors corresponen a les diferents longituds d'ona (o freqüències!) presents en el raig inicial. Superposant els colors de l'arc de Sant Martí recuperarem la llum blanca inicial. Com veurem, les nostres funcions simples corresponen a freqüències pures. El primer exemple que veurem són el sinus i el cosinus.

Si interpretem la funció com a senyal acústica, és a dir com a una funció que indica la pressió de l'aire en funció del temps, aleshores una funció sinusoidal produeix un to pur (o una nota) en una sola freqüència. El terme *anàlisi harmònica* evoca precisament aquesta separació d'un so en els seus harmònics.

Exemple 1.1. Suposem que l'Amèlia està a Leipzig i truca al seu pare a Cornellà de Llobregat, i li diu "Hola pare, sóc l'Amèlia i em moro de ganes d'explicar-te tot el que m'ha passat avui." Què li passa al so? Mentre l'Amèlia parla crea ones de pressió a l'aire, que viatgen cap al micròfon del telèfon. El so té certa duració, d'uns cinc segons en aquest cas, i una intensitat o volum que varia al llarg del temps. El so de la seva veu aleshores es converteix en un senyal que viatja a través del cable o de satèl·lit i es reconverteix a senyal acústic al terminal de Cornellà.

¹Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830

1 Sèries de Fourier

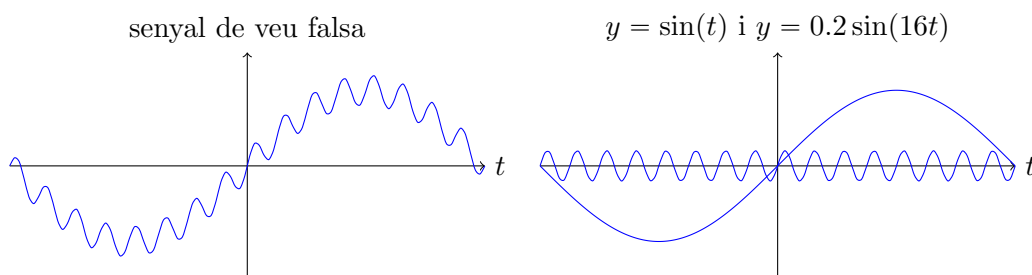


Figura 1.1: Senyal falsa i les seves components.

Intentem ara descompondre el senyal de l'Amèlia en components més simples. Suposem per exemple que el senyal és $f(t)$ tal i com apareix a la primera meitat de la Figura 1.1. L'eix horitzontal representa el temps t en segons i el vertical indica la variació de pressió, de manera que quan $y = f(t)$ oscil·la poc a prop de zero, el so és suau, mentre que si les oscil·lacions són més amples, aleshores el so és més fort.

En aquest senyal particular només hi ha presents dos moviments ondulatoris diferenciats. N'hi ha un de més lent, que correspon a la component $\sin(t)$ i un segon molt més ràpid, que podem reconèixer comptant les oscil·lacions com un múltiple de $\sin(16t)$. Són funcions de freqüències 1 i 16 respectivament. En altres paraules cada una d'elles realitza un total de 1 i 16 oscil·lacions completes respectivament, mentre el temps s'incrementa en 2π unitats de temps.

Volem saber també en quina mesura cada una d'aquestes oscil·lacions és present dins el nostre senyal. Les amplituds de les components són 1 i 0.2 respectivament, i així podem recuperar el senyal original sumant les dues components amb els pesos corresponents:

$$f(t) = \sin(t) + 0.2 \sin(16t).$$

La mà dreta d'aquesta expressió és el primer exemple de *descomposició de Fourier*: és la descomposició de Fourier del nostre senyal f .

Posem-nos ara a la pell de la companyia telefònica. Quan l'Amèlia truca al seu pare, cal fer arribar el senyal ràpidament de Leipzig a Cornellà. Com codificarem el senyal? Per exemple, la companyia podria prendre mostres de la pressió en 100 moments equidistants i enviar els 200 números resultants a Cornellà on reconstruirien el senyal interpolant aquestes mostres. Però en el cas del nostre senyal, n'hi ha prou amb enviar cinc nombres: les freqüències 1 i 16 i les amplituds respectives 1 i 0.2, així com la durada total del senyal. Si coneixem el codi, podem reconstruir el senyal completament amb aquests nombres.

Ara bé, un senyal acústic és típicament molt més complex que el cas anterior, i es necessitarien més funcions trigonomètriques (sinus o cosinus) per tal de poder reconstruir el senyal. De fet, podem esperar que es necessitin infinites funcions per tal que la reconstrucció sigui exacta. La col·lecció

$$\{\sin(nt) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos(nt) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

de totes les funcions sinus i cosinus amb freqüències enteres positives juntament amb la funció constant igual a 1 és un exemple de *base*. Més endavant del curs explorarem aquesta



Figura 1.2: Senyal real corresponent a una veu dient "Hola pare, sóc l'Amèlia i em moro de ganes d'explicar-te tot el que m'ha passat avui". L'eix horitzontal representa el temps i el vertical l'amplitud del senyal.

idea; informalment es tracta d'una col·lecció de components que és capaç de reconstruir qualsevol funció d'una classe donada. En la sèrie de Fourier s'utilitzen funcions sinusoidals, però altres conjunts de funcions també poden servir per al mateix propòsit, com és el cas de les *ondetes*.

Amb una mica més d'ambició ens podem plantejar el següent problema: per transmetre el senyal ràpidament ens hem d'oblidar de les infinites components, ens cal renunciar a part de la informació. A canvi de perdre qualitat podem enviar el senyal de manera més econòmica. Per exemple, en la Figura 1.1 la component principal és la més ampla. Què passarà si només enviem l'amplitud i la freqüència d'aquesta component? A Cornellà només reconstruiran el senyal de manera parcial, ja que l'ondulació ràpida no hi serà present. De tota manera, el pare de l'Amèlia, que li coneix perfectament la veu, potser podria reconèixer-la sense problema. Aquest és un exemple de *compressió* del senyal.

Resumint: hem *analitzat* un senyal f , determinant quines components hi són presents i amb quina força. Hem *comprimit* el senyal descartant algunes components. Hem retransmès la resta de freqüències i amplituds (també la podríem emmagatzemar). A l'altre extrem de la trucada s'ha reconstruït el senyal comprimit.

Una vegada més, a la pràctica volem que el senyal reconstruït sigui similar a l'original. Hi ha moltes qüestions interessants sobre quines i quantes components es poden descartar mantenint un senyal recognoscible. La matèria de tractament del senyal en enginyeria electrònica o telecomunicacions versa sobre aquestes.

Per mirar de compensar la falta de realisme de la Figura 1.1, la Figura 1.2 mostra un senyal corresponent a la veu de qui escriu aquestes notes interpretant el paper d'Amèlia. El patró complicat d'oscil·lacions demana moltes més components que el senyal fals que hem estat comentant. \diamond

La funció f de l'exemple anterior és especialment simple. La intuïció que sinus i cosinus serien suficients per descriure multitud de funcions es va aconseguir amb l'experiència dels pioners de l'anàlisi de Fourier amb problemes físics com la difusió de la calor o la corda vibrant a principis del segle divuit, vegeu la Secció 1.4. Aquesta intuïció porta a la idea d'expressar tota funció periòdica f com a combinació lineal infinita de sinus i cosinus, altrament coneguda com a *sèrie trigonomètrica*:

$$f(\theta) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \sin(n\theta) + c_n \cos(n\theta)]. \quad (1.1)$$

1 Sèries de Fourier

Usem el símbol \sim per a indicar que el cantó dret és la sèrie trigonomètrica *associada* a f . No usem el símbol $=$ ja que en alguns casos la funció i la sèrie no seran iguals, tal i com discutirem al llarg dels apunts. Hem usat la variable θ enlloc de t per remarcar la idea que la variable està definida com a angle, és a dir en l'interval $(0, 2\pi)$ o en un altre interval de la mateixa amplada. A voltes usarem també la variable x .

Podem reescriure la banda dreta de (1.1) com a combinació lineal de funcions exponencials. Per fer-ho usem la *Fórmula d'Euler*²: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, i les fórmules corresponents del sinus i del cosinus en termes de l'exponencial:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (1.2)$$

Així, obtenim

$$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}. \quad (1.3)$$

El cantó dret s'anomena *sèrie trigonomètrica*. Més avall definirem una sèrie trigonomètrica dependent de f , que anomenarem *sèrie de Fourier*. En aquest cas, el coeficient a_n s'anomena *coeficient enèsim de Fourier* i es denota per $\hat{f}(n)$ per emfasitzar la dependència en la funció f . En general, a_n , b_n i c_n són nombres complexos, i donats a_n i a_{-n} podem trobar de manera unívoca b_n i c_n (i viceversa).

Exercici 1.2. Dona a_n en funció de b_n i c_n . ◁

1.2 Qüestions fonamentals

Aquesta primera introducció suggereix una sèrie de preguntes:

- Com podem trobar els coeficients a_n donada la funció f ?
- Donada la successió $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, com podem reconstruir f ?
- En quin sentit convergeix, si ho fa, la sèrie de Fourier? Puntualment, uniforme o en algun altre sentit? Quina és la velocitat de convergència?
- Si la sèrie de Fourier convergeix a una funció límit, aquesta serà exactament la funció original f ?
- Quines funcions podem expressar com a sèrie trigonomètrica (1.3)? Cal que f sigui contínua, per exemple, o n'hi ha prou amb ser integrable?

Abans de començar a respondre aquestes preguntes, cosa que mirarem de fer al llarg dels apunts, comparem el cas amb un problema ja conegut pels alumnes d'aquest curs: les

²Leonhard Euler, pronunciat "øiler" (1707-1783).

1 Sèries de Fourier

sèries de potències. Una funció infinitament diferenciable es pot expressar com a sèrie de Taylor³ centrada a $x = 0$ (o sèrie de Maclaurin⁴):

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (1.4)$$

Els nombres c_n s'anomenen *coeficients de Taylor* i venen donats per l'expressió

$$c_n = f^{(n)}(0)/n!.$$

Evaluada a $x = 0$, aquesta sèrie convergeix a $f(0) = c_0$.

Al segle XVIII es va descobrir que les funcions tradicionals de càlcul ($\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\sqrt{1+x}$, e^x , ...) es poden expressar mitjançant sèries de Taylor i que la convergència d'aquestes sèries és puntual en un interval obert comprenent $x = 0$, i a vegades la convergència també es dona als extrems de l'interval. La destresa que van desenvolupar alguns matemàtics de l'època en la manipulació d'aquestes sèries els va portar a creure que el mateix seria cert per totes les funcions (infinitament diferenciables). Aquest somni es va desmuntar amb el contraexemple descobert per Cauchy⁵ el 1821:

Exemple 1.3 (Contraexemple de Cauchy). Considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Aquesta funció és infinitament diferenciable a tot arreu, i $f^{(n)}(0) = 0$ per tot $n \geq 0$. Per tant la seva sèrie de Taylor és idènticament nul·la. Així doncs, la sèrie convergeix a $f(x)$ si i només si $x = 0$. \diamond

Exercici 1.4. Comprova que el contraexemple de Cauchy és efectivament una funció infinitament diferenciable. \triangleleft

El *polinomi de Taylor d'ordre N* d'una funció f diferenciable N vegades ve donat per la fórmula

$$P_N(f, 0)(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(N)}(0)}{N!}x^N. \quad (1.5)$$

Exercici 1.5. Verifica que si f és un polinomi d'ordre menor o igual a N , aleshores el polinomi de Taylor d'ordre N coincideix amb f . \triangleleft

Definició 1.6. Un *polinomi trigonomètric d'ordre M* és una funció

$$f(\theta) = \sum_{n=-M}^M a_n e^{in\theta},$$

on $a_n \in \mathbb{C}$ per $n \in \mathbb{Z}$. \bullet

³Brook Taylor, 1685–1731

⁴Colin Maclaurin, 1698–1746

⁵Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857

Exercici 1.7. Comprova que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} e^{-ik\theta} d\theta = \delta_{n,k},$$

on la *delta de Kronecker*⁶ està definida com

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

Dit d'una altra manera, $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és un conjunt ortonormal respecte al producte escalar $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \bar{g}(\theta) d\theta$, com veurem al Capítol 5. \triangleleft

Comentari 1.8. Donada una funció de variable real que pren valors complexos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, diguem que $f = u + iv$ on $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, aleshores la derivada, la primitiva i les integrals definides es defineixen linealment: $f' = u' + iv'$, $\int f = \int u + i \int v, \dots$ •

Exercici 1.9. Comprova que tot polinomi trigonomètric f satisfà que

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

i els coeficients de l'expressió anàloga a (1.1) són

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

\triangleleft

En ambdós casos (sèries de Taylor i Fourier), el problema principal és saber com de bé podem aproximar una funció donada mitjançant uns polinomis ben específics, els de Taylor, o uns polinomis trigonomètrics ben específics, les sumes parcials de Fourier.

1.3 Sèries de Fourier i coeficients de Fourier

Tal i com suggereix l'Exercici 1.9, el coeficient de Fourier enèsim $\hat{f}(n) = a_n$ ve definit per la següent identitat:

$$\hat{f}(n) := a_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \quad (1.6)$$

En termes de les funcions sinus i cosinus, tenim

$$c_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta. \quad (1.7)$$

⁶Leopold Kronecker, 1823–1891

1 Sèries de Fourier

A continuació anem a explorar *formalment* (és a dir fent una deducció mancada de rigor matemàtic, sense justificar intercanvis de límits, per exemple) el perquè d'aquesta identitat. Suposem que

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}. \quad (1.8)$$

Aleshores, multiplicant per una exponencial, integrant i fent un canvi d'ordre no justificat, obtindríem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} e^{-ik\theta} d\theta \stackrel{\text{Ex. 1.7}}{=} a_k. \end{aligned}$$

Cal remarcar que per donar sentit a la fórmula (1.6) cal que la funció $f(\theta)e^{-in\theta}$ sigui integrable en el sentit de Lebesgue a l'interval $[-\pi, \pi]$. Aleshores

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) e^{-in\theta}| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta =: \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} < \infty,$$

on hem usat la desigualtat triangular per integrals. En particular hem vist que

$$|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}. \quad (1.9)$$

Vegeu el Comentari 2.32 per recordar la definició d'integrabilitat. Vegeu la secció 1.3.1 per la definició de \mathbb{T} .

Exemple 1.10 (L'ona triangular). Considerem la funció $f(\theta) = |\theta|$ per $-\pi \leq \theta < \pi$. Aquesta funció, si s'estén periòdicament a la recta real és contínua però presenta un vèrtex a cada múltiple de π . El seu coeficient enèsim de Fourier ve donat per

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\theta| e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 \theta e^{-in\theta} d\theta + \int_0^{\pi} \theta e^{-in\theta} d\theta \right).$$

Per tant (vegeu l'Exercici 1.11)

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{-2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ és imparell,} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \text{ és parell no nul.} \end{cases}$$

Per tant, la sèrie de Fourier de f ve donada per

$$f(\theta) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{-2}{\pi(2n-1)^2} e^{i(2n-1)\theta} = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)\theta).$$

Com veurem més endavant, la funció i la sèrie coincideixen exactament per tot θ . \diamond

1 Sèries de Fourier

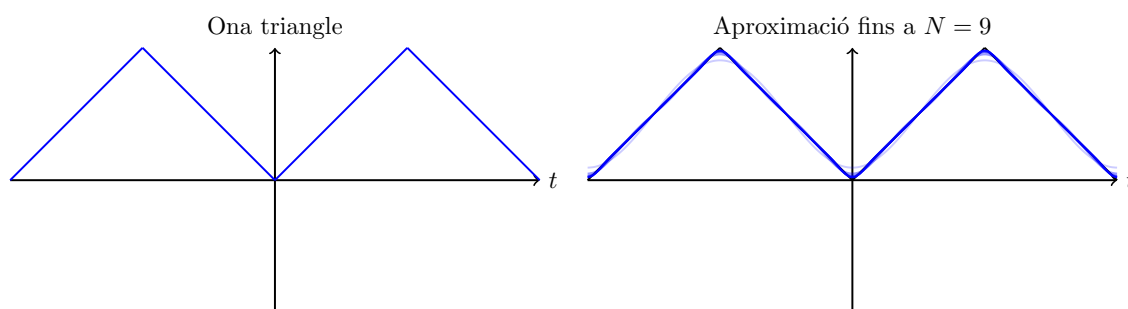


Figura 1.3: Ona triangular i successives aproximacions.

Exercici 1.11. Usant integració per parts, completeu el càlcul de $\hat{f}(n)$ de l'ona triangular. ◁

Exercici 1.12. Representa les funcions $f(\theta)$. Calcula els coeficients (1.7).

1. $f(\theta) = \theta$, $(-\pi < \theta < \pi)$
2. $f(\theta) = |\theta|$, $(-\pi < \theta < \pi)$
3. $f(\theta) = \pi - \theta$, $(0 < \theta < 2\pi)$,
4. $f(\theta) = \begin{cases} 0, & (-\pi < \theta < 0); \\ \theta, & (0 < \theta < \pi), \end{cases}$
5. $f(\theta) = \sin^2 \theta$,
6. $f(\theta) = \begin{cases} -1, & (-\pi < \theta < 0); \\ 1, & (0 < \theta < \pi), \end{cases}$
7. $f(\theta) = \begin{cases} 0, & (-\pi < \theta < 0); \\ 1, & (0 < \theta < \pi), \end{cases}$
8. $f(\theta) = |\sin \theta|$,
9. $f(\theta) = |\cos \theta|$,
10. $f(\theta) = \begin{cases} 0, & (-\pi < \theta < 0); \\ \sin \theta, & (0 < \theta < \pi), \end{cases}$
11. $f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & (|\theta| < a); \\ 0, & (a < |\theta| < \pi), \end{cases}$
12. $f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & (|\theta - \theta_0| < a); \\ 0, & (a < |\theta - \theta_0| < \pi), \end{cases}$
13. $f(\theta) = \begin{cases} 1, & (|\theta| < a); \\ -1, & (2a < \theta < 4a); \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$ on $a < \frac{\pi}{4}$ i $-\pi < \theta < \pi$.

$$14. f(\theta) = \begin{cases} \theta, & (|\theta| < a); \\ a \frac{\pi - \theta}{\pi - a}, & (a < \theta < \pi); \\ a \frac{\pi + \theta}{a - \pi}, & (-\pi < \theta < -a), \end{cases}$$

$$15. f(\theta) = \begin{cases} \frac{(a - |\theta|)}{a^2}, & (|\theta| < a); \\ 0, & (a < |\theta| < \pi), \end{cases}$$

$$16. f(\theta) = \theta^2 \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

$$17. f(\theta) = \theta(\pi - |\theta|) \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

$$18. f(\theta) = e^{b\theta} \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

$$19. f(\theta) = e^{b\theta} \quad (0 < \theta < 2\pi),$$

$$20. f(\theta) = \sinh \theta \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

Exercici 1.13. Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$.

1. Si f és una funció parell, $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$ i $b_n = 0$.
2. Si f és una funció senar, $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n)$ i $c_n = 0$.
3. Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + \pi) = f(\theta)$, aleshores $\hat{f}(n) = 0$ per a tot n senar.
4. Si f pren valors reals, aleshores $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}$.

Exercici 1.14. Donats $f \in L^1(\mathbb{T})$ i $n \in \mathbb{N}$, definim $p(x) = f(nx)$ per a tot $x \in \mathbb{T}$. Demostreu que per a $m \in \mathbb{Z}$ tenim

$$\hat{p}(m) = \begin{cases} \hat{f}\left(\frac{m}{n}\right), & \text{si } n|m, \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

1.3.1 Funcions 2π -periòdiques

Definició 1.15. Una funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ és 2π periòdica si

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{per tot } x \in \mathbb{R}.$$

Donada una funció $f : [-\pi, \pi)$, la podem estendre de manera periòdica a la recta real usant la definició anterior. Notem que les components $e^{in\theta}$ són funcions 2π -periòdiques.

Sovint a la literatura s'anomena \mathbb{T} a la *circumferència unitat*:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z = e^{i\theta} : -\pi \leq \theta < \pi\}. \quad (1.10)$$

1 Sèries de Fourier

Podem identificar una funció 2π -periòdica a \mathbb{R} amb una funció $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ definida a la circumferència unitat de la manera següent: per $z \in \mathbb{T}$ existeix un únic $\theta \in [-\pi, \pi)$ tal que $z = e^{i\theta}$. Aleshores definim $g(z) := f(\theta)$. De fet, si escollim qualsevol $\theta \in \mathbb{R}$ que satisfaci $z = e^{i\theta}$, el valor serà el mateix degut a la periodicitat de f . També a la inversa, si tenim $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ podem definir $f(\theta) := g(e^{i\theta})$ per tot $\theta \in \mathbb{R}$ i resultarà ser una funció 2π -periòdica. Així, abusant de notació podrem anomenar ambdues funcions f .

Al llarg dels apunts, usarem la notació

$$\mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}),$$

és a dir que es tracta d'un interval tancat d'amplada 2π i amb els dos extrems identificats, així que el podem entendre com $[-\pi, \pi)$, $[0, 2\pi)$, $[\pi/2, 5\pi/2)$, ... indistintament. Es tracta simplement de treballar amb la variable θ enlloc de $z = e^{i\pi\theta}$, que és més pràctic a l'hora de fer segons quins càlculs.

Notem que per tal que f sigui contínua a \mathbb{T} , ens cal que la seva extensió 2π -periòdica a la recta real sigui contínua, és a dir, ens cal que f sigui contínua a $[-\pi, \pi]$ i cal que a més a més $f(-\pi) = f(\pi)$. Si volem que g sigui diferenciable també haurem de demanar que l'extensió a la recta real sigui diferenciable. Així, si diem que $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ i $f \in C^k(\mathbb{T})$ amb $k \in \mathbb{N}$, volem dir que la funció f estesa periòdicament a la recta real és contínua i té k derivades contínues. En particular, $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ per $0 \leq j \leq k$.

Observem que per una funció 2π -periòdica el valor de la integral en un interval de longitud 2π no varia:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(\theta) d\theta = \dots$$

Exercici 1.16. Sigui f 2π -periòdica. Demostra que per tot $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \int_a^{a+2\pi} f(\theta) d\theta.$$

◁

Exercici 1.17. Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$. Demostreu que si f és decreixent a $[0, 2\pi)$ aleshores

$$b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \geq 0,$$

per a $n \geq 1$.

◁

Exercici 1.18. Donada una funció $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $|f(x)| \leq 1$ demostreu que

$$|\hat{f}(1) - \hat{f}(0)| \leq \frac{4}{\pi}.$$

Trobeu un exemple que compleixi la igualtat.

Pista: per calcular la integral et pot resultar útil alguna fórmula trigonomètrica de l'angle doble.

◁

1.3.2 Funcions L -periòdiques

Fins ara hem considerat funcions de període 2π i les seves extensions. També és força habitual treballar amb funcions definides a l'interval $[0, 1)$ i la seva extensió 1 -periòdica. En general podem calcular sèries de Fourier per funcions definides a un interval $[a, b)$ de longitud $L = b - a$ i la seva extensió L -periòdica a \mathbb{R} .

Diem que f és L -periòdica si $f(x + L) = f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Definim el L -coeficient de Fourier com

$$\hat{f}^L(n) = \frac{1}{L} \int_a^b f(\theta) e^{-2\pi i n \theta / L} d\theta,$$

i la L -sèrie de Fourier

$$f(\theta) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}^L(n) e^{2\pi i n \theta / L}.$$

Les components són ara les funcions exponencials L -periòdiques $e^{2\pi i n \theta / L}$ i els polinomis trigonomètrics L -periòdics són combinacions lineals finites d'aquestes components.

Exercici 1.19. Comprova que per cada $n \in \mathbb{Z}$ la funció $e^{2\pi i n \theta / L}$ és L -periòdica. \triangleleft

El cas $L = 1$ serà

$$\hat{f}^1(n) = \int_a^b f(\theta) e^{-2\pi i n \theta} d\theta, \quad f(\theta) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}^1(n) e^{2\pi i n \theta}.$$

Al Capítol 7 utilitzarem les L -sèries de Fourier per relacionar les sèries i la transformada de Fourier. Quan fem sèries de Fourier treballarem amb funcions periòdiques, mentre que la transformada de Fourier s'aplicarà a funcions de la recta real i funcionarà de manera òptima quan hi ha un cert decaïment a infinit, és a dir que les funcions no són periòdiques. De tota manera, prenent L -sèries de Fourier de la restricció de f a l'interval $[-L/2, L/2)$ i fent tendir L a infinit podem recuperar la transformada de Fourier com a límit de sumes de Riemann obtingudes de les L -sèries de Fourier.

Exercici 1.20. Comprova que per a tot polinomi trigonomètric L -periòdic

$$f(\theta) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{2\pi i n \theta / L},$$

tenim que $a_n = \hat{f}^L(n)$, és a dir que el polinomi coincideix amb la seva L -sèrie de Fourier. \triangleleft

1.4 Història i motivació

Al llarg dels darrers 200 anys l'anàlisi de Fourier ha estat d'una gran importància pràctica, tant per la seva importància teòrica (és l'embrió de la branca coneguda com a anàlisi harmònica, però també ha estat fonamental en teoria dels nombres, per exemple) i també

per modelar, comprendre, predir i controlar el comportament de sistemes físics. Les aplicacions més immediates que va tenir l'anàlisi de Fourier van ser en la solució de models matemàtics que descriuen la difusió de la calor en objectes sòlids, la vibració d'una corda o la de la membrana d'un pandero. Més recentment ha estat fonamental per les telecomunicacions, emmagatzematge i retransmissió de dades (per exemple el format JPEG d'imatges).

Podríem situar l'origen de l'anàlisi de Fourier en la discussió sobre la solució de l'equació d'ona

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & \text{per } (x, t) \in (0, \pi) \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x) & x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

on a és un paràmetre que depèn de la tensió de la corda (amb un reescalament podem assumir $a = 1$), i $u : [0, \pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ representa l'alçada de la corda en el punt x . Suposem que els moviments són prou petits per negligir el desplaçament horitzontal dels punts.

Comentari 1.21. Per deduir l'equació d'ona fem el següent raonament: l'acceleració és un múltiple constant de la força, i aquesta la suposem únicament determinada per la tensió de la corda, negligint gravetat, fricció i irregularitats en la densitat de la corda, que suposem que no té gruix. Aleshores la tensió en cada punt segueix la direcció tangent a la corda i a cada punt x i instant t es representa per $T(x, t)$.

La component vertical genera la força donada per la massa $\rho \Delta x$ multiplicada per l'acceleració:

$$T(x + \Delta x, t) \sin(\theta(x + \Delta x, t)) - T(x, t) \sin(\theta) = \rho \Delta x u_{tt}(x, t).$$

Així, si escrivim V per la component vertical de la tensió obtenim

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = \rho u_{tt}(x, t).$$

En el límit això esdevé

$$V_x = \rho u_{tt}.$$

Com que la component vertical V de la tensió dividida per la component horitzontal $H = T \cos \theta$ és el pendent de la corba en aquell punt, obtenim que $V = H \tan \theta = H u_x(x, t)$ i, per tant,

$$\frac{\partial}{\partial x} (H u_x) = \rho u_{tt}.$$

Per altra banda, com que no hi ha desplaçament lateral, la component horitzontal de la tensió s'ha de cancel·lar:

$$H(x + \Delta x, t) - H(x, t) = T(x + \Delta x, t) \cos(\theta(x + \Delta x, t)) - T(x, t) \cos(\theta) = 0.$$

Això es tradueix en que H és independent de x i, per tant, surt en forma de constant:

$$H u_{xx} = \rho u_{tt}.$$

1 Sèries de Fourier

Com que la component vertical és negligible per desplaçaments petits, podem escriure aproximadament $T = H$ i, per tant,

$$\frac{T}{\rho} u_{xx} = u_{tt}.$$

L'equació d'ona es pot plantejar a l'interval $(-\pi, \pi)$ per antisimetria: escrivim $u(-x, t) = -u(x, t)$ per $x \in (0, \pi)$. I encara es pot estendre periòdicament a la recta \mathbb{R} . (pregunta: com hem de modificar les condicions ϕ i ψ ?)

D'Alembert⁷ va demostrar el 1747 que qualsevol solució de l'equació de l'ona a la recta real tindria la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(t+x) + g(t-x)). \quad (1.12)$$

Dit d'una altra manera, es tracta de la suma d'una ona que es desplaça cap a la dreta i una ona que es desplaça cap a l'esquerra, ambdues a igual velocitat. Utilitzant les condicions inicials i una tècnica d'integració es pot solucionar l'equació per aquesta tècnica.

Fent ús de la periodització, descrita abans, aquesta descomposició (1.12) és vàlida per l'equació a la recta real, però en el cas derivat de l'equació d'ona a l'interval (1.11) obtenim $f(t) + g(t) = 2u(0, t) = 0$ i, per tant, $g = -f$. A més, com que hem suposat que les funcions són antisimètriques, tenim $f(x) = -f(-x) = g(-x)$, amb la qual cosa $\phi(x) = f(x)$.

Notem que la periodització no garanteix que la funció u sigui C^2 a tot $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. En particular la solució de d'Alembert no garanteix que $u(0, t) = 0$. Per obtenir compatibilitat de les condicions de frontera amb la periodització, ens cal que $\psi(x) = 0$. Sabeu demostrar-ho?

Daniel Bernouilli⁸ va solucionar l'equació mitjançant la separació de variables, demostrant que hi ha infinites solucions amb la forma

$$\phi_j(x, t) = \sin(jx) \cos(jt). \quad (1.13)$$

D'aquí va conjecturar que totes les solucions de l'equació d'ona (1.11) amb $\psi(x) = 0$ es podrien expressar mitjançant la forma

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin(jx) \cos(jt).$$

Comentari 1.22. Notem que per obtenir una solució amb variables separades com a (1.13) en una corda de guitarra ens caldria $\phi(x) = \sin(jx)$, és a dir que cal disposar la corda en forma sinusoidal perfecta i deixar-la anar, i així obtindríem un so corresponent a una freqüència única, sense harmònics, cosa impensable en la realitat al disposar només de cinc dits per mà. Al cap i a la fi, quan polsem una corda de guitarra, la forma és més semblant a una ona triangle i, per tant, hi haurà més harmònics presents (vegeu l'Exemple 1.10). El que conjectura Bernouilli és que qualsevol funció contínua que s'anul·li als extrems de l'interval $(0, \pi)$ pot ser expressada com a suma de funcions sinusoidals. Si això és així, aleshores cada component evoluciona de manera independent. •

⁷Jean Le Rond d'Alembert, 1717–1783

⁸Daniel Bernouilli, 1700–1782

1 Sèries de Fourier

Exercici 1.23. Comprova que efectivament (1.13) soluciona l'equació (1.11) amb $a^2 = 1$. Demuestra que donats nombres reals a_j , aleshores $\sum_{j=1}^N a_j \phi_j$ soluciona també (1.11). \triangleleft

La majoria de matemàtics contemporanis de Bernoulli donaven per fet que propietats com la continuïtat, la diferenciabilitat i la periodicitat es preserven en sumes infinites, de manera que no esperaven que una funció com l'ona triangle es pogués representar com a sèrie trigonomètrica. Als anys vint del segle dinou el problema de representar una funció “arbitrària” per una sèrie trigonomètrica va rebre una solució satisfactòria de la mà de Fourier, que va descriure un mètode formal per trobar aital expressió. El 1828 Dirichlet va obtenir condicions suficients (i força generals) que garantien que la sèrie de Fourier de f convergia puntualment a f , formalitzant les nocions de suma parcial i de convergència d'una sèrie per primera vegada, amb permís de Gauss⁹ i Cauchy.

Projecte 1.24 (Equació de la calor). Explica l'equació de la calor en una barra de ferro i la solució que va proposar Fourier. \triangleleft

Projecte 1.25 (Els harmònics dels instruments de vent fusta). Planteja i soluciona les equacions del clarinet i el saxofon tal i com hem fet amb l'equació (1.11). \triangleleft

Projecte 1.26 (Les funcions de Bessel). Explica les funcions de Bessel. \triangleleft

Projecte 1.27 (Els harmònics dels panderos circulars). Planteja i soluciona les equacions del pandero circular. \triangleleft

⁹Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855

2 Interludi: conceptes d'anàlisi

2.1 Mesura de Lebesgue

Aquest text és un extracte dels apunts de l'assignatura de Càlcul integral en diverses variables d'en Xavier Massaneda.

2.1.1 La mesura exterior de Lebesgue

Volem donar sentit a la mesura d'un conjunt arbitrari $A \subset \mathbb{R}$. El primer intent, que funciona gairebé sempre, és utilitzar els intervals com a unitat de mesura, recobrint el conjunt A .

Definició 2.1. Sigui $A \subset \mathbb{R}$. Diem *mesura exterior* (de Lebesgue) d' A a l'ímfim:

$$|A|^* := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \nu(I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \text{ on } I_k \text{ són intervals oberts} \right\}.$$

Per tant, per tots els possibles recobriments d' A per intervals oberts, en calculem la suma de volums dels intervals i prenem l'ímfim. •

Així doncs, un conjunt $E \subset \mathbb{R}$ és de mesura zero (o nul) si per a tot $\epsilon > 0$ existeix una família numerable d'intervals oberts (o tancats) $\{I_k\}_k$ tals que:

- (a) $E \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$,
- (b) $\sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < \epsilon$,

on $|I_k|$ és la longitud de l'interval I_k .

Exercici 2.2. La mesura exterior d'un punt $x \in \mathbb{R}$ és 0.

Demostreu que una unió numerable de conjunts nuls és un conjunt nul. En particular, un conjunt numerable és nul. ◁

Definició 2.3. Direm que una propietat es satisfà gairebé per tot g.p.t. (almost everywhere a.e. en anglès) si el conjunt de punts on no es satisfà és de mesura zero. •

Exercici 2.4. Definiu una funció contínua que sigui igual a

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

g.p.t. $x \in \mathbb{R}$. ◁

Exercici 2.5. Sigui $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua amb derivada contínua a l'obert $U \subset \mathbb{R}$ (i.e. $f \in C^1(U)$) i $N \subset U$ un conjunt nul. Demostreu que $f(N)$ és nul.

Pista: per acotar la mesura de la imatge d'un interval ens cal f' acotada, però això no està garantit. A més, pot haver-hi infinits intervals disjunts a U . Convé expressar N com una unió de subconjunts formada per punts que estan a distància controlada del complementari de U , i assegurant que prenem una unió finita d'intervals (com?). Si tenim una unió finita de conjunts tancats, aleshores la distorsió serà controlada pel suprem de f' en aquests conjunts, que serà un màxim per Bolzano. Després pots usar que la unió numerable de conjunts nuls és nul·la. \triangleleft

Lema 2.6 (Propietats elementals). 1. $|\emptyset|^* = 0$.

2. Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, aleshores $|A|^* \leq |B|^*$.

3. Si A és finit o numerable, aleshores $|A|^* = 0$.

4. σ -subaditivitat: Si $A_j \subset \mathbb{R}$ per $j \in \mathbb{N}$, aleshores

$$\left| \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right|^* \leq \sum_{j=1}^{\infty} |A_j|^*.$$

5. Si I és un interval obert i $I \subset A \subset \bar{I}$, aleshores $|A|^* = \nu(I)$.

Exercici 2.7. Demostrea el lema anterior. \triangleleft

Observació 2.8. Esperem que una bona definició de mesura m a \mathbb{R} tingui també la propietat de σ -additivitat: Si $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ és una família numerable de $A_j \subset \mathbb{R}$ disjunts dos a dos (sense cap intersecció de cap mena), aleshores

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j).$$

Exemples més aviat complicats ¹ mostren que la mesura exterior que acabem de definir no és σ -additiva. Llàstima... \bullet

Projecte 2.9. Explica l'exemple de Vitali de conjunt no mesurable. \triangleleft

Per arreglar aquesta deficiència, no definirem una mesura nova, si no que restringirem la mesura exterior als subconjunts de \mathbb{R} on aquesta es comporta amb les propietats que volem. Aquests conjunts són quasi tots (costa molt trobar un subconjunt "dolent" en aquest sentit: cal usar l'axioma de l'elecció!), i permetran sobradament definir una integració més robusta que la de Riemann.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Vitali_set

2.1.2 Espais de mesura

Sigui X un conjunt ambient (habitualment $X = \mathbb{R}$), i sigui $\mathcal{P}(X)$ el conjunt de parts de X , és a dir, el conjunt que té per elements els subconjunts de X (incloent-hi \emptyset i X).

Definició 2.10. Una família $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ és una σ -àlgebra si:

- $X \in \Sigma$,
- és estable pel pas al complementari, és a dir, si $E \in \Sigma$ aleshores $E^c \in \Sigma$, i
- la unió numerable d'elements de Σ també és a Σ : si $E_j \in \Sigma$, $j \in \mathbb{N}$ llavors $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \Sigma$. •

Definició 2.11. Donat un conjunt X i una σ -àlgebra $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$, una funció $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ és una *mesura (positiva)* si:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- μ és σ -additiva: si $E_j \in \Sigma$ són disjunts dos a dos, llavors

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Si $\mu(X) = 1$, també s'anomena *probabilitat* o *mesura de probabilitat*.

La terna (X, Σ, μ) s'anomena espai de mesura. •

2.1.3 La mesura de Lebesgue

Definim tot seguit els subconjunts de \mathbb{R} on la mesura exterior té les bones propietats que calen per a integrar.

Definició 2.12. Sigui $E \subset \mathbb{R}$. Diem que E és *mesurable de Lebesgue* si

$$\forall A \subset \mathbb{R} \quad |A|^* = |A \cap E|^* + |A \cap E^c|^*$$

Els conjunts mesurables de Lebesgue formen la σ -àlgebra dels conjunts mesurables de Lebesgue, denotada $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ i que, com el seu nom indica, és una σ -àlgebra. La mesura exterior restringida a $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ és una mesura positiva, anomenada mesura de Lebesgue:

$$\begin{aligned} \mu = |\cdot| : \mathcal{M}(\mathbb{R}) &\rightarrow [0, \infty] \\ E &\mapsto \mu(E) = |E| := |E|^*. \end{aligned}$$

Per a tot $E \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ denotarem $|E|$ en lloc de $|E|^*$ (tot i que siguin el mateix valor).

Així doncs, a la pràctica, la mesura de Lebesgue no és més que la mesura exterior però definida només en els conjunts "bons" (en un sentit molt lax, gairebé tots els conjunts són bons).

A partir d'aquí enunciem una sèrie de propietats teòriques de la mesura de Lebesgue. La majoria són força intuïtives, sobretot si pensem que estem formalitzant la noció de longitud d'un conjunt.

Teorema 2.13 (de Carathéodory). 1. $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ és una σ -àlgebra a \mathbb{R} .

2. $|\cdot|$ és una mesura positiva a $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

3. La mesura $|\cdot|$ és completa: si $Z \subset \mathbb{R}$ té mesura exterior 0, aleshores $Z \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Així, qualsevol $Z' \subset Z$ també és mesurable de Lebesgue amb mesura zero.

Observació 2.14. Els conjunts de mesura 0 s'anomenen *nuls*, i són invisibles per la mesura (i, com veurem, invisibles per la integral). •

Observació 2.15 (Propietats de la mesura de Lebesgue). 1. Si $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ i $A \subset B$, llavors $|A| \leq |B|$.

2. Si $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, $A \subset B$ i $|A| < +\infty$, llavors $|B \setminus A| = |B| - |A|$.

3. Si $E_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ per a $j \in \mathbb{N}$ formen una successió ascendent, és a dir, $E_j \subset E_{j+1}$ per a tot $j \in \mathbb{N}$, llavors $\left| \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} |E_j|$.

4. Invariància per translacions i simetria respecte a l'origen: si $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, aleshores

- $x + E := \{x + y : y \in E\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ i $|x + E| = |E|$.
- $-E = \{-x : x \in E\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ i $|-E| = |E|$.

5. Si I és un interval, aleshores $I \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ i $|I| = \nu(I)$. •

Exercici 2.16. Demuestra alguna d'aquestes propietats utilitzant els resultats i definicions que hem donat fins ara. ◁

Exercici 2.17. Sigui $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una numeració del nombres racionals de $[0, 1]$. Donat $\epsilon > 0$ definim la unió d'interval

$$S_\epsilon = [0, 1] \cap \left(\bigcup_{n \geq 1} \left(x_n - \frac{\epsilon}{2^n}, x_n + \frac{\epsilon}{2^n} \right) \right).$$

Comproveu que si $\epsilon < \frac{1}{2}$, el conjunt S_ϵ té frontera a $[0, 1]$ de mesura positiva. ◁

Observació 2.18. Els conjunts oberts (i per tant els tancats) són mesurables. Essent $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ una σ -àlgebra, també són mesurables les interseccions numerables d'oberts, i les unions numerables de tancats.

De fet, tot conjunt mesurable es pot expressar com la unió d'un conjunt nul i una unió numerable de tancats, o com una intersecció numerable d'oberts menys un conjunt nul. Les mesures que compleixen aquestes dues propietats s'anomenen *regulars*. Així, la mesura de Lebesgue és regular. •

2.1.4 Funcions mesurables

Per a definir la integral que hem esboçat a la introducció necessitem reduir-nos a la classe de les funcions per a les quals funciona bé l'esquema indicat. Aquesta és una classe molt àmplia, més que suficient per a poder calcular les integrals que apareixen de manera habitual.

Suposem a partir d'ara que $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, i.e. E és un conjunt mesurable i diem $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. En general tindrem funcions $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, i per ser rigorosos ens caldrà estendre la relació d'ordre de \mathbb{R} a tot $\overline{\mathbb{R}}$ (de la manera òbvia):

$$-\infty < a < \infty$$

per a tot $a \in \mathbb{R}$. També ens cal estendre-hi les operacions $+$ i \cdot , de la manera que ja coneixem:

1. $a \pm \infty = \pm\infty + a = \pm\infty$
2. $a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } a > 0 \\ \mp\infty & \text{si } a < 0 \\ \text{indeterminat} & \text{si } a = 0. \end{cases}$
3. $\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, però $\infty - \infty = \text{indeterminat}$.
4. $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$ i $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$.

Proposició 2.19. *Sigui $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Són equivalents:*

1. *Per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ és mesurable.*
2. *Per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([\alpha, +\infty]) = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ és mesurable.*
3. *Per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(] +\infty, \alpha) = \{x \in E : f(x) < \alpha\}$ és mesurable.*
4. *Per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(] +\infty, \alpha] = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ és mesurable.*

Quan es compleixen aquestes condicions aleshores també se satisfà que per a tot $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, $f^{-1}(\alpha) = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ és mesurable.

Definició 2.20. Una funció $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ és *mesurable* si es compleixen totes les propietats de la proposició anterior. •

Exemple 2.21. 1. *Funcions constants:* Sigui $f_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donada per $f_c(x) = c \in \mathbb{R}$. Aquí, fixat $\alpha \in \mathbb{R}$ obtenim que

$$\{x \in E : f(x) = c > \alpha\} = \begin{cases} E & \text{si } \alpha < c \\ \emptyset & \text{si } \alpha \geq c. \end{cases}$$

En ambdós casos tenim un conjunt mesurable.

2 Interludi: conceptes d'anàlisi

2. *Funcions característiques de conjunts mesurables* Sigui $A \subset E$ un conjunt mesurable. Definim $\chi_A : E \rightarrow \mathbb{R}$ mitjançant

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \quad (2.1)$$

Aleshores, fixat $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in E : \chi_A(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \alpha \geq 1, \\ A & \text{si } 0 \leq \alpha < 1, \\ E & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

En tots tres casos obtenim un conjunt mesurable.

3. *Funcions contínues*: si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua aleshores $f^{-1}((\alpha, \infty))$ és l'antiimatge d'un conjunt obert i és, per tant, obert. En particular és mesurable.
4. *Funcions que coincideixen amb una funció mesurable g.p.t.*: Sigui $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable, i sigui $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que $g = f$ llevat d'un conjunt Z amb $|Z| = 0$ (és a dir, $g(x) = f(x)$ sempre que $x \notin Z$). Llavors g també és mesurable.

◇

Exercici 2.22. Demostreu que la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{\sin(\pi x)} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

és mesurable.

◁

Proposició 2.23 (Propietats de les funcions mesurables I). *Siguin $c \in \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, i $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funcions mesurables. Aleshores:*

$$cf, f + g, f \cdot g, \max\{f, g\}, |f|, f^+ := \max\{f, 0\}, f^- := \max\{-f, 0\}$$

són funcions mesurables. A més, si $g(x) \neq 0$ g.p.t, aleshores f/g també és mesurable.

Proposició 2.24 (Propietats de les funcions mesurables II). *Siguin $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, i $f_k : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funcions mesurables per a tot $k \in \mathbb{N}$. Aleshores:*

$$\inf_k f_k, \sup_k f_k, \liminf_k f_k, \limsup_k f_k, \lim_k f_k$$

són funcions mesurables (si aquests ínfims, supremes i límits existeixen g.p.t. $x \in E$).

El resum de tot això és que totes les funcions que trobem habitualment són mesurables. De fet, com que és molt difícil construir un conjunt no mesurable, també és molt difícil trobar-se una funció no mesurable.

2.2 Integral de Lebesgue

2.2.1 Funcions simples

Definirem la integral d'una funció mesurable qualsevol per aproximació mitjançant les anomenades funcions simples, que són combinacions lineals de funcions característiques.

Definició 2.25. Una funció $s : E \rightarrow \mathbb{R}$ es diu *simple* si és de la forma

$$s(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{A_k}(x) \quad \text{per a tot } x \in E,$$

on $\{\alpha_k\}_k \subset \mathbb{R}$ i $\{A_k\}_k \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Suposarem sense pèrdua de generalitat que $\{A_k\}_k$ és una família de conjunts disjunts dos a dos.

Donada una funció mesurable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ amb $f \geq 0$, diem que una funció simple s pertany al conjunt $\mathcal{S}(f)$ si $0 \leq s \leq f$. •

Exemple 2.26. 1. La funció $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

és una funció simple, ja que $f = \chi_{[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}$.

2. A la funció $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, prenem per a $j = 1, \dots, N$

$$E_j := \left\{ x \in [-1, 1] : \frac{j-1}{N} \leq x^2 < \frac{j}{N} \right\}$$

i la funció simple

$$s := \sum_{j=1}^N \frac{j-1}{N} \chi_{E_j}.$$

Aquesta funció dona una aproximació per sota de $f(x)$ que es va fent més precisa a mesura que N creix.

◇

Observació 2.27. 1. Totes aquestes funcions són mesurables per les propietats que hem enunciat a l'apartat anterior.

2. Els possibles valors d'una funció simple $s(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{A_k}(x)$ són $0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$, sempre i quan els conjunts A_k siguin disjunts dos a dos. A més, $s^{-1}(\alpha_k) = A_k$ per a $k = 1, \dots, N$, i $s^{-1}(0) = E \setminus \bigcup_{k=1}^N A_k$.

3. Segons les propietats que hem vist, tota funció que sigui límit de funcions simples també és mesurable. És important que, recíprocament, tota funció mesurable i no-negativa és límit d'una successió creixent de funcions simples. •

Teorema 2.28. *Sigui $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ mesurable. La successió de funcions simples i positives*

$$s_m = \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m} \chi_{E(k,m)} + m \chi_{F(m)}, \quad \text{per a tot } m \in \mathbb{N},$$

amb

$$E(k, m) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{k-1}{2^m} \leq f(x) < \frac{k}{2^m} \right\}$$

i

$$F(m) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > m\},$$

és creixent i

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = f(x) \quad \text{per a tot } x \in \mathbb{R}^n$$

Demostració. És clar que s_m definides així són funcions simples, formen una successió creixent de funcions, i $s_m \leq f$. Observem també que si $x \in E(k, m)$, aleshores

$$|f(x) - s_m(x)| = f(x) - s_m(x) < \frac{1}{2^m}.$$

Per tant, $s_m(x) \nearrow f(x)$ per a tot x . □

Definició 2.29. Diem que una funció mesurable $f : E \rightarrow [0, +\infty]$ és integrable en un conjunt E si i només si

$$\int_E f(x) dx = \sup_{s \in \mathcal{S}(f)} \int_E s < \infty.$$

•

Lema 2.30 (Propietats de la integració de funcions no-negatives). *Si $f : E \rightarrow [0, \infty]$ és una funció mesurable, aleshores*

1. *si $A \subset E$ és mesurable llavors $\int_A f = \int_E f \chi_A$ i $\int_A f \leq \int_E f$,*
2. *si $Z \subset E$ és de mesura zero llavors $\int_{E \setminus Z} f = \int_E f$,*
3. *si $\lambda \in [0, +\infty]$ llavors $\int_E \lambda f = \lambda \int_E f$,*
4. *si $f \leq g$ llavors $\int_E f \leq \int_E g$,*
5. *si $\int_E f < +\infty$ llavors $|f^{-1}(+\infty)| = 0$,*
6. *$\int_E f = 0$ si i només si $f(x) = 0$ g.p.t. $x \in E$.*

Definició 2.31. Donada $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mesurable en general, descomposem $f = f^+ - f^-$ com la part positiva menys la part negativa de f (i, per tant, $|f| = f^+ + f^-$) i apliquem l'esquema anterior. Així, la integral (de Lebesgue) de f en E es defineix (si $\int_E f^+ < +\infty$ o bé si $\int_E f^- < +\infty$) com

$$\int_E f = \int_E f \, dm = \int_E f(x) \, dm(x) := \int_E f^+ - \int_E f^- \in \bar{\mathbb{R}}.$$

2 Interludi: conceptes d'anàlisi

Si $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ és una funció mesurable, es diu que f és integrable (en el sentit de) Lebesgue en E , abreuajat $f \in L^1(E)$, quan $\int_E f^+ < +\infty$ i $\int_E f^- < +\infty$. Això equival a dir $\int_E |f| < +\infty$.

Quan f pren valors complexos s'usa el Comentari 1.8 per definir la integral. •

Comentari 2.32. Si dues funcions f i g coincideixen gairebé per tot, escrivim $f \sim g$, que és una relació d'equivalència. Notem que $f \equiv g$ implica que $\int |f(x) - g(x)| dx = 0$. Per tal que el conjunt de funcions integrables $L^1(A)$ estigui ben definit com a espai normat, cal que la norma $\|f - g\|_{L^1(A)} = 0$ si i només si $f - g = 0$. Cal doncs treballar en l'espai de funcions mesurables mòdul la relació d'equivalència, és a dir que els elements de l'espai $L^1(A)$ són les classes d'equivalència de les funcions mesurables mòdul la relació \sim .

Al llarg dels apunts escriurem $f \in L^1(A)$ per dir que la funció f és integrable. Això és un abús de notació, ja que per tal de ser rigorosos hauríem de dir que la *classe d'equivalència de f* pertany a $L^1(A)$! •

Notem que $f \in L^1(E) \Leftrightarrow |f| \in L^1(E)$.

Lema 2.33. Si $f, g \in L^1(E)$ llavors:

1. si $A \subset E$ és mesurable llavors $\int_A f = \int_E f \chi_A$,
2. si $Z \subset E$ és de mesura zero llavors $\int_{E \setminus Z} f = \int_E f$,
3. si $\lambda \in [0, +\infty)$ llavors $\lambda f \in L^1(E)$ i $\int_E \lambda f = \lambda \int_E f$,
4. si $f \leq g$ llavors $\int_E f \leq \int_E g$,
5. $f + g \in L^1(E)$ i $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$,
6. $|\int_E f| \leq \int_E |f|$.

Comentari 2.34 (Relació entre les integrals de Riemann i de Lebesgue en \mathbb{R}). Siguin $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció integrable segons Riemann, llavors també és integrable segons Lebesgue i les dues integrals coincideixen :

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f.$$

Sigui $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funció localment integrable segons Riemann amb $-\infty < a < b \leq +\infty$. Són equivalents:

1. La integral impròpia de Riemann $\int_a^b f$ és absolutament convergent, és a dir, existeix C tal que

$$\int_a^x |f| \leq C, \quad a < x < b.$$

2. f és integrable segons Lebesgue en $[a, b)$.

En tal cas, la integral impròpia segons Riemann de f en $[a, b)$, $\int_a^b f$, i la integral segons Lebesgue de f en $[a, b)$, $\int_{[a,b)} f$, coincideixen, i.e. $\int_a^b f = \int_{[a,b)} f$. •

Exercici 2.35. Demostreu les següents propietats:

- (a) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ és tal que $\int_0^x f(t)dt = C$ és constant per a tot $x \in \mathbb{T}$ aleshores $f(x) = 0$ g.p.t. $x \in \mathbb{T}$.
- (b) Si $f, g \in C(\mathbb{T})$ i $f(x) = g(x)$ g.p.t. $x \in \mathbb{T}$ aleshores $f(x) = g(x)$ per a tot $x \in \mathbb{T}$.

Pista: Pel primer apartat cal un argument delicat. En primer lloc pots veure que $C = 0$, i que la integral en tot interval obert és zero. En segon lloc, dedueix que la integral sobre un obert és sempre zero. En tercer lloc, suposant que hi ha un conjunt no nul on f és positiva, aleshores per l'observació 2.18 existeix un tancat de mesura positiva on $f > 0$. Finalment, troba la contradicció. ◁

2.2.2 Espais de Lebesgue

Tot seguit definim els espais de Lebesgue L^p amb $1 < p \leq \infty$ i recordem algunes desigualtats ben conegudes d'aquests espais, propis del temari d'anàlisi funcional.

Donada una funció mesurable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i $1 \leq p < \infty$, definim la norma

$$\|f\|_p := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En el cas extrem, definim

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \inf \{C : |\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq C\}| = 0\}.$$

De fet, per tal que $L^p(\mathbb{R})$ sigui un espai normat, cal que $\|f\|_p = 0$ si i només si $f = 0$, vegeu el comentari 2.32. Això no és cert per funcions mesurables, ja que $\chi_{\{x=0\}}$ té norma 0 i no és la funció nul·la. Formalment diem que $f \sim g$ si $f = g$ g.p.t. arreu, és a dir que existeix un conjunt $E \subset \mathbb{R}$ amb $|E| = 0$ tal que $f(x) \neq g(x)$ implica que $x \in E$. Aquesta és una relació d'equivalència i les funcions mesurables s'entenen sempre mòdul aquesta relació d'equivalència. Per tant, si fóssim estrictes, parlariem de classes d'equivalència en lloc de funcions, però en anàlisi és comú no mencionar aquest fet i escriure directament $f \in L^p(\mathbb{R})$ quan en realitat volem dir que la classe d'equivalència de f mòdul \sim pertany a $L^p(\mathbb{R})$.

Recordem algunes desigualtats fonamentals:

Exercici 2.36. Donat $p \in [1, \infty]$, definim l'exponent conjugat $p' \in [1, \infty]$ com el nombre tal que $1/p + 1/p' = 1$.

- a) Demostrea la desigualtat de Young quan $1 < p < \infty$: per $a, b \geq 0$, tenim $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$.

2 Interludi: conceptes d'anàlisi

b) Demuestra la desigualtat de Hölder: si $f \in L^p$ i $g \in L^{p'}$, aleshores

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

c) Demuestra la desigualtat de Minkowski per $f, g \in L^p$:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Estudia quan tenim igualtat en cada cas.

◁

2.3 Intercanvi de límits

Presentem tot seguit una sèrie de resultats fonamentals d'integració que involucren l'intercanvi de límits i integrals. El dos primers resultats, lema de Fatou i teorema de convergència monòtona, són equivalents, és a dir que un cop es demostra un dels resultats, l'altre segueix. El teorema de la convergència dominada de Lebesgue és conseqüència del lema de Fatou. Les demostracions es poden trobar en qualsevol llibre de text d'introducció a la teoria de la mesura.

Lema 2.37 (Lema de Fatou). *Sigui $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions mesurables no-negatives en un interval I , i definim $f := \liminf f_n$. Aleshores f és mesurable i*

$$\int f = \int \liminf_n f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Teorema 2.38 (Teorema de la convergència monòtona). *Sigui $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successió no-decreixent de funcions mesurables no-negatives a un interval I , és a dir que per tot $x \in I$ i tot $n \in \mathbb{N}$ tenim*

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \infty.$$

Definim $f(x) := \lim_n f_n(x)$ per tot $x \in I$. Aleshores f és mesurable i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I \lim_n f_n = \int_I f.$$

Teorema 2.39 (Teorema de la convergència dominada). *Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(I)$ és una successió de funcions que convergeix a f en un interval I g.p.t. $x \in I$, i si existeix una funció $g \in L^1(I)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ g.p.t. $x \in I$ aleshores $f \in L^1(I)$, i n'és el límit $f = \lim_n f_n$ a L^1 . En particular,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I \lim_n f_n = \int_I f.$$

Una corollari del teorema de la convergència dominada és el següent:

2 Interludi: conceptes d'anàlisi

Teorema 2.40 (Integral d'un límit uniforme). Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^\infty$ és una successió de funcions que convergeix uniformement a f en un interval acotat I , aleshores f també és acotada i mesurable, i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I \lim_n f_n = \int_I f.$$

Per poder canviar l'ordre d'integració, només ens cal saber si la integral del valor absolut és finita. Aquest és el resultat anomenat teorema de Fubini²-Tonelli³, que és la combinació dels dos teoremes següents:

Teorema 2.41. [Teorema de Tonelli] Donats $A, B \subset \mathbb{R}$ mesurables i una funció $f : A \times B \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable, tenim que

$$\int_A \left(\int_B |f(x, y)| dy \right) dx = \int_B \left(\int_A |f(x, y)| dx \right) dy = \int_{A \times B} |f(x, y)| d(x, y).$$

Teorema 2.42. [Teorema de Fubini] Donats $A, B \subset \mathbb{R}$ mesurables i una funció $f : A \times B \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable, tal que

$$\int_B \left(\int_A |f(x, y)| dx \right) dy < \infty,$$

aleshores

$$\int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy = \int_{A \times B} f(x, y) d(x, y).$$

Notem que la definició de la integral en $A \times B$ no l'hem donada, el lector la pot trobar fàcilment en llibres de teoria de la mesura. El que ens interessa és que si una integral iterada del valor absolut és finita, aleshores podem intercanviar l'ordre de la integral iterada de la funció sense el valor absolut.

Teorema 2.43. [Criteri M de Weierstrass] Sigui $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una successió de funcions de valors reals definides en un subconjunt X de la recta real. Suposem que existeix una successió de nombres reals no negatius $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $|f_n(x)| \leq a_n$ per tot $x \in X$ i $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$. Aleshores la sèrie $\sum_{n=1}^\infty f_n$ convergeix a una funció de valors reals uniformement en X .

Teorema 2.44. Sigui $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C^1$ una successió de funcions tals que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformement i $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ també uniformement. Aleshores $f \in C^1$, amb $f' = g$, és a dir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'$$

En altres paraules, podem intercanviar el límit i la derivada quan la convergència de les funcions i de les seves derivades és uniforme.

Exercici 2.45. Reescriu els resultats de l'apartat en termes de sèries de funcions. ◁

²Guido Fubini, 1879–1943

³Leonida Tonelli, 1885–1946

2.4 Densitat de funcions

Definició 2.46. Diem que un subconjunt $A \subset X$ d'un espai normat X és dens si per tot element $f \in X$ i donat $\varepsilon > 0$ podem trobar $f_\varepsilon \in A$ tal que $\|f - f_\varepsilon\|_X < \varepsilon$. •

Lema 2.47 (Lema d'Urysohn). *Si X és un espai de Hausdorff localment compacte, donats un obert U i un compacte $K \subset U$, existeix una funció $\psi \in C(X)$ de suport compacte tal que $\chi_K \leq \psi \leq \chi_U$.*

Observació 2.48. La recta real satisfà les hipòtesis anteriors. La demostració del lema d'Urysohn és una mica tècnica i es pot trobar al llibre de Rudin⁴ [Rud87]. En aquests apunts només usarem el cas $X = \mathbb{R}$. •

Exercici 2.49. Demuestra el lema d'Urysohn per $X = \mathbb{R}$.

Indicació: Comença pel cas $U = (a, b)$ i després fes el cas general. ◁

Teorema 2.50. *Les funcions contínues són denses a $L^p(\mathbb{T})$ i a $L^p(\mathbb{R})$ per $1 \leq p < \infty$.*

Demostració. Per definició, les funcions simples són denses als espais L^p . Aleshores n'hi ha prou amb veure que tota funció característica χ_E pot ser aproximada per funcions contínues. De fet podem suposar E acotat. Per la regularitat de la mesura de Lebesgue (observació 2.18), existeixen un conjunt tancat $F_\varepsilon \subset E$ i un conjunt obert $U_\varepsilon \supset E$ tals que $|U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon| < \varepsilon$. Pel lema d'Urysohn, existeix una funció ψ tal que $\chi_{F_\varepsilon} \leq \psi \leq \chi_{U_\varepsilon}$. Aleshores

$$\int |\chi_E - \psi|^p = \int_{U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon} |\chi_E - \psi|^p \leq |U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon| < \varepsilon.$$

□

Corol·lari 2.51. *El mòdul de continuïtat integral d'una funció $f \in L^p(\mathbb{T})$ es defineix com*

$$\omega_p f(\delta) := \sup_{|\zeta| \leq \delta} \|f(\cdot - \zeta) - f(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Aleshores si $1 \leq p < \infty$ tenim

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_p f(\delta) = 0.$$

Demostració. Sigui $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C(\mathbb{T})$ una successió de funcions contínues tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0.$$

Aleshores, escrivint $\tau_\zeta f := f(\cdot - \zeta)$ obtenim

$$\|f - \tau_\zeta f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f - f_n\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|f_n - \tau_\zeta f_n\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|\tau_\zeta f_n - \tau_\zeta f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Per la periodicitat de les funcions, podem ajuntar el primer i el darrer termes i deduïm que

$$\|f - \tau_\zeta f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq 2\|f - f_n\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|f_n - \tau_\zeta f_n\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

⁴Walter Rudin, 1921–2010

2 Interludi: conceptes d'anàlisi

Donat $\varepsilon > 0$ podem prendre n_0 tal que per tot $n > n_0$ tenim

$$\|f - f_n\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \varepsilon/3.$$

Per altra banda, com que f_n és contínua, per $|\zeta| < \delta_n$ prou petit tenim

$$\|f_n - \tau_\zeta f_n\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f_n - \tau_\zeta f_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \varepsilon/3.$$

Notem que δ_n depèn de n i ε , i n depèn al seu torn d' ε . Obtenim doncs que existeix un δ tal que

$$\sup_{|\zeta| \leq \delta} \|f - \tau_\zeta f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \varepsilon.$$

□

Exercici 2.52. El resultat anterior és vàlid també a la recta real: si el mòdul de continuïtat integral d'una funció $f \in L^p(\mathbb{R})$ es defineix com

$$\omega_p f(\delta) := \sup_{|\zeta| \leq \delta} \|f(\cdot - \zeta) - f(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

aleshores

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_p f(\delta) = 0,$$

sempre que $1 \leq p < \infty$.

◁

Exercici 2.53. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, aleshores $|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{2} \omega_1 f(\pi/|k|)$.

◁

Observació 2.54. El *teorema de compacitat de Kolmogorov* diu que un subconjunt \mathcal{F} de $L^p(\mathbb{T})$ té clausura compacta si i només si \mathcal{F} és acotat en norma L^p , i tenen un mòdul de continuïtat uniforme, és a dir si existeix una funció $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ creixent i amb $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(\delta) = 0$ tal que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \omega_p f(\delta) \leq \omega(\delta).$$

Així, donada una funció $f \in L^p(\mathbb{T})$, el corollari anterior és equivalent a dir que un conjunt d'un element és compacte, cosa que ja sabíem. Evidentment en la demostració del criteri de compacitat Kolmogorov sol fer-se servir el corollari anterior.

El criteri es pot estendre a $L^p(\mathbb{R})$ però aleshores cal demanar a més a més que les cues estiguin uniformement acotades en norma L^p (veure [HOH10]).

•

Projecte 2.55 (La funció de Weierstrass). Explica la definició de la funció de Weierstrass i demostra que no és diferenciable enlloc tot i ser contínua.

◁

3 Convergència puntual

En aquest capítol plantegem el problema de les convergències puntual i uniforme de la sèrie de Fourier. Discutirem la connexió entre el decaïment de la sèrie i la suavitat de la funció original i finalment donarem una panoràmica dels resultats més importants del camp.

3.1 Per què ens preguntem per la convergència puntual?

En la conversa telefònica de l'Amèlia amb son pare, quantes freqüències farà falta enviar per tal que la reconstrucció del senyal sigui raonable? Les necessitem totes o podem prendre'n un subconjunt finit? Quines freqüències són les més importants per tal que la frase es compregui de manera adequada?

Una aproximació simple i prou raonable seria prendre les freqüències compreses entre $-N$ i N , obtenint així l'*enèsima suma parcial de Fourier*

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta},$$

que és un polinomi trigonomètric d'ordre N .

S'assembla $S_N f$ a f ? Quin tipus de convergència tenim quan $N \rightarrow \infty$? Ens caldrà comprendre bé aquest comportament i decidir per on trunquem depenent de l'aplicació que estiguem fent.

3.1.1 El fenomen de Gibbs

Exemple 3.1 (L'ona de serra). Considerem la funció $f(\theta) = \theta$ per $-\pi \leq \theta < \pi$. Aquesta funció, si s'estén periòdicament a la recta real, presenta una discontinuïtat a cada múltiple imparell de π . El seu coeficient enèsim de Fourier ve donat per

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta e^{-in\theta} d\theta.$$

Per tant

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{in} & \text{si } n \neq 0, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Per tant, la sèrie de Fourier de f ve donada per

$$f(\theta) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{in\theta} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\theta).$$

3 Convergència puntual

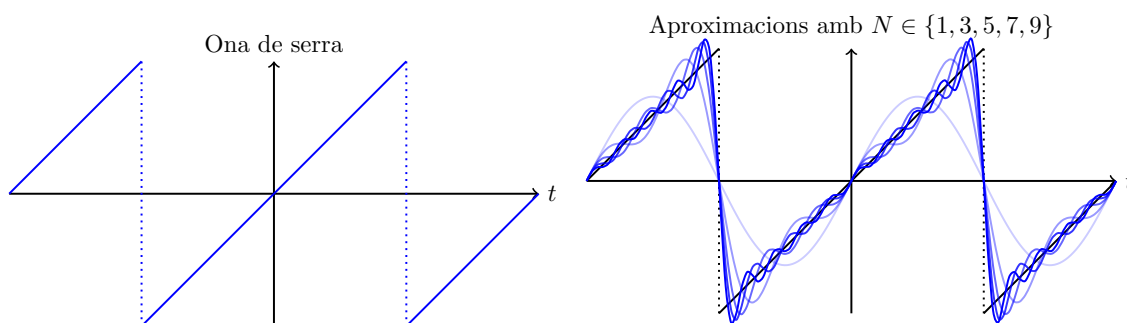


Figura 3.1: Ona de serra i successives aproximacions.

Com veurem més endavant, la funció i la sèrie coincideixen exactament per tot $-\pi < \theta < \pi$. Sorprenentment, als extrems la sèrie convergeix a 0. Això és així perquè $\sin(n\pi) = 0$ per a tot n . Notem que 0 és el valor mitjà entre els valors $f(-\pi)$ i $f(\pi)$, que correspon a una discontinuïtat de salt que es produeix a l'estendre la funció f a la recta real de manera periòdica. Anem a estudiar-la.

Tenim

$$S_N f(\theta) = \sum_{|n| \leq N; n \neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{in\theta}.$$

En primer lloc volem trobar els extrems locals. Derivant (i sumant i restant el terme corresponent a $n = 0$) obtenim que

$$\begin{aligned} (S_N f)'(\theta) &= \sum_{|n| \leq N} (-1)^{n+1} e^{in\theta} + 1 = 1 - \left[-e^{i\theta}\right]^{-N} \sum_{n=0}^{2N} \left[-e^{i\theta}\right]^n \\ &= 1 - (-1)^N e^{-i\theta N} \frac{1 - (-1)^{2N+1} e^{i\theta(2N+1)}}{1 + e^{i\theta}} = 1 - (-1)^N \frac{e^{-i\theta(N+1/2)} + e^{i\theta(N+1/2)}}{e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}} \\ &= 1 - (-1)^N \frac{\cos(\theta(N+1/2))}{\cos(\theta/2)}. \end{aligned}$$

Igualant a zero, trobem que els extrems locals estan situats a

$$\cos(\theta(N+1/2)) = (-1)^N \cos(\theta/2).$$

Per simplificar suposarem N imparell. Aleshores tenim

$$\cos(\theta(N+1/2)) = -\cos(\theta/2).$$

Per tant, o bé són angles suplementaris o bé tenen diferència un múltiple imparell de π :

$$\begin{cases} \theta(N+1/2) = (2k+1)\pi - \theta/2 & \text{o bé} \\ \theta(N+1/2) = (2k+1)\pi + \theta/2, \end{cases}$$

3 Convergència puntual

és a dir,

$$\begin{cases} \theta = \frac{2k+1}{N+1}\pi & \text{amb } -N \leq 2k+1 \leq N, \text{ o bé} \\ \theta = \frac{2k+1}{N}\pi & \text{amb } -N < 2k+1 < N. \end{cases}$$

Notem que per $2k+1$ positiu, $\frac{2k-1}{N} < \frac{2k+1}{N+1} < \frac{2k+1}{N}$, de manera que els valors de θ estan ordenats alternativament, i el més gran de tots és $\theta_N := \frac{N}{N+1}\pi$. Observem la Figura 3.1. Els angles θ on sembla que l'error d'aproximació comès és més gran són els més propers a π , és a dir per $\theta = \pm\theta_N$. Estudiem doncs la diferència $f - S_N f$ en aquests punts.

Anem a comprovar quin és l'error comès en l'aproximació en el punt θ_N .

$$\begin{aligned} |f(\theta_N) - S_N f(\theta_N)| &= \left| \theta_N - 2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\theta_N) \right| \\ &= \left| \frac{N}{N+1}\pi - 2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{nN\pi}{N+1}\right) \right|. \end{aligned}$$

Observem que

$$\sin\left(\frac{nN\pi}{N+1}\right) = \sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{N+1}\right) = (-1)^n \sin\left(-\frac{n\pi}{N+1}\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right).$$

Així doncs, l'error és

$$|f(\theta_N) - S_N f(\theta_N)| = \left| \frac{N}{N+1}\pi - 2 \sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)}{n} \right|.$$

Si expressem el darrer sumatori en forma de suma de Riemann de $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$ (al ser f decreixent a $(0, 1)$ deduïm que es tracta de fet d'una suma inferior) obtenim una integral en el límit:

$$2 \sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)}{n} = 2 \sum_{n=1}^{N+1} f\left(\frac{n}{N+1}\right) \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2 \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x} dx = 2 \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Aquesta funció es coneix com a *sinus integral*, definida com $\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx$ i és positiva per $t > 0$. Així, l'error convergeix a

$$\|f - S_N f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \geq |f(\theta_N) - S_N f(\theta_N)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2 \text{Si}(\pi) - \pi \approx 0,562281.$$

Per tant,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \geq 2 \text{Si}(\pi) - \pi,$$

així que la convergència no és uniforme. \diamond

Exercici 3.2. Estudieu el comportament de la suma parcial de l'ona de serra amb ordre N parell. \triangleleft

3 Convergència puntual

A l'Exemple 3.1 hem vist com la sèrie de Fourier d'una funció discontinua g pot convergir puntualment però no fer-ho de manera uniforme. En el cas concret de la funció onada de serra f , la sèrie convergeix puntualment a f per tot $\theta \in (-\pi, \pi)$, però convergeix a 0 quan θ pren de valor un múltiple imparell de π . A més, als extrems locals de $S_N f$ més propers a $\theta = \pm\pi$, la diferència $|S_N f(\theta) - f(\theta)| > 1/2$. Aquest fet, conegut com a *fenomen de Gibbs* es repeteix sempre que tinguem una discontinuïtat de salt: i si g té una discontinuïtat de salt a x_0 (i $g - f(\cdot - x_0)$ compleix algun dels criteris de convergència uniforme!), aleshores l'error asimptòtic és lineal respecte a l'alçada del salt. En l'onada de serra el salt és $2\ell = 2\pi$, és a dir $\ell = \pi$. En general l'error asimptòtic que podem esperar en l'aproximació per sumes de Fourier d'una discontinuïtat de salt de magnitud 2ℓ és

$$\frac{2 \operatorname{Si}(\pi) - \pi}{\pi} \ell = \left(\frac{2 \operatorname{Si}(\pi)}{\pi} - 1 \right) \ell \approx 0,178979744\ell.$$

Veient el fenomen de Gibbs, hom podria esperar que la condició que implica convergència uniforme de les sumes parcials de Fourier sigui la continuïtat de la funció f . De fet, això és fals tal i com va mostrar el 1876 du Bois-Reymond¹ amb el seu contraexemple (vegeu la secció 3.3): existeix una funció contínua la sèrie de Fourier de la qual divergeix en un punt. Així doncs ens cal demanar una mica més regularitat a f si volem obtenir la convergència puntual.

3.1.2 Les mitjanes de Cesàro

Hi ha maneres alternatives d'obtenir millors resultats de convergència si hom combina els coeficients de Fourier diferentment. Per exemple, calculant la mitjana de les sumes parcials fins a ordre N obtenim un mètode de truncament més suau: les *mitjanes de Cesàro*

$$\sigma_N f(\theta) = \frac{S_0 f(\theta) + S_1 f(\theta) + \cdots + S_{N-1} f(\theta)}{N}, \quad (3.1)$$

que estudiarem a la secció 4.4. En particular es compleix el següent resultat:

Teorema (Teorema de Féjer²). *Sigui $f \in C(\mathbb{T})$. Aleshores les mitjanes de Cesàro $\sigma_N f$ convergeixen uniformement a f :*

$$\|f - \sigma_N f\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Si, en canvi, $f \in L^p(\mathbb{T})$ amb $1 \leq p < \infty$, aleshores $\|f - \sigma_N f\|_p \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

Aquest resultat, que demostrarem a la secció 4.4 (vegeu el teorema 4.34), implica en particular la unicitat de la sèrie de Fourier: donades $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, tenim

$$\hat{f}(n) = \hat{g}(n) \forall n \quad \iff \quad f = g \quad \text{g.p.t. arreu.}$$

Una direcció és trivial, mentre que l'altra s'obté observant que les mitjanes de Cesàro de les funcions $\sigma_N f = \sigma_N g$ coincideixen i en fer tendir N a infinit convergeixen en norma a f i a g respectivament, que per tant han de coincidir g.p.t. arreu.

¹Paul David Gustav du Bois-Reymond, 1831–1889

²Lipót Féjer, 1880–1959

Exercici 3.3. Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$. Aleshores f pren valors reals, si i només si $\widehat{f}(-n) = \overline{\widehat{f}(n)}$ (vegeu exercici 1.13). \triangleleft

La mitjana de Cesàro $\sigma_N f$ és un polinomi trigonomètric d'ordre N igual que la suma parcial de Fourier. El teorema de Féjer implica que els polinomis trigonomètrics són densos en les funcions contínues amb la norma uniforme:

Teorema 3.4 (Teorema d'aproximació de Weierstrass per polinomis trigonomètrics). *Tota funció contínua en \mathbb{T} es pot aproximar uniformement per polinomis trigonomètrics.*

Comentari 3.5. Hi ha una versió del teorema de Weierstrass per funcions contínues en un interval tancat i polinomis estàndards. Ambdós resultats són casos particulars d'un resultat més general. Es tracta del teorema de Stone-Weierstrass, que pot ser localitzat en llibres més avançats com ara [Fol84, secció 7 del Capítol 4]. \bullet

En resum, tota funció contínua a la circumferència es pot aproximar uniformement per polinomis trigonomètrics, però aquesta aproximació a vegades no coincideix amb la sèrie de Fourier. Dit d'una altra manera, els coeficients a_n^N de cada component del polinomi $\sum_{|n| \leq N} a_n^N e^{in\theta}$ poden canviar al canviar N , de manera que no es pot deduir d'aquest fet una identitat com (1.8).

3.2 Suavitat i convergència

Comencem doncs per estudiar quina relació hi ha entre el decaïment dels coeficients de Fourier i la suavitat de la sèrie. Com veurem, si la funció és prou suau aleshores els coeficients decauen i podem garantir la convergència de la sèrie. A la vegada el decaïment dels coeficients implica un cert grau de suavitat.

3.2.1 Un primer resultat

Considerem $f \in C^2(\mathbb{T})$, és a dir una funció periòdica de període 2π i dues vegades diferenciable en qualsevol interval de la recta real. Veurem que $S_N f(\theta)$ convergeix i a més a més ho fa a la funció original $f(\theta)$ per tot $\theta \in \mathbb{T}$.

Lema 3.6. *Sigui $f \in C^k(\mathbb{T})$, amb $k \geq 1$. Aleshores*

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n). \quad (3.2)$$

Demostració. Integrant per parts tenim

$$\widehat{f}'(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{[f(\theta)e^{-in\theta}]_{-\pi}^{\pi}}{2\pi} - \frac{-in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Com que f és periòdica obtenim

$$\widehat{f}'(n) = \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = in \widehat{f}(n),$$

que és el que volíem veure quan $k = 1$. El cas $k > 1$ s'obté per inducció. \square

3 Convergència puntual

Observació 3.7. Notem que el càlcul és vàlid per $n = 0$. De fet, el teorema fonamental del càlcul ens diu que la mitjana d'una derivada és zero:

$$\hat{f}'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) d\theta = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0.$$

La identitat (3.2) ens diu que els coeficients de Fourier transformen derivades en polinomis. Aquest fet és fonamental per entendre la importància de l'anàlisi de Fourier, ja que les equacions diferencials lineals es transformen en equacions algebraiques. El mateix fenomen aparaxerà també quan parlem de transformades de funcions a la recta real. •

Exercici 3.8. Demostreu que per $n \in \mathbb{N}$ tenim

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix}}{(2 - e^{ix})^2} e^{-inx} dx = \frac{n}{2^n}$$

<

Corol·lari 3.9. Sigui $f \in C^k(\mathbb{T})$. Per $n \neq 0$ tenim que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^k}.$$

Demostració. Efectivament,

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{|n|^k} |\widehat{f^{(k)}}(n)| \leq \frac{1}{|n|^k} \|f^{(k)}\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{|n|^k} \|f^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$

(vegeu (1.9), recordant que hem definit la norma $L^1(\mathbb{T})$ en mitjana, és a dir, dividint per la longitud del període). □

Teorema 3.10. Sigui $f \in C^2(\mathbb{T})$, aleshores per cada $\theta \in \mathbb{T}$, el límit de les sumes parcials

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} =: Sf(\theta)$$

existeix. A més a més la convergència és uniforme en \mathbb{T} i Sf és també contínua en \mathbb{T} .

Demostració. Pel Corol·lari 3.9 tenim que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{n^2}$$

per $n \neq 0$.

Pel criteri de comparació per sèries, obtenim que la sèrie de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\theta}$ és absolutament convergent ja que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} < \infty. \quad (3.3)$$

De fet, el criteri M de Weierstrass (vegeu el teorema 2.43) implica que la convergència de $S_N f$ al seu límit puntual Sf és uniforme en \mathbb{T} .

Com que la convergència és uniforme i les parcials són polinomis trigonomètrics i, per tant, funcions contínues, deduïm que el límit ha de ser continu també. □

3 Convergència puntual

Observació 3.11. Al resultat anterior podem canviar la hipòtesi $f \in C^2(\mathbb{T})$ per la hipòtesi $\sum |\hat{f}(n)| < \infty$ i obtenim les mateixes conclusions.

Notem però que encara no hem demostrat que $Sf = f$. •

Lema 3.12. *Sigui $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una successió de nombres reals convergent. Aleshores la successió de les seves mitjanes convergeix al mateix límit:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Exercici 3.13. Demuestra el lema anterior. Troba una successió divergent les mitjanes de la qual convergeixin. ◁

Quan demostrem el teorema de Féjer (vegeu teorema 4.34), haurem conclòs que les mitjanes de Cèsaro convergeixen uniformement a f quan aquesta és contínua. Utilitzant l'exercici anterior, per qualsevol funció contínua amb sèrie de Fourier absolutament convergent, el límit ha de ser necessàriament f pel teorema de Féjer, i en particular això serà així per tota $f \in C^2(\mathbb{T})$. En resum, hem vist el següent:

Teorema 3.14. *Si $f \in C(\mathbb{T})$ i $\sum |\hat{f}(n)| < \infty$, aleshores*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(\theta) = f(\theta).$$

A més a més la convergència és uniforme en \mathbb{T} . En particular això ocorre per tota $f \in C^2(\mathbb{T})$.

L'argument que hem donat no ens permet demostrar la convergència puntual de la sèrie de Fourier en el cas $f \in C^1(\mathbb{T})$, tot i que per altres mètodes es pot demostrar convergència uniforme, de fet. En aquest cas, en el criteri de comparació (3.3) trobaríem la sèrie harmònica, que és divergent, i no podríem inferir la convergència de la sèrie. Per obtenir la convergència de la sèrie ens cal un argument més subtil. De tota manera, un cop obtenim l'existència de límits puntuals, el mateix argument mitjançant les mitjanes de Cèsaro ens permet afirmar que el límit és precisament f .

Teorema 3.15. *Si $f \in C^1(\mathbb{T})$, aleshores la seva sèrie de Fourier convergeix a f uniformement en \mathbb{T} .*

(vegeu [Str00, teorema 12.2.2 del Capítol 12]).

3.2.2 Suavitat i decaïment dels coeficients

Exemple 3.16. Considerem la funció característica $\chi_{[0,1]}$ de l'interval $[0, 1]$ (definida a (2.1)). Els seus coeficients de Fourier són:

$$\widehat{\chi_{[0,1]}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[0,1]}(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{-in} [e^{-in\theta}]_0^1 = \frac{1 - e^{-in}}{in}.$$

Se segueix que

$$|\widehat{\chi_{[0,1]}}(n)| \leq \frac{2}{n}.$$

◇

3 Convergència puntual

Per tant, al Corol·lari 3.9 no tenim una condició necessària i suficient: El decreixement

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{n}$$

no és equivalent a la diferenciabilitat de la funció f . És natural preguntar-se quines condicions de decaïment poden implicar diferenciabilitat. Tot seguit intentem donar una resposta a aquesta pregunta.

Lema 3.17. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$. Aleshores existeix una funció contínua Sf límit uniforme de les sumes parcials, i es compleix que*

$$\widehat{Sf}(n) = \widehat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demostració. Igual que en la demostració del teorema 3.10 podem inferir que existeix una funció contínua $Sf := \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f$ i que la convergència és uniforme en \mathbb{T} .

Fixats $n, N \in \mathbb{N}$ amb $n \leq N$, com que $S_N f(\theta) = \sum_{j=-N}^N \widehat{f}(j) e^{-ij\theta}$ és un polinomi trigonomètric sabem que

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} S_N f(\theta) d\theta.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \left| \widehat{Sf}(n) - \widehat{f}(n) \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} (Sf(\theta) - S_N f(\theta)) d\theta \right| \leq \|Sf - S_N f\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \|Sf - S_N f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

ja que la convergència de la sèrie és uniforme. Per tant, tenim necessàriament $\widehat{Sf}(n) = \widehat{f}(n)$. \square

Teorema 3.18. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$. Aleshores f coincideix amb una funció contínua gairebé per tot arreu i la seva sèrie de Fourier hi convergeix uniformement.*

Demostració. Pel Lema 3.17 existeix una funció contínua $Sf := \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f$, la convergència és uniforme en \mathbb{T} i tenim igualtat dels coeficients

$$\widehat{Sf}(n) = \widehat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Pel Corol·lari 4.35 que veurem més endavant, els coeficients de Fourier determinen una funció integrable, així que $f = Sf$. \square

Anant una mica més enllà, el resultat anterior ens garanteix una condició suficient en el decaïment de la sèrie de Fourier que implica que la funció és $C^k(\mathbb{T})$.

Teorema 3.19. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| |n|^k < \infty$ per un cert valor $k \in \mathbb{N}$. Aleshores $f \in C^k$. A més les derivades fins a ordre k de les sumes parcials de Fourier convergeixen a les derivades de la funció respectives.*

3 Convergència puntual

Projecte 3.20 (Decaïment dels coeficients de Fourier implica més regularitat). Utilitzant el teorema 3.18 i argumentant per inducció demostra el teorema 3.19. \triangleleft

Corol·lari 3.21. Per tot $k \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$, donada $f \in L^1(\mathbb{T})$, si $|\hat{f}(n)| \leq C|n|^{-k-1-\varepsilon}$ aleshores $f \in C^k(\mathbb{T})$.

Exercici 3.22. Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que existeixen $a, C > 0$ satisfent $|\hat{f}(n)| \leq Ce^{-a|n|}$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$. Demostreu que f és infinitament derivable i existeixen constants $M, R \geq 0$ tals que per a tot $k \geq 0$

$$\sup_{\mathbb{T}} |f^{(k)}| \leq MR^k k!$$

Deduïu que f és analítica, és a dir, que es pot desenvolupar en sèrie de potències en tot punt. \triangleleft

En aquesta secció hem vist que els coeficients de Fourier convergeixen a 0 per funcions diferenciables i que com més ordre de diferenciabletat té la funció més ràpid convergeix a zero. Què passa si la funció f és només contínua? Quedarà una successió acotada o convergirà a zero? La resposta és que convergirà a zero. Quan una successió de nombres complexos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ convergeix a zero en els dos infinits, escriurem $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in C_0(\mathbb{Z})$.

Lema 3.23 (Riemann-Lebesgue per funcions contínues). Sigui $f \in C(\mathbb{T})$. Aleshores $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in C_0(\mathbb{Z})$.

Demostració. Recordem que $e^{i\pi} = -1$. Aleshores, mitjançant un canvi de variable podem escriure

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in(\theta-\pi/n)} d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-\pi/n}^{\pi-\pi/n} f(\zeta + \pi/n) e^{-in\zeta} d\zeta. \end{aligned}$$

Com que l'integrand és periòdic, podem canviar els extrems d'integració per escriure

$$\hat{f}(n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \pi/n) e^{-in\theta} d\theta.$$

Prenent la mitjana entre la representació original i aquesta que hem obtingut aquí, ens queda que

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) - f(\theta + \pi/n)) e^{-in\theta} d\theta,$$

i acotant per la integral del valor absolut deduïm que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \|f(\cdot) - f(\cdot + \pi/n)\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{2} \|f(\cdot) - f(\cdot + \pi/n)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0.$$

\square

3 Convergència puntual

Exercici 3.24. Donada una funció $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, podem definir el seu mòdul de continuïtat

$$\omega_\infty f(\delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \sup_{x \in I} |f(x + \delta) - f(x)|.$$

Demostra que si f és uniformement contínua a l'interval I , llavors $\lim_{t \searrow 0} \omega_\infty f(t) = 0$.

Pista: Per veure això cal relacionar $\omega_\infty f(\delta)$ amb l'elecció òptima d' ϵ tal que δ compleix la condició de continuïtat uniforme... una bona manera és argumentar per contradicció. \triangleleft

Exercici 3.25. Demostra que donada una funció contínua $f \in C(\mathbb{T})$ es compleix que

$$\|f(\cdot) - f(\cdot + \pi/n)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pista: cal veure primer que f és uniformement contínua. \triangleleft

Exercici 3.26. Diem que una funció $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ és Lipschitz amb constant K si per tot $\theta, \zeta \in \mathbb{T}$ tenim que

$$|f(\theta) - f(\zeta)| \leq K|\theta - \zeta|.$$

Demostra que tota funció Lipschitz f satisfà que $|\hat{f}(n)| \leq C/n$, on la constant C depèn només de K . \triangleleft

Lema 3.27 (Riemann-Lebesgue per funcions integrables). *Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$. Aleshores $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in C_0(\mathbb{Z})$.*

Demostració. La demostració és la mateixa que en el cas de les funcions contínues (Lema 3.23), però cal usar el Corollari 2.51 en el darrer pas, que ens diu que

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \|f(\cdot) - f(\cdot + \pi/n)\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|\zeta| \leq \delta} \|f(\cdot - \zeta) - f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_1 f(\delta) = 0,$$

(vegeu l'exercici 2.53). El cas $n \rightarrow -\infty$ es fa anàlogament. \square

Exercici 3.28. Sigui $E \subset (0, 2\pi)$ mesurable. Sigui $\{\alpha_n\}_n$ una successió qualsevol de nombres reals. Demostra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(nx + \alpha_n) dx = \frac{|E|}{2}.$$

Pista: Mira d'obtenir expressions on l'integrand no depengui d' α_n . Aleshores mira d'aplicar el teorema de Riemann-Lebesgue. \triangleleft

3.2.3 Diferenciabilitat i velocitat de convergència

De la mateixa manera que l'ordre de diferenciabilitat determina el decaïment dels coeficients, també determina la velocitat de convergència de les sumes parcials de la següent manera:

Teorema 3.29 (veure [Str00, teorema 12.2.2]). *Si $f \in C^k(\mathbb{T})$ i $k \geq 2$, aleshores existeix una constant $C > 0$ independent de θ tal que*

$$|S_N f(\theta) - f(\theta)| \leq C/N^{k-1}.$$

Si $f \in C^1(\mathbb{T})$, aleshores podem obtenir

$$|S_N f(\theta) - f(\theta)| \leq C/N^{1/2}.$$

Aquesta velocitat de convergència no determina el grau de diferenciabilitat. Efectivament, existeixen funcions no diferenciables que convergeixen com $1/N$.

Exercici 3.30. Demuestra que per l'ona triangle $f \notin C^1(\mathbb{T})$ se satisfà que

$$|S_N f(\theta) - f(\theta)| \leq \frac{C}{N-1}$$

i a l'origen

$$|S_N f(0) - f(0)| \geq \frac{C}{N+2}.$$

Vegeu Exemple 1.10.

Pista: comproveu que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. ◁

3.3 Una panoràmica dels teoremes de convergència

Tot seguit farem un repàs històric dels principals resultats de convergència de sèries de Fourier per funcions contínues i integrables. Veurem com els resultats que es van obtenir en aquesta recerca van fer trontollar algunes idees preconcebudes i van ser claus en el procés de maduració de l'anàlisi matemàtica.

Teorema 3.31 (Dirichlet, 1829). *Sigui $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ contínua excepte, potser, en un conjunt finit de punts i tal que en aquests punts els límits laterals existeixen; i tal que la derivada f' és contínua i acotada a \mathbb{T} llevat d'aquest conjunt. Aleshores per tot $\theta \in \mathbb{T}$ tenim*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta^+) + f(\theta^-)],$$

on hem denotat els límits laterals a θ per $f(\theta^\pm)$. En particular $S_N f(\theta) \rightarrow f(\theta)$ als punts de continuïtat de f .

Notem que estem suposant que $f \in C_{\text{loc}}^1(\mathbb{T} \setminus E)$, amb $\#E < \infty$. Podríem tenir l'esperança que aquest resultat s'estengués immediatament a tota funció contínua, però això no és possible:

3 Convergència puntual

Teorema 3.32 (Du Bois-Reymond, 1873). *Existeix una funció contínua $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(0)| = \infty$.*

Així, existeix una funció contínua on les sumes parcials no només no convergeixen a f sinó que, a més a més, divergeixen.

Projecte 3.33 (Contraexemple de Du Bois-Reymond). Demuestra el teorema de Du Bois-Reymond. \triangleleft

Teorema 3.34 (Jordan, 1881). *Si f és una funció de variació acotada (és a dir, si $V(f) := \sup_P \sum_{n=1}^N |f(\theta_n) - f(\theta_{n-1})| < \infty$, on el suprem es pren respecte a les particions $P = \{\theta_n\}_{n=0}^N$ tals que $-\pi = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N = \pi$), aleshores la sèrie de Fourier convergeix a*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(\theta) = \frac{1}{2} [f(\theta^+) + f(\theta^-)]$$

a tot arreu. La convergència és uniforme en intervals tancats on hi hagi continuïtat.

Notem que el teorema anterior implica que la sèrie de Fourier convergeix a $f(\theta)$ als punts de continuïtat θ quan la funció és de variació acotada. Perquè una funció sigui contínua però no tingui la variació acotada, cal que la funció oscil·li fortament en acostar-se a θ .

Exercici 3.35. Demuestra que $f(\theta) = \theta \sin(\theta^{-1})$ per $-\pi \leq \theta < \pi$ i $\theta \neq 0$, $f(0) = 0$, és una funció contínua a \mathbb{T} però no té variació acotada. \triangleleft

Les condicions del teorema 3.31 impliquen que f té variació acotada, així que el teorema de Dirichlet és conseqüència del teorema de Jordan (diem que el segon és una *generalització* del primer). Podeu trobar una demostració del teorema de Dirichlet a [Kör88, capítol 16, p.59], i el teorema de Jordan es pot demostrar anàlogament. El següent criteri es pot utilitzar per demostrar els resultats anteriors als punts de continuïtat:

Teorema 3.36 (Criteri de Dini, 1878). *Sigui $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$. Suposem que existeix δ tal que*

$$\int_{|t| < \delta} |f(\theta + t) - f(\theta)| \frac{dt}{t} < \infty$$

per algun θ (en particular f és contínua a θ). Aleshores $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(\theta) = f(\theta)$.

Sigui $0 < \alpha \leq 1$. Una funció $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ és de Hölder d'exponent α (o α -Hölder) si existeix una constant C tal que $|f(\theta + t) - f(\theta)| \leq C|t|^\alpha$ per tots $t, \theta \in \mathbb{T}$. La classe de funcions que satisfan aquesta propietat es denota $C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$. Tenim que

$$C^1(\mathbb{T}) \subset C^{0,\beta}(\mathbb{T}) \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$$

per $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$. És pot comprovar que la condició $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ és equivalent a $\omega_\infty f(\delta) \leq C\delta^\alpha$ i que f satisfà la condició de Dini uniformement en θ , que és equivalent a

$$\int_{|t| < \delta} \omega_\infty f(t) \frac{dt}{t} < \infty;$$

i, pel criteri de Dini tenim convergència puntual.

3 Convergència puntual

Exercici 3.37. Comprova detalladament totes les afirmacions del paràgraf anterior. ◁

Aquests darrers resultats depenen només del comportament de la funció f en un entorn del punt. Aquest és un principi bàsic (i sorprenent!) de l'anàlisi de Fourier, conegut com a *principi de localització de Riemann*

Teorema 3.38 (Principi de localització de Riemann). *Siguin f i g funcions integrables. Si f i g coincideixen en un interval obert, aleshores $S_N(f - g)$ convergeix uniformement a 0 en subconjunts compactes de l'interval.*

Demostrarem aquest teorema a l'exercici 4.31.

A finals del XIX, com hem vist, es va descartar la convergència puntual arreu de les sèries de Fourier de funcions contínues. Malgrat això hem vist que es poden obtenir bons resultats amb petites millores a la continuïtat (condició C^2 , condició Dini, ...). Podem garantir la convergència en algun conjunt de funcions més gran? On es troba exactament la limitació?

El 1913 Luzin³ va conjeturar que es podia tenir convergència gairebé per tot arreu sempre i quan la funció fos de quadrat integrable. Al cap de deu anys Kolmogorov⁴ va descobrir una funció integrable en el sentit de Lebesgue les sumes parcials de la qual divergeixen gairebé per tot arreu.

Projecte 3.39 (Contraexemple de Kolmogorov). Existeix $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(\theta)| = \infty$$

gairebé per tot $\theta \in \mathbb{T}$. ◁

Tres anys després va obtenir un resultat encara més estrambòtic:

Teorema 3.40 (Kolmogorov, 1926). *Existeix $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(\theta)| = \infty$ per tot $\theta \in \mathbb{T}$.*

Cal recordar que $f \in L^1(\mathbb{T})$ és el requisit indispensable per poder calcular els coeficients de Fourier. La seva funció no és contínua, és clar, i de fet no és acotada en cap interval.

Exercici 3.41. Defineix una funció $f \in L^p$ que tingui una singularitat del tipus $|\log |\zeta - \theta||$ a cada $\theta \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q}$. ◁

Després de conèixer l'exemple de Kolmogorov, hi havia qui pensava que tard o d'hora podrien trobar una funció contínua amb un comportament anàleg. No obstant, al cap de cinquanta anys Carleson⁵ va demostrar la conjectura de Luzin, que implica que les sèries de Fourier de les funcions contínues convergeixen gairebé per tot arreu.

Teorema 3.42 (Carleson, 1966). *Sigui $f \in L^2(\mathbb{T})$. Aleshores $S_N f(\theta) \rightarrow f(\theta)$ quan $N \rightarrow \infty$ gairebé per tot $\theta \in \mathbb{T}$.*

³Nikolai Nikolaevich Luzin, 1883–1950

⁴Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903–1987

⁵Lennart Carleson, 1928–

3 Convergència puntual

Fem aquí un petit incís. Al capítol 5 veurem que $S_N f(\theta) \rightarrow f(\theta)$ convergeix en $L^2(\mathbb{T})$ si f és de quadrat integrable. Això garanteix l'existència d'una parcial convergent gairebé per tot arreu. Per tant, és relativament senzill veure que hi ha una subsuccessió de les sumes parcials de Fourier que convergeix a f gairebé per tot. Carleson veu que no cal prendre cap parcial, ja que la sèrie ja és convergent g.p.t., un resultat que de fet és sorprenentment difícil!

Segons el teorema de Carleson, el contraexemple de Kolmogorov no pot ser de quadrat integrable. El contraexemple de Du Bois-Reymond no contradiu el teorema anterior, ja que només divergeix en un punt i un punt té mesura nul·la.

El conjunt de divergència pot ser tant gran com vulguem mentre tingui mesura nul·la:

Teorema 3.43 (Kahane⁶, Katznelson⁷, 1966). *Si $E \subset \mathbb{T}$ té mesura zero, aleshores existeix una funció contínua $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(\theta)| = \infty \quad \text{per tot } x \in E.$$

La demostració es pot trobar a [Kat68, capítol II, secció 3]. També s'hi inclou una construcció del tipus Kolmogorov. L'any següent Hunt⁸ va demostrar una extensió del resultat de Carleson:

Teorema 3.44 (Hunt, 1967). *Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ amb $1 < p \leq \infty$. Aleshores $S_N f(\theta) \rightarrow f(\theta)$ quan $N \rightarrow \infty$ gairebé per tot $\theta \in \mathbb{T}$.*

Es pot trobar una demostració relativament assequible del teorema de Carleson-Hunt a [Gra08].

Taula 3.1: Resum dels resultats de convergència

Espai	Absoluta	Uniforme	Puntual	G.p.t.
$C^k, k \geq 1$	Sí	Sí	Sí	Sí
C^α , Dini	$\alpha > 1/2$ ([SS03])	Sí (segons [Duo03])	Sí	Sí
C	No	No	No	Sí
$L^p, 1 < p \leq \infty$	No	No	No	Sí
L^1	No	No	No	No

Exercici 3.45. Discutiu la convergència de la sèrie

$$\frac{c_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} (c_n(f) \cos n\theta + b_n(f) \sin n\theta).$$

i la igualtat (o no) amb $f(\theta)$ de les sèries de Fourier de l'exercici 1.12. ◁

⁶Jean-Pierre Kahane, 1926–2017

⁷Yitzhak Katznelson, 1934–

⁸Richard Allen Hunt, 1937–2009

3 Convergència puntual

Exercici 3.46. Fent servir el problema anterior proveu les següents formules:

$$1. \sum_1^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{\pi - 2}{4}.$$

$$2. \zeta(2) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$3. \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

$$4. \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + b^2} = \frac{\pi}{2b} \operatorname{csch} b\pi - \frac{1}{2b^2}.$$

$$5. \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2 + b^2} = \frac{\pi}{2b} \operatorname{coth} b\pi - \frac{1}{2b^2}.$$

◁

Exercici 3.47. Donat $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, calculeu la sèrie de Fourier de la funció 2π -periòdica definida per $\theta \in [0, 2\pi]$ per

$$f(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{i(\pi - \theta)\alpha}.$$

És f una funció contínua a $[-\pi, \pi]$? Deduïu que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha + n} = \frac{\pi}{\tan \pi \alpha}.$$

◁

Exercici 3.48. Demostreu que tenim la següent igualtat per a tot $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4 \sin x}{17 - 8 \cos x} \sin(nx) dx = \frac{1}{4^n}.$$

◁

Exercici 3.49. Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$, i definim $g(\theta) := f(\theta + a)$. Demostreu que $\widehat{g}(n) = e^{ina} \widehat{f}(n)$, $S_N g(\theta) = S_N f(\theta + a)$. Deduïu que les propietats de convergència de la sèrie de Fourier són invariants per translacions.

◁

Exercici 3.50. Donades dues successions de nombres complexos $\{a_n\}_{n \geq 0}$ i $\{b_n\}_{n \geq 0}$, definim $S_N := \sum_{k=0}^N a_k b_k$. Demostreu la fórmula de suma per parts:

$$S_N = a_N B_N - \sum_{k=0}^{N-1} B_k (a_{k+1} - a_k),$$

on $B_N = \sum_{k=0}^N b_k$.

Apliqueu la fórmula anterior per veure que

3 Convergència puntual

1. Suposem que $A_n > 0$ amb $A_n \geq A_{n+1}$ i $\lim_n A_n = 0$. Aleshores

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{inx}$$

és convergent si $x \neq 0$.

2. Demostreu que la sèrie

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nx}{\log n},$$

és convergent per a tot x . Què podem dir de $\sum_{n \geq 2} \frac{\cos nx}{\log n}$?

<

4 Mètodes sumatoris

La convergència puntual de la sèrie de Fourier per funcions contínues va quedar completament descartada pel contraexemple de Du Bois-Reymond. Malgrat això, alguns matemàtics van dissenyar mètodes alternatius per recuperar la funció coneixent els seus coeficients de Fourier: els *mètodes sumatoris*.

En aquest capítol analitzarem què falla en la sèrie de Fourier i com podem treballar amb aquesta per crear noves successions de polinomis trigonomètrics que ens donin millors resultats de convergència, pagant el preu de perdre l'estructura de sèrie que teníem al principi on les freqüències pures estaven perfectament aïllades.

Per obtenir aquests resultats ens convindrà entendre el que és una *aproximació de la identitat* i, abans, haurem d'entendre la *convolució*. Aquests conceptes són de per si fonamentals en l'anàlisi harmònica, més enllà de l'anàlisi pròpiament de Fourier.

4.1 Convolució

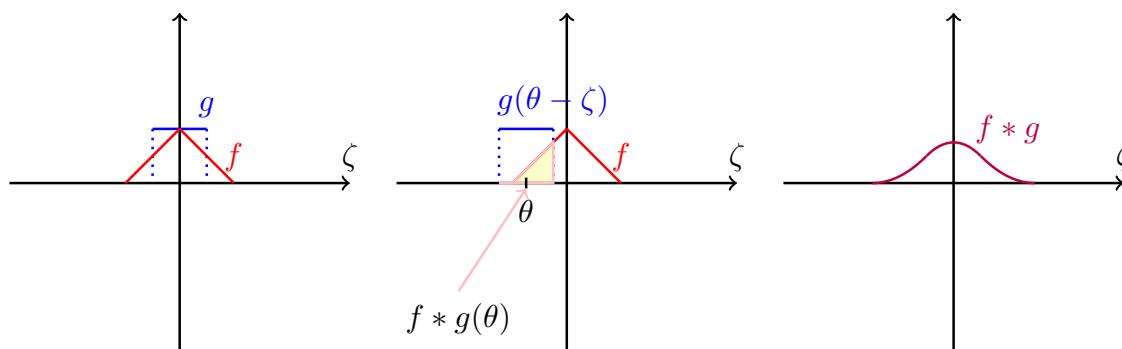


Figura 4.1: La convolució d'una funció f amb la característica de l'interval $(-1/2, 1/2)$ avaluada a θ és la mitjana de f en un interval centrat a θ i de longitud 1.

Comencem per definir la convolució de dues funcions 2π -periòdiques:

Definició 4.1. Siguin $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Definim la seva convolució (veure Figura 4.1) com

$$(f * g)(\theta) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)g(\theta - \zeta) d\zeta.$$

Exercici 4.2. Demostra que si

$$f(\theta) = (\theta + 1)\chi_{[-1,0]}(\theta) + (-\theta + 1)\chi_{[0,1]}(\theta) \quad \text{i} \quad g(\theta) = \chi_{[-1/2,1/2]}(\theta),$$

aleshores

$$f * g(\theta) = \frac{(\theta + 3/2)^2 \chi_{[-3/2, -1/2]}(\theta) + 2(3/4 - \theta^2) \chi_{(-1/2, 1/2)}(\theta) + (\theta - 3/2)^2 \chi_{[1/2, 3/2]}(\theta)}{4\pi}$$

(veure Figura 4.1). ◁

Exercici 4.3. Donada $f = \chi_{[0,1]}$, calcula $f * f$ i $f * f * f$. ◁

Amb aquests dos exercicis, podem observar que la convolució tendeix a “suavitzar les funcions”.

Analitzem primer la definició. D’entrada no està clar que es puguin convolucionar dues funcions integrables.

Exemple 4.4. Considerem la funció $f(\theta) = |\theta|^{-1/2}$. Tenim que

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{|\theta|}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = \left[\frac{2}{\pi} \sqrt{\theta} \right]_0^{\pi} < \infty.$$

Ara bé,

$$f * f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \zeta) f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{|(\theta - \zeta)\zeta|}} d\zeta$$

pren valor ∞ quan $\theta = 0$. Ara bé, per altres valors de θ la integral és finita. ◇

Hem vist que la convolució de funcions L^1 podria no estar ben definida puntualment. En canvi, si les funcions f i g fossin de quadrat integrable, aleshores sí que podríem aplicar la desigualtat de Cauchy-Schwartz per veure que la convolució $f * g(\theta)$ està definida per tot $\theta \in \mathbb{T}$:

$$\|f(\cdot)g(\theta - \cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})} \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \|g\|_{L^2(\mathbb{T})} \quad (4.1)$$

i, per tant, la integral es pot calcular sempre. El cas és que en la nostra definició la convolució està definida gairebé per tot arreu demanant només la integrabilitat $L^1(\mathbb{T})!$ Això és una conseqüència directa del teorema de Fubini:

Lema 4.5 (Desigualtat de Young). *Donades dues funcions $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, $f * g(\theta)$ està ben definit gairebé per tot $\theta \in \mathbb{T}$ i*

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}. \quad (4.2)$$

Demostració. Vegem que la funció $F(\theta, \zeta) := f(\zeta)g(\theta - \zeta)$ és integrable a $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ i satisfà que, amb la normalització adequada a l’espai producte, $\|F\|_{L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{T})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}$ usant el teorema de Tonelli (vegeu el teorema 2.41). Efectivament,

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{T})} &:= \frac{1}{4\pi^2} \int_{[-\pi, \pi]^2} |f(\zeta)g(\theta - \zeta)| d\zeta d\theta \\ &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta - \zeta)| d\theta |f(\zeta)| d\zeta = \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \|g\|_{L^1(\mathbb{T})} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Per tant F és integrable i podem aplicar el teorema de Fubini (vegeu el teorema 2.42), obtenint com a conclusió que les integrals iterades $\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta, \zeta) d\zeta$ estan ben definides gairebé per tot θ . A més a més, la integral del valor absolut respecte a θ es pot acotar per la norma de $\frac{F}{2\pi}$ a $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, que està acotada com ja hem vist:

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta, \zeta) d\zeta \right| d\theta \leq \|F\|_{L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{T})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

□

4.1.1 Propietats de la convolució

Lema 4.6. *Siguin $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$ i sigui c una constant. Aleshores:*

- i) $f * g = g * f$.
- ii) $f * (g + h) = f * g + f * h$.
- iii) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$.
- iv) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Demostració. Aquestes propietats se segueixen de la definició amb petits matisos, com veurem tot seguit:

$$f * g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)g(\theta - \zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \zeta)g(\zeta) d\zeta = g * f(\theta),$$

on hem fet un canvi de variable i hem usat la periodicitat de les funcions involucrades.

Matís: Notem que la primera igualtat és certa g.p.t., és a dir per $\theta \in \mathbb{T} \setminus E$ amb $|E| = 0$. La tercera igualtat també és certa per $\theta \in \mathbb{T} \setminus F$ amb $|F| = 0$. Per tant la igualtat és certa per $\theta \in \mathbb{T} \setminus (E \cup F)$. Però $|E \cup F| \leq |E| + |F| = 0$. Per tant hem demostrat la igualtat gairebé per tot $\theta \in \mathbb{T}$!

Les propietats ii) i iii) es deriven de la linealitat de la integral i de la commutativitat de la convolució gairebé per tot arreu. La propietat iv) és conseqüència de Fubini:

$$f * (g * h)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)g * h(\theta - \zeta) d\zeta = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)g(\xi)h(\theta - \zeta - \xi) d\xi d\zeta$$

$$(f * g) * h(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f * g(\zeta)h(\theta - \zeta) d\zeta = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)g(\zeta - \xi)h(\theta - \zeta) d\xi d\zeta.$$

Utilitzant el teorema de Fubini i fent el canvi $\zeta - \xi = t$ a la segona integral obtenim la primera g.p.t. $\theta \in \mathbb{T}$. □

Lema 4.7. *Siguin $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Aleshores $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$.*

Demostració. Tenim que

$$\widehat{f * g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f * g(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta) g(\theta - \zeta) d\zeta \right) e^{-in\theta} d\theta.$$

Utilitzant el teorema de Fubini (aquí usem (4.3)) deduïm

$$\widehat{f * g}(n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta) \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} g(\theta - \zeta) d\theta \right) d\zeta.$$

Finalment, multiplicant i dividint l'integrand per $e^{in\zeta}$, obtenim

$$\widehat{f * g}(n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\zeta} f(\zeta) \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(\theta - \zeta)} g(\theta - \zeta) d\theta \right) d\zeta.$$

Fent el canvi de variables $\xi = \theta - \zeta$, concloem que

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n).$$

□

4.1.2 La convolució com a suavitzant

La convolució és un *operador suavitzant*. Veurem que la suavitat de la convolució s'obté combinant la suavitat de les dues funcions.

Primer veurem com afecta la convergència:

Lema 4.8. *Siguin $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ i considerem funcions $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\mathbb{T})$ tals que $f_k \rightarrow f$ i $g_k \rightarrow g$ en norma L^2 . Aleshores $f_k * g_k \rightarrow f * g$ uniformement en \mathbb{T} .*

Demostració. Ens cal mirar les seves diferències puntuals, que recordem que estan ben definides arreu ja que les funcions són de quadrat integrable:

$$|f_k * g_k(\theta) - f * g(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_k(\zeta) g_k(\theta - \zeta) - f(\zeta) g(\theta - \zeta)| d\zeta.$$

Sumant i restant $f_k(\zeta)g(\theta - \zeta)$ i aplicant la desigualtat triangular obtenim

$$\begin{aligned} |f_k * g_k(\theta) - f * g(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_k(\zeta)(g_k(\theta - \zeta) - g(\theta - \zeta))| d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f_k(\zeta) - f(\zeta))g(\theta - \zeta)| d\zeta. \end{aligned}$$

Aplicant la desigualtat de Cauchy-Schwartz deduïm que

$$|f_k * g_k(\theta) - f * g(\theta)| \leq \|f_k\|_{L^2(\mathbb{T})} \|g_k - g\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \|g\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Notem que la cota és independent de θ . Així,

$$\|f_k * g_k - f * g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|f_k\|_{L^2(\mathbb{T})} \|g_k - g\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \|g\|_{L^2(\mathbb{T})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

□

Lema 4.9. Si $f \in C(\mathbb{T})$ i $g \in L^1(\mathbb{T})$, aleshores $f * g \in C(\mathbb{T})$.

Notem que en el producte de dues funcions com aquestes només aconseguim integrabilitat. La convolució, en canvi, manté la millor de les condicions, que és la continuïtat!

Demostració. Recordem que la funció f , identificada amb una funció periòdica, és contínua a $[-2\pi, 2\pi]$ i, per tant, uniformement contínua. És a dir que

$$\omega_\infty f(t) := \sup_{|h| \leq t} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

(veure Exercici 3.24). Tenim doncs usant la commutativitat de la convolució que

$$f * g(\theta + h) - f * g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta + h - \zeta) - f(\theta - \zeta))g(\zeta) d\zeta.$$

Prenent valors absoluts obtenim

$$|f * g(\theta + h) - f * g(\theta)| \leq \frac{\|f(\theta + h - \cdot) - f(\theta - \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\zeta)| d\zeta$$

o, en el llenguatge del mòdul de continuïtat (recordem que f és periòdica!), obtenim per tot $|h| < t$

$$|f * g(\theta + h) - f * g(\theta)| \leq \omega_\infty f(t) \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Prenent suprem en θ i en $|h| < t$ trobem

$$\omega_\infty(f * g)(t) \leq \omega_\infty f(t) \|g\|_{L^1(\mathbb{T})} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

és a dir que $f * g$ és uniformement contínua. □

Teorema 4.10. Si $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, aleshores $f * g \in C(\mathbb{T})$.

Demostració. Les funcions contínues són denses a $L^2(\mathbb{T})$ (veure teorema 2.50). És a dir que existeixen successions $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\mathbb{T})$ tals que $f_k \rightarrow f$ i $g_k \rightarrow g$ en norma L^2 . Aleshores $f_k * g_k \rightarrow f * g$ uniformement en \mathbb{T} pel lema 4.8.

Pel lema anterior $f_k * g_k$ són en realitat funcions contínues. Per tant tenim una successió convergent de funcions uniformement contínues que convergeix uniformement a un límit. Aquest ha de ser necessàriament una funció contínua. □

Exercici 4.11. Demuestra que el teorema anterior és vàlid per $f \in L^p$ i $g \in L^{p'}$ on $1 < p < \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Pista: Pots fer servir la desigualtat de Hölder $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$ a (4.1). Amb això has de donar sentit a la definició puntual de la convolució. Després et caldrà adaptar el lema 4.8 al cas $f \in L^p$ i $g \in L^{p'}$ i, finalment utilitzar la densitat de $C(\mathbb{T})$ a L^p . ◁

Exercici 4.12. Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$ i sigui $P(t) = \sum_{j=-N}^N a_j e^{ijt}$ un polinomi trigonomètric. Calculeu els coeficients de Fourier de la funció $f * P$. Demostreu que

$$(P * f)(x) = \sum_{|j| \leq N} a_j \widehat{f}(j) e^{ijx}.$$

És a dir que la convolució $f * P$ d'una funció $f \in L^1(\mathbb{T})$ amb un polinomi trigonomètric P és un polinomi trigonomètric. ◁

Temps $\theta \in \mathbb{T}$	Freqüència $n \in \mathbb{Z}$
Derivada $f'(\theta)$	Polinomi $\widehat{f}'(n) = in\widehat{f}(n)$
Convolució circular $(f * g)(\theta)$	Producte $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$
Translació $\tau_h f(\theta) = f(\theta - h)$	Modulació $\widehat{\tau_h f}(n) = e^{-ihn}\widehat{f}(n)$

Taula 4.1: Diccionari temps-freqüència

Hem vist que els coeficients de Fourier converteixen la convolució en un producte. Anteriorment havíem vist que la derivació es converteix en multiplicació per polinomis. Aquestes són propietats que resumim en el *diccionari temps-freqüència* de la Taula 4.1 (temps es refereix a la variable θ , freqüència a la variable n dels coeficients de Fourier).

Observació 4.13. Aquesta estructura de grup subjacent que s'intueix a la taula 4.1 permet estendre l'anàlisi de Fourier a grups abelians finits, per exemple, vegeu [SS03]. •

4.2 Aproximacions de la identitat

Suposem que existís una funció $f \in L^1(\mathbb{T})$ que fos la identitat per l'operació de convolució, és a dir que per tota $g \in L^1(\mathbb{T})$ es tingués $f * g = g$. Aleshores tindriem que $\widehat{f}\widehat{g} = \widehat{f * g} = \widehat{g}$. En particular caldria que $\widehat{f}(n) = 1$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$, la qual cosa contradiria el lema de Riemann-Lebesgue (veure lema 3.27).

Així doncs, la identitat sota la convolució només es pot obtenir mitjançant aproximacions. Tot seguit definirem famílies de “nuclis” que compleixin propietats suficients per garantir que en fer convolució amb els nuclis s'obté la identitat per pas al límit.

Definició 4.14. Una família $\{K_n\}_{n=1}^\infty \subset L^1(\mathbb{T})$ de funcions reals integrables $K_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ és una *família admissible de nuclis* si satisfà les següents propietats:

a) Per tot $n \in \mathbb{N}$ tenim $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta = 1$.

b) Existeix $M > 0$ tal que $\|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq M$ per tot $n \in \mathbb{N}$.

c) Per cada $\delta > 0$ tenim $\int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |K_n(\theta)| d\theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

•

Exemple 4.15. Sigui $K_n(\theta) = n\pi\chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(\theta)$. La seva integral és sempre 2π , i les normes L^1 , al ser K_n positiu, també estan acotades. La tercera propietat és també prou clara, per $1/n < \delta$ tenim que la integral $\int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |K_n(\theta)| d\theta = 0$!

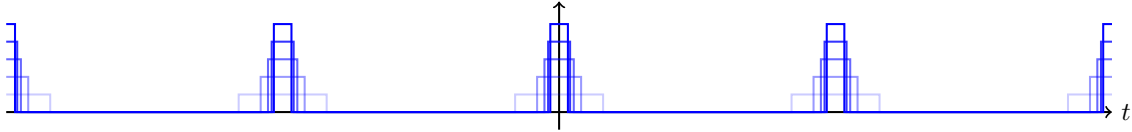


Figura 4.2: Nucli $K_n(\theta)$ per $1 \leq n \leq 5$ a l'exemple 4.15.

Intentem entendre què significa $f * K_n(\theta)$. Tenim

$$f * K_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta) n\pi\chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(\theta - \zeta) d\theta = \frac{n}{2} \int_{\theta - \frac{1}{n}}^{\theta + \frac{1}{n}} f(\zeta) d\theta,$$

és a dir que $f * K_n(\theta)$ és el valor mitjà de f a l'interval $[\theta - \frac{1}{n}, \theta + \frac{1}{n}]$. Si f és contínua, a mesura que concentrem l'interval fent créixer el valor de n , acabem trobant precisament el valor $f(\theta)$ al límit. \diamond

Exercici 4.16. Demostra que efectivament si $f \in C(\mathbb{T})$ aleshores el valor mitjà de f a l'interval $[\theta - \frac{1}{n}, \theta + \frac{1}{n}]$ convergeix a $f(\theta)$. \triangleleft

Reflexionem ara sobre la Definició 4.14. La primera propietat ens garanteix que al calcular $f * K_n(\theta)$ estem fent una *mitjana ponderada* de la funció en un cert entorn de θ . La segona condició és una acotació uniforme de les normes L^1 dels nuclis i ens garanteix que no acumulem més i més oscil·lació al créixer n i al passar al límit la convolució es comportarà correctament. La tercera condició ens diu que aquestes mitjanes ponderades cada cop donen més importància a entorns més petits de θ : la massa es concentra entorn de l'origen. Així, al calcular la convolució trobem mitjanes cada cop més localitzades entorn del punt θ .

Una forma canònica de construir famílies admissibles de nuclis és al següent exercici:

Exercici 4.17. Suposa que K és una funció contínua amb suport a $(-\pi, \pi)$. Suposa que $\int_{-\pi}^{\pi} K(\theta) d\theta = 2\pi$. Definim $K_n(\theta) := nK(n\theta)$ per $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Verifica que $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ és una família admissible de nuclis. \triangleleft

Tot seguit enunciem el teorema principal d'aquesta secció, que dona sentit al nom d'*aproximació de la identitat* per tota família admissible de nuclis.

4 Mètodes sumatoris

Teorema 4.18. *Sigui $\{K_n\}_{n=1}^\infty \subset L^1(\mathbb{T})$ una família admissible de nuclis. Si $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, aleshores*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f * K_n(\theta) = f(\theta)$$

a tots els punts $\theta \in \mathbb{T}$ on la funció f és contínua. Si la funció $f \in C(\mathbb{T})$ la convergència serà uniforme en \mathbb{T} . Si, en canvi, $f \in L^p(\mathbb{T})$ amb $1 \leq p < \infty$, aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * K_n - f\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0.$$

Demostració. Sigui θ un punt de continuïtat de f , és a dir

$$\varepsilon_f(\delta, \theta) = \sup_{|h| < \delta} |f(\theta + h) - f(\theta)| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Utilitzant la propietat a) de la Definició 4.14, obtenim que

$$K_n * f(\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\zeta) f(\theta - \zeta) d\zeta - f(\theta) \stackrel{a)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\zeta) [f(\theta - \zeta) - f(\theta)] d\zeta$$

(aquesta manera d'utilitzar que una funció té integral 1 és un truc clàssic d'anàlisi!). Prenent valors absoluts deduïm que

$$|K_n * f(\theta) - f(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(\zeta)| |f(\theta - \zeta) - f(\theta)| d\zeta.$$

Tot seguit trenquem la integral en dos trossos: el proper a θ (integral local) i el llunyà (integral no local):

$$\begin{aligned} |K_n * f(\theta) - f(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < \delta} |K_n(\zeta)| |f(\theta - \zeta) - f(\theta)| d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\zeta| \leq \pi} |K_n(\zeta)| |f(\theta - \zeta) - f(\theta)| d\zeta. \end{aligned}$$

Per cada part treballarem de manera diferent.

Per la part local utilitzem que la funció f és contínua i l'acotació uniforme de les normes L^1 de K_n :

$$\int_{|\zeta| < \delta} |K_n(\zeta)| |f(\theta - \zeta) - f(\theta)| d\zeta \leq \varepsilon_f(\delta, \theta) \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(\zeta)| d\zeta \leq M \varepsilon_f(\delta, \theta),$$

i per la part no local,

$$\int_{\delta \leq |\zeta| \leq \pi} |K_n(\zeta)| |f(\theta - \zeta) - f(\theta)| d\zeta \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \int_{\delta \leq |\zeta| \leq \pi} |K_n(\zeta)| d\zeta.$$

Tot plegat, obtenim

$$|K_n * f(\theta) - f(\theta)| \leq \frac{M \varepsilon_f(\delta, \theta)}{2\pi} + \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{\pi} \int_{\delta \leq |\zeta| \leq \pi} |K_n(\zeta)| d\zeta.$$

4 Mètodes sumatoris

Donat $\varepsilon > 0$ escollim n tal que $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \int_{\delta \leq |\zeta| \leq \pi} |K_n(\zeta)| d\theta \leq \pi\varepsilon/2$ (per la propietat *c*) i escollim δ perquè $M\varepsilon_f(\delta, \theta) < \varepsilon\pi$. Amb aquestes eleccions obtenim

$$|K_n * f(\theta) - f(\theta)| < \varepsilon,$$

tal i com volíem veure.

Notem que hem controlat la velocitat de convergència per la suma de $\varepsilon_f(\delta, \theta)$ i la propietat *c*), que és uniforme en θ . Si la funció f és contínua arreu, aleshores és uniformement contínua i deduïm que $\varepsilon_f(\delta, \theta) \leq \omega_\infty f(\delta)$ de manera uniforme.

El cas $f \in L^1(\mathbb{T})$ es pot fer pels mateixos mètodes:

$$\|K_n * f - f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\zeta) [f(\theta - \zeta) - f(\theta)] d\zeta \right| d\theta.$$

Aleshores usant la desigualtat triangular per integrals i el teorema de Tonelli obtenim

$$\|K_n * f - f\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(\zeta) [f(\theta - \zeta) - f(\theta)]| d\theta d\zeta.$$

A la part local tenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|\zeta| < \delta} |K_n(\zeta)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - \zeta) - f(\theta)| d\theta d\zeta \\ \leq \sup_{|\zeta| < \delta} \|f(\cdot - \zeta) - f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(\zeta)| d\zeta. \end{aligned}$$

Dit d'una altra manera, escrivint el mòdul de continuïtat integral

$$\omega_1 f(\delta) := \sup_{|\zeta| < \delta} \|f(\cdot - \zeta) - f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})},$$

hem obtingut

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|\zeta| < \delta} |K_n(\zeta)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - \zeta) - f(\theta)| d\theta d\zeta \stackrel{b)}{\leq} \omega_1 f(\delta) M.$$

Pel corollari 2.51 sabem que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_1 f(\delta) = 0.$$

A la part no local procedim com abans:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\delta \leq |\zeta| \leq \pi} |K_n(\zeta)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - \zeta) - f(\theta)| d\theta d\zeta \\ \leq 2\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\zeta| \leq \pi} |K_n(\zeta)| d\zeta \stackrel{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0. \end{aligned}$$

Per tant, donat $\varepsilon > 0$, prenent δ prou petit i n prou gran obtenim

$$\|K_n * f - f\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \omega_1 f(\delta) M + \frac{1}{\pi} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \int_{\delta \leq |\zeta| \leq \pi} |K_n(\zeta)| d\zeta \stackrel{c)}{<} \varepsilon.$$

Deixem el cas $f \in L^p(\mathbb{T})$ com a exercici (vegeu l'exercici 4.19). □

Exercici 4.19. La desigualtat integral de Minkowski diu que donada una funció mesurable $f : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ es compleix que

$$\left\| \int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot, \zeta) d\zeta \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot, \zeta)\|_{L^p(\mathbb{T})} d\zeta.$$

Utilitzant aquesta desigualtat demostra el teorema anterior en el cas $1 < p < \infty$. ◁

Exercici 4.20. Sigui una família $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{T})$ de funcions reals integrables parelles tal que

- a) Per tot $n \in \mathbb{N}$ tenim $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta = 1$.
- b) Existeix $M > 0$ tal que $\|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq M$ per tot $n \in \mathbb{N}$.
- c) Per cada $\delta > 0$ tenim $\sup_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |K_n(\theta)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Notem que la família és admissible. Demostra que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ i $\theta \in \mathbb{T}$ tal que existeixen $f(\theta^+)$ i $f(\theta^-)$, aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f * K_n(\theta) = \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2}.$$

◁

Observació 4.21. Notem que donada $f \in L^p$ i una família admissible de nuclis $K_n \in C(\mathbb{T})$, les funcions $f * K_n$ són contínues pel lema 4.9. Hom podria pensar que el resultat anterior demostra la densitat de les funcions contínues a L^p per $1 \leq p < \infty$. Notem però que a la demostració hem utilitzat el corollari 2.51, i que per demostrar aquest corollari ja hem utilitzat aquesta densitat! •

Exercici 4.22. Demostra que $C(\mathbb{T})$ no és dens a $L^\infty(\mathbb{T})$.

Pista: Mira què passa entorn de l'origen si intentem aproximar de manera uniforme la funció característica $\chi_{[0,1]}$. ◁

Projecte 4.23 (El teorema de diferenciació de Lebesgue). Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, aleshores

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{\theta-h}^{\theta+h} f(y) dy = f(\theta)$$

g.p.t. $\theta \in \mathbb{T}$. ◁

4.3 El nucli de Dirichlet

Tot seguit calculem una representació integral per $S_N f$. Ens fixem que podem intercanviar l'ordre de la suma i la integral ja que hi ha un nombre finit de sumands. Recordem que

$$S_N f(\theta) = \sum_{|n| \leq N} \widehat{f}(n) e^{in\theta}, \quad \widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy.$$

Ajuntant ambdues expressions, obtenim

$$\begin{aligned} S_N f(\theta) &= \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny+in\theta} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{|n| \leq N} e^{in(\theta-y)} dy. \end{aligned}$$

Ara escrivim

$$D_N(\theta) := \sum_{|n| \leq N} e^{in\theta},$$

que anomenarem el nucli de Dirichlet. Aleshores

$$S_N f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(\theta - y) dy = f * D_N(\theta).$$

Notem que el nucli de Dirichlet no depèn de f . De fet, és un polinomi trigonomètric d'ordre N amb coeficients igual a 1 per $-N \leq n \leq N$. Tot seguit n'estudiem les propietats.

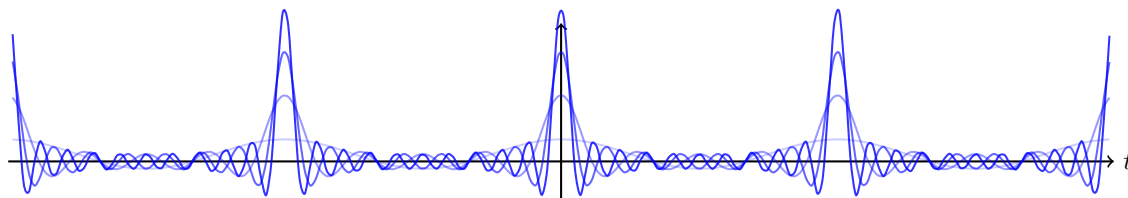


Figura 4.3: Nucli de Dirichlet $D_N(\theta)$ per $N = 1, 4, 7, 10$.

4.3.1 Fórmules pel nucli de Dirichlet

Comencem per expressar el nucli amb funcions trigonomètriques. Usem que $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ per escriure

$$D_N(\theta) = e^{-iN\theta} + \dots + e^{-i\theta} + e^0 + e^{i\theta} + \dots + e^{iN\theta} = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(n\theta).$$

En particular es tracta d'una funció parella de valors reals.

Vegem com escriure el nucli de Dirichlet sense usar sumatoris. En primer lloc tenim que

$$D_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N e^{in\theta} = e^{-iN\theta} \sum_{n=0}^{2N} \left(e^{i\theta}\right)^n.$$

Tot seguit usarem l'expressió de la sèrie geomètrica per obtenir una expressió alternativa, tal i com vam fer a l'Exemple 3.1: per tot $\theta \neq 0$ tenim

$$D_N(\theta) = e^{-iN\theta} \frac{(e^{i\theta})^{2N+1} - 1}{e^{i\theta} - 1} \stackrel{\cdot \frac{e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}}}{=} \frac{e^{i(2N+1)\theta/2} - e^{-i(2N+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}. \quad (4.5)$$

Usant l'expressió del sinus $2i \sin \theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ trobem

$$D_N(\theta) = \frac{\sin((2N+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}. \quad (4.6)$$

Observem que la singularitat que es troba a l'origen és en realitat evitable: $D_N(0) = 2N + 1$. No hi farem esment d'ara endavant. De fet, per la primera definició del nucli de Dirichlet sabem que, en realitat, $D_N \in C^\infty(\mathbb{T})$.

A la Figura 4.3 observem que com que $-1 \leq \sin((2N+1)\theta/2) \leq 1$, la funció D_N està acotada per sota i per sobre per $\pm \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$. També veiem que D_N pren valors positius i negatius, és una funció parella i assolix el seu valor màxim $2N + 1$ a l'origen.

Exercici 4.24. Denotem \mathcal{P}_N l'espai de polinomis trigonomètrics de grau $\leq N$. Demostreu que la funció $D_N(x-y)$, és el nucli reproductor de \mathcal{P}_N , això vol dir, que per a tot $P \in \mathcal{P}_N$ i $x \in \mathbb{T}$

$$\langle P, D_N(x - \cdot) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(y) D_N(x - y) dy = P(x).$$

Pista: Podeu usar l'exercici 4.12

◁

4.3.2 Propietats del nucli de Dirichlet

Teorema 4.25. *El nucli de Dirichlet té les següents propietats:*

- (i) $f * D_N = S_N f$ per tota funció $f \in L^1(\mathbb{T})$.
- (ii) D_N és parella.
- (iii) D_N té mitjana 1 per tot N : $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta) d\theta = 1$.
- (iv) Malhauradament la integral del valor absolut depèn de N i, de fet, tenim l'estimació $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)| d\theta \approx \log(N+1)$.

Aquí hem fet servir la notació $A_N \approx B_N$ per dir que existeix una constant $C > 1$ independent de N tal que $C^{-1}A_N \leq B_N \leq CA_N$.

El fet que la mitjana sigui sempre u mentre que la massa total creix com el logaritme de N pot ser sorprenent, i es deu a la forta oscil·lació del nucli a mida que incrementem N . Així, l'àrea compresa entre l'eix θ i la gràfica de la funció creix cap a infinit mentre que la part situada sobre l'eix es cancel·la amb la situada per sota l'eix obtenint una diferència constant igual a u independentment de N !

Demostració del teorema 4.25. Ja hem demostrat (i) i (ii). Per la tercera propietat notem que

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in\theta} d\theta = \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta = 2\pi,$$

ja que la integral de $e^{in\theta}$ a un interval de longitud 2π és zero llevat del cas $n = 0$, quan la integral és exactament 2π .

Per veure la darrera propietat, notem que quan $(2N + 1)\theta/2 = (2k + 1)\pi/2$, aleshores $|\sin((2N + 1)\theta/2)| = 1$. De fet, si $(2N + 1)\theta/2 \in ((2k + 1)\pi/2 - \frac{\pi}{4}, (2k + 1)\pi/2 + \frac{\pi}{4})$, aleshores $|\sin((2N + 1)\theta/2)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ i, per tant,

$$|D_N(\theta)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2|\sin(\theta/2)|} \geq \frac{\sqrt{2}}{|\theta|}.$$

Aleshores

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)| d\theta \geq 2 \sum_{k=0}^N \int_{\frac{2k+1}{2N+1}\pi - \frac{\pi}{2(2N+1)}}^{\frac{2k+1}{2N+1}\pi + \frac{\pi}{2(2N+1)}} |D_N(\theta)| d\theta \geq 2 \sum_{k=0}^N \int_{\frac{2k+1}{2N+1}\pi - \frac{\pi}{2(2N+1)}}^{\frac{2k+1}{2N+1}\pi + \frac{\pi}{2(2N+1)}} \frac{\sqrt{2}}{|\theta|} d\theta.$$

Si acotem pel valor mínim de l'integrand a cada interval, obtenim

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)| d\theta &\geq \sum_{k=0}^N \frac{2\sqrt{2}}{\frac{2k+1}{2N+1}\pi + \frac{\pi}{2(2N+1)}} \frac{\pi}{2N+1} = \sum_{k=0}^N \frac{2\sqrt{2}}{2k+1+\frac{1}{2}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{N+1} \frac{2\sqrt{2}}{2k} \approx \log(N+1). \end{aligned}$$

Hem vist doncs que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)| d\theta \gtrsim \log(N+1).$$

□

Exercici 4.26. Demuestra que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)| d\theta \lesssim \log(N+1).$$

◁

Observació 4.27. Acabem de veure que els nuclis de Dirichlet no satisfan la propietat b) de la Definició 4.14 i, per tant, no formen una família admissible de nuclis i, per tant, no donen lloc a una aproximació de la identitat. Per tant, **no podem deduir** que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N * f(\theta) = f(\theta)$$

quan la funció f és contínua, vegeu el teorema 4.18. Això violaria el teorema 3.32! •

Exercici 4.28 (Test de Dini). Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$, $A \in \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{T}$. Demuestra que si

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} - A \right| \frac{dy}{|y|} < \infty$$

aleshores $Sf(x) = A$. Pista: la mesura $\frac{dy}{|y|}$ es pot canviar per $\frac{dy}{|\tan(y/2)|}$. \triangleleft

Exercici 4.29. Si f satisfà que $\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leq C$ per tot x , aleshores $Sf(x_0) = f(x_0)$ (de fet és suficient que sigui per tot $x \in I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, amb $\delta > 0$). \triangleleft

Observació 4.30. La condició anterior s'anomena condició de Lipschitz. Una funció que compleix la condició de Lipschitz a tot $x_0 \in \mathbb{T}$ s'anomena funció de Lipschitz, i es denota amb $f \in C^{0,1}(\mathbb{T})$. És clar que $C^1(\mathbb{T}) \subset C^{0,1}(\mathbb{T}) \not\subset C^1(\mathbb{T})$. La inclusió és conseqüència del teorema del valor mitjà i la no inclusió es pot veure considerant el cas $f(x) = |x|$. \bullet

Exercici 4.31 (Principi de localització de Riemann). Sigui f una funció integrable. Si f s'anulla en un interval obert, aleshores $S_N f$ convergeix uniformement a 0 en subconjunts compactes de l'interval.

Pista: demostra que $Sf(x) = 0$ usant el test de Dini. L'exercici interessant és veure que la convergència és uniforme. \triangleleft

4.4 El nucli de Féjer i la successió de mitjanes de Cesàro

Vistos els resultats anteriors, podem recuperar els valors d'una funció integrable del coneixement dels seus coeficients de Fourier? Potser ho podem fer almenys als seus punts de continuïtat?

El contraexemple de Du Bois-Reymond ens demostra que, en general, no és possible recuperar una funció contínua usant directament els límits de les sumes parcials de Fourier $S_N f$ fent $N \rightarrow \infty$. Nogensmenys, Lipót Féjer va demostrar que sempre podem recuperar una funció contínua f a partir dels seus coeficients si fem servir el mètode sumatori de Cesàro. Si la funció f és acotada, aleshores es recupera la funció als punts de continuïtat.

El mètode de Féjer consisteix en calcular les *sumes parcials de Cesàro* $\sigma_N f$ que corresponen a convolucionar f amb una família admissible de nuclis anomenats *nuclis de Féjer*, amb la qual cosa podem aplicar els resultats d'aproximacions de la identitat (veure teorema 4.18).

Les sumes parcials o *mitjanes de Cesàro* es defineixen com

$$\sigma_N f(\theta) := \frac{S_0 f(\theta) + S_1 f(\theta) + \cdots + S_{N-1} f(\theta)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

És clar que $\sigma_N f(\theta)$ és la mitjana dels primers N valors de la successió de les sumes parcials de Fourier i, en particular, es tracta d'un polinomi trigonomètric d'ordre $N - 1$. Canviant l'ordre dels sumatoris i comptant el nombre d'aparicions de cada terme de Fourier

$\widehat{f}(k)e^{ik\theta}$, obtenim una representació com a mitjana ponderada dels coeficients de Fourier de freqüències menors que N , on els coeficients de freqüències baixes tenen més pes que les freqüències altes. Concretament,

$$\sigma_N f(\theta) = \sum_{|k| \leq N-1} \frac{N-|k|}{N} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

El nucli de Féjer $F_N(\theta)$, seguint la mateixa lògica, es defineix com la mitjana integral dels N primers nuclis de Dirichlet:

$$F_N(\theta) := \frac{D_0(\theta) + D_1(\theta) + \cdots + D_{N-1}(\theta)}{N}.$$

Amb els mateixos càlculs que abans deduïm que el nucli de Féjer és una mitjana ponderada de les funcions trigonomètriques de freqüències $|k| < N$, donant més pes a les freqüències baixes. Per ser precisos,

$$F_N(\theta) = \sum_{|n| < N} \frac{N-|n|}{N} e^{in\theta}.$$

Potser és menys evident que se'n deriva una fórmula tancada:

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right)^2. \quad (4.7)$$

Exercici 4.32. Comprova que aquesta fórmula és correcta.

Pista: usant l'expressió (4.5) pots escriure el nucli de Féjer com una suma parcial d'una sèrie geomètrica. \triangleleft

Compara la fórmula tancada dels nuclis de Féjer (4.7) amb la dels nuclis de Dirichlet (4.6). Observa que els nuclis de Féjer no prenen valors negatius.

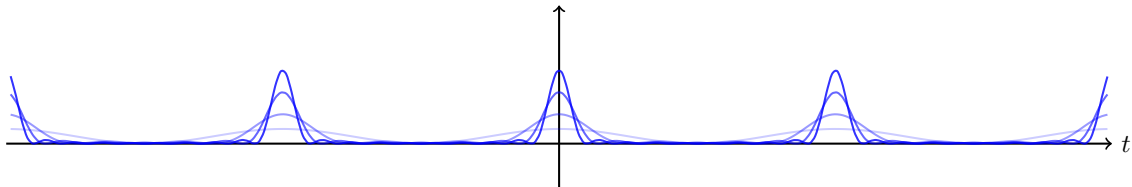


Figura 4.4: Nucli de Féjer $F_N(\theta)$ per $N = 2, 4, 7, 10$.

Exercici 4.33. Els nuclis de Féjer formen una família admissible de nuclis. \triangleleft

Pel teorema 4.18 deduïm el següent resultat:

Teorema 4.34 (Teorema de Féjer). *Sigui $f \in C(\mathbb{T})$. Aleshores les mitjanes de Cesàro $\sigma_N f$ convergeixen uniformement a f :*

$$\|f - \sigma_N f\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Si $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, aleshores

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f(\theta) = f(\theta)$$

a tots els punts $\theta \in \mathbb{T}$ on la funció f és contínua.

Si, en canvi, $f \in L^p(\mathbb{T})$ amb $1 \leq p < \infty$, aleshores

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \sigma_N f\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0.$$

Així podem recuperar qualsevol funció contínua si sabem els seus coeficients de Fourier. De fet, podem recuperar qualsevol funció integrable gairebé per tot arreu (recordeu que per funcions integrables no podem aspirar a res més).

Observem que $\sigma_N f$ és sempre un polinomi trigonomètric (vegeu l'exercici 4.12). Així, les sumes de Cesàro donen un mètode per aproximar qualsevol funció contínua en \mathbb{T} per polinomis trigonomètrics, és a dir que hem demostrat el teorema d'aproximació de Weierstrass per polinomis trigonomètrics (teorema 3.4). De fet hem vist que els polinomis trigonomètrics són densos a $C(\mathbb{T})$ amb la norma uniforme i són densos a $L^p(\mathbb{T})$ amb la norma de l'espai sempre que p sigui finit.

El teorema de Féjer dona com a corollari la unicitat dels coeficients de Fourier:

Corollari 4.35 (Principi d'unicitat). *Siguin $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ tals que $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ per tot $n \in \mathbb{Z}$. Aleshores $f(\theta) = g(\theta)$ g.p.t. $\theta \in \mathbb{T}$.*

Exercici 4.36. Demostra el corollari. ◁

4.5 El nucli de Poisson i les mitjanes d'Abel

Els nuclis de Poisson formen una altra família admissible de nuclis que estudiarem a continuació. La convolució amb un nucli de Poisson dona lloc a una nova quantitat coneguda com a *mitjana d'Abel*, de la mateixa manera que un nucli de Féjer genera una mitjana de Cesàro. Algunes diferències fonamentals són que el nucli de Poisson està indexat contínuament en lloc de ser un conjunt numerable de nuclis, i que no són polinomis trigonomètrics (per tant, involucren una quantitat infinita de freqüències).

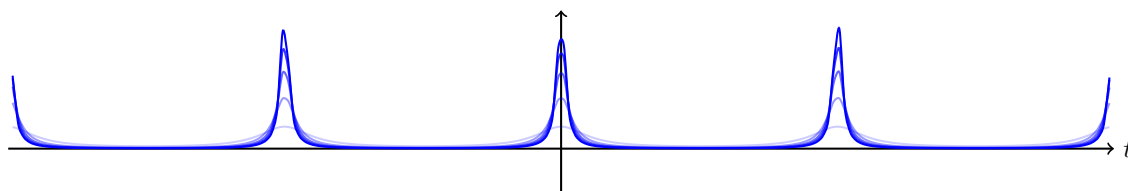


Figura 4.5: Nucli de Poisson $F_N(\theta)$ per $r = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}$.

Definició 4.37. El nucli de Poisson $P_r(\theta)$ està definit per

$$P_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \quad \text{per } r \in [0, 1].$$

•

Exercici 4.38. Demuestra que les dues fórmules coincideixen si $r \neq 0$.

Quan $r = 0$ quin problema hi ha en la definició? Què s'obté al calcular la convolució de f amb la segona expressió del nucli de Poisson en aquest cas? \triangleleft

Observem que el nucli està indexat pel paràmetre continu $r \in [0, 1)$. En aquest cas, doncs, estarem interessats en el comportament quan $r \rightarrow 1$ en lloc de $N \rightarrow \infty$. El nucli de Poisson és positiu, i la sèrie que el defineix és absolutament convergent (i, per tant, uniformement convergent).

Exercici 4.39. Demuestra que els nuclis de Poisson formen una família admissible (caldrà modificar la definició per prendre r en lloc de N). \triangleleft

Definició 4.40. Suposem que $f \in L^1(\mathbb{T})$ i considerem la seva sèrie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{in\theta}$. Aleshores per $r \in [0, 1)$ definim la *mitjana d'Abel r -èsima* com

$$A_r f(\theta) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)r^{|n|}e^{in\theta}.$$

•

Vegem que la mitjana d'Abel es pot obtenir per convolució amb el nucli de Poisson.

Exercici 4.41. Demuestra que per tota funció $f \in L^1(\mathbb{T})$ tenim

$$A_r f(\theta) = P_r * f(\theta).$$

\triangleleft

Exercici 4.42. Demuestra que per tota funció $f \in L^1(\mathbb{T})$ obtenim $A_r f \in C^\infty$. \triangleleft

Pel teorema 4.18 deduïm el següent resultat:

Teorema 4.43 (Mitjanes d'Abel). *Sigui $f \in C(\mathbb{T})$. Aleshores les mitjanes d'Abel $A_r f$ convergeixen uniformement a f :*

$$\|f - P_r * f\|_\infty \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0.$$

Si $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, aleshores

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r * f(\theta) = f(\theta)$$

a tots els punts $\theta \in \mathbb{T}$ on la funció f és contínua.

Si, en canvi, $f \in L^p(\mathbb{T})$ amb $1 \leq p < \infty$, aleshores

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|f - P_r * f\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0.$$

Projecte 4.44 (Problema de Dirichlet). Explica com solucionar el problema de Dirichlet al disc unitat

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0 & \text{per } z \in \mathbb{D}, \\ u(e^{i\theta}) = f(\theta) & \text{per } \theta \in \mathbb{T}, \end{cases}$$

mitjançant el nucli de Poisson. \triangleleft

Projecte 4.45 (Mètodes sumatoris i mitjanes). Demuestra que si una successió és convergent aleshores les seves mitjanes de Cesàro i les d'Abel convergeixen al mateix límit. \triangleleft

5 Funcions de quadrat integrable

En aquest capítol tanquem un parell de temes. Veurem la convergència a $L^2(\mathbb{T})$ de les sumes parcials de Fourier cap a f (Secció 5.1) i també la completesa de les funcions trigonomètriques a $L^2(\mathbb{T})$ (Secció 5.3). Són dos problemes íntimament relacionats, com mostra una revisió de la geometria de $L^2(\mathbb{T})$ (Secció 5.2).

En el capítol previ hem discutit la convergència puntual i uniforme de les sumes parcials a f . Hem vist en particular que la continuïtat no és suficient per garantir aquesta convergència. Necessitem alguna cosa més, com per exemple que la funció tingui dues derivades o que utilitzem les sumes de Cesàro en lloc de les parcials. Qualsevol d'aquestes condicions ens garanteix la convergència uniforme.

En aquest capítol estudiem la *convergència en mitjana quadràtica* o convergència en $L^2(\mathbb{T})$. Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, veurem que $S_N f$ és el polinomi trigonomètric de grau menor o igual a N que millor aproxima f en la norma $L^2(\mathbb{T})$, és a dir que és la projecció ortogonal de f al subespai de $L^2(\mathbb{T})$ format pels polinomis trigonomètrics de grau menor o igual a N . L'*energia* o *norma* L^2 de f es pot recuperar dels seus coeficients de Fourier mitjançant la *identitat de Parseval*¹, que és una versió en infinites dimensions del teorema de Pitàgores². Darrera de tota aquesta parrafada hi ha una frase que ho resumeix tot: les funcions trigonomètriques $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ formen una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$.

Que les funcions trigonomètriques són ortonormals és immediat (veure Exercici 1.7). El que cal tenir en compte aquí és que la família $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és *completa*, en el sentit que *generen* $L^2(\mathbb{T})$ amb les seves combinacions lineals.

5.1 Resultats bàsics a $L^2(\mathbb{T})$

A la Secció 2.2 hem introduït l'espai $L^2(\mathbb{T})$ de funcions de quadrat integrable en \mathbb{T} com l'espai de funcions $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que tenen *energia* (o norma $L^2(\mathbb{T})$) finita:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

De fet, en aquest espai identifiquem funcions que coincideixen g.p.t. arreu, tot i que sovint ometem aquesta definició com a quocient i identifiquem una funció amb la seva classe d'equivalència.

Abans de centrar-nos en les propietats geomètriques d'aquest espai de funcions fem un resum dels resultats relacionats amb les sèries de Fourier.

¹Marc-Antoine Parseval de Chênes, 1755–1836

²Pitàgores de Samos, 570–495 a.C.

5 Funcions de quadrat integrable

Els coeficients de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{T})$ estan ben definits ja que $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ per la desigualtat de Cauchy-Schwartz, així com les seves sumes parcials

$$S_N f(\theta) := \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{in\theta}$$

Teorema 5.1 (Convergència en mitjana quadràtica). *Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, aleshores les seves sumes parcials de Fourier convergeixen a f en energia:*

$$\|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T})} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

De fet, podem recuperar el quadrat de l'energia d'una funció $f \in L^2(\mathbb{T})$ simplement calculant el sumatori dels quadrats dels seus coeficients de Fourier, com mostra la identitat de Parseval:

Teorema 5.2 (Identitat de Parseval). *Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, aleshores*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Exercici 5.3. Demostrea que $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ usant la identitat de Parseval amb $f(\theta) = \theta$. Obtén identitats similars per $f(\theta) = \theta^2$ i $f(\theta) = \theta^3$. ◁

Observació 5.4. A l'exercici anterior pots veure que la funció zeta de Riemann $\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ pren valors $\zeta(2j) = p_j \pi^{2j}$ on $p_j \in \mathbb{Q}$ per $j \in \{1, 2, 3\}$. En general això és cert per tot $j \in \mathbb{N}$, però no se sap què passa pels imparells $2j + 1$. Se sap que $\zeta(3)$ és irracional (Apéry, 1978), que hi ha infinits valors irracionals (Rivoal 2001) i que almenys un dels valors $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ o $\zeta(11)$ ho és. •

Demostrarem aquests resultats al llarg del capítol. El Lema de Riemann-Lebesgue per aquestes funcions se segueix immediatament de la identitat de Parseval.

L'espai de successions $\ell^2(\mathbb{Z})$ (*ela dos petita dels enters*) es defineix com la col·lecció de successions $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ tals que

$$\|\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Així doncs, la identitat de Parseval diu que $f \mapsto \{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és una isometria entre $L^2(\mathbb{T})$ i $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Observació 5.5. Una conseqüència important de la taula 4.1 i de la completesa de la base trigonomètrica és que tot operador acotat $T : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ que commuti amb les translacions, és a dir, que per tota $f \in L^2(\mathbb{T})$ i tot $h \in \mathbb{R}$ tinguem que $\tau_h(Tf) = T(\tau_h f)$, diagonalitza al cantó de Fourier. Tot seguit intentarem donar un sentit a aquesta afirmació. La moral de la història és que sempre que tinguem un problema invariant per translacions, la transformada de Fourier pot ser una eina útil per resoldre'l.

5 Funcions de quadrat integrable

Un operador lineal a $L^2(\mathbb{T})$ queda determinat per la imatge dels elements de la base $e_n(\theta) = e^{in\theta}$: si $T(e_n) = \sum_m b_{n,m}e_m$, aleshores donada una funció $f = \sum_n a_n e_n$ tindrem que $Tf = \sum_{n,m} b_{n,m}a_n e_m$. Podem entendre que a_n són les coordenades d'un vector i $b_{n,m}$ la matriu (infinita) de l'aplicació lineal.

Suposem que l'operador commuta amb les translacions. Per un cantó, tenim que $\tau_h(e_n)(\theta) = e^{in(\theta-h)} = e^{-inh}e_n(\theta)$. Així

$$T(\tau_h(e_n)) = \sum_{n,m} b_{n,m}e^{-inh}e_m.$$

Per altra banda $\tau_h(Te_n)(\theta) = \sum_{n,m} b_{n,m}e^{im(\theta-h)}$, és a dir que

$$\tau_h(Te_n) = \sum_{n,m} b_{n,m}e^{-imh}e_m.$$

Per la unicitat dels coeficients de Fourier, deduïm que

$$b_{n,m}e^{-inh} = b_{n,m}e^{-imh}$$

per tots els valors possibles de h, n, m . Per tant, o bé $n = m$ o bé $b_{n,m} = 0$: així doncs, l'operador T actua com una matriu diagonal al costat de les freqüències. Per tal que l'operador sigui acotat, caldrà que la matriu tingui els coeficients uniformement acotats. •

5.2 Geometria dels espais de Hilbert

5.2.1 Definició i propietats elementals

Recordem que un *espai de Hilbert*³ és un espai vectorial H equipat amb un producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ que és complet amb la norma induïda pel producte escalar $\|h\|_H = \langle h, h \rangle^{\frac{1}{2}}$, és a dir que si tenim una successió de Cauchy $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ en la norma induïda, aleshores la successió convergeix a un límit $h \in H$ en aquesta mateixa norma. Diem que h és el límit de h_n en el sentit de H quan això ocorre, és a dir, quan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - h\| = 0.$$

Recordem també que un producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ és una forma lineal en la primera variable, hermítica i definida positiva: per tot $f, g, h \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tenim

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle, \quad \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle} \quad \text{i} \quad \langle f, f \rangle > 0 \text{ si } f \neq 0.$$

Exercici 5.6. Demostra que les condicions anteriors impliquen que el producte escalar és una forma sesquilineal (lineal en la primera variable i antilineal en la segona):

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 \rangle = \alpha_1 \overline{\beta_1} \langle f_1, g_1 \rangle + \alpha_1 \overline{\beta_2} \langle f_1, g_2 \rangle + \alpha_2 \overline{\beta_1} \langle f_2, g_1 \rangle + \alpha_2 \overline{\beta_2} \langle f_2, g_2 \rangle,$$

◁

³David Hilbert, 1862–1943

5 Funcions de quadrat integrable

Exercici 5.7. Siguin $f, g \in H$. Demuestra que se satisfà:

1. La regla del paralelogram $2\|f\|_H^2 + 2\|g\|_H^2 = \|f + g\|_H^2 + \|f - g\|_H^2$.
2. El teorema de Pitàgores $\|f\|_H^2 + \|g\|_H^2 = \|f + g\|_H^2$ sempre que f i g siguin ortogonals, és a dir, tals que $\langle f, g \rangle = 0$.
3. La desigualtat de Cauchy-Schwarz $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_H \|g\|_H$.
4. La desigualtat triangular $\|f + g\|_H \leq \|f\|_H + \|g\|_H$.

◁

L'espai $L^2(\mathbb{T})$ és un espai vectorial amb la suma habitual i el producte de funcions per escalars. La norma L^2 està induïda pel producte escalar

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta,$$

en el sentit que $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Teorema 5.8. *L'espai $L^2(\mathbb{T})$ és un espai de Hilbert.*

Exercici 5.9. Demuestra el teorema anterior. N'hi ha prou amb veure que tota successió de Cauchy en la norma $L^2(\mathbb{T})$ té límit al mateix espai de funcions. Per fer-ho, fes els següents passos:

1. Tota successió de Cauchy $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ té una parcial $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\|f_{n_k} - f_{n_j}\|_{L^2} \leq 2^{-m}$ si $j, k > m$.
2. Pots suposar doncs que aquesta condició es compleix d'entrada. Prova que $f_n \rightarrow f$ és equivalent a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n = f$, on $g_n = f_n - f_{n-1}$ (prenem $f_{-1} := 0$).
3. En aquest cas tenim $\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_{L^2} < \infty$.
4. Usant la desigualtat de Minkowski

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} |g_n| \right\|_{L^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_{L^2},$$

dedueix que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ és convergent g.p.t. arreu a una funció f .

5. Pel teorema de convergència dominada demostra que $\left\| f - \sum_{n=1}^N g_n \right\|_{L^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

◁

5 Funcions de quadrat integrable

Observació 5.10. L'espai $L^2(\mathbb{T})$ coincideix amb la *compleció* de $C(\mathbb{T})$ respecte a la norma $L^2(\mathbb{T})$. És a dir que $L^2(\mathbb{T})$ està format per les funcions contínues i els límits de successions de Cauchy mòdul una relació d'equivalència (dues successions de Cauchy són equivalents si “junttes” formen una successió de Cauchy), de la mateixa manera que \mathbb{R} es pot construir com a completió de \mathbb{Q} . Dit d'una altra manera, les funcions contínues són denses a $L^2(\mathbb{T})$. •

Exercici 5.11. Demostra que $\ell^2(\mathbb{Z})$ és un espai de Hilbert amb el producte escalar

$$\langle \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \bar{b}_n.$$

Pista: Cal veure que donada una successió de Cauchy de successions de $\ell^2(\mathbb{Z})$, cada coordenada defineix una successió de Cauchy a \mathbb{C} i així es pot definir la successió candidata a ser el límit de manera unívoca. Faltarà veure que la successió generada pertany a $\ell^2(\mathbb{Z})$ i que efectivament n'és el límit. ◁

A continuació provem que el producte escalar és continu en un espai de Hilbert:

Proposició 5.12. Sigui $\{f_n\}_{n=0}^\infty \subset H$ una successió de Cauchy i $g \in H$. Aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, g \rangle.$$

Demostració. En primer lloc observem que efectivament existeix un límit $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ja que l'espai és complet. Per la desigualtat de Cauchy-Schwarz i la linealitat tenim

$$|\langle f_n, g \rangle - \langle f, g \rangle| \leq \|f_n - f\|_H \|g\|_H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Exercici 5.13. Siguin $g, h_k, f \in H$ amb $k \in \mathbb{N}$ tals que $f = \sum_{k=1}^\infty h_k$ en el sentit de H . Demostra que $\sum_{k=1}^\infty \langle g, h_k \rangle = \langle g, f \rangle$. Pista: $\{\sum_{k=1}^n h_k\}_{n=1}^\infty$ és una successió de Cauchy. ◁

Exercici 5.14. Sigui $e_n(\theta) := e^{in\theta}$. Suposem que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$, i suposem també que $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n$ i $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e_n$, on les igualtats les entenem en sentit de $L^2(\mathbb{T})$. Demostra que

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \bar{b}_n.$$

En particular, demostra que $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$. ◁

Exercici 5.15. Suposa que $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ és una família ortogonal de funcions no nul·les de $L^2(\mathbb{T})$, amb un conjunt arbitrari d'índexs Λ . Demostra que per qualsevol subconjunt finit $J \subset \Lambda$ la família $\{f_\lambda\}_{\lambda \in J}$ és linealment independent. ◁

5.2.2 Famílies ortonormals i bases

A l'Exercici 5.15 hem vist que l'ortogonalitat d'una família implica la independència lineal dels seus membres. La intuïció ens diu que un conjunt ortonormal és en certa manera el màxim de linealment independent possible. Si en un espai vectorial amb producte escalar de dimensió finita N trobem una col·lecció de N funcions ortonormals, aleshores tenim una *base ortonormal* de l'espai.

A l'Exercici 1.7 hem vist que les funcions trigonomètriques $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ formen un conjunt ortonormal de funcions a $L^2(\mathbb{T})$:

$$\langle e^{in\cdot}, e^{ik\cdot} \rangle = \delta_{n,k}. \quad (5.1)$$

Com que n'hi ha una quantitat infinita, deduïm que $L^2(\mathbb{T})$ és un espai de dimensió infinita. De moment, però, no podem garantir que no hi hagi alguna funció de $L^2(\mathbb{T})$ que sigui ortogonal a les funcions trigonomètriques. En altres paraules, encara no sabem si el sistema de funcions trigonomètriques és *complet*. Resulta que la completesa del conjunt de funcions trigonomètriques a $L^2(\mathbb{T})$ és equivalent a la convergència de la sèrie de Fourier en mitjana quadràtica, i també és equivalent a la Identitat de Parseval.

Definició 5.16. Sigui $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ una família ortonormal. Diem que la família $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ és *completa* (o que és un *sistema ortonormal complet*, o que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forma una *base ortonormal*) si tot element $f \in H$ es pot expressar com a sèrie dels elements de la base convergent en la norma d' H . És a dir, si per cada $f \in H$ existeix $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N a_n f_n \right\|_H \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

També escrivim que $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ en el sentit de H . •

Els coeficients a_n queden unívocament determinats pel producte de f amb els elements de la base:

Lema 5.17 (Unicitat dels coeficients). *Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ és una base ortonormal de H i si $f \in H$, aleshores existeix $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ en el sentit de H , i els coeficients han de ser $a_n = \langle f, f_n \rangle$ per tot $n \in \mathbb{N}$.*

Demostració. Sigui $f = \sum_{n=1}^N a_n f_n$. Aleshores

$$\langle f, f_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k, f_n \right\rangle \stackrel{\text{ex. 5.13}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle f_k, f_n \rangle = a_n.$$

□

5.2.3 Projectió ortogonal

Definició 5.18. Sigui $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ una família ortonormal. Aleshores definim la projectió ortogonal

$$\pi_N f := \sum_{n=1}^N \langle f, f_n \rangle f_n.$$

•

5 Funcions de quadrat integrable

Notem que en el cas de $H = L^2(\mathbb{T})$, aleshores la família $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és ortonormal i indexant $f_{2n} = e^{in\theta}$ i $f_{2n+1} = e^{-in\theta}$, obtenim que $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ és un sistema ortonormal i $S_N = \pi_{2N}$ és també una projecció ortogonal.

Lema 5.19. *Sigui $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ una família ortonormal. Donada $f \in H$, la funció $(f - \pi_N f)$ és ortogonal a l'espai generat per $\{f_n\}_{n=0}^N$.*

En particular, donada $f \in L^2(\mathbb{T})$, la funció $(f - S_N f)$ és ortogonal als polinomis trigonomètrics de grau menor o igual que N .

Demostració. Vegem primer que és ortogonal als elements de la base, és a dir, que per $n \leq N$ tenim

$$\langle f - \pi_N f, f_n \rangle = 0, \quad (5.2)$$

o, dit d'una altra manera, que

$$\langle f, f_n \rangle = \langle \pi_N f, f_n \rangle.$$

Notem que per la linealitat del producte escalar

$$\langle \pi_N f, f_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^N \langle f, f_k \rangle f_k, f_n \right\rangle = \sum_{k=1}^N \langle f, f_k \rangle \langle f_k, f_n \rangle = \sum_{k=1}^N \langle f, f_k \rangle \delta_{n,k} = \langle f, f_n \rangle,$$

i se segueix (5.2).

Ara per qualsevol combinació lineal $\sum_{n=0}^N c_n f_n$, tenim

$$\langle f - \pi_N f, \sum_{n=0}^N c_n f_n \rangle = \sum_{n=0}^N \overline{c_n} \langle f - \pi_N f, f_n \rangle \stackrel{(5.2)}{=} 0$$

□

Lema 5.20. *Sigui $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ una família ortonormal. Si $f \in H$, llavors*

$$\|f\|_H^2 = \|f - \pi_N f\|_H^2 + \sum_{n \leq N} |\langle f, f_n \rangle|^2.$$

En particular, si $f \in L^2(\mathbb{T})$, aleshores

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \sum_{|n| \leq N} |\hat{f}(n)|^2.$$

Demostració. Pel Teorema de Pitàgores només cal comprovar que

$$\|\pi_N f\|_H^2 = \sum_{n \leq N} |\langle f, f_n \rangle|^2.$$

Efectivament,

$$\|\pi_N f\|_H^2 = \langle \pi_N f, \pi_N f \rangle \stackrel{\text{Ex. 5.6}}{=} \sum_{n \leq N} \sum_{k \leq N} \langle f, f_n \rangle \overline{\langle f, f_k \rangle} \langle f_n, f_k \rangle = \sum_{n \leq N} \langle f, f_n \rangle \overline{\langle f, f_n \rangle}.$$

□

5 Funcions de quadrat integrable

Observació 5.21. El lema anterior demostra que per tota família ortonormal $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$, és equivalent que la família sigui completa (i, per tant, una base de H) i que se satisfaci la identitat de Plancherel

$$\|f\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2. \quad (5.3)$$

Notem que la identitat de Plancherel en el cas de $H = L^2(\mathbb{T})$ i $f_n = e^{in\theta}$ és precisament la identitat de Parseval.

Hi ha una tercera condició equivalent: $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}^\perp = \{0\}$, és a dir, per tota $f \in H$, si $f \perp \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aleshores $f = 0$. Vegeu [PW12, Teorema 5.31]. •

Una conseqüència immediata de l'anterior lema és la desigualtat de Bessel:

Lema 5.22 (Desigualtat de Bessel). *Sigui $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ una família ortonormal. Si $f \in H$, aleshores*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq \|f\|_H^2.$$

Notem que la igualtat en el darrer lema (Identitat de Plancherel) s'assoleix precisament quan el sistema és complet. En el cas $H = L^2(\mathbb{T})$, aquesta identitat s'anomena identitat de Parseval, i quedarà demostrada quan veiem que els "monomis" trigonomètrics formen un sistema complet.

La suma parcial de Fourier $S_N f$ és la projecció ortogonal de la funció f en el subespai $\mathcal{P}_N(\mathbb{T})$ de polinomis trigonomètrics de grau menor o igual a N . En particular, de tots els polinomis de grau menor o igual a N , la suma parcial N -èsima és el que millor aproxima f en la norma $L^2(\mathbb{T})$:

Lema 5.23 (Lema de la millor aproximació). *Sigui $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ una família ortonormal i sigui $f \in H$. Aleshores per cada $N \geq 0$ i per tot $P = \sum_{n=0}^N c_n f_n$ tenim*

$$\|f - \pi_N f\|_H \leq \|f - P\|_H.$$

La igualtat és equivalent a $P = \pi_N f$.

En particular, si $f \in L^2(\mathbb{T})$. Aleshores per cada $N \geq 0$ i per tot $P \in \mathcal{P}_N(\mathbb{T})$ tenim

$$\|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|f - P\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

La igualtat és equivalent a $P = S_N f$.

Demostració. Efectivament,

$$\begin{aligned} \|f - P\|_H^2 &= \left\| f - \sum_{n \leq N} c_n f_n - \pi_N f + \pi_N f \right\|_H^2 \stackrel{\text{L. 5.19}}{=} \|f - \pi_N f\|_H^2 + \left\| \pi_N f - \sum_{n \leq N} c_n f_n \right\|_H^2 \\ &\geq \|f - \pi_N f\|_H^2. \end{aligned}$$

Notem que la igualtat només s'assoleix si

$$\left\| \pi_N f - \sum_{n \leq N} c_n f_n \right\|_H^2 = 0,$$

5 Funcions de quadrat integrable

és a dir, si i només si

$$0 = \left\| \sum_{n \leq N} (\langle f, f_n \rangle f_n - c_n f_n) \right\|_H^2 = \sum_{n \leq N} \|\langle f, f_n \rangle f_n - c_n f_n\|_H^2 \stackrel{\text{Ex 5.7.2}}{=} \sum_{n \leq N} (\langle f, f_n \rangle - c_n)^2 \|f_n\|_H^2.$$

La darrera suma s'anul·la si i només si tots els coeficients són zero, és a dir si $P = \pi_N f$. \square

5.3 Completesa del sistema trigonomètric

5.3.1 Convergència quadràtica per a funcions de quadrat integrable

Tot seguit, combinant el teorema de Féjer amb el lema de la millor aproximació obtenim la completesa del sistema trigonomètric:

Demostració del teorema 5.1. Pel Lema de la millor aproximació 5.23 tenim que

$$\|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|f - \sigma_N f\|_{L^2(\mathbb{T})} \stackrel{\text{T. 4.34}}{N \rightarrow \infty} 0.$$

\square

5.3.2 Identitat de Parseval

A continuació demostrem la identitat de Parseval:

Demostració del Teorema 5.2. Pel Lema 5.20, si $f \in L^2(\mathbb{T})$, aleshores

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \sum_{|n| \leq N} |\hat{f}(n)|^2.$$

La sèrie de la dreta és convergent ja que els termes són positius i està acotada per $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$. Obtenim que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} |\hat{f}(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \right) \stackrel{\text{T.5.1}}{=} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2.$$

\square

Projecte 5.24 (El problema isoperimètric). Demostra que el cercle és la figura amb un perímetre fixat que cobreix més superfície. \triangleleft

6 Un passeig per la transformada de Fourier discreta

En aquest capítol posem en solfa els coneixements adquirits en els capítols anteriors per desenvolupar la teoria de Fourier en un context de dimensió finita, molt més senzill.

En aquest cas, la *base trigonomètrica discreta* de \mathbb{C}^N és un conjunt particular de N vectors ortonormals, que formen una base automàticament. La *transformada de Fourier discreta* (DFT per les seves inicials en anglès) és la transformació lineal que assigna a cada vector $v \in \mathbb{C}^N$ els seus coeficients en la base trigonomètrica. Moltes de les propietats de les sèries de Fourier seguiran estant presents en aquest context, però ens estalviem els detalls i reptes dels espais infinit-dimensionals. Ja no hi ha ni integrals ni sumes infinites, sinó transformacions lineals d'espais de dimensió finita. Així, ens calen només eines bàsiques d'àlgebra lineal.

Per aplicacions pràctiques, aquesta teoria finita és la més indicada, ja que els ordinadors treballen amb vectors finits. La DFT d'un vector donat s'obté aplicant una certa matriu $N \times N$ a v , i la DFT inversa consisteix en aplicar la matriu invertida.

Un algorisme és bo si pot ser executat de manera eficient. Reduir el nombre d'operacions necessàries pot reduir dràsticament el temps de computació necessari per executar l'algorisme, incrementant-ne l'eficiència. Sorprenentment, la DFT es pot implementar amb un algorisme anomenat *transformada ràpida de Fourier* (FFT per les inicials en anglès) que té ordre $N \log_2 N$ operacions, mentre que el càlcul directe donaria ordre N^2 .

6.1 Sèries de Fourier i base de Fourier discreta

Tot seguit recordem els ingredients de la teoria de les sèries de Fourier.

6.1.1 Repàs de sèries de Fourier

- a) A cada funció integrable $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ li podem associar la successió $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. Aquests nombres coneguts com a *coeficients de Fourier* de f venen donats per la fórmula

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}.$$

- b) Les components de les sèries de Fourier són les *funcions trigonomètriques* $e_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ donades per

$$e_n(\theta) = e^{in\theta}, \quad \text{on } n \in \mathbb{Z} \text{ i } \theta \in \mathbb{T}.$$

6 Un passeig per la transformada de Fourier discreta

S'anomenen trigonomètriques en lloc d'exponencials per a emfasitzar la connexió amb sinus i cosinus donada per la fórmula d'Euler $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$. Així, el coeficient de Fourier n -èsim es pot escriure en termes del producte escalar de L^2

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{e_n(\theta)} d\theta =: \langle f, e_n \rangle.$$

- c) La sèrie de Fourier associada a f és la sèrie doblement infinita (sumada de $-\infty$ a ∞) formada sumant els productes dels n -èsims coeficients de Fourier amb les n -èsimes funcions trigonomètriques:

$$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n(\theta).$$

Usem el símbol \sim en lloc de la igualtat per remarcar que en un punt donat θ la sèrie podria no convergir i, de fet, pot no convergir enlloc.

- d) El conjunt $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de les funcions trigonomètriques constitueix una *base ortonormal* per l'espai $L^2(\mathbb{T})$ de funcions de quadrat integrable a \mathbb{T} . Aquí ortonormal es refereix al producte escalar de $L^2(\mathbb{T})$. En particular tota funció $f \in L^2(\mathbb{T})$ coincideix amb la seva sèrie de Fourier a $L^2(\mathbb{T})$ o equivalentment les sumes parcials de Fourier $S_N f$ convergeixen a f en la norma de $L^2(\mathbb{T})$, on $S_N f(\theta) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{in\theta}$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0.$$

També l'energia, o norma $L^2(\mathbb{T})$, coincideix amb la norma $\ell^2(\mathbb{Z})$ de la successió dels coeficients de Fourier, és a dir que es compleix la identitat de Parseval:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

És més, la suma parcial de Fourier $S_N f$ és la projecció ortogonal al subespai tancat $\mathcal{P}_N(\mathbb{T})$ dels polinomis trigonomètrics d'ordre menor o igual a N . En particular, $S_N f$ és la millor aproximació de f al subespai $\mathcal{P}_N(\mathbb{T})$ en la norma $L^2(\mathbb{T})$.

6.1.2 Base de Fourier discreta

A continuació presentem els resultats anàlegs en el context discret. Al llarg del capítol considerem un enter positiu N fixat, i escrivim $\omega := e^{2\pi i/N}$. Recordem que $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/(N) := \{0, 1, \dots, N-1\}$, on estem identificant els nombres enters amb les seves classes mòdul N . Recordem que el superíndex T indica transposada. Per exemple escrivim $v = [z_0, \dots, z_{N-1}]^T$ per denotar que v és un vector columna.

- a) A cada vector $v = [z_0, \dots, z_{N-1}]^T \in \mathbb{C}^N$ li podem associar un segon vector $\hat{v} = [a_0, \dots, a_{N-1}]^T \in \mathbb{C}^N$. El vector \hat{v} s'anomena *transformada discreta de Fourier* de v . Les coordenades de la transformada discreta de Fourier venen donades per la fórmula

$$a_n = \hat{v}(n) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} z_k \omega^{-kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} z_k e^{-\frac{2\pi i kn}{N}} \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}_N.$$

6 Un passeig per la transformada de Fourier discreta

- b) Les components de la DFT són les N funcions trigonomètriques discretes $e_n : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ donades per

$$e_n(k) := \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{kn} \quad \text{per } k \in \mathbb{Z}_N,$$

on $n \in \mathbb{Z}_N$. Així el coeficient n -èsim de Fourier de v es pot escriure en termes del producte escalar a \mathbb{C}^N com

$$a_n = \hat{v}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} z_k \overline{e_n(k)} =: \langle v, e_n \rangle.$$

- c) El vector original es pot determinar sabent la seva DFT. La coordenada k -èsima de v ve donada per

$$v(k) := z_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}(n) \omega^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \langle v, e_n \rangle e_n(k).$$

- d) El conjunt $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}_N}$ constitueix una *base ortonormal* per l'espai \mathbb{C}^N respecte al producte escalar estàndard, i es compleix el teorema de Pitàgores

$$\|v\|_{\ell^2(\mathbb{Z}_N)}^2 = \|v\|_{\mathbb{C}^N}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{v}(n)|^2.$$

En aquest sentit la norma d'un vector v a \mathbb{C}^N és la mateixa que la de la seva transformada discreta de Fourier $\hat{v}(n)$.

Notem que considerar els índexs a l'espai \mathbb{Z}_N té tot el sentit, ja que donats $n, j \in \mathbb{Z}$, aleshores, per exemple, tenim

$$\begin{aligned} \hat{v}(n + jN) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} z_k e^{-2\pi i k(n+jN)/N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} z_k e^{-2\pi i kn/N} e^{-2\pi i jk} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} z_k e^{-2\pi i kn/N} = \hat{v}(n). \end{aligned}$$

Ens hem referit a l'espai de Hilbert \mathbb{C}^N amb el producte escalar estàndard com l'espai $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ per emfasitzar la similitud amb l'espai de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$. De fet, $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es pot entendre també com un espai de funcions de quadrat sumable, sempre que identifiquem els vectors $v \in \mathbb{C}^N$ amb funcions $v : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ que a cada índex n li assignen el valor $v(n)$ de la seva coordenada corresponent. Aquesta identificació ja l'hem feta implícitament en la notació introduïda més amunt.

Al canviar la dimensió el nombre ω canvia, així com els vectors e_n . Seria més correcte, però farragós, escriure ω_N i e_n^N , però no ho farem per mantenir el paper net i ordenat, que no és un detall menor. És feina del lector tenir present aquesta subtilesa.

Tot seguit presentem un parell d'exemples.

6 Un passeig per la transformada de Fourier discreta

Exemple 6.1 (Base ortonormal de Fourier per \mathbb{C}^5). Sigui $N = 5$, és a dir que $\omega = e^{2\pi i/5}$. Aleshores tenim els vectors ortogonals dos a dos

$$f_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \omega^3 \\ \omega^4 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \\ \omega \\ \omega^3 \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^3 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad f_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^4 \\ \omega^3 \\ \omega^2 \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Dividint per la longitud $\sqrt{5}$ obtenim la base ortonormal $\{e_k\}_{k=0}^4$:

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{5}} f_k.$$

◇

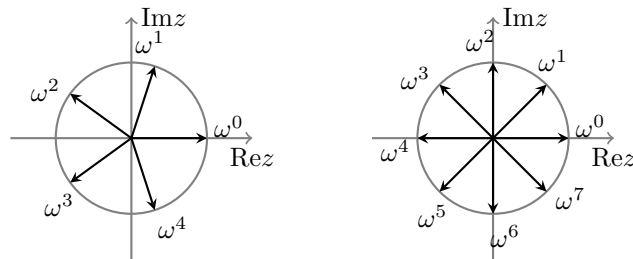


Figura 6.1: Arrels de la unitat per $N = 5$ i $N = 8$.

Exemple 6.2 (Base ortonormal de Fourier per \mathbb{C}^8). Sigui $N = 8$, és a dir que $\omega = e^{\pi i/4}$. Aleshores tenim els vectors ortogonals dos a dos

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \\ \omega^4 \\ \omega^5 \\ \omega^6 \\ \omega^7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \\ \omega^6 \\ \omega^0 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \\ \omega^6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^3 \\ \omega^6 \\ \omega^1 \\ \omega^4 \\ \omega^7 \\ \omega^2 \\ \omega^5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^4 \\ \omega^0 \\ \omega^4 \\ \omega^4 \\ \omega^0 \\ \omega^4 \\ \omega^4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^5 \\ \omega^2 \\ \omega^7 \\ \omega^4 \\ \omega^1 \\ \omega^6 \\ \omega^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \\ \omega^0 \\ \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^7 \\ \omega^6 \\ \omega^5 \\ \omega^4 \\ \omega^3 \\ \omega^2 \\ \omega^1 \end{bmatrix},$$

és a dir

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ i \\ \omega^3 \\ -1 \\ \omega^5 \\ -i \\ \omega^7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \\ 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^3 \\ -i \\ \omega \\ -1 \\ \omega^7 \\ i \\ \omega^5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^5 \\ i \\ \omega^7 \\ -1 \\ \omega \\ -i \\ \omega^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \\ 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^7 \\ -i \\ \omega^5 \\ -1 \\ \omega^3 \\ i \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Dividint per la longitud $\sqrt{8}$ obtenim la base ortonormal $\{e_k\}_{k=0}^7$:

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{5}} f_k.$$

Notem que en aquest cas que N no és primer, surten patrons que en el cas anterior no es donaven. \diamond

Exercici 6.3. Verifica que $\{e_k\}_{k=0}^{N-1}$ és una base ortonormal a \mathbb{C}^N .

Pista: Els nombres $\omega_k = e^{2\pi i k/N}$ són les N arrels de la unitat, és a dir, les solucions de $z^N = 1$. Com que $z^N - 1 = (z - 1)(z^{N-1} + \dots + z + 1)$, deduïm que per $k \neq 0$ $\omega_k^{N-1} + \dots + \omega_k + 1 = 0$. \triangleleft

Fem unes quantes observacions. En primer lloc, en el context discret trobem una simetria que en el cas de les sèries de Fourier no existia, i és que la transformada discreta de Fourier està en el mateix espai vectorial que el vector original. Als propers capítols desenvoluparem la transformada de Fourier, que transforma funcions de quadrat integrable $f \in L^2(\mathbb{R})$ en funcions de quadrat integrable. Ens trobem doncs que el senyal transformat és del mateix tipus que el senyal original. De fet es pot dir el mateix de la classe de Schwartz i de les distribucions temperades, com veurem.

En segon lloc, com dèiem, podem identificar els vectors com a funcions $v : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$. Amb aquesta notació, la DFT es pot escriure com

$$\hat{v}(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-2\pi i n m / N}.$$

En tercer lloc, no hi ha cap problema de convergència de sèries ja que tots els sumatoris són finits. Així, totes les subtileses dels capítols anteriors es poden aparcar.

En quart lloc, en el cas discret també tenim la identitat de Plancherel (o de Parseval)

$$\sum_{n=0}^{N-1} |v(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{v}(n)|^2,$$

és a dir

$$\|v\|_{\ell^2(\mathbb{Z}_N)}^2 = \|\hat{v}\|_{\ell^2(\mathbb{Z}_N)}^2.$$

Aquí la norma és la norma euclidiana induïda pel producte escalar complex, és a dir l'arrel quadrada de la suma dels quadrats dels mòduls de les coordenades del vector, que coincideix amb l'arrel del producte escalar de v pel seu conjugat.

Exercici 6.4. Demostra la identitat de Parseval discreta. \triangleleft

De la mateixa manera que passava amb els coeficients de Fourier, la identitat de Parseval ens revela que la DFT preserva l'energia del senyal original. Quan treballem transformades de Fourier a \mathbb{R} veurem que es compleix el mateix principi.

Observació 6.5. Alguns autors utilitzen la base ortogonal $\{f_0, \dots, f_{N-1}\}$ definida per $f_l = \sqrt{N}e_l$ en lloc de la base ortonormal $\{e_l\}_{l \in \mathbb{Z}_N}$. Això presenta l'avantatge computacional de no haver d'utilitzar una arrel quadrada cada vegada, cosa que alenteix els càlculs. Aleshores apareix un factor $\frac{1}{N}$ en la definició dels coeficients i a la identitat de Parseval (però no a la fórmula de reconstrucció). Podríem entendre que $\{f_l\}_{l \in \mathbb{Z}_N}$ és una base ortonormal pagant el preu d'utilitzar el producte escalar normalitzat

$$\langle v, w \rangle_{\text{nor}} := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) \overline{w(n)}.$$

Aquesta convenció és similar a la que hem agafat al tractar $L^2(\mathbb{T})$, on hem afegit el factor $\frac{1}{2\pi}$ en la definició de producte escalar. En aquests apunts farem ús del producte escalar estàndard en lloc del normalitzat. El lector queda advertit de la importància de comprovar sempre la normalització que s'està fent servir en tractar amb l'anàlisi de Fourier. •

6.2 Bases duals a \mathbb{C}^N

Abans de discutir la transformada discreta de Fourier amb més detall, anem a repassar alguns resultats d'àlgebra lineal sobre bases.

Definició 6.6. Una *base* és un conjunt de N vectors $\{v_1, \dots, v_N\}$ tal que cada vector $v \in \mathbb{C}^N$ pot ser escrit de manera unívoca com a combinació lineal dels elements de la base: podem trobar nombres $a_j \in \mathbb{C}^N$ tals que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_N v_N. \quad (6.1)$$

Notem que comptar de 1 a N o de 0 a $N-1$ és el mateix. En el cas de la DFT preferim usar normalment la segona notació perquè se simplifiquen algunes fórmules.

Sigui B la matriu $N \times N$ que té per columna j -èsima el vector j -èsim. Escrivim

$$B = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_N \\ | & & | \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Amb aquesta notació podem representar la combinació lineal (6.1) com

$$v = Ba, \quad \text{on } a = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T.$$

Notem que a és un vector columna ja que hem usat la T per denotar transposició.

Teorema 6.7. *Els següents enunciats són equivalents:*

1. Un conjunt de N vectors $\{v_j\}_{j=1}^N$ és una base de \mathbb{C}^N .
2. Els vectors $\{v_j\}_{j=1}^N$ són linealment independents. És a dir que si $Ba = 0$ aleshores $a = 0$.

3. La matriu B definida a (6.2) és invertible. Per tant podem trobar els coeficients $a_j \in \mathbb{C}^N$ mitjançant la fórmula $a = B^{-1}v$.

Donda una base $\{v_j\}_{j=1}^N$ de \mathbb{C}^N definim la matriu invertible B amb l'equació (6.2) i denotem w_i el conjugat complex de la fila i -èsima de la matriu B^{-1} , és a dir que

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} - & \overline{w_1} & - \\ & \vdots & \\ - & \overline{w_N} & - \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Les línies horitzontals serveixen per emfasitzar que w_j són vectors i no escalars. Obtenim doncs

$$B^{-1}v = \begin{bmatrix} - & \overline{w_1} & - \\ & \vdots & \\ - & \overline{w_N} & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(1) \\ \vdots \\ v(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, w_N \rangle \end{bmatrix}$$

quan $v = [v(1), \dots, v(N)]^T$.

Exercici 6.8. Verifica la fórmula anterior. ◁

Com hem vist abans, els coeficients de v en la base $\{v_i\}_{i=1}^N$ són exactament les coordenades del vector $B^{-1}v$. Per tant, no només estan unívocament determinats, sinó que tenim un algorisme per trobar-los:

$$a_j = \langle v, w_j \rangle.$$

El conjunt de vectors w_j s'anomena la *base dual* de $\{v_i\}_{i=1}^N$. Per tal de calcular els coeficients d'un vector v en la base original n'hi ha prou amb calcular-ne els productes escalars amb els elements de la base dual.

Exercici 6.9. Demuestra que qualsevol base $\{v_i\}_{i=1}^N$ amb dual $\{w_i\}_{i=1}^N$ compleix la *condició d'ortonormalitat*

$$\langle v_k, w_j \rangle = \delta_{k,j}.$$

A més a més, demostra que $v = \sum_{j=1}^N \langle v, w_j \rangle v_j = \sum_{j=1}^N \langle v, v_j \rangle w_j$. ◁

En particular, si la base és ortonormal, aleshores la base dual coincideix amb la base original. Equivalentment, $B^{-1} = \overline{B^T}$.

Definició 6.10. Una matriu $N \times N$ que té per columnes una base ortonormal s'anomena *matriu unitària*. •

Les matrius unitàries sempre són invertibles. La inversa d'una matriu unitària U , com hem vist, coincideix amb la conjugada de la transposada d' U , és a dir

$$U^{-1} = \overline{U^T}.$$

Exercici 6.11. Sigui U una matriu unitària. Demuestra que U conserva el producte escalar de \mathbb{C}^N i la norma $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. En particular, U és una isometria. ◁

6.3 Transformada de Fourier discreta i la seva inversa

No és massa complicat de veure que l'aplicació que transforma v en \hat{v} és lineal. L'anomenem *transformada discreta de Fourier*.

Definició 6.12. La *matriu de Fourier* F_N és la matriu d'entrades

$$F_N(m, n) = e^{2\pi i mn/N} \quad \text{per } m, n \in \mathbb{Z}_N.$$

Les columnes de F_N s'anomenen *vectors ortogonals de Fourier* (que no ortonormals) i els denotem com $\{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$. •

La matriu de Fourier és simètrica, en el sentit que $F_N^T = F_N$.

Exemple 6.13. Heus aquí la matriu de Fourier per $N = 8$:

$$F_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & i & \omega^3 & -1 & \omega^5 & -i & \omega^7 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & \omega^3 & -i & \omega & -1 & \omega^7 & i & \omega^5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \omega^5 & i & \omega^7 & -1 & \omega & -i & \omega^3 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & \omega^7 & -i & \omega^5 & -1 & \omega^3 & i & \omega \end{bmatrix}.$$

◇

La DFT està completament determinada per la matriu de Fourier. Concretament,

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{N}} \overline{F_N} v.$$

Notem que la matriu $\frac{1}{\sqrt{N}} \overline{F_N}$ és unitària, ja que les seves columnes formen una base ortonormal. Per tant

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \overline{F_N} \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} F_N^T = \frac{1}{\sqrt{N}} F_N,$$

i podem recuperar v sabent \hat{v} de la següent manera:

$$v = \frac{1}{\sqrt{N}} F_N \hat{v}.$$

Així doncs, en el context de dimensió finita, la transformada de Fourier és un canvi de base ortogonal de la base estàndard a la base de Fourier!

Exercici 6.14. Demuestra que $\frac{1}{N} F_N \overline{F_N} = \frac{1}{N} \overline{F_N} F_N = I_N$, on I_N denota la identitat en les matrius $N \times N$. ◁

Exercici 6.15. Demuestra que donats $v, w \in \mathbb{C}^N$, aleshores $\langle \hat{v}, \hat{w} \rangle = \langle v, w \rangle$. Recorda que, en notació matricial, $\langle v, w \rangle := v^T \overline{w}$. ◁

Exercici 6.16. Definim la convolució de $v, w \in \mathbb{C}^N$ com

$$v * w(n) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v(k)w(n-k).$$

Demostra que $\widehat{v * w}(k) = \widehat{v}(k)\widehat{w}(k)$. Notem que els índexs estan definits com a classes de \mathbb{Z}_N i, per tant, estem usant la convenció $v(-n) := v(N-n)$ quan $0 \leq n < N$. \triangleleft

A l'hora de computar el nombre d'operacions significatives que implica un algorisme, les addicions, les permutacions i les multiplicacions per 1 o per 0 no compten (però les multiplicacions per -1 sí). Com que les matrius F_N i $\overline{F_N}$ són matrius sense zeros (i amb relativament pocs uns), multiplicar un vector per una d'aquestes matrius representa fer un total d'aproximadament N^2 operacions significatives. Diem que l'algorisme té ordre N^2 . No obstant, es pot fer el mateix càlcul d'una manera molt més eficient: amb l'algorisme FFT.

6.4 La transformada ràpida de Fourier (FFT)

Els anys seixanta de la dècada passada (mentre la humanitat arribava a la lluna i a Espanya la dictadura començava a donar tímides mostres d'obertura, com la creació de les universitats autònomes de Madrid i Barcelona) Cooley¹ i Tukey² van idear l'algorisme *transformada ràpida de Fourier* (FFT per les inicials de l'anglès *Fast Fourier Transform*). Aquest algorisme fa ús d'un mecanisme enginyós de factorització de matrius explotant l'estructura particular de la matriu de Fourier que redueix el nombre de multiplicacions necessàries de N^2 a $N \log_2 N$. Aquesta millora va revolucionar el camp del processament digital del senyal. De fet el seu article és un dels articles matemàtics més citats de la segona meitat del segle XX.

És interessant observar que a principis del segle XIX Gauss ja havia trobat un algorisme molt similar per calcular els coeficients dels polinomis trigonomètrics. En aquella època ni les matrius ni el processament digital del senyal es podien anticipar...

Matemàticament, la FFT es basa en factoritzar F_T com a producte de matrius esparses, és a dir matrius que tenen molts zeros. Il·lustrem aquest principi en dimensió $N = 4$:

Exemple 6.17. El conjugat de $\overline{F_4}$ es pot escriure com a producte de matrius esparses de la següent manera:

$$\overline{F_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: DBS.$$

Observem que la primera matriu, D , està formada per quatre matrius diagonals 2×2 , dues de les quals són la identitat. La segona matriu, B , està formada per dues matrius

¹James Cooley, 1926–2016

²John Wilder Tukey, 1915–2000

6 Un passeig per la transformada de Fourier discreta

2×2 que són, de fet, còpies de $\overline{F_2}$. La tercera matriu, S , és una matriu de permutació: al multiplicar SA per una matriu quadrada A , en resulta una matriu \tilde{A} amb la segona fila i la tercera permutades. \diamond

La idea de la FFT queda completament dibuixada amb l'exemple anterior. Es tracta d'un mètode recursiu per obtenir F_N com a producte d'una matriu B_1^N amb dues còpies de $F_{N/2}$ per una matriu D_1^N formada per quatre blocs diagonals i una tercera matriu S_1^N de permutacions:

$$\overline{F_N} = D_1^N B_1^N S_1^N.$$

Així, en aquest pas s'hauran de fer N productes (els corresponents a la matriu formada per blocs diagonals). Aplicant recursivament aquesta factorització, en cas que N sigui una potència 2^k de dos, obtindrem un total de k matrius de blocs diagonals on només N coordenades seran diferents de 0 o 1, i la resta seran matrius de permutació (que es poden ajuntar per crear una única matriu de permutació). Així, en lloc de multiplicar per $\overline{F_N}$, multiplicarem pels seus factors d'un en un, resultant un total de $kN = N \log_2 N$ multiplicacions. Tot seguit donem més detalls d'aquest argument recursiu. Notem que si N no és una potència de 2, aleshores podem afegir les coordenades necessàries als vectors per arribar a aquesta dimensió, omplint de zeros les coordenades creades. Així doncs suposarem sempre que N és una potència de 2.

Per donar sentit a la reducció anterior, comencem per reescriure

$$\hat{v}(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{\frac{-2\pi imn}{N}} \quad (6.4)$$

com a combinació lineal de dues sumes A_m i B_m amb la mateixa estructura que la suma inicial. Per fer-ho, separem els termes parells i imparells:

$$\begin{aligned} \hat{v}(m) &\stackrel{(6.4)}{=} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N/2-1} v(2n) e^{\frac{-2\pi im(2n)}{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N/2-1} v(2n+1) e^{\frac{-2\pi im(2n+1)}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \frac{v(2n)}{\sqrt{N}} e^{\frac{-2\pi imn}{N/2}} + e^{\frac{-2\pi im}{N}} \sum_{n=0}^{N/2-1} \frac{v(2n+1)}{\sqrt{N}} e^{\frac{-2\pi imn}{N/2}} =: A_m + e^{\frac{-\pi im}{N/2}} B_m. \end{aligned} \quad (6.5)$$

El punt clau és adonar-se que $\hat{v}(m)$ i $\hat{v}(m + N/2)$ presenten una certa simetria en termes de A_m i B_m :

$$\begin{aligned} \hat{v}\left(m + \frac{N}{2}\right) &\stackrel{(6.4)}{=} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N/2-1} v(2n) e^{\frac{-2\pi i(m+N/2)(2n)}{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N/2-1} v(2n+1) e^{\frac{-2\pi i(m+N/2)(2n+1)}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} e^{-2\pi in} \frac{v(2n)}{\sqrt{N}} e^{\frac{-2\pi imn}{N/2}} + e^{\frac{-2\pi im}{N}} \sum_{n=0}^{N/2-1} e^{-2\pi i(n+1/2)} \frac{v(2n+1)}{\sqrt{N}} e^{\frac{-2\pi imn}{N/2}} \\ &\stackrel{(6.5)}{=} A_m - e^{\frac{-\pi im}{N/2}} B_m, \end{aligned} \quad (6.6)$$

on hem usat que $e^{-2\pi in} = 1$ i $e^{-2\pi i(n+1/2)} = e^{-\pi i} = -1$ per tot $n \in \mathbb{N}$.

Així hem reduït a la meitat el nombre d'operacions necessàries, ja que calculant A_m i B_m obtenim dos termes de la DFT en lloc d'un. Passant al llenguatge de matrius, el que hem fet és primer reordenar les coordenades del vector posant primer les parelles i després les senars. Això es correspon a multiplicar per una matriu

$$S_1^N := \begin{bmatrix} \overline{Parell_{N/2}} \\ Senar_{N/2}, \end{bmatrix}$$

on \overline{Parell}_M és la matriu $M \times 2M$ corresponent a eliminar les files senars a la identitat i $Senar_M$ és la matriu $M \times 2M$ corresponent a eliminar les files parelles a la identitat. Tot seguit notem que A_m correspon a la transformada de Fourier de dimensió $N/2$ aplicada a les coordenades parelles i B_m correspon a les senars. Així doncs obtenim una segona matriu

$$B_1^N := \begin{bmatrix} \overline{F_{N/2}} & 0_{N/2} \\ 0_{N/2} & F_{N/2} \end{bmatrix},$$

on 0_M és una matriu nul·la $M \times M$. Finalment, el resultat A_m de les coordenades senars se suma tant a les posicions $0 \leq m < N/2$ (freqüències positives) com a les $N/2 \leq m < N$ (freqüències negatives, si pensem en \mathbb{Z}_N !!!), mentre que el B_m cal multiplicar-lo per $e^{\frac{-\pi im}{N/2}}$ en les freqüències positives i per $-e^{\frac{-\pi im}{N/2}}$ en les negatives. Això es correspon a multiplicar per la matriu

$$D_1^N := \begin{bmatrix} I_{N/2} & D_{N/2} \\ I_{N/2} & -D_{N/2}, \end{bmatrix}$$

on I_M és la matriu identitat $M \times M$ i D_M és la matriu diagonal $M \times M$ que pren coordenades $D_M(m, m) = e^{-\pi im/M}$. Dit d'una altra manera, els termes de la diagonal són les arrels M -èsimes de la unitat.

Exercici 6.18. Assegura't que les equacions (6.5) i (6.6) es tradueixen en

$$\overline{F}_N = D_1^N B_1^N S_1^N. \quad (6.7)$$

◁

Exercici 6.19. Escribeu la descomposició de \overline{F}_8 com a producte de matrius

$$F_8 = D_1^N B_1^N S_1^N,$$

fent servir (6.7). Aplicant (6.7) de manera recursiva, mira d'aconseguir una descomposició

$$F_8 = D_1^8 D_2^8 B_2^8 S_2^8 S_1^8,$$

on

$$S_2^N := \begin{bmatrix} S_1^{N/2} & 0_{N/2} \\ 0_{N/2} & S_2^{N/2} \end{bmatrix},$$

$$B_2^N := \begin{bmatrix} B_1^{N/2} & 0_{N/2} \\ 0_{N/2} & B_1^{N/2} \end{bmatrix},$$

$$D_2^N := \begin{bmatrix} D_1^{N/2} & 0_{N/2} \\ 0_{N/2} & D_1^{N/2} \end{bmatrix}.$$

◁

Projecte 6.20 (Algorisme FFT). Crea un algorisme FFT amb el llenguatge de programació que prefereixis. Utilitza'l per multiplicar dos polinomis.

◁

Projecte 6.21 (Dibuixar amb epicicles). Crea una animació amb *epicicles* per generar una il·lustració.

◁

Projecte 6.22 (Espectrograma). Crea una interfície amb Processing.org o algun programari similar per generar un espectrograma.

◁

Projecte 6.23 (Grups abelians finits). Explica l'anàlisi de Fourier en grups abelians finits.

◁

7 La transformada de Fourier com a integral

La idea clau de l'anàlisi harmònica consisteix en expressar una funció o senyal com a superposició de funcions més simples i ben conegudes. Hem vist ja com dur a terme aquesta idea en el cas de funcions definides a \mathbb{T} i en el cas de vectors de dimensió finita. Tot seguit desenvoluparem el tercer i últim bloc del curs, on parlem de l'anàlisi de Fourier per funcions de variable real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Es tracta de la *transformada de Fourier*, que expressa funcions no periòdiques com a integral de funcions trigonomètriques.

Definirem la transformada de Fourier a l'espai $L^1(\mathbb{R})$, i n'explorarem la teoria fins que ens trobem amb les limitacions que té en aquest espai.

Al següent capítol canviarem el focus d'atenció cap a un context favorable, on totes les funcions tenen un comportament exemplar, una mena de paradís. Definirem la classe de Schwartz de funcions suaus amb decaïment *superpolinomial*. Farem també l'extensió a $L^2(\mathbb{R})$ i fins i tot a una classe de funcions generalitzades anomenades *distribucions temperades*, i estudiarem diverses propietats de la transformada de Fourier en aquests espais.

7.1 De les sèries de Fourier a les integrals de Fourier

Com hem vist, les sèries de Fourier tradicionals expressen funcions periòdiques suficientment regulars com a suma d'harmònics purs:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}. \quad (7.1)$$

Notem que aquesta expressió és vàlida per funcions de període 1, en lloc de les funcions de període 2π que hem estudiat majoritàriament als primers capítols. Escrits així, els coeficients de Fourier són més semblants a la transformada de Fourier tal i com la farem servir en aquest capítol.

A principis del segle XIX, les matemàtiques es van revolucionar amb l'afirmació de Fourier que "tota funció periòdica" es pot expressar com una d'aquestes sèries, on el coeficient (o amplitud) de freqüència n es calcula amb la fórmula

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle := \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}.$$

Van caldre 150 anys per entendre exactament què significava exactament aquesta afirmació. Parlem de l'article de Lennart Carleson on es demostra que les funcions de quadrat integrable a $[0, 1]$ tenen sèrie de Fourier convergent g.p.t. arreu. Com a conseqüència, les funcions contínues també presenten aquest comportament (cosa que no era sabuda abans de l'article mencionat).

7 La transformada de Fourier com a integral

Al Capítol 5 hem establert que les funcions trigonomètriques $\{e^{2\pi inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ formen una base ortonormal per $L^2([0, 1])$. És a dir que la identitat (7.1) té sentit com a sèrie en $L^2([0, 1])$.

També hem discutit la transformada discreta de Fourier (DFT) en espais vectorials de dimensió finita \mathbb{C}^N . En aquest cas, els vectors trigonomètrics $\{e_n\}_{n=0}^{N-1}$ amb coordenada k -èsima $e_n(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi ink/N}$ formen una base ortonormal de \mathbb{C}^N . Per tant, la DFT inversa ve donada per

$$v(k) = \langle \hat{v}, \bar{e}_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}(n) e^{2\pi ink/N},$$

i el coeficient enèsim de Fourier ve donat pel producte escalar

$$\hat{v}(n) = \langle v, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) e^{-2\pi ikn/N}.$$

En el cas no-periòdic, definim la transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ com

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx. \quad (7.2)$$

La transformada inversa de Fourier serà ara

$$\check{g}(x) := \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi. \quad (7.3)$$

Hi ha molt a discutir sobre quines funcions satisfan (i en quin sentit) la següent fórmula d'inversió de Fourier:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi, \quad (7.4)$$

o més sintèticament $f = \check{\hat{f}}$.

Heurísticament hom pot arribar a les fórmules (7.2) i (7.4) calculant les sèries de Fourier en intervals cada vegada més grans, fins a cobrir tota la recta real. Vegem-ho.

Per funcions $f : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{C}$ suficientment bones, tenim que

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_L(n) e^{2\pi inx/L} \quad \text{per } x \in [-L/2, L/2], \quad (7.5)$$

on el L -coeficient de Fourier enèsim ve donat per la identitat

$$a_L(n) := \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(y) e^{-2\pi iny/L} dy.$$

Si prenem $\xi_n := \frac{n}{L}$, aleshores podem reescriure la identitat (7.5) com

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_L(\xi_n) \frac{1}{L} \quad \text{per } x \in [-L/2, L/2], \quad (7.6)$$

7 La transformada de Fourier com a integral

on $F_L(\xi) := e^{2\pi i \xi x} \int_{-L/2}^{L/2} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy$.

Aquesta expressió recupera $f(x)$ per $x \in [-L/2, L/2]$ i té la fila d'una suma de Riemann per la integral impròpia $\int_{-\infty}^{\infty} F_L(\xi) d\xi$, llevat que el paràmetre L apareix també a la funció a integrar. Ara bé, si f és de suport compacte, aleshores per L prou gran f estarà suportada a $[-L/2, L/2]$ i $F_L = F_\infty$ no dependrà ja de L . Obtenim en aquest cas que

$$F_\infty(\xi) = e^{2\pi i \xi x} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy = e^{2\pi i \xi x} \widehat{f}(\xi),$$

on \widehat{f} és la transformada de Fourier de f tal i com l'hem definida a (7.2). Per tant, heurísticament, esperem que quan $L \rightarrow \infty$ la suma de Riemann (7.6) convergeixi per $x \in \mathbb{R}$ a

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_\infty(\xi_n) \frac{1}{L} \sim \int_{-\infty}^{\infty} F_\infty(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Aquest argument es podria arreglar una mica per fer-lo rigorós sota certes condicions, però no ho farem ja que només ens interessava entendre la intuïció darrera com una sèrie de Fourier es converteix en una integral quan l'interval del domini de la funció “esdevé infinit”. Fem-ne una descripció de broc gros: *Al calcular el coeficient de Fourier $a_L(n)$, el que abans anomenàvem freqüència enèsima en realitat correspon a la freqüència n/L . Al prendre intervals cada vegada més grans, els termes de freqüència més baixa, $n = 1$, corresponen a la freqüència $1/L$, així que prenem freqüències cada vegada més baixes (és a dir funcions trigonomètriques amb període cada cop més llarg, concretament L) i, de fet, prenem infinites freqüències separades pel pas $1/L$. D'alguna manera, al fer gran l'interval necessitem més i més resolució a l'espai de freqüències. Quan l'interval esdevé infinit, hem necessitat resolució infinita.*

7.2 La transformada de Fourier de funcions integrables

Definició 7.1. La transformada de Fourier d'una funció integrable f es defineix per $\xi \in \mathbb{R}$ com

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx. \quad (7.7)$$

•

Exercici 7.2. Aquesta última igualtat és certa sempre que $f \in L^1(\mathbb{R})$ (pel teorema de convergència dominada). ◁

Tot seguit demostrarem el lema de Riemann-Lebesgue a $L^1(\mathbb{R})$, comprovant que la transformada d'una funció integrable decau a l'infinit.

Lema 7.3 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, aleshores*

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

7 La transformada de Fourier com a integral

Demostració. Igual que vam fer amb les funcions periòdiques, multiplicant i dividint per -1 introduïm una translació a l'integrand que ens permet fer un canvi de variable per reescriure la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx = -e^{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi\left(x-\frac{1}{2\xi}\right)} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(y + \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2\pi i\xi y} dy.\end{aligned}$$

Fent la mitjana entre aquestes dues expressions, obtenim

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) - f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right) \right) e^{-2\pi i\xi x} dx.$$

Prenent valors absoluts obtenim

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right) \right| dx \leq \frac{1}{2} \omega_1 f\left(\frac{1}{2|\xi|}\right).$$

Per l'exercici 2.52 obtenim que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0.$$

□

Exercici 7.4. Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestra que $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. És a dir, demostra que la transformada d'una funció integrable és contínua. ◁

Exercici 7.5. Demuestra que

$$\widehat{\chi_{(-1,1)}}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

◁

De l'exercici anterior en deduïm que la transformada de Fourier d'una funció integrable pot caure fora de $L^1(\mathbb{R})$ i, per tant, \widehat{f} no està definida a priori. Per aquest motiu ens cal treballar en una classe de funcions més bona, ho farem a la seccions 7.5 i 8.1.

Exemple 7.6 (La campana de Gauss). La campana de Gauss

$$G(x) := e^{-\pi x^2}.$$

juga un rol fonamental en anàlisi de Fourier, probabilitats i física. Té la propietat poc comuna que

$$\widehat{G}(\xi) = G(\xi). \tag{7.8}$$

Vegeu l'exercici 7.9. ◊

7.3 El diccionari temps-freqüència

La transformada de Fourier interactua molt bé amb un seguit d'operacions. En particular, la derivació esdevé multiplicació per polinomis i viceversa, la qual cosa explica la importància fonamental de l'anàlisi de Fourier en la resolució d'equacions en derivades parcials. Les convolucions es converteixen en productes i viceversa, cosa que il·lustra la importància de les tècniques aquí descrites en processament del senyal, per exemple en el filtrat de sons. En aquesta secció presentem un diccionari temps-freqüència que llista totes aquestes interaccions.

La transformada de Fourier és *lineal*, és a dir que per tot parell de funcions $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ i tot parell de nombres $a, b \in \mathbb{C}$ tenim que $\widehat{af + bg}(\xi) = a\widehat{f} + b\widehat{g}$.

La transformada de Fourier també interactua amb translacions, modulacions, dilatacions i simetria central de manera prou senzilla. A la Taula 7.1 llistem aquestes propietats i algunes més, en el que anomenem *diccionari temps-freqüència*. Aquí el terme temps es refereix a la variable x de f , ja que en el cas del so, per exemple, la variable x representaria el temps, i la variable ξ de \widehat{f} representaria les freqüències presents al senyal. Les operacions que fem a f diem que les fem al *domini temporal* o al *cantó del temps*, mentre que les operacions que fem a \widehat{f} les fem al *domini de les freqüències*, al *cantó de les freqüències* o, tot sovint, al *cantó de Fourier*.

Llegim per exemple la tercera fila de la taula. Modulació significa multiplicar pel factor $e^{2\pi ihx}$ i s'escriu $M_h f(x) = e^{2\pi ihx} f(x)$. Aquesta operació provoca un desplaçament o translació al cantó de les freqüències que es sintetitza com $\widehat{M_h f}(\xi) = \widehat{f}(\xi - h) =: \tau_h \widehat{f}(\xi)$. És a dir que fer una modulació al cantó del temps correspon a fer una translació al cantó de les freqüències.

Només les propietats g), h) i j) requereixen alguna hipòtesi suplementària a $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, vegeu els exercicis 7.7, 7.8, 7.13 i 7.25.

La propietat a) ens resumeix la linealitat de la transformada de Fourier. Les propietats b)–e) ens parlen de la interacció de la transformada de Fourier amb el grup subjacent, en aquest cas $(\mathbb{R}, +)$, en el cas de les sèries de Fourier seria $(\mathbb{T}, +)$ en el domini temporal i $(\mathbb{Z}, +)$ en el cantó de Fourier i en el cas de la DFT seria $(\mathbb{Z}_N, +)$ en ambdós casos. Les propietats f)–j) parlen de la interacció de Fourier amb la conjugació, la relació entre derivar i multiplicar per un polinomi i la relació entre la convolució i el producte.

Les demostracions de la majoria de les propietats es deixen com a exercici. Funcionen de manera molt similar a les demostracions de les propietats de la Taula 4.1.

Exercici 7.7. Comprova les propietats a)–f) per $f \in L^1$, i comprova g) per $f \in L^1(\mathbb{R})$ derivable tal que $f' \in L^1(\mathbb{R})$ amb $f' \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. ◁

Les propietats de la convolució i) i j) les deixem per la Secció 7.4. Demostrem tot seguit la propietat h): si multipliquem una funció per $2\pi ix$ i tot seguit en calculem la transformada de Fourier, obtenim la derivada de la transformada de Fourier original. Aquesta propietat no té cap analòga al cas de sèries de Fourier i per això la demostrem aquí.

Demostració de la propietat h). Suposem que $f \in L^\infty$ i $x^3 f(x) \in L^1(\mathbb{R})$.

7 La transformada de Fourier com a integral

	Temps $x \in \mathbb{R}$	Freqüència $\xi \in \mathbb{R}$
a)	Combinació lineal $af + bg$	Combinació lineal $\widehat{af + bg}(\xi) = a\widehat{f} + b\widehat{g}$
b)	Translació $\tau_h f(x) := f(x - h)$	Modulació $\widehat{\tau_h f}(\xi) = M_{-h}\widehat{f}(\xi)$
c)	Modulació $M_h f(x) := e^{2\pi i h x} f(x)$	Translació $\widehat{M_h f}(\xi) = \tau_h \widehat{f}(\xi)$
d)	Dilatació amb $s > 0$ $D_s f(x) := sf(sx)$	Dilatació inversa $\widehat{D_s f}(\xi) = sD_{s^{-1}}\widehat{f}(\xi)$
e)	Simetria central $\tilde{f}(x) := f(-x)$	Simetria central $\widehat{\tilde{f}}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$
f)	Conjugació $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$	Conjugació reflectida $\widehat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)} = \widetilde{\widehat{f}}(\xi)$
g)	Derivada $f'(x) := \frac{d}{dx}f(x)$	Producte per un polinomi $\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi)$
h)	Producte per un polinomi $-2\pi i x f(x)$	Derivada $\widehat{-2\pi i \cdot f(\cdot)}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$
i)	Convolució $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) dy$	Producte $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$
j)	Producte $(fg)(x) := f(x)g(x)$	Convolució $\widehat{fg}(\xi) = \widehat{f} * \widehat{g}(\xi)$

Taulla 7.1: Diccionari temps-freqüència a $L^1(\mathbb{R})$.

Utilitzant la definició de la transformada de Fourier tenim

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)e^{-2\pi i(\xi+h)x} - f(x)e^{-2\pi i\xi x}}{h} dx.$$

Intercanviant els límits, obtindríem immediadament la propietat h), però cal justificar bé els passos.

Per definició també tenim

$$\widehat{-2\pi i \cdot f(\cdot)}(\xi) = - \int_{\mathbb{R}} 2\pi i x f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Volem veure doncs que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)e^{-2\pi i(\xi+h)x} - f(x)e^{-2\pi i\xi x}}{h} dx = - \int_{\mathbb{R}} 2\pi i x f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

N'estudiarem doncs la diferència.

Cal veure que el següent límit és zero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} \left(\frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{h} + 2\pi i x \right) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \textcircled{1}_h + \lim_{h \rightarrow 0} \textcircled{2}_h.$$

Donat $M \gg 0$ (és a dir M molt gran), separem la integral en la part acotada $\textcircled{1}_h$ i la cua $\textcircled{2}_h$ i prenem valors absoluts dins de la integral. La part acotada és

$$\textcircled{1}_h := \int_{|x| < M} |f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{h} + 2\pi i x \right| dx.$$

Per $|h| < h_0 = \frac{\varepsilon}{C 4M^3 \|f\|_{\infty}}$, tenim que si $|x| < M$ aleshores

$$\left| \frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{h} + 2\pi i x \right| = \left| \frac{-2\pi i h x + O(|hx|^2)}{h} + 2\pi i x \right| \stackrel{(7.9)}{\leq} \frac{\varepsilon}{4M \|f\|_{\infty}},$$

ja que

$$O(|hx|^2) \leq CM^2 h^2 \leq CM^2 |h| h_0 = \frac{\varepsilon |h|}{4M \|f\|_{\infty}}. \quad (7.9)$$

Així doncs,

$$\textcircled{1}_h \leq \frac{\varepsilon}{4M \|f\|_{\infty}} \int_{|x| < M} |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per la cua prenem $|x^3 f(x)| \leq C$ com a hipòtesi, de manera que

$$\textcircled{2}_h := 2\pi \lim_{h \rightarrow 0} \int_{|x| > M} |x f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{2\pi h x} + i \right| dx \leq 2\pi \int_{|x| > M} \frac{C}{|x|^2} (1 + 1) dx \leq \frac{C}{M}.$$

Aquí hem fet servir que per $\theta \in \mathbb{R}$ tenim $|e^{i\theta} - 1| = |\cos \theta + i \sin \theta - 1| \leq |\theta|$. Prenent M prou gran tenim que

$$\textcircled{2}_h \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

A la demostració anterior hem suposat $f \in L^{\infty}$ i $x^3 f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, però de fet és suficient amb $f \in L^1(\mathbb{R})$ i $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, que de fet són condicions necessàries perquè les transformades de Fourier estiguin ben definides com a integrals:

Exercici 7.8. Demostra que si $\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^k |f(x)| dx < \infty$, aleshores \hat{f} és k vegades diferenciable, i

$$\frac{d^k}{d\xi^k} \hat{f}(\xi) = ((-2\pi i \cdot)^k f(\cdot))^{\wedge}(\xi).$$

<

Exercici 7.9. Sigui $\alpha > 0$. Calcula la transformada de Fourier de la funció $f_\alpha(x) := e^{-\pi\alpha|x|^2}$.

Pista: pots utilitzar que tant $G(x) := e^{-\pi x^2}$ com \widehat{G} satisfan l'equació diferencial ordinària $f'(x) = -2\pi x f(x)$, amb condicions inicials $f(0) = 1$. ¹ ◁

Exercici 7.10. Calcula la transformada de Fourier de la funció $g_\alpha(x) := e^{-2\pi\alpha|x|}$, amb $\alpha > 0$.² ◁

Exercici 7.11. Donat $a > 0$, definim $\Gamma(a) := \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$. Donat $\alpha > 1$, i $x \in \mathbb{R}$ definim

$$F_\alpha(\xi) := \frac{1}{(1 + 4\pi^2\xi^2)^{\alpha/2}},$$

que és la transformada de Fourier del potencial de Bessel $G_\alpha(x) := \widetilde{F}_\alpha(x)$, almenys quan $\alpha > 1$, garantint que F_α és integrable.

Dedueix que

$$F_\alpha(\xi) = \frac{1}{(4\pi)^{\alpha/2} \Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{4\pi}(1+4\pi\xi^2)} x^{\alpha/2-1} dx.$$

Prova que

$$G_\alpha(x) = \frac{(4\pi)^{-1}}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-t-\frac{x^2}{4t}} t^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{dt}{t}.$$

Pista: demostra que $\Gamma(a) = t^a \int_0^\infty e^{-tx} x^{a-1} dx$ per $t > 0$. ◁

7.3.1 Convolució de funcions integrables

Definició 7.12. La convolució $f * g$ de dues funcions $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ es defineix com

$$f * g(x) := \int f(x-y)g(y) dy. \tag{7.10}$$

Aquesta convolució està ben definida gairebé per tot x , i és també integrable per la desigualtat de Young (vegeu el lema 4.5). Amb un canvi de variables, veiem que $f * g = g * f$. •

La convolució és fonamental en anàlisi harmònica. En els capítols sobre sèries de Fourier ja vam veure com definir la convolució de dues funcions periòdiques. També vam parlar de la convolució de vectors en el capítol anterior. A la secció 7.4 parlarem del cas de les funcions integrables i a la secció 8.1.1 aprofundirem en la convolució de funcions de la classe de Schwartz.

Tal com vam estudiar al cas de la circumferència unitat \mathbb{T} , la convolució és una operació *suavitant*, vegeu l'exercici 8.9. El resultat conserva la millor propietat de derivabilitat d'entre les dues funcions d'entrada.

¹ $\widehat{f}_\alpha(\xi) = \alpha^{-1/2} e^{-\pi \frac{\xi^2}{\alpha}}$.
² $\widehat{g}_\alpha(\xi) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \xi^2)}$

Les convolucions donen lloc a operadors lineals acotats invariants per translacions i als multiplicadors de Fourier. Aquests operadors i les seves generalitzacions són objecte d'un estudi intens i donen lloc a branques de l'anàlisi harmònica molt actives a dia d'avui.

Exercici 7.13. Demuestra la propietat i) de la taula 7.1: si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, aleshores $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$. ◀

7.4 Aproximació de la identitat

Comentari 7.14. La convolució es pot entendre com una operació binària a les funcions integrables. Malhauradament, manca un element neutre per la convolució. Això és fàcil de veure un cop hem demostrat la propietat i) de la taula 7.1: si existís una funció $\delta_0 \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $f * \delta_0 = f$ per tota $f \in L^1(\mathbb{R})$, aleshores passant al cantó de les freqüències tenim $\widehat{f} \widehat{\delta_0} = \widehat{f}$. Com que això seria així per tota funció f , en particular seria cert per la campana de Gauss G , la transformada de la qual és ella mateixa per (7.8) i no s'anul·la enlloc. Per tant, la identitat $\widehat{G} \widehat{\delta_0} = \widehat{G}$ implica que $\widehat{\delta_0} = 1$ a tot arreu. Pel lema de Riemann-Lebesgue, deduïm que $\delta_0 \notin L^1(\mathbb{R})$. Aleshores, $L^1(\mathbb{R})$ no pot ser un grup amb la convolució.

Seguim un moment més amb aquesta ficció: suposem que hi ha una funció $\delta_0 \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $f * \delta_0(x) = f(x)$ per tota f i tota x . Pel que hem vist abans,

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_0(x) dx = \widehat{\delta_0}(0) = 1.$$

A més a més, donada qualsevol funció $\psi \geq 0$ amb $\psi(x) = 0$, tindriem que

$$0 = \psi(x) = \psi * \delta_0(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - y) \delta_0(y) dy.$$

Això només és possible que passi per tota funció ψ amb $\psi(x) = 0$ si δ_0 s'anul·la a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. És a dir que tenim una suposada funció δ_0 que té integral 0 tot i que només pot tenir un valor (infinit) a $x = 0$. Evidentment això no és possible i, per tant, δ_0 no pot ser una funció integrable. •

Hi ha dues maneres de paliar aquesta manca d'element neutre. La primera és definir aquesta delta de Dirac δ_0 , que té massa unitària situada a l'origen. La delta, però, no és una funció tal com hem discutit, sino una distribució. De fet, es tracta d'una mesura de Radon, que és un tipus particular de distribucions. Estenent la definició de convolució de manera natural a les distribucions, obtindrem que la delta de Dirac definida a la secció 8.4 és l'element neutre.

La segona manera d'obtenir un substitut per la delta de Dirac és aproximar-la mitjançant funcions suaus tal i com hem fet a la secció 4.2 en el cas de funcions definides a \mathbb{T} , de manera que la convolució per aquestes funcions convergeixi a la identitat en algun sentit. Aquestes famílies s'anomenen *aproximacions a la identitat*.

Definició 7.15. Una *aproximació de la identitat* en \mathbb{R} és una família $\{K_t\}_{t \in \Lambda} \subset L^1(\mathbb{R})$ de funcions integrables, on $\Lambda \subset \mathbb{R}$ és un conjunt d'índexs juntament amb un punt d'acumulació $t_0 \in \overline{\Lambda}$ amb les següents propietats:

7 La transformada de Fourier com a integral

- i) Les funcions K_t tenen integral unitària: $\int_{\mathbb{R}} K_t(x) dx = 1$.
- ii) Les funcions K_t tenen massa uniformement acotada: existeix una constant $C \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |K_t(x)| dx \leq C$ per tot $t \in \Lambda$.
- iii) La massa de K_t es concentra a prop de $x = 0$ a mida que el paràmetre s'acosta a t_0 : $\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{|x| > \delta} |K_t(x)| dx = 0$ per tot $\delta > 0$. •

Els exemples a continuació mostren quin hauria de ser el punt d'acumulació t_0 . A vegades tenim $t_0 = 0 < t$, i aleshores la massa es concentra a l'origen quan $t \rightarrow 0^+$, o podem tenir $t_0 = \infty$ i aleshores seria $t \rightarrow \infty$ (notem que a la definició, l'adherència es pren en la recta real compactificada $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$). En el cas de \mathbb{T} es podria deduir la concentració de la massa a l'origen de la condició que $K_n(x) \rightarrow 0$ de manera uniforme a $\delta \leq |x| \leq \pi$. En la recta real això no és possible ja que part de la massa es podria estar escapant a infinit.

Tot i que no ho estudiarem aquí, les condicions anteriors impliquen que $K_n \rightarrow \delta_0$ en el sentit de les distribucions, de manera que el nom *aproximació de la identitat* pren tot el sentit. Dit d'una altra manera, $f * K_t \xrightarrow{t \rightarrow t_0} f$ en un cert sentit (depenent de les propietats de f), vegeu el teorema 7.18.

Exercici 7.16. Una manera senzilla de produir aproximacions de la identitat és començar amb un nucli no negatiu $K(x) \geq 0$ amb massa unitària, $\int_{\mathbb{R}} K(x) dx = 1$, i definir la família de dilatacions

$$K_t(x) := t^{-1} K(t^{-1}x),$$

amb $t > 0$. Demostrea que $\{K_t\}_{t>0}$ és una aproximació de la identitat amb $t_0 := 0$. ◁

Exemple 7.17. Les campanes de Gauss són bons nuclis. Donant un escalament correcte, obtenim una aproximació de la identitat: Sigui $G(x) = e^{-\pi x^2}$. Aleshores

$$G_t(x) := t^{-1} e^{-\pi \frac{x^2}{t^2}} \quad \text{per } t > 0.$$

Com que $e^{-\pi \frac{x^2}{t^2}} > 0$ i $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$, aquesta família és una aproximació de la identitat amb $t_0 = 0$, vegeu l'exercici 7.16. A la figura 7.1 es pot copsar com aquests nuclis es van aproximant a la delta de Dirac. ◇

Així doncs, l'aproximació de la identitat serveix per obtenir bones aproximacions d'una funció. El següent teorema es demostra de la mateixa manera que vam fer amb l'anàleg en \mathbb{T} :

Teorema 7.18. Sigui $\{K_t\}_{t \in \Lambda}$ una aproximació de la identitat quan $t \rightarrow t_0$. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ i x és un punt de continuïtat de f , aleshores la convolució $f * K_t$ convergeix puntualment en x a f quan $t \rightarrow t_0$. Si, a més, f és uniformement contínua, aleshores la convolució $f * K_t$ convergeix uniformement a f quan $t \rightarrow t_0$, és a dir

$$\|f * K_t - f\|_{L^\infty} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0.$$

7 La transformada de Fourier com a integral

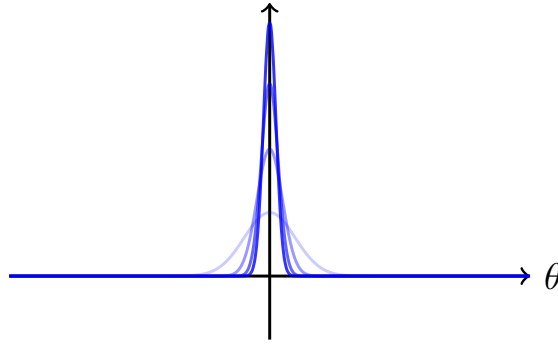


Figura 7.1: Nucli de Gauss $G_t(\theta)$ per $t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

Demostració. Sigui x un punt de continuïtat de f , és a dir

$$\varepsilon_f(\delta, x) = \sup_{|h| < \delta} |f(x+h) - f(x)| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Utilitzant la propietat *i)* de la Definició 7.15, obtenim que

$$K_t * f(x) - f(x) = \int K_t(y)f(x-y) dy - f(x) \stackrel{i)}{=} \int K_t(y)[f(x-y) - f(x)] dy.$$

Prenent valors absoluts deduïm que

$$|K_t * f(x) - f(x)| \leq \int |K_t(y)| |f(x-y) - f(x)| dy.$$

Per la part local utilitzem que la funció f és contínua i l'acotació uniforme de les normes L^1 de K_t :

$$\int_{|y| < \delta} |K_t(y)| |f(x-y) - f(x)| dy \leq \varepsilon_f(\delta, x) \int_{|y| < \delta} |K_t(y)| dy \stackrel{ii)}{\leq} C\varepsilon_f(\delta, x),$$

i per la part no local,

$$\int_{|y| > \delta} |K_t(y)| |f(x-y) - f(x)| dy \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{|y| > \delta} |K_t(y)| dy.$$

Tot plegat, obtenim

$$|K_t * f(x) - f(x)| \leq C\varepsilon_f(\delta, x) + 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{|y| \geq \delta} |K_t(y)| dy.$$

Donat $\varepsilon > 0$ escollim δ perquè $C\varepsilon_f(\delta, x) < \varepsilon/2$ i escollim t tal que

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \int_{|y| \geq \delta} |K_t(y)| dy \leq \varepsilon/4$$

7 La transformada de Fourier com a integral

(per la propietat *iii*). Amb aquestes eleccions obtenim

$$|K_t * f(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

tal i com volíem veure.

Notem que hem controlat la velocitat de convergència per la suma de $\varepsilon_f(\delta, x)$ i la propietat *i*), que és uniforme en x . Si la funció f és uniformement contínua, tenim que $\varepsilon_f(\delta, x) \leq \omega_\infty f(\delta)$ de manera uniforme. \square

El teorema de diferenciació de Lebesgue (vegeu el projecte 4.23) diu que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, aleshores gairebé per tot punt $x \in \mathbb{R}$ tenim que $f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{x-h}^{x+h} f(y) dy$. De fet es pot obtenir una millor cota i és que gairebé per tot $x \in \mathbb{R}$ tenim que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{x-h}^{x+h} |f(y) - f(x)| dy = 0,$$

vegeu [EG15, teorema 1.33]. Els punts on això passa s'anomenen punts de Lebesgue per f . Aleshores tenim

$$\tilde{\varepsilon}_f(\delta, x) := \sup_{|h| < \delta} \int_{x-h}^{x+h} |f(y) - f(x)| dy \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

pels punts de Lebesgue de f .

Si tenim un millor control dels nuclis, podem garantir convergència puntual de l'aproximació a la identitat als punts de Lebesgue de tota funció integrable:

Definició 7.19. Una *aproximació de la identitat boníssima* en \mathbb{R} és una família $\{K_t\}_{t \in \Lambda} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ de funcions integrables i acotades, parelles i decreixents a \mathbb{R}_+ que compleix les condicions *i*) i *ii*) de la definició 7.15 i a més, $\Lambda \subset \mathbb{R}$ és un conjunt d'índexs juntament amb un punt d'acumulació $t_0 \in \overline{\Lambda}$ que

- iii') el suprem de K_t disminueix lluny de $x = 0$ a mida que el paràmetre s'acosta a t_0 :
 $\lim_{t \rightarrow t_0} \sup_{|x| > \delta} |K_t(x)| dx = 0$ per tot $\delta > 0$. •

Notem que els nuclis de Gauss de l'exemple 7.17 constitueixen en realitat una aproximació de la identitat boníssima.

Teorema 7.20. *Sigui $\{K_t\}_{t \in \Lambda}$ una aproximació de la identitat boníssima quan $t \rightarrow t_0$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ i x és un punt de Lebesgue de f , aleshores la convolució $f * K_t$ convergeix puntualment en x a f quan $t \rightarrow t_0$.*

Exercici 7.21. Demuestra el teorema 7.20. \triangleleft

7.5 Transformada de Fourier inversa i identitat de Plancherel

En aquesta subsecció presentem ingredients fonamentals de la teoria de les transformades de Fourier: la fórmula de la multiplicació, la fórmula de la inversió i la identitat de Plancherel. Finalment farem una petita mostra d'aplicació d'aquestes eines a equacions diferencials lineals.

Tot seguit estudiem la *fórmula de la multiplicació* que relaciona el producte escalar de dues funcions:

Exercici 7.22 (Fórmula de la multiplicació). Comprova que donades $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, tenim

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)\hat{g}(s) ds = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\zeta)g(\zeta) d\zeta. \quad (7.11)$$

Pista: Pots usar el teorema de Fubini. ◁

És interessant observar que no hi ha cap anàleg a la fórmula de la multiplicació per sèries de Fourier. Efectivament, els coeficients de Fourier d'una funció periòdica no constitueixen una funció periòdica, sinó que formen una successió, així que no es pot aparellar alegrament f amb \hat{g} en aquest context. En canvi en el cas discret sí que podria tenir un sentit.

Exercici 7.23. Conjectura una fórmula de multiplicació raonable per la DFT i demostra-la o refuta-la. ◁

Ajuntant els resultats previs obtindrem la transformada de Fourier inversa en un subconjunt de les funcions integrables.

Teorema 7.24 (Transformada de Fourier inversa). *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$ i tal que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Aleshores gairebé per tot $x \in \mathbb{R}$ tenim*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x} d\xi.$$

En particular, f té un representant continu i aleshores la igualtat val per tot $x \in \mathbb{R}$.

Donada $f \in L^1(\mathbb{R})$, definim la transformada de Fourier inversa com

$$\check{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{2\pi i\xi x} d\xi = \hat{f}(-x) = \tilde{\hat{f}}(x). \quad (7.12)$$

El teorema anterior ens diu que per funcions integrables de transformada integrable, efectivament $\check{\cdot}$ és la inversa de $\hat{\cdot}$:

$$f(x) = \check{\tilde{\hat{f}}}(x) = \hat{\check{f}}(x) \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R}. \quad (7.13)$$

Notem que la definició de la transformada inversa de Fourier és pràcticament idèntica a la de la transformada de Fourier, llevat que intercanviem els rols de les variables per convenció, i sobretot, que la inversa té el signe canviat a l'exponent. Per tant, totes les condicions necessàries per calcular la transformada de Fourier ho són també per calcular la inversa, i per aquest motiu hem de demanar a priori que \hat{f} sigui integrable.

7 La transformada de Fourier com a integral

Demostració del Teorema 7.24. Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$ i sigui x un punt de Lebesgue de f . Aplicarem la fórmula de multiplicació (7.11) a una funció arbitrària f i una funció g que dependrà d'un paràmetre t de manera que

$$\widehat{g}(s) = t^{-1} e^{-\pi \frac{(x-s)^2}{t^2}} = G_t(x-s) = G_t(s-x) = \tau_x(D_{t^{-1}}G)(s).$$

Tornant a la taula 7.1, cal definir

$$g(\zeta) = M_x(t^{-1}D_t\widehat{G})(\zeta) = e^{2\pi i\zeta x}\widehat{G}(t\zeta) = e^{2\pi i\zeta x}e^{-\pi(t\zeta)^2}.$$

Aplicant ara la fórmula de la multiplicació (totes les funcions són integrables), obtenim

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{\text{T.7.20}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(s)G_t(x-s) ds \stackrel{(7.11)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta)e^{2\pi i\zeta x}e^{-\pi(t\zeta)^2} d\zeta \\ &\stackrel{\text{TCD}}{=} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta)e^{2\pi i\zeta x} \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\pi(t\zeta)^2} d\zeta = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta)e^{2\pi i\zeta x} d\zeta. \end{aligned}$$

El teorema de la convergència dominada que hem fet servir al penúltim pas es pot usar ja que

$$\left| \widehat{f}(\zeta)e^{2\pi i\zeta x}e^{-\pi(t\zeta)^2} \right| \leq |\widehat{f}(\zeta)|$$

i aquesta darrera és integrable per hipòtesi.

Ara hem demostrat que $f = \check{\check{f}} = \widehat{\widehat{f}}$. En particular, f coincideix gairebé per tot amb la transformada d'una funció integrable, que és contínua. Per tant, f té un representat continu com a funció mesurable, i en aquest cas tots els punts són punts de Lebesgue. \square

Exercici 7.25. Demosta la propietat j) de la taula 7.1: si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ amb $\widehat{f}, \widehat{g}, fg \in L^1(\mathbb{R})$, aleshores $\widehat{f} * \widehat{g} = \widehat{fg}$. \triangleleft

Exercici 7.26. Troba una funció de $C_0(\mathbb{R})$ que no sigui la transformada de Fourier de cap funció integrable. Pots seguir els passos següents: Demosta que

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq C \tag{7.14}$$

per $0 \leq \alpha < \beta < \infty$. Demosta que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ és senar, aleshores

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi} d\xi \right| \leq C \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Busca una g senar que no ho compleixi. \triangleleft

La identitat de Plancherel diu que tota funció $f \in L^1(\mathbb{R})$ amb transformada al mateix espai té la mateixa norma L^2 que \widehat{f} , dit d'una altra manera, la transformada de Fourier preserva la norma L^2 .

7 La transformada de Fourier com a integral

Teorema 7.27 (Identitat de Plancherel). Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ amb $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, aleshores

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

Demostració. Només cal encadenar tot el que sabem fins ara:

$$\int |f|^2 = \int f \overline{f} \stackrel{(7.13)}{=} \int f \widehat{\widehat{f}} \stackrel{(7.11)}{=} \int \widehat{f} \overline{\widehat{f}} \stackrel{(7.12)}{=} \int \widehat{f} \widehat{\overline{f}} = \int \widehat{f} \widehat{\widehat{f}}.$$

□

Exercici 7.28. Demuestra que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{ab}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)} dt = \frac{\pi}{a + b}.$$

◁

Exercici 7.29. Sigui $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ una funció infinitament diferenciable amb suport compacte. Definim la seva transformada de Radon $R_\theta f(t)$ d'angle θ i paràmetre t com la integral de f a la recta $-x \sin \theta + y \cos \theta = t$, és a dir

$$R_\theta f(t) := \int_{\mathbb{R}} f(-t \sin \theta + \rho \cos \theta, t \cos \theta + \rho \sin \theta) d\rho.$$

Trobeu una expressió de la transformada de Fourier 1-dimensional $\widehat{R_\theta f}(\xi)$ en funció de la transformada de Fourier 2-dimensional de f :

$$\widehat{f}_{\mathbb{R}^2}(\xi_1, \xi_2) := \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

on $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ i la darrera integral es calcula respecte la mesura de Lebesgue de dues dimensions. Notem que \cdot representa el producte escalar.

Com podem recuperar f a partir de les tomografies $R_\theta f$ amb $0 \leq \theta < 2\pi$?

◁

8 Distribucions temperades i transformada de Fourier

8.1 La classe de Schwartz

La fórmula d'inversió (7.4) és certa quan f pertany a l'espai vectorial anomenat *classe de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Recordem que $C^\infty(\mathbb{R})$ denota la classe de funcions infinitament diferenciables. La classe de Schwartz es defineix com els subespai de C^∞ format per funcions que decreixen més ràpid que qualsevol polinomi i tals que totes les seves derivades tenen aquesta mateixa propietat:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k |f^{(j)}(x)| = 0 \text{ per tots } j, k \in \mathbb{N}\}.$$

Aquí entenem que $0 \in \mathbb{N}$, i $f^{(0)} = f$.

Exercici 8.1. Aquesta definició equival a dir que els productes $|x|^k |f^{(\ell)}(x)|$ són funcions acotades, és a dir que

$$\rho_{k,\ell}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < \infty.$$

Demostra-ho. ◁

Notem també que les funcions de la classe de Schwartz són integrables.

Exercici 8.2. Demostra que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. ◁

Observem que si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores totes les funcions que apareixen a la Taula 7.1 són de la classe de Schwartz, vegeu l'exercici 8.10 per la convolució. Però les propietats són vàlides en conjunts més grans de funcions, tal i com hem vist.

Definició 8.3. Una funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ és de *suport compacte* si hi ha un interval tancat $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$ per tot $x \notin [a, b]$. Escrivim $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. •

Exercici 8.4. Demostra que $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. ◁

És clar que les funcions C_c^∞ són de Schwartz, però en podem trobar cap que no sigui nul·la? Efectivament, podem trobar-ne:

Exemple 8.5. La funció

$$B(x) := e^{-\frac{1}{x-a}} e^{-\frac{1}{b-x}} \chi_{(a,b)}(x),$$

és de $C_c^\infty(\mathbb{R})$, amb $a < b$. ◇

Exercici 8.6. Demuestra que la funció B de l'exemple anterior és efectivament de C^∞ . Només cal comprovar la derivabilitat (infinita) a $x = a$ i $x = b$. \triangleleft

També existeixen funcions de Schwartz que no tenen el suport compacte. L'exemple canònic de funció de Schwartz suportada a la recta real és la campana de Gauss

$$G(x) := e^{-\pi x^2}.$$

Exercici 8.7. La classe de Schwartz té estructura d'espai vectorial sobre el cos dels nombres complexos. Pots comprovar que, de fet, és tancat sota les operacions de multiplicació entre funcions de Schwartz, multiplicació per polinomis, multiplicació per funcions trigonomètriques i derivació. En canvi, no és tancat sota l'operació de calcular la primitiva! \triangleleft

Notem que l'integrand en la definició de la transformada de Fourier segueix sent una funció de Schwartz.

Exemple 8.8 (Una aplicació a equacions diferencials). Busquem una funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaci l'equació diferencial

$$f^{(3)}(x) + 3f''(x) - 2f'(x) - 6f(x) = e^{-\pi x^2}.$$

Formalment, podem prendre la transformada de Fourier als dos costats i tenim que

$$\hat{f}(\xi)[(2\pi i\xi)^3 + 3(2\pi i\xi)^2 - 2(2\pi i\xi) - 6] = e^{-\pi\xi^2}.$$

Sigui $P(t) = t^3 + 3t^2 - 2t - 6 = (t + 3)(t^2 - 2)$, polinomi amb tres arrels reals no nul·les. Així doncs, el polinomi dins els claudàtors és $Q(\xi) := P(2\pi i\xi)$ i no té cap arrel real. Per tant, aïllant $\hat{f}(\xi)$, tenim

$$\hat{f}(\xi) = \frac{e^{-\pi\xi^2}}{Q(\xi)}.$$

Per tant, almenys formalment hem obtingut que

$$f(x) = \left(\frac{e^{-\pi\xi^2}}{Q(\xi)} \right)^\vee.$$

De fet, tenim la sort que $\frac{e^{-\pi\xi^2}}{Q(\xi)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ perquè el denominador no té cap zero real. Hem trobat doncs una solució $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, de manera que els càlculs formals que hem fet són perfectament rigorosos per aquesta solució, que depèn només del terme independent i dels coeficients de l'EDO. \diamond

En general, com en l'exercici anterior, si $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ és un polinomi de grau n amb coeficients complexos a_k i $Q(\xi) = P(2\pi i\xi)$ no té zeros reals, aleshores per tota $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'equació diferencial

$$P(D)f = \sum_{k=0}^n a_k D^k f = u$$

té solució $f = (\hat{u}/Q)^\vee$. La solució trobada serà de la classe de Schwartz tal i com hem argumentat a l'exemple.

8.1.1 Convolució a la classe de Schwartz

La convolució $f * g$ de dues funcions $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es defineix puntualment com

$$f * g(x) := \int f(x-y)g(y) dy.$$

Aquesta convolució està ben definida puntualment al ser les funcions de la classe de Schwartz. Veurem a continuació que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La nova funció $f * g$ definida a (7.10) és ràpidament decreixent per la suavitat i el ràpid decreixement de les dues funcions inicials:

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq \int_{-|x|/2}^{|x|/2} |f(x-y)g(y)| dy + \int_{|y|>|x|/2} |f(x-y)g(y)| dy \\ &\leq \|g\|_{L^1} \frac{\rho_{k,0}(f)}{(|x|/2)^k} + \|f\|_{L^1} \frac{\rho_{k,0}(g)}{(|x|/2)^k}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

on hem usat que $f(x-y) \leq \rho_{k,0}(f)/|x-y|^k$, que $g(y) \leq \rho_{k,0}(g)/|y|^k$ i després que $|y| < |x|/2$ implica $|x-y| \geq |x|/2$. Com veurem, resulta que les seves derivades també són de decreixement ràpid, i així ocorre que la convolució de funcions és una operació tancada a la classe de Schwartz. L'observació clau és que

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = \frac{df}{dx} * g(x) = f * \frac{dg}{dx}(x) \quad \text{per } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

La segona identitat és conseqüència de la commutativitat de la convolució un cop haguem demostrat la primera identitat.

Exercici 8.9. Considera dues funcions integrables $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ amb $f \in C^1$ tal que f' és uniformement contínua. Demuestra que $\frac{d}{dx}(f * g) = \frac{df}{dx} * g$. \triangleleft

Exercici 8.10 (La classe de Schwartz és tancada sota la convolució). Verifica que donades $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenim $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. \triangleleft

Es poden convolucionar funcions amb menys regularitat amb una funció de Schwartz. Per exemple funcions integrables o encara pitjor, “funcions” (segons alguns físics) com ara la delta de Dirac, que en realitat no són funcions (segons els matemàtics i les persones amb una mica de seny). En aquests casos la funció resultant esdevé infinitament diferenciable, tot i que no hereta el decaïment ràpid, vegeu les seccions 8.2 i 8.3.

8.1.2 Invariància de la classe de Schwartz sota la transformada de Fourier

No tots els espais són invariants sota la transformada de Fourier, de manera que les condicions es poden perdre pel camí i aleshores perilla la fórmula d'inversió... En el cas de les funcions integrables, per exemple, hem requerit el coneixement *a priori* que la seva transformada també és de L^1 . La simetria de la classe de Schwartz sota l'acció de la transformada de Fourier és doncs clau per tenir una teoria bonica i auto-continguda.

La propietat g) de la taula 7.1 il·lustra un principi fonamental de l'anàlisi de Fourier que hem anat veient al llarg del curs: *la suavitat d'una funció està correlacionada amb el decaïment de la seva transformada de Fourier a l'infinit*. En altres paraules, com més vegades es pugui derivar una funció f , més ràpidament la seva transformada \widehat{f} anirà cap a zero quan $\xi \rightarrow \pm\infty$. Si ens parem a pensar en el significat de les freqüències, el que ens diu aquest principi és que tenir moltes derivades implica tenir poques freqüències altes, o el que és el mateix, les oscil·lacions més ràpides són menys presents a la funció, sempre entès de manera asimptòtica. I viceversa.

Tot seguit demostrarem que les transformades de Fourier de les funcions de la classe de Schwartz són de la mateixa classe (vegeu el teorema 8.12). Volem doncs comprovar que \widehat{f} és infinitament diferenciable i que les seves derivades decauen ràpidament.

Per l'exercici 7.8 sabem que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$. El mateix exercici ens dona una recepta per calcular-ne les derivades. Tot seguit deduirem que el decaïment és ràpid per funcions de la classe de Schwartz.

Lema 8.11. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores \widehat{f} decau ràpidament.*

Demostració. Donat $k \geq 0$, volem veure que tenim

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} |\xi|^k |\widehat{f}(\xi)| = 0.$$

Per la propietat g) de la taula 7.1, tenim $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi)$. Com que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores $f^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ també, i aplicant el lema de Riemann-Lebesgue (vegeu lema 7.3) a la derivada k -èsima obtenim

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} (2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi) = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f^{(k)}}(\xi) \stackrel{\text{L. 7.3}}{=} 0.$$

□

Teorema 8.12. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ aleshores $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Demostració. Aplicant la propietat h) de la Taula 7.1 (veure exercici 7.8), obtenim que $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ens falta veure que les seves derivades són ràpidament decreixents. Aquestes derivades hem vist que es poden calcular com

$$\frac{d^j}{d\xi^j} \widehat{f}(\xi) = [(-2\pi i \cdot)^j f(\cdot)]^\wedge(\xi).$$

Com que $(-2\pi i x)^j f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, deduïm pel lema 8.11 que $\frac{d^j}{d\xi^j} \widehat{f}$ és ràpidament decreixent, i se segueix el teorema. □

8.2 Distribucions temperades

Un *funcional lineal* sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ és una aplicació lineal $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$.

Definició 8.13. Una *distribució temperada* T és un funcional lineal continu

$$\begin{aligned} T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{C}. \\ \varphi &\longmapsto T(\varphi) \end{aligned}$$

L'espai de les distribucions temperades es denota $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Notem que dues distribucions temperades T i U són iguals si per tota $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenim $T(\varphi) = U(\varphi)$.

Una successió $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es diu que convergeix en el sentit de les distribucions a T si per tota $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenim que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\varphi) = T(\varphi)$. •

Comentem aquesta definició. La notació $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ no és casual, es fa servir per denotar el dual. El dual d'espais vectorials finits s'estudia a àlgebra lineal, i el dual d'espais de Banach sol ser part del temari d'anàlisi funcional. La classe de Schwartz no és un espai de Banach, però sí que és un *espai vectorial topològic*, és a dir un espai vectorial amb una topologia compatible, en el sentit que la suma de vectors i la multiplicació per escalars són contínues. En aquests espais es pot definir un dual tal i com hem fet, i es pot definir una topologia (i, per tant, una noció de continuïtat per operadors que actuïn sobre el dual) de manera natural.

Un funcional T és lineal si $T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi)$ per tot parell de nombres $a, b \in \mathbb{C}$ i tot parell de funcions $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La continuïtat és una mica més complicada. Primer requerim una topologia. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores per tots $k, \ell \in \mathbb{N}$ tenim que les *seminormes*

$$\rho_{k,\ell}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |\varphi^{(\ell)}(x)|$$

són finites. Se les anomena seminormes perquè $\rho_{k,\ell} \geq 0$, perquè són homogènies $\rho_{k,\ell}(\lambda\varphi) = |\lambda| \rho_{k,\ell}(\varphi)$ i satisfan la desigualtat triangular. No són normes ja que $\rho_{k,\ell}(\varphi) = 0$ no implica necessàriament que $\varphi = 0$!

Cada seminorma defineix una topologia. Aleshores podem prendre la topologia mínima que conté totes les anteriors. Dit d'una altra manera:

Definició 8.14. Una successió $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix a φ a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si i només si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{k,\ell}(\varphi_n - \varphi) = 0 \quad \text{per tots } k, \ell \in \mathbb{N}.$$

•

Ara ja podem definir la continuïtat de les distribucions temperades.

Definició 8.15. Un funcional lineal T a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ és continu a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si per tota successió $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la successió $\{T(\varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ convergeix a $T(\varphi)$. Diem que T és continu si ho és per tota $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. •

Exercici 8.16 (La continuïtat a l'origen és suficient). Demostra que si un funcional lineal és continu a $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores és continu. ◁

Exercici 8.17. Demuestra que si $\varphi_n \rightarrow \varphi$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores les derivades $\varphi_n^{(\ell)}$ convergeixen uniformement a $\varphi^{(\ell)}$. \triangleleft

L'exemple canònic de distribució temperada és el funcional T_f donat per integrar contra una funció localment integrable f : si $f \in L^1(K)$ per tot compacte $K \subset \mathbb{R}$, aleshores podem definir

$$T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx \quad \text{per } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (8.2)$$

Quan aquest funcional és continu, diem que la distribució és una funció.

Exercici 8.18. Demuestra que si f és acotada o f és un polinomi, aleshores T_f és una distribució.

Dona condicions suficients per assegurar que $T_f(\varphi)$ està ben definit com a nombre complex. En aquests casos, demostra que efectivament T_f és una distribució. Aquestes condicions han d'incloure les funcions acotades i els polinomis per ser útils! \triangleleft

En particular, T_f és una distribució temperada si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. L'exercici anterior, doncs, ens mostra que hi ha una aplicació canònica $\varepsilon : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donada per $\varepsilon(f) = T_f$. Aquesta aplicació és contínua, en el sentit que si $f_n, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, i $f_n \rightarrow f$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores $T_{f_n} \rightarrow T_f$ en el sentit de les distribucions, és a dir que per tota $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenim $T_{f_n}(\varphi) \rightarrow T_f(\varphi)$. Aquestes aplicacions contínues i injectives s'anomenen *immersions* (en anglès *embeddings*).

Exercici 8.19. Demuestra que ε és injectiva i contínua. \triangleleft

Algunes funcions no acotades també poden induir distribucions temperades, com és el cas dels polinomis o de les funcions de L^p . Però no totes les distribucions s'obtenen d'aquesta manera. N'hi ha que no corresponen a cap funció, com és el cas de la delta de Dirac o la transformada de Hilbert a l'origen $H_0(\varphi) = \left(-i \frac{\xi}{|\xi|} \widehat{\varphi}\right) \sim (0)$.

Advertència 8.20. Els funcionals lineals continus que actuen en l'espai de funcions infinitament diferenciables i amb suport compacte $\mathcal{D}(R) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, s'anomenen *distribucions* i es denoten $\mathcal{D}'(R)$. És important no confondre-les amb les distribucions temperades. De fet, com que $\mathcal{D}(R) \subset \mathcal{S}(R)$, se segueix que $\mathcal{S}'(R) \subset \mathcal{D}'(R)$, és a dir que les distribucions temperades són efectivament distribucions. Notem que l'acció de les distribucions temperades sobre les funcions de $\mathcal{D}(R)$ està perfectament definida. En canvi, la funció $f(x) = e^x$ defineix una distribució T_f que no és una distribució temperada. \bullet

Projecte 8.21 (La transformada de Hilbert). Demuestra que la transformada de Hilbert a l'origen H_0 és una distribució temperada. Defineix la transformada de Hilbert d'una funció. \triangleleft

8.3 El diccionari temps-freqüència

Tot seguit estendrem les operacions fonamentals discutides a la classe de Schwartz a les distribucions temperades per dualitat: translació, dilatació, derivació, la transformada de

Fourier i la seva inversa, multiplicació per funcions de Schwartz i per polinomis i convolució amb funcions de Schwartz.

Per definir aquestes operacions sobre les distribucions, mirarem de respectar la immersió ε de la secció anterior, és a dir que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, voldrem que per exemple $\tau_h(T_f) = T_{\tau_h f}$. Així les definicions seran coherents amb la identificació natural de f amb la distribució T_f . En aquest cas, caldrà

$$\tau_h T_f(\varphi) := T_{\tau_h f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x-h)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x+h) = T_f(\tau_{-h}\varphi).$$

Aleshores, per coherència definim la translació per tota distribució amb el darrer terme, que no depèn de si la distribució és una funció:

$$\tau_h T(\varphi) := T(\tau_{-h}\varphi).$$

Procedint anàlogament, trobem les següents definicions naturals:

	Operació a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	Operació a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$
a) Translació	$\tau_h \varphi(x) = \varphi(x-h)$	$\tau_h T(\varphi) := T(\tau_{-h}\varphi)$
b) Dilatació	$D_s \varphi(x) = s\varphi(sx)$	$D_s T(\varphi) := T(sD_{s^{-1}}\varphi)$
c) Derivació	$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x)$	$T'(\varphi) := -T(\varphi')$
d) Transformada de Fourier	$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \varphi(x)$	$\widehat{T}(\varphi) := T(\widehat{\varphi})$
e) TF inversa	$\check{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \varphi(x)$	$\check{T}(\varphi) := T(\check{\varphi})$
f) Producte amb g	$\mathcal{M}_g \varphi(x) = g(x)\varphi(x)$	$\mathcal{M}_g T(\varphi) := T(\mathcal{M}_g \varphi)$
g) Simetria central	$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$	$\tilde{T}(\varphi) := T(\tilde{\varphi})$
h) Conjugació	$\overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi(x)}$	$\overline{T}(\varphi) := \overline{T(\overline{\varphi})}$
i) Convolució	$\psi * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y)\varphi(y) dy$	$\psi * T(\varphi) := T(\check{\psi} * \varphi)$

Taula 8.1: Operacions a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Suposem que $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$, $s > 0$, g és una funció amb $\mathcal{M}_g : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$. TF significa transformada de Fourier.

Convé remarcar que la funció g de l'apartat f) pot ser una funció C^∞ acotada o fins i tot un polinomi. En particular, si $g(x) = e^{2\pi i \xi x}$, aleshores $\mathcal{M}_g = M_\xi$ és la *modulació*, vegeu la taula 7.1. Notem que en les definicions a), b), c) i i) de la taula 8.1 l'acció actua sobre la distribució de manera no coincident amb l'acció sobre la funció test φ . En canvi a les definicions d)–h) la definició és més senzilla. Aquestes darreres són operacions autoadjuntes.

Exercici 8.22. Comprova que a la taula 8.1 les definicions en distribucions de tipus T_f són coherents, és a dir que

$$D_s T_f = T_{D_s f}, \quad T_f' = T_{f'}, \quad \widehat{T}_f = T_{\widehat{f}}, \quad \check{T}_f = T_{\check{f}},$$

8 Distributions temperades i transformada de Fourier

$$\mathcal{M}_g T_f = T_{\mathcal{M}_g f}, \quad \widetilde{T}_f = T_{\widetilde{f}}, \quad \overline{T}_f = T_{\overline{f}}, \quad \psi * T_f = T_{\psi * f}.$$

En el cas de la derivada, per exemple, et convindrà usar la integració per parts. \triangleleft

Exercici 8.23. Demostra que per $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ i $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si definim $f(y) := T(\tau_y \widetilde{\psi})$, aleshores $T_f = \psi * T$ (vegeu [Gra08, pp.116–117]). \triangleleft

Exercici 8.24. Demostra que $\tau_h T$ és efectivament un funcional lineal i continu. Fes el mateix amb la resta de definicions de la taula 8.1. \triangleleft

Com que la transformada de Fourier és una bijecció en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, podem deduir de d) i e) que també és una bijecció en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Tot seguit construïm a la taula 8.2 un diccionari temps-freqüència per les distribucions temperades seguint la taula 7.1.

	Temps $x \in \mathbb{R}$	Freqüència $\xi \in \mathbb{R}$
a) Combinació lineal	$aT + bU$	$a\widehat{T} + b\widehat{U} = \widehat{aT + bU}$
b) Translació	$\tau_h T(\varphi) := T(\tau_{-h}\varphi)$	$\widehat{\tau_h T} = M_{-h}\widehat{T}$
c) Modulació	$M_h T(\varphi) := T(M_h\varphi)$	$\widehat{M_h T} = \tau_h \widehat{T}$
d) Dilatació	$D_s T(\varphi) := T(sD_{s^{-1}}\varphi)$	$\widehat{D_s T} = sD_{s^{-1}}\widehat{T}$
e) Simetria central	$\widetilde{T} := T(\widetilde{\varphi})$	$\widehat{\widetilde{T}} = \widetilde{\widehat{T}}$
f) Conjugació	$\overline{T}(\varphi) := T(\overline{\varphi})$	$\widehat{\overline{T}} = \overline{\widehat{T}} = \widetilde{\widetilde{\widehat{T}}}$
g) Derivada	$T'(\varphi) := -T(\varphi')$	$\widehat{T}' = 2\pi i \xi \widehat{T} = \mathcal{M}_{2\pi i \xi} \widehat{T}$
h) Producte per un polinomi	$\mathcal{M}_{-2\pi i x} T(\varphi) := T(-2\pi i x \varphi)$	$\widehat{\mathcal{M}_{-2\pi i x} T} = \widehat{T}'$
i) Convolució	$\psi * T(\varphi) := T(\widetilde{\psi} * \varphi)$	$\widehat{\psi * T} = \mathcal{M}_{\widehat{\psi}} \widehat{T} = \widehat{\psi} \widehat{T}$

Taula 8.2: Diccionari temps-freqüència a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exemple 8.25. Per il·lustrar la taula 8.2 deduirem la fórmula i). Donades $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ i $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, volem veure que $\widehat{\psi * T} = \mathcal{M}_{\widehat{\psi}} \widehat{T} = \widehat{\psi} \widehat{T}$, és a dir que per tota $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenim que

$$\widehat{\psi * T}(\varphi) = \mathcal{M}_{\widehat{\psi}} \widehat{T}(\varphi).$$

Apliquem la definició de transformada de Fourier d'una distribució i la definició de convolució amb una distribució:

$$\widehat{\psi * T}(\varphi) \stackrel{\text{T. 8.2.i}}{=} \psi * T(\widehat{\varphi}) \stackrel{\text{T. 8.1.i}}{=} T(\widetilde{\psi} * \widehat{\varphi}).$$

Per altra banda,

$$\mathcal{M}_{\widehat{\psi}} \widehat{T}(\varphi) \stackrel{\text{T. 8.1.f}}{=} \widehat{T}(\widehat{\psi} \varphi) \stackrel{\text{T. 8.1.d}}{=} T(\varphi \widetilde{\widehat{\psi}}).$$

Així, n'hi ha prou amb veure que $\tilde{\psi} * \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi\tilde{\psi}}$.

Calculem tot seguit el valor de la convolució $\tilde{\psi} * \widehat{\varphi}$ per $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} * \widehat{\varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}(\zeta) \widehat{\varphi}(\xi - \zeta) d\zeta \stackrel{\text{T. 8.1.i), D. 7.1}}{=} \int_{\mathbb{R}} \psi(-\zeta) \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(\xi - \zeta)x} \varphi(x) dx d\zeta \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi(-\zeta) e^{-2\pi i(-\zeta)x} d\zeta e^{-2\pi i\xi x} \varphi(x) dx \stackrel{\text{D. 7.1}}{=} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(x) e^{-2\pi i\xi x} \varphi(x) dx \\ &\stackrel{\text{D. 7.1}}{=} \widehat{\varphi\tilde{\psi}}(\xi). \end{aligned}$$

◇

Exercici 8.26. Dedueix la resta de fórmules de la taula 8.2.

◁

8.4 La delta de Dirac

Com dèiem, hi ha objectes a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ que no són distribucions. Un exemple típic és la distribució delta de Dirac, que de fet es pot entendre com una *mesura*. Informalment, la delta és una funció que s'anul·la a tot arreu llevat de l'origen i té valor infinit a l'origen, de manera que al calcular-ne la integral el resultat és u, vegeu el comentari 7.14. Amb rigor, això no és una funció, però podem obtenir els resultats desitjats usant una distribució. Computacionalment, el que fa la distribució delta sobre una funció és avaluar-la a l'origen.

Per l'exercici 8.18 sabem que la funció constant $f(x) \equiv 1$ induïx una distribució temperada $T_f = T_1$:

$$T_1(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \quad \text{per } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

La seva transformada de Fourier és

$$\widehat{T_1}(\varphi) \stackrel{\text{T.8.1 d)}}{=} T_1(\widehat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \stackrel{\text{T.8.1 e)}}{=} \check{\varphi}(0) \stackrel{(7.13)}{=} \varphi(0).$$

Notem que la darrera igualtat és la fórmula d'inversió per funcions de Schwartz.

Definició 8.27. La distribució delta de Dirac $\delta_0 : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ està definida per

$$\delta_0(\varphi) := \widehat{T_1}(\varphi) = \varphi(0).$$

•

Tot i que ja ho podem deduir usant els exercicis 8.18 i 8.24, tot seguit verifiquem que efectivament δ_0 és una distribució aplicant les definicions. Primer cal veure que és lineal. Efectivament,

$$(a\varphi_1 + b\varphi_2)(0) = a\varphi_1(0) + b\varphi_2(0).$$

Per veure la continuïtat a l'origen, assumim que $\varphi_n \rightarrow 0$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Aleshores en particular $\rho_{0,0}(\varphi_n) = \sup_{\mathbb{R}} \varphi_n \rightarrow 0$. Així doncs $|\varphi_n(0)| \leq \sup_{\mathbb{R}} \varphi_n \rightarrow 0$ i deduïm que $\delta_0(\varphi_n) \rightarrow 0 = \delta_0(0)$. Per l'exercici 8.16, trobem que δ_0 és contínua a tota la classe de Schwartz.

La seva transformada de Fourier és

$$\widehat{\delta}_0(\varphi) = \delta_0(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \int \varphi = T_1(\varphi).$$

Notem que la fórmula d'inversió per distribucions és conseqüència immediata de la fórmula d'inversió per funcions de Schwartz:

$$\check{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi}) = T(\varphi) = T(\check{\varphi}) = \widehat{T}(\varphi). \quad (8.3)$$

Així doncs, la identitat $\widehat{\delta}_0 = T_1$ és coherent amb la fórmula d'inversió per distribucions, ja que la funció constant és parella i, per tant, $\widehat{1} = \check{1} = 1$. Com hem dit, identifiquem les funcions f amb les distribucions T_f , de manera que diem que

$$\delta_0 = \widehat{1} \quad \text{i} \quad 1 = \widehat{\delta}_0.$$

Exercici 8.28. Comprova que la distribució $\delta_h := \tau_h \delta_0$ envia $\delta_h(\varphi) = \varphi(h)$. Verifica que la transformada de Fourier de δ_h és la distribució temperada $e_{-h}(\xi) = e^{-2\pi i h \xi}$. \triangleleft

És interessant observar que la delta de Dirac té el suport més petit possible, que és un sol punt, mentre que la seva transformada de Fourier té el suport més gran possible. Compara aquesta idea amb el principi d'incertesa de la secció 8.6.3.

Exercici 8.29 (Derivades de la delta de Dirac). Troba les derivades $\delta_0^{(k)}$ per $k \geq 1$ de la distribució delta de Dirac. Comprova que les seves transformades de Fourier es poden identificar amb certs polinomis. Comprova també que δ_0 és la derivada de la funció esglaió de Heaviside¹, definida com $H(x) := \chi_{x>0}$. \triangleleft

Comentari 8.30. Notem que, tot i que la distribució delta no és una funció, es pot obtenir com la derivada d'una funció. En general, tota distribució temperada T es pot obtenir derivant una altra distribució i en aquest procés d'obtenció de primitives, en un nombre finit de passos obtenim una funció, encara que T sigui ben salvatge! Vegeu [Str94] \bullet

Al comentari 7.14 lamentàvem la inexistència d'un element neutre per la convolució a la classe de Schwartz, i asseguràvem que la delta de Dirac és de fet l'element neutre que buscàvem.

Exercici 8.31 (La identitat de la convolució). Demostra que per tota $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenim que

$$\psi * \delta_0 = T_\psi.$$

\triangleleft

¹Oliver Heaviside, 1850–1925

Exercici 8.32 (Delta de Dirac i aproximacions de la identitat). Sigui $\{K_t\}_{t \in \Lambda}$ una aproximació de la identitat amb punt d'acumulació t_0 . Demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} K_t = \delta_0$$

en el sentit de les distribucions. És a dir que per tota $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenim que $\lim_{t \rightarrow t_0} T_{K_t}(\varphi) = \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$. \triangleleft

Si el lector està familiaritzat amb la teoria de la mesura, potser sabrà que tota mesura finita de Borel μ a la recta real defineix una distribució temperada T_μ via integració: $T_\mu(\varphi) := \int \varphi d\mu$. Així, la mesura

$$\mu(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in B \\ 0 & \text{en cas contrari,} \end{cases}$$

és efectivament una mesura finita de Borel i satisfà que $T_\mu = \delta_0$. Podem dir, doncs, que la delta de Dirac és en realitat una mesura. Hi ha distribucions que no són mesures, com per exemple la derivada de la delta de Dirac. Ara bé, tota funció de Schwartz f defineix una mesura μ_f per integració: $\mu_f(B) := \int_B f(x) dx$, i tenim que $T_f = T_{\mu_f}$. Així doncs, tota distribució es pot obtenir com a derivada d'ordre finit d'una mesura pel comentari 8.30.

8.5 Espais de Lebesgue i distribucions

En aquesta secció fem un repàs a la teoria de Fourier en els espais de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$. Per l'exercici 8.2 i la invariància de la classe de Schwartz sota la transformada de Fourier, podem aplicar la fórmula d'inversió, que ens garanteix que la transformada de Fourier és de fet una bijecció de la classe de Schwartz en ella mateixa. Encara es pot dir més: la transformada de Fourier preserva l'energia, és a dir que és una isometria de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ amb la distància induïda per la norma de $L^2(\mathbb{R})$.

Aquesta afirmació és la identitat de Plancherel a la recta real. Primer hem de definir aquesta noció de mida. Equipem $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ amb el producte escalar definit com

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = T_f(\overline{g}) \quad \text{per totes } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

amb norma $L^2(\mathbb{R})$ associada donada per $\|f\|_{L^2}^2 = \langle f, f \rangle$. És a dir que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

que coincideix amb la norma introduïda a la secció 2.2.2. Per funcions de Schwartz f i g la integral que dona el producte escalar és un nombre complex ben definit, evidentment.

Exercici 8.33. Demuestra que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} < \infty$ per tot $1 \leq p \leq \infty$. \triangleleft

Usant l'exercici 2.36, podem veure que de fet la classe de Schwartz és un espai normat amb la norma L^p .

Veurem tot seguit que la convergència del teorema 7.18 també es dona en les normes L^p per $1 \leq p < \infty$. Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ per algun nombre real $1 \leq p \leq \infty$, aleshores el funcional T_f de (8.2) és una distribució temperada. La linealitat de la integral garanteix que T_f és lineal sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. La desigualtat de Hölder (vegeu l'exercici 2.36) es pot fer servir per demostrar-ne la continuïtat, ja que les normes L^p estan controlades per les seminormes de Schwartz.

Exercici 8.34. Demuestra que si $f \in L^p$, aleshores T_f és continu a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. ◁

Com veurem a continuació, la classe de Schwartz és densa en $L^p(\mathbb{R})$ sempre que $1 \leq p < \infty$, vegeu el teorema 8.40. Dit d'una altra manera, donada una funció $f \in L^p(\mathbb{R})$ podem aproximar-la per $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de manera que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_p = 0,$$

cosa que escrivim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = f \text{ a } L^p(\mathbb{R}).$$

Teorema 8.35. Sigui $\{K_t\}_{t \in \Lambda} \subset L^1(\mathbb{R})$ una aproximació de la identitat quan $t \rightarrow t_0$. Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, aleshores

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|K_t * f - f\|_p = 0.$$

Exercici 8.36. Seguint la demostració del teorema 7.18 i les indicacions de l'exercici 4.19, demostra el teorema anterior. Cal justificar també que $f * K_t$ està ben definit! ◁

Teorema 8.37. La classe de Schwartz és densa a L^p per $1 \leq p < \infty$.

Demostració. Vegem la densitat de \mathcal{S} a L^p . Sabem que les funcions contínues de suport compacte són denses a L^p , però com podem veure que també la classe de Schwartz ho és? Podem usar el teorema 8.35, però, de fet, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ i $f \in L^p(\mathbb{R})$, aleshores no necessàriament tenim $f * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (sabries trobar un cas on no hi ha prou decaïment?)

Sigui $\varepsilon > 0$. Com hem dit, les funcions contínues de suport compacte són denses a L^p , és a dir que existeix $f_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R})$ tal que $\|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon$. Pel teorema 8.35 si prenem $\varphi \in C_c^\infty$ amb integral 1, l'aproximació de la identitat φ_t definida com a l'exercici 7.16 satisfà pel teorema 8.35 que existeix un t tal que $\|\varphi_t * f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon$ per t prou petit.

Per la desigualtat triangular a L^p (o desigualtat de Minkowski) tenim

$$\|f - \varphi_t * f_\varepsilon\|_p \leq 2\varepsilon.$$

Notem que $(\varphi_t * f_\varepsilon)^{(\ell)} = \varphi_t^{(\ell)} * f_\varepsilon$ (vegeu exercici 8.9), de manera que $\varphi_t * f_\varepsilon \in C^\infty$. A més a més té suport compacte per construcció, com a convolució de funcions de suport compacte. Concloem que $\varphi_t * f_\varepsilon \in C_c^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, i per tant, hem demostrat la densitat de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a $L^p(\mathbb{R})$. ◻

Una manera equivalent de definir $L^p(\mathbb{R})$ és la completió de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ respecte a la norma $L^p(\mathbb{R})$. Aquesta definició té l'avantatge que implica directament la densitat de la classe de Schwartz a $L^p(\mathbb{R})$, però potser és una mica menys manejable.

Els funcionals T_f per $f \in L^p(\mathbb{R})$ amb $1 \leq p \leq \infty$, no només poden actuar sobre funcions de Schwartz, sinó que es poden estendre a tota $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R})$, on $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Diem que aquests són exponents *conjugats*. Això es deu a la desigualtat de Hölder. Així doncs, $T_f(g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx$ està ben definida per $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$.

8.5.1 Transformada de Fourier als espais de Lebesgue

Ara que ja podem identificar $f \in L^p(\mathbb{R})$ amb la distribució temperada T_f , podem definir-ne la transformada de Fourier en el sentit de les distribucions. Podem identificar \widehat{T}_f amb alguna funció raonable? De moment sabem que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores

- si $p = 1$, aleshores $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$, ja que

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx.$$

- si $p = 2$, aleshores la identitat de Plancherel (teorema 7.27) diu que

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Considerem primer les funcions integrables. Donada $f \in L^1(\mathbb{R})$, definim provisionalment

$$\mathcal{F}_1 f(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx,$$

amb la idea de distingir-la de la definició distribucional. Tot seguit veurem que aquestes dues maneres de definir la transformada de Fourier coincideixen:

Exercici 8.38. Demostra que $\mathcal{F}_1 f$ està ben definit i és una funció acotada. Demostra que $T_{\mathcal{F}_1 f} = \widehat{T}_f$. ◁

La transformada de Fourier d'una funció de L^1 podria no ser una funció integrable. Això dificulta l'obtenció d'una fórmula d'inversió: només podem aconseguir aquesta inversió en el sentit distribucional. És per aquest motiu que hem presentat la teoria a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Estudiem ara les funcions de quadrat integrable. Com que la classe de Schwartz és densa a L^2 , sabent que la transformada de Fourier preserva la norma L^2 també podem estendre per densitat la transformada a tot $L^2(\mathbb{T})$:

$$\mathcal{F}_2 f := L^2 - \lim_n \widehat{f}_n.$$

Aquesta definició coincideix amb la definició com a L^2 -límit a $L^2 \cap L^1$, i també coincideix amb la definició en el sentit de les distribucions.

Teorema 8.39. *La definició distribucional i la definició per densitat són equivalents per funcions $f \in L^2(\mathbb{R})$.*

Demostració. Hem de comprovar que donada una successió $\{f_n\}_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - f_n\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

aleshores tenim $\|\widehat{f} - \widehat{f}_n\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Efectivament, si f_n és una successió de Cauchy, aleshores

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \leq \varepsilon$$

si $n, m > n_0$, és a dir que $\{\widehat{f}_n\}_n$ també és de Cauchy i té, per tant, un límit g . Vegem que $T_g = \widehat{T}_f$. Donada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, per tot $n \in \mathbb{N}$ tenim

$$T_g(\varphi) - \widehat{T}_f(\varphi) = \int (g\varphi - f\widehat{\varphi}) = \int (g\varphi - \widehat{f}_n\varphi) + \int (\widehat{f}_n\varphi - f_n\widehat{\varphi}) + \int (f_n\widehat{\varphi} - f\widehat{\varphi}).$$

Notem que $\int (\widehat{f}_n\varphi - f_n\widehat{\varphi}) = 0$ per l'exercici 7.22. Per la desigualtat de Cauchy-Schwarz, tenim

$$\left| \int (g - \widehat{f}_n)\varphi \right| \leq \|g - \widehat{f}_n\|_2 \|\varphi\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

i

$$\left| \int (f - f_n)\varphi \right| \leq \|f - f_n\|_2 \|\varphi\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Deduïm que

$$T_g(\varphi) - \widehat{T}_f(\varphi) = 0$$

i, per tant, \widehat{f} és el límit en L^2 de \widehat{f}_n . □

Teorema 8.40. *La identitat de Plancherel s'estén a $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostració. Vegem primer la fórmula d'intercanvi de barrets per funcions de quadrat integrable. Siguin $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Aleshores ja hem vist que $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2$, on la transformada s'entén en el sentit de les distribucions, i existeixen $\{f_n\}_n, \{g_n\}_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ successions convergents a f i g respectivament en la norma L^2 . A més, com hem vist, les seves transformades convergeixen a la transformada respectiva. Així, com que tenim

$$\int \widehat{f}_n g_n = \int f_n \widehat{g}_n$$

al ser les funcions de Schwartz, deduïm de la desigualtat triangular que

$$\left| \int \widehat{f} g - \widehat{f} \widehat{g} \right| \leq \left| \int \widehat{f} g - \widehat{f}_n g \right| + \left| \int \widehat{f}_n g - \widehat{f}_n g_n \right| + \left| \int f_n \widehat{g}_n - f_n \widehat{g} \right| + \left| \int f_n \widehat{g} - \widehat{f} \widehat{g} \right|.$$

Per la desigualtat de Cauchy-Schwarz, obtenim

$$\left| \int \widehat{f}g - f\widehat{g} \right| \leq \|\widehat{f} - \widehat{f}_n\|_2 \|g\|_2 + \|\widehat{f}_n\|_2 \|g - g_n\|_2 + \|f_n\|_2 \|\widehat{g}_n - \widehat{g}\|_2 + \|f - f_n\|_2 \|\widehat{g}\|_2.$$

Com que els quatre sumands es poden fer tan petits com es vulgui prenent n prou gran, deduïm que

$$\left| \int \widehat{f}g - f\widehat{g} \right| = 0,$$

demostrant que

$$\int \widehat{f}g = \int f\widehat{g}$$

per tot parell de funcions de L^2 .

Finalment demostrarem la igualtat de Plancherel: per fer-ho, recordem que la fórmula d'inversió (8.3) és vàlida a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Així,

$$\int |f|^2 = \int f\bar{f} = \int f\widehat{\widehat{f}} = \int \widehat{\widehat{f}}\bar{f} = \int \widehat{\widehat{f}}\bar{f} = \int \widehat{\widehat{f}}\bar{f}.$$

□

Exercici 8.41. Donats $a, b > 0$, demostra que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t^2} dt = \pi \min\{a, b\}.$$

◁

Observació 8.42. La taula 8.2 explica, entre altres, que la mateixa estructura de les sèries de Fourier apareix en el cas de les transformades. Com dèiem a l'observació 5.5, tot operador acotat a $L^2(\mathbb{T})$ diagonalitza al cantó de Fourier, és a dir que actua com un multiplicador per les freqüències. El mateix podem dir a $L^2(\mathbb{R})$: si un operador lineal acotat $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ és invariant per translacions, aleshores al cantó de Fourier actua com la multiplicació per una funció acotada. En aquest cas el podem expressar al cantó del temps com un operador de convolució amb una distribució temperada definit com en l'exercici 8.23 a les funcions test i estés per densitat, vegeu [SW71, teoremes I.3.16 i I.3.18]. •

Com hem vist, la transformada de Fourier és una bijecció a l'espai $L^2(\mathbb{R})$ (de fet, n'és una isometria). A més a més, usant el lema de Riemann-Lebesgue, la transformada de Fourier envia L^1 a la classe de funcions $C_0(\mathbb{R})$ (funcions contínues amb límit zero a l'infinit), vegeu l'exercici 7.4. De tota manera, aquesta aplicació no és exhaustiva: existeix una funció de $C_0(\mathbb{R})$ que no és transformada de Fourier de cap funció de $L^1(\mathbb{R})$, vegeu l'exercici 7.26.

Notem que $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$ i $L^1(\mathbb{R}) \not\supset L^2(\mathbb{R})$. Aquest fet contrasta amb la situació a $L^p(\mathbb{T})$, on els espais estan sempre inclosos uns en els altres.

Exercici 8.43 (L^p i L^q no estan encaixats). Siqui $1 \leq p < q \leq \infty$. Troba una funció que estigui a L^q i no a L^p . Troba també una funció que estigui a L^p i no a L^q . Nota: mira què passa amb $|x|^{-\alpha}$ entorn de l'origen i entorn de l'infinit. \triangleleft

Si $1 < p < 2$, la transformada de Fourier és un operador acotat de $L^p(\mathbb{R})$ a $L^{p'}(\mathbb{R})$, on p i p' són exponents conjugats, és a dir, on $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Aquest fet es coneix com a desigualtat de Hausdorff-Young:

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}} \leq \|f\|_{L^p}. \quad (8.4)$$

Observació 8.44. Aquesta desigualtat és en realitat un corollari del fet que $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$ i $\|\widehat{f}\|_2 \leq \|f\|_2$. Aleshores el teorema d'interpolació de Riesz-Thorin diu que si escrivim $1/p$ com a combinació lineal convexa de $1/1$ i $1/2$, concretament $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2}$ amb $0 \leq t \leq 1$, aleshores

$$\sup_{f \in L^p \setminus \{0\}} \frac{\|\widehat{f}\|_{L^{p'}}}{\|f\|_p} \leq \left(\sup_{f \in L^1 \setminus \{0\}} \frac{\|\widehat{f}\|_{\infty}}{\|f\|_1} \right)^{1-t} \left(\sup_{f \in L^2 \setminus \{0\}} \frac{\|\widehat{f}\|_2}{\|f\|_2} \right)^t \leq 1,$$

ja que $\frac{1}{p'} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}$. \bullet

De la mateixa manera que hem fet a L^2 , podem definir la transformada de Fourier per densitat a L^p si $1 < p < 2$:

$$\mathcal{F}_p f := L^{p'} - \lim_n \widehat{f}_n.$$

Teorema 8.45. La definició distribucional \widehat{f} i la definició per densitat $\mathcal{F}_p f$ són equivalents per funcions $f \in L^p(\mathbb{R})$.

La demostració és anàloga a la del teorema 8.39, substituint Plancherel per la desigualtat de Hausdorff-Young i la desigualtat de Cauchy-Schwarz per la desigualtat de Hölder.

Malgrat tot, quan $p > 2$ la transformada de Fourier ja no envia $L^p(\mathbb{R})$ a cap espai funcional familiar. Si $f \in L^p$ amb $p > 2$, aleshores \widehat{f} és una distribució temperada, però si no tenim més informació de f , poc podem afegir. Què és tan especial del cas $1 < p < 2$? Doncs que en aquest cas $L^p \subset L^1 + L^2$, és a dir que podem expressar f com a suma de dues funcions, cada una d'elles en un dels dos espais.

Exercici 8.46 ($L^p \subset L^1 + L^2$). Siqui $f \in L^p(\mathbb{R})$ amb $1 < p < 2$. Siqui

$$f_{\lambda}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \lambda \\ 0 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Defineix $f^{\lambda} := f - f_{\lambda}$. Aleshores demostra que $f_{\lambda} \in L^2(\mathbb{R})$ i $f^{\lambda} \in L^1(\mathbb{R})$. Conclou que $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$. \triangleleft

Fins i tot per funcions de Schwartz, si volem tenir una desigualtat del tipus

$$\|\widehat{f}\|_q \leq C \|f\|_p \quad (8.5)$$

per tota $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ens cal que q sigui l'exponent conjugat de p , vegeu l'exemple següent. Tot i que no és evident amb aquest exemple, això només podrà ocórrer amb $1 \leq p \leq 2$.

Exemple 8.47. Considera la família de funcions

$$g_t(x) = e^{-\pi t x^2} \quad \widehat{g}_t(\xi) = \frac{e^{-\pi \xi^2/t}}{\sqrt{t}}.$$

Aquestes funcions són gaussianes, les transformades es poden comprovar usant els capítols anteriors. Com que $\int g_1 = 1$, fent un canvi de variable obtenim que $\int g_t = 1/\sqrt{t}$. Se segueix que les normes de les funcions són

$$\|g_t\|_p^p = \frac{1}{\sqrt{tp}} \quad \text{i} \quad \|\widehat{g}_t\|_q^q = \frac{\sqrt{t}^{1-q}}{\sqrt{q}}.$$

Per exemple, si $p = q = 2$, aleshores $\|g_t\|_2 = \|\widehat{g}_t\|_2$, tal i com ens assegura la identitat de Plancherel. Si (8.5) s'ha de complir per tota funció de Schwartz, cal que

$$\frac{\|\widehat{g}_t\|_q}{\|g_t\|_p} \leq C,$$

i ens cal que la constant C no depengui de t , així que $\sqrt{t}^{\frac{1-q}{q}} \sqrt{tp}^{\frac{1}{p}} / \sqrt{q}^{\frac{1}{q}} \leq C$. Reescriuint-ho, tenim

$$\sqrt{t}^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1} \frac{\sqrt{p}^{\frac{1}{p}}}{\sqrt{q}^{\frac{1}{q}}} \leq C,$$

i ens cal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1 = 0$ per mantenir el terme dependent de t acotat ja sigui quan $t \rightarrow 0$ o quan $t \rightarrow \infty$. \diamond

8.6 Aplicacions de la transformada de Fourier

A continuació presentem tres aplicacions clàssiques de la transformada de Fourier. Aquests resultats tenen aplicacions famoses a la teoria de nombres (fórmula del sumatori de Poisson), a processament del senyal (fórmula de mostreig de Whittaker-Shannon) i a mecànica quàntica (principi d'incertesa de Heisenberg). Les demostracions són boniques i elegants. Per veure altres aplicacions, podeu consultar [Str94, Kör88, SS03] o les altres referències de [PW12, Secció 8.5].

8.6.1 La fórmula del sumatori de Poisson

Considerem una funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Com podem construir una funció periòdica? El primer impuls és fer-ho replegant la recta sobre una circumferència i anar sumant el valors cada vegada. Per exemple, si volem una funció de període 1, podem calcular

$$Pf(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} f(x+n).$$

Aquesta funció, en cas d'estar ben definida, serà periòdica.

Exemple 8.48. Sigui H_t el nucli de la calor definit per $H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ amb $t > 0$. La seva periodització és el nucli de la calor periòdic

$$PH_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(x+n)^2}{4t}}.$$

◇

Un altre mètode seria prendre els valors de la transformada de Fourier a les freqüències naturals i crear una sèrie de Fourier ad-hoc:

$$S_1 f(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x},$$

sempre que aquesta suma tingui sentit.

Exemple 8.49. Si $f \in L^2[-1/2, 1/2]$ i $f(x) = 0$ per $|x| > 1/2$, aleshores les dues perioditzacions estan ben definides, i coincideixen gairebé per tot arreu. Efectivament, $Pf(x) = f(x)$ per tot $x \in (-1/2, 1/2)$, i per altra banda

$$\hat{f}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i n x} f(x) dx = \widehat{P}f(n),$$

així que

$$S_1 f(x) = S(Pf(x)) \stackrel{\text{T.3.42}}{=} Pf(x).$$

◇

Aquest fenomen no és accidental. La fórmula del sumatori de Poisson ho concreta:

Teorema 8.50 (Fórmula del sumatori de Poisson). *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores*

$$Pf(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = S_1 f(x) \quad \text{per tot } x \in \mathbb{R}. \quad (8.6)$$

En particular, per $x = 0$ obtenim

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n). \quad (8.7)$$

Demostració. Al ser f una funció de decaïment ràpid, la convergència de $S_1 f$ i de Pf és uniforme i, per tant, ambdues funcions estan ben definides puntualment.

Analitzem els seus coeficients de Fourier. Per una banda,

$$\widehat{S_1 f}(n) = \int_0^1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m x} \right) e^{-2\pi i n x} dx \stackrel{\text{T.C.D.}}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) \int_0^1 e^{2\pi i m x} e^{-2\pi i n x} dx = \widehat{f}(n).$$

Igual que en l'exemple anterior tenim

$$\begin{aligned} \widehat{P f}(n) &= \int_0^1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) \right) e^{-2\pi i n x} dx \stackrel{\text{T.C.D.}}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(y) e^{-2\pi i n y} dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i n y} dy = \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Així, les dues perioditzacions tenen exactament els mateixos coeficients de Fourier i, per tant, coincideixen gairebé per tot arreu.

Al ser f de decaïment ràpid, tenim que Pf és també infinitament derivable i, en particular, contínua (vegeu l'exercici 7.8). El decaïment ràpid de $\widehat{f}(n)$ també garanteix que $S_1 f$ és contínua. Per tant, les funcions hauran de coincidir per tot arreu. \square

Exemple 8.51. Tornant al cas del nucli de la calor periòdic, en ser el nucli de la calor una funció de Schwartz, podem aplicar la fórmula del sumatori de Poisson i obtenim que

$$(4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(x+n)^2}{4t}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{H}_t(n) e^{2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 t n^2} e^{2\pi i n x},$$

que és una suma de funcions amb variables separades. \diamond

Definició 8.52. Diem que una funció $f \in C(\mathbb{R})$ és de decreixement moderat si existeixen constants $C > 0$ i $\varepsilon > 0$ tals que

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^{1+\varepsilon}} \quad \text{per tot } x \in \mathbb{R}.$$

•

Les funcions de decreixement moderat són sempre integrables, acotades, de quadrat integrable, vegeu [PW12, secció 8.1].

Exercici 8.53. Demuestra que la fórmula del sumatori de Poisson 8.6 segueix sent vàlida per funcions f tals que f i \widehat{f} són contínues de decreixement moderat gairebé per tot $x \in \mathbb{R}$, i de fet és certa a tot arreu si donem condicions per la convergència de la sèrie de Fourier, per exemple $f \in C^2$. Utilitza aquest resultat per demostrar que les perioditzacions del nucli de Poisson $P_y(x) := \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$ per $y > 0$ i del nucli de Féjer $F_R(x) := R \left(\frac{\sin(\pi R x)}{\pi R x} \right)^2$ per $R > 0$ coincideixen amb els nuclis periòdics de Poisson i Féjer definits al capítol 4. \triangleleft

Exercici 8.54. La funció theta de Jacobi es defineix com

$$\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

per $t > 0$. Demuestra que $\vartheta(t) = t^{-1/2}\vartheta(1/t)$. ◁

Exercici 8.55. Demuestra que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + t^2} = \frac{\pi}{t} \frac{1 + e^{-2\pi t}}{1 - e^{-2\pi t}},$$

a partir de la funció $e^{-2\pi|x|t}$. Troba la igualtat que resulta en fer el límit per $t \rightarrow 0$. ◁

Anem a rellegir la fórmula del sumatori de Poisson en termes de distribucions. A l'exercici 8.28 hem introduït la translació de la delta de Dirac $\delta_h := \tau_h \delta_0$, i hem vist que satisfà que $\delta_h(\varphi) = \varphi(h)$. Aleshores (8.7) es pot escriure com

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\delta}_n(f).$$

Dit d'una altra manera,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n = \widehat{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n},$$

és a dir que la suma de translacions de la delta de Dirac amb longituds enteres és la transformada de Fourier d'ella mateixa.

Per altra banda, com que $\widehat{\delta}_n = T_{e^{2\pi i n x}}$, podem dir, almenys formalment, que la *pinta infinita* $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n x}$, tot i que no sabem ben bé què significa aquest darrer sumatori. A [Str94, secció 7.3] pots trobar una aplicació de la fórmula del sumatori de Poisson de dues dimensions a quasicristalls.

8.6.2 La fórmula de mostreig de Whittaker-Shannon

La fórmula de mostreig de Whittaker²-Shannon³ ens diu que les funcions de banda limitada, és a dir, aquelles que tenen transformada de Fourier amb suport compacte, es poden reconstruir completament prenent-ne només algunes mostres. Per enunciar-lo, ens cal la funció sinc, definida per

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Teorema 8.56 (Fórmula de mostreig de Whittaker-Shannon). *Per tota funció contínua de decreixement moderat f tal que $\text{supp } \widehat{f} \subset [-L/2, L/2]$, els valors de $f(n/L)$ determinen la funció sencera mitjançant la fórmula*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n/L) \text{sinc} \left(\frac{x - n}{L} \right).$$

²Edmund Taylor Whittaker, 1873–1956

³Claude Elwood Shannon, 1916–2001

Notem que com més gran és el suport, més mostres cal prendre.

Projecte 8.57 (Fórmula de mostreig de Whittaker-Shannon). Demostra la fórmula de mostreig de Whittaker-Shannon per funcions de la classe de Schwartz. \triangleleft

8.6.3 El principi d'incertesa de Heisenberg

És impossible trobar una funció que estigui simultàniament ben localitzada en temps i en freqüència. El principi d'incertesa de Heisenberg⁴ és una desigualtat que expressa aquesta noció. Encara es pot anar més enllà: no hi ha cap funció de quadrat integrable amb suport compacte i de banda limitada.

Teorema 8.58. *Si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, amb $\|\psi\|_2 = 1$. Aleshores*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Demostració. Per hipòtesi, $\int \psi^2 = 1$. Procedim a integrar per parts, amb $u = \psi(x)^2$ i $dv = dx$. Notem que

$$\frac{d}{dx} |\psi|^2 = \frac{d}{dx} (\psi \bar{\psi}) = \psi \bar{\psi}' + \bar{\psi} \psi' = \overline{\psi \psi'} + \bar{\psi} \psi' = 2\operatorname{Re}(\bar{\psi} \psi').$$

Usant el decaïment ràpid de la funció per obviar els termes de frontera, obtenim

$$\begin{aligned} 1 &= \int |\psi(x)|^2 dx = [x|\psi(x)|^2]_{-\infty}^{\infty} - 2 \int_{\mathbb{R}} x \operatorname{Re}(\bar{\psi}(x) \psi'(x)) dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x| |\psi(x)| |\psi'(x)| dx \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\text{T.7.27; g)}}{=} 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Notem que al darrer pas hem usat la identitat de Plancherel i la propietat g) de la taula 7.1 que relaciona la transformada de Fourier d'una derivada amb la multiplicació pel polinomi $2\pi i \xi$. \square

El principi d'incertesa es pot estendre a funcions de quadrat integrable per un argument de densitat.

Exercici 8.59. Comprova que la igualtat en el principi d'incertesa s'obté si i només si $\psi(x) = \sqrt{\frac{2B}{\pi}} e^{-Bx^2}$ per algun valor $B > 0$.

Pista: la igualtat s'assoleix a la desigualtat de Cauchy-Schwarz si i només si una funció és múltiple de l'altre g.p.t. arreu. \triangleleft

⁴Werner Heisenberg, 1901–1976

Exercici 8.60. Comprova que sota les condicions del teorema 8.58, tenim que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (\xi - \xi_0)^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2},$$

per qualsevol parell $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$.

Pista: pots aplicar el principi d'incertesa a les funcions $e^{-2\pi i x \xi_0} \psi(x + x_0)$ i usar el diccionari temps-freqüència. \triangleleft

Anem a fer una demostració per esport. Suposem que f té suport compacte a $[-a, a]$ i \widehat{f} té suport a $[-b, b]$. Com veurem això no és possible, però de moment suposem que és veritat. Aleshores,

$$\int x^2 f(x)^2 dx \leq a^2 \int f^2 = a^2.$$

De la mateixa manera obtenim $b^2 \geq \int \xi^2 \widehat{f}(\xi)^2 d\xi$. Pel principi d'incertesa això implicaria que $ab \geq \frac{1}{4\pi}$.

A l'exercici 8.61 veurem que, de fet, això és impossible. Però es podria obtenir un resultat similar per funcions que tenen quasi tota la norma L^2 concentrada a un interval i el mateix per la norma de la transformada.

Exercici 8.61. Sigui $f \in L^2(\mathbb{R})$. Demostra que f i \widehat{f} no poden tenir simultàniament el suport compacte, excepte si $f = 0$.

Pista: Suposa que f té suport a $[0, L/2]$ i que \widehat{f} té suport compacte. Expressa f com a sèrie de Fourier a $[0, L]$, i observa que f ha de ser un polinomi trigonomètric, que no pot anul·lar-se en cap interval. \triangleleft

Les funcions trigonomètriques no són de quadrat integrable. Però com a distribucions sí que tenen transformada de Fourier.

Exercici 8.62. Comprova que la transformada de Fourier de $e_h(\xi) = e^{2\pi i h \xi}$ en el sentit de les distribucions és la delta traslladada $\delta_h : \varphi \mapsto \varphi(h)$. \triangleleft

L'exercici precedent il·lustra també el principi de localització: quan una funció té el suport concentrat sobretot en un interval de longitud d , aleshores la transformada de Fourier està concentrada en un interval de longitud almenys d^{-1} . Així, el suport en el pla temps-freqüència és essencialment un rectangle d'àrea major o igual a 1.

Observació 8.63. El principi d'incertesa té una interpretació en mecànica quàntica, de la qual se'n deriva el nom. No es pot mesurar amb precisió el moment d'una partícula lliure i la seva posició simultàniament. Com més bona és una mesura, pitjor serà l'altra.

Matemàticament, l'estat d'una partícula lliure es descriu com una funció ψ de norma $\|\psi\|_2 = 1$. La densitat de probabilitat que aquesta partícula estigui situada al punt x és $|\psi(x)|^2$. La densitat de probabilitat que el seu moment sigui ξ és $|\widehat{\psi}(\xi)|^2$. La localització mitjana u i el moment mitjà ω de la partícula, es troben com

$$u = \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 dx \quad i \quad \omega = \int_{\mathbb{R}} \xi |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

8 Distribucions temperades i transformada de Fourier

La *variància* σ_x^2 , que mesura la dispersió entorn de la localització mitjana, i la variància σ_ξ^2 del moment, venen donades per

$$\sigma_x^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - u)^2 |\psi(x)|^2 dx \quad i \quad \sigma_\xi^2 = \int_{\mathbb{R}} (\xi - \omega)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Aquests nombres mesuren com de lluny podem esperar que es trobi la posició i el moment reals de la partícula de la seva posició i moment mitjans. Com més gran sigui σ_x més gran serà la incertesa sobre la seva posició. Com més gran sigui σ_ξ més gran serà la incertesa sobre el seu moment. El principi d'incertesa de Heisenberg diu que $\sigma_x^2 \sigma_\xi^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}$, de manera que no poden ser ambdues arbitràriament petites simultàniament.

Una *caixa de Heisenberg*, o *caixa de temps-freqüència* per una funció ψ amb $\|\psi\|_2 = 1$ és un rectangle centrat a (u, ω) i de dimensions $\sigma_x \times \sigma_\xi$, és a dir que sempre té àrea superior a $\frac{1}{4\pi}$. Tot i que no hi ha funcions amb suport compacte en temps i freqüència simultàniament, si que hi ha funcions amb caixes de Heisenberg acotades, cosa que ens parla de la localització de la funció en mitjana. •

9 Avaluació

L'assignatura s'avaluarà utilitzant una diversitat d'inputs.

3 punts de l'assignatura s'avaluaran mitjançant entrega de problemes fets a classe o presentats a classe. Les dates es diran a classe i s'avisaran també a través del campus virtual.

Els altres 7 punts es poden obtenir mitjançant els examens parcial i final (que farien mitjana) o bé mitjançant l'elaboració de treballs de menor o major envergadura:

1. Presentar la demostració d'un teorema dels apunts a classe, a acordar amb el professor. [1 punt]
2. Escriure un resum de l'aplicació de l'anàlisi harmònica en alguna altra àrea. [1 punt]
3. Escriure un resum d'un article rellevant de l'àrea d'anàlisi harmònica a acordar amb el professor, incloent un esquema de la demostració del resultat principal. [2 punts]
4. Elaboració d'un projecte, vegeu més avall. [2-5 punts]
 - a) La redacció d'un petit treball. [2 punts]
 - b) Exposició oral. [2 punts]
 - c) Pòster expositiu. [1-2 punts]
5. Muntar un estand a la Matefest-Infifest, la festa de la facultat on es convida a alumnes de secundària a passejar per la facultat. Cal que estigui pensat per alumnat d'entre 14 i 18 anys d'edat.
6. Trobar errors als apunts i avisar al fòrum del campus virtual. [fins a 1 punt]

Durant el febrer cal decidir per quina avaluació s'opta, si per examens o per treballs. També es pot fer intermitja, però cal decidir per endavant quants punts es faran per treballs (T_{\max}) i quants es decidiran als examens ($7 - T_{\max}$). La puntuació final és

$$0,3 * P + (0,7 - 0,1 * T_{\max}) * E + T.$$

Si l'alumne opta per fer treballs amb $T_{\max} \geq 4$, aleshores la nota d'examens no inclourà el parcial.

Per fer recerca d'errors als apunts no cal avisar ni acordar-ho. Quan l'alumne trobi errors, ho ha d'escriure al campus virtual. Si és la primera persona en detectar l'error, tindrà la compensació. Aquesta se suma a T i incrementa el valor de T_{\max} en cas que $T_{\max} < 7$. Si $T_{\max} = 7$, se sumen els punts a T . Si finalment T és superior a 7, es truncarà a 7.

Projectes de treball:

Una part important de l'avaluació de l'assignatura consisteix en fer projectes. A continuació hi ha una llista de projectes. Els projectes inclouen la revisió de la literatura, i alguna de les següents accions a escollir:

1. La redacció d'un petit treball (d'entre cinc i deu pàgines). [2 punts]
2. Exposició oral de 30'. [2 punts]
3. Pòster expositiu per fer el dia del tancament del curs. [1-2 punts]

Es poden fer les accions 1 i 2 o bé 1 i 3, o només una de les accions, a raó de dos punts cada una. es poden fer les tres accions, i en aquest cas el pòster contaria un punt.

Quan diem revisió de la literatura, vol dir que a part de les referències que es donen al treball, cal cercar i consultar com a mínim una referència no inclosa a l'explicació. El llibre [PW12] no compta com a referència no inclosa. És positiu fer sempre una petita recerca històrica sobre el problema plantejat.

Cal concertar amb el professorat els projectes per tal de no solapar-se. En cas de fer un projecte en equip, la puntuació es repartirà a parts iguals entre els seus membres. És convenient fer una reunió de tutoria quan ja tinguis el treball plantejat, amb la literatura revisada.

9.1 Projectes del capítol Sèries de Fourier

Projecte (1.24: Equació de la calor). Llegeix “Fourier’s point of view” a [Kra99, pp. 34–39], on s’explica l’equació de la calor en una barra de ferro i la solució que va proposar i exposa’n el contingut. Pots consultar també [PW12, pp. 16–18]. ◀

Projecte (1.25: Els harmònics dels instruments de vent fusta). Llegeix els capítols 3.4 i 3.5 de [Ben06]. Planteja i soluciona les equacions del clarinet i el saxofon tal i com hem fet amb l’equació (1.11). ◀

Projecte (1.26: Les funcions de Bessel). Explica les funcions de Bessel. Pots consultar [Ben06, seccions 2.8 a 2.10]. Soluciona alguns dels exercicis proposats als capítols mencionats. ◀

Projecte (1.27: Els harmònics dels panderos circulars). Planteja i soluciona les equacions del pandero circular. Pots consultar [Ben06, secció 3.6]. Et caldrà comprendre primer [Ben06, seccions 2.8 a 2.10] sobre les funcions de Bessel. ◀

9.2 Projectes del capítol Interludi: conceptes d’anàlisi

Projecte (2.9: Un conjunt no mesurable). Explica l’exemple de Vitali de conjunt no mesurable. Descriu la relació amb l’axioma de l’elecció. Descriu també funcions no mesurables de gràfica densa a \mathbb{R}^2 . Pots consultar [Her06, seccions 5.1, 7.2]. També pots complementar el treball amb la paradoxa de Banach-Tarski. ◀

Projecte (2.55: La funció de Weierstrass). Explica la definició de la funció de Weierstrass i demostra que no és diferenciable enlloc tot i ser contínua. Pots consultar [Bre07, capítol 6]. \triangleleft

9.3 Projectes del capítol Convergència puntual

Projecte (3.20: Decaïment dels coeficients de Fourier implica més regularitat). Utilitzant el teorema 3.18 i argumentant per inducció demostra el teorema 3.19. Fes primer el cas $k = 1$. Et caldrà demostrar que $S_N f$ convergeix uniformement a f i que $(S_N f)'$ convergeix uniformement a h . Aleshores hauràs de veure que f és diferenciable amb $f' = h$. Aquest darrer pas és conseqüència d'un teorema d'intercanvi de límits i derivades (que hauràs de demostrar) que diu que si $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C^1(I)$ convergeixen uniformement a f en un interval tancat I i les seves derivades convergeixen uniformement a h , aleshores

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (f_j)' = \left(\lim_{j \rightarrow \infty} f_j \right)'.$$

Exposa altres resultats que relacionin el decaïment dels coeficients de Fourier amb la regularitat de la funció. \triangleleft

Projecte (3.33: Contraexemple de Du Bois-Reymond). Llegeix [Pin02, secció 1.6.1], [SS03, capítol 3, secció 2.2] i/o [Kör88, capítol 18, teorema 18.1] on es demostra el teorema de Du Bois-Reymond. Escribeu una explicació de la construcció per un alumne del teu mateix estadi. \triangleleft

Projecte (3.39: Contraexemple de Kolmogorov). Existeix una funció integrable $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(\theta)| = \infty$ gairebé per tot $\theta \in \mathbb{T}$. \triangleleft

9.4 Projectes del capítol Mètodes sumatoris

Projecte (4.23: El teorema de diferenciació de Lebesgue). El teorema de diferenciació de Lebesgue diu que: “Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, aleshores

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{\theta-h}^{\theta+h} f(y) dy = f(\theta)$$

g.p.t. $\theta \in \mathbb{T}$ ”.

Aquest teorema és fonamental en anàlisi harmònica. Ens diu que, en certa manera, les funcions integrables tenen un comportament en mitjana similar al de les contínues, gairebé per tot arreu.

Demuestra el resultat per $f \in C(\mathbb{T})$ sense ajuda. Escribeu també la demostració del resultat general. Pots consultar [Ste70, teorema 1 b), Corollari 1 i lema 1.6, pàg. 5–10] (pots ometre quasi tota la pàgina 7). Un cop demostrats el teorema 1b i el lema 1.6, la demostració del corollari 1 (teorema de diferenciació de Lebesgue) també es pot trobar a la wikipedia força ben presentat. \triangleleft

Projecte (4.44: Problema de Dirichlet). Sigui $f \in C(\mathbb{T})$. Aleshores definim $u_f(re^{i\theta}) = P_r * f(\theta)$. Demuestra que u_f és contínua fins la frontera i el seu límit radial és $f(\theta)$. Dedueix que

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0 & \text{per } z \in \mathbb{D} \\ u(e^{i\theta}) = f(\theta) & \text{per } \theta \in \mathbb{T} \end{cases}$$

té com a solució u_f (en particular cal deduir que el límit no és només radial). Pots consultar la bibliografia de l'assignatura o mirar de fer-ho sense ajuda.

Explica què és una funció de Green per dominis infinitament diferenciables i relaciona-ho amb el nucli de Poisson del disc, consulta per exemple [Fol95, seccions 2.E i 2.H]. \triangleleft

Projecte (4.45: Mètodes sumatoris i mitjanes). Sigui $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió de nombres reals. Les seves mitjanes de Cesàro es defineixen com $\sigma_n := \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{n}$. Les mitjanes d'Abel es defineixen per $0 \leq r < 1$ com $A_r := (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} r^n b_n$. Demuestra que si una successió és convergent aleshores les seves mitjanes de Cesàro σ_n i les d'Abel A_r convergeixen al mateix límit. Troba exemples de successions divergents amb mitjanes de Cesàro i/o d'Abel convergents. Pots aconseguir totes les quatre combinacions possibles? Notem que el límit d'Abel és en realitat un límit iterat $\lim_{r \rightarrow 1^-} \lim_{N \rightarrow \infty} (1-r) \sum_{n=1}^N r^n b_n$. Què passa si invertim l'ordre dels límits? Pots trobar pistes a [PW12, secció 4.8]. \triangleleft

9.5 Projectes del capítol Funcions de quadrat integrable

Projecte (5.24: El problema isoperimètric). El cercle és la figura amb un perímetre fixat que cobreix més superfície. Demosta-ho seguint els passos de Steiner (demostració geomètrica) i de Hurwitz (usant anàlisi de Fourier). Consulta les referències proposades a [PW12, secció 5.5]. \triangleleft

9.6 Projectes del capítol Un passeig per la transformada de Fourier discreta

Projecte (6.20: Algorisme FFT). Crea un algorisme FFT amb el llenguatge de programació que prefereixis. Utilitza't per multiplicar dos polinomis. Cal que el codi estigui tot escrit i comentat per tu. Pots inspirar-te amb <https://youtu.be/h7ap07q16V0>, per exemple.

El treball, a part del codi, ha d'incloure un text de 2-4 pàgines explicant l'aplicació de l'algorisme FFT a la multiplicació de polinomis. \triangleleft

Projecte (6.21: Dibuixar amb epicicles). Crea un programa amb Processing.org (o algun programari similar) que donada una corba tancada, determini els radis necessaris per dibuixar una aproximació mitjançant *epicicles*. Idealment l'inici ha de ser una finestra en blanc on l'usuari hi pugui fer un dibuix a mà alçada d'una corba. Un cop generada la corba, el programa ha de fer els càlculs d'aquests radis per freqüències de rotació entre -200 i +200, per exemple. Aleshores l'usuari ha de poder afegir i treure freqüències i que el programa mostri el dibuix amb epicicles animat. Pots considerar també escriure un codi

capaç d'extreure una corba d'una imatge en blanc i negre (on els píxels negres representen el dibuix que volem reproduir).

El treball, a part del codi, ha d'incloure un text de 2-4 pàgines explicant el problema del venedor ambulat (traveling salesman problem). Pots inspirar-te amb <https://youtu.be/r6sGWTCMz2k>, <https://youtu.be/qS4H6PEcCCA>, <https://youtu.be/1pmBjIZ20pE> o <https://youtu.be/SC5CX8drAtU>. ◀

Projecte (6.22: Espectrograma). Crea una interfície amb Processing.org o algun programari similar per generar un espectrograma que analitzi el so d'un micròfon connectat a l'ordinador usant la FFT per finestres. Cal que el codi estigui tot escrit i comentat per tu. Processing ja té una FFT implementada. Pots començar per entendre aquest codi: <https://processing.org/reference/libraries/sound/FFT.html>.

El treball, a part del codi, ha d'incloure un text de 2-4 pàgines explicant el fenomen de l'aliàsi i la freqüència de Nyquist. ◀

Projecte (6.23: Grups abelians finits). Explica l'anàlisi de Fourier en grups abelians finits. Demuestra que els caràcters formen una base ortonormal i prova la identitat de Plancherel. Pots consultar [SS03, capítol 7], i resoldre algun exercici o problema del final del capítol. ◀

9.8 Projectes del capítol Més enllà del paradís

Projecte (8.21: La transformada de Hilbert). Demuestra que la transformada de Hilbert

$$H\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(y)}{x-y} dy.$$

defineix una distribució temperada per cada x . Explica què és el valor principal i per què és necessari per definir la transformada de Hilbert. Comprova que es pot definir també com $Hf = (-i \operatorname{sign}(\xi) \hat{f}(\xi))^\sim$ i que defineix una isometria a $L^2(\mathbb{R})$. Pots consultar [Duo01, capítol 3] o bé [PW12, seccions 8.7, 12.1 i 12.2]. ◀

Projecte (8.57: Fórmula de mostreig de Whittaker-Shannon). Demuestra la fórmula de mostreig de Whittaker-Shannon per funcions de la classe de Schwartz. Pots trobar una demostració a [PW12, secció 8.5.2]. ◀

9.9 Projectes sobre anàlisi harmònica més enllà de Fourier

Projecte 9.1 (Transformada de Fourier en finestres i bases de Gabor). Explica la transformada de Fourier en finestres i les seves limitacions, així com la definició de les bases de Gabor. Demuestra el teorema de Balian-Low.

Pots consultar [PW12, secció 9.2] i les referències allà contingudes. ◀

Projecte 9.2 (Ondetes). Defineix base d'ondetes (wavelet basis en anglès). Demuestra que l'ondeta de Haar $h(x) := -\chi_{[0,1/2)}(x) + \chi_{[1/2,1)}(x)$ i les seves translacions i reescalaments

$h_{j,k}(x) = 2^{j/2}h(2^jx - k)$ per $j, k \in \mathbb{Z}$ formen una base d'ondetes. Fes el mateix amb l'ondeta de Shannon definida com

$$\widehat{\psi}(\xi) := e^{2\pi i \xi} \chi_{[-1, -1/2) \cup [1/2, 1)} \chi.$$

Demostra que l'ondeta de Shannon és infinitament diferenciable.

Explica l'ondeta de Daubechies i la seva importància. Pots consultar [PW12, secció 9.3] i les referències allà contingudes. \triangleleft

9.10 Projectes d'anàlisi harmònica avançada

Projecte 9.3 (Funcions maximals). L'operador maximal de Hardy-Littlewood d'una funció localment integrable f es defineix com

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy.$$

Demostra que aquest operador és acotat a L^∞ . Demostra que és acotat feblement a L^1 , és a dir que

$$|\{x : |Mf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1}$$

per tota $f \in L^1(\mathbb{R})$ i tot $\lambda > 0$.

Utilitzant el teorema d'interpolació de Marcinkiewicz, demostra que l'operador maximal és acotat a L^p per $1 < p \leq \infty$. Demostra també aquest resultat. \triangleleft

Projecte 9.4 (BMO i la desigualtat de John-Nirenberg). Donada una funció localment integrable f , la seva funció maximal ajustada es defineix com

$$M^\# f(x) := \sup_{Q:x \in Q} \int_Q |f(y) - \int_Q f(z) dz| dy,$$

on el suprem es pren sobre els cubs de costats paral·lels als eixos.

Notem que aquesta funció mesura com oscil·la f al voltant de la seva mitjana en boles centrades en x . Diem que $f \in BMO$ (bounded mean oscillation) si $M^\# f \in L^\infty$ i definim la seva norma com $\|f\|_* := \|M^\# f\|_\infty$. Cal dir que no es tracta d'una norma ja que les funcions constants tenen mesura zero. Així doncs és una norma si entenem les funcions mòdul constants additives. Demostra la desigualtat de John-Nirenberg

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}| \leq C_1 e^{-C_2 \lambda / \|f\|_*} |Q|.$$

Demostra que aleshores les normes

$$\|f\|_{*,p} := \sup_{Q:x \in Q} \left(\int_Q |f(y) - \int_Q f(z) dz|^p dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

són totes equivalents per $1 \leq p < \infty$. Pots consultar [Duo01, capítol 6]. \triangleleft

Projecte 9.5 (Espais de Lebesgue amb pesos). Esbrina què són els pesos de Muckenhoupt i quina és la seva relació amb l'operador maximal. Demuestra també que satisfan una desigualtat de Hölder invertida. Pots consultar [Duo01, seccions 7.1 i 7.2]. \triangleleft

Projecte 9.6 (Lema de Cotlar). El lema de Cotlar diu el següent: Sigui H un espai de Hilbert i considerem una successió d'operadors lineals i acotats $\{T_j\}_j$ amb adjunts $\{T_j^*\}_j$; de manera que

$$\|T_i T_j^*\|_{\mathcal{L}(H)} + \|T_i^* T_j\|_{\mathcal{L}(H)} \leq a_{i-j}$$

on $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és una successió. Aleshores per $n \leq m$ tenim

$$\left\| \sum_{j=n}^m T_j \right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^{\frac{1}{2}}.$$

Demuestra el lema i utilitza'l per comprovar que les transformades de Hilbert truncades

$$H_{j,k} \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{2^j < |x-y| \leq 2^k} \frac{\varphi(y)}{x-y} dy.$$

són uniformement acotades.

Pots consultar [Duo01, Secció 9.1]. \triangleleft

9.11 Articles aptes per fer resum i esquema

Podeu trobar una pila d'articles interessants i clàssics a la bibliografia del llibre d'Elias M. Stein [SM93]. Us afegeixo alguns articles que són majoritàriament moderns amb els que m'he topat els darrers anys i que crec que poden ser també interessants.

9.11.1 Ondetes

1. Daubechies, I. (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure and Appl. Math.* 41, 909–996.

EDP's

1. Caffarelli, L.; Silvestre, L. (2007). An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian. *Communications in Partial Differential Equations* 32(8), 1245–1260. (<https://doi.org/10.1080/03605300600987306>). El resum seria sobre la demostració de (3.1) a la secció 3.2.
2. Kiselev, A.; Nazarov, F.; Volberg, A. (2007). Global well-posedness for the critical 2D dissipative quasi-geostrophic equation. *Inventiones mathematicae* 167.3, 445–453. (<https://arxiv.org/pdf/math/0604185.pdf>). L'esquema seria sobre el teorema.
3. Astala, K.; Iwaniec, T.; Saksman, E. (2001). Beltrami operators in the plane. *Duke Math. J.* 107(1), 27–56. (<https://tinyurl.com/aech2ek8>). L'esquema seria sobre el teorema 1.

4. Alessandrini, G.; Gaburro, G. (2009). The local Calderon problem and the determination at the boundary of the conductivity. *Communications in Partial Differential Equations* 34(8), 918–936. (<https://tinyurl.com/nhf9vcuv>). L'esquema seria sobre el teorema 2.
5. Astala, K.; Päivärinta, L. (2006). Calderón's inverse conductivity problem in the plane. *Annals of Mathematics*, 163, 265–299. (<https://tinyurl.com/2p8khmay>). L'esquema seria sobre la proposició 7.4.
6. Alt, H.W.; Caffarelli, L.A.; Friedman, A. (1984). Variational Problems with Two Phases and their Free Boundaries. *Transactions of the American Mathematical Society* 282(2), 431–461. (<https://www.ams.org/journals/tran/1984-282-02/S0002-9947-1984-0732100-6/S0002-9947-1984-0732100-6.pdf>). L'esquema seria sobre el lema 5.1, o fórmula de monotonia.

Espais de funcions

1. Dorronsoro, J. (1985). Mean oscillation and Besov spaces. *Canad. Math. Bull.* 28(4) 474–480. (<https://tinyurl.com/bdzf47f9>). L'esquema seria sobre el teorema 1.
2. Hajlasz, P.; Liu, Z. (2017). A Marcinkiewicz integral type characterization of the Sobolev space. *Publ. Mat.*, 61(1), 83-104. (https://doi.org/10.5565/PUBLMAT_61117_03). L'esquema seria sobre el Teorema 1.4.
3. Alabern, R.; Mateu, J.; Verdera, J. (2012). A new characterization of Sobolev spaces on \mathbb{R}^n . *Mathematische Annalen*, 354, 589–626. (<https://link.springer.com/article/10.1007/s00208-011-0738-0>). L'esquema seria sobre el teorema 1.

Calderón-Zygmund

1. Verdera Melenchon, J. M. (2001). L^2 boundedness of the Cauchy Integral and Menger curvature. *Contemp. Math.*, 277, 139–158. (<https://tinyurl.com/2cmd4xp5>) L'esquema seria sobre l'estimació (4.1) de l'article.
2. Tolsa, X. (2000). Principal values for the Cauchy integral and rectifiability. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(7), 2111–2119. (<https://www.ams.org/journals/proc/2000-128-07/S0002-9939-00-05264-3/S0002-9939-00-05264-3.pdf>). L'esquema seria sobre el teorema 2.2.

9.11.2 GMT

1. Weiss, G. S. (1999). Partial regularity for a minimum problem with free boundary. *The Journal of Geometric Analysis*, 9(2), 317–326. (<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF02921941.pdf>). L'esquema hauria de cobrir el teorema 1.2 o fórmula de monotonia.

9.11.3 Mesura harmònica

1. Aikawa, H. (2004). Characterization of a uniform domain by the boundary Harnack principle. Harmonic analysis and its applications, Yokohama Publ., Yokohama 117.

9.12 Possibles aplicacions a estudiar

A continuació trobareu una llista no exhaustiva de possibles aplicacions de l'anàlisi harmònica a resumir.

1. Física quàntica i principi de la incertesa.
2. Física quàntica i equació de Schrödinger.
3. L'ús de distribucions i de derivades distribucionals i febles a física.
4. Disseny de filtres (vegeu [OS10, Capítol 7], per exemple).
5. Transformades de Hilbert discretes (vegeu [OS10, Capítol 12], per exemple).
6. Cristalls, quasicristalls i la fórmula del sumatori de Poisson (vegeu [Str94, Secció 7.3]).
7. Sampleig de funcions (vegeu [Sha49]).
8. Comprensió d'imatges usant anàlisi harmònica.
9. Tècniques de marcat d'imatges (o watermarking) al cantó de les freqüències.
10. ...

Bibliografía

- [Ben06] Dave Benson. *Music: A mathematical offering*. 2006.
- [Bre07] David M Bressoud. *A radical approach to real analysis*, volume 2. MAA, 2nd edition, 2007.
- [Duo01] Javier Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29. American Mathematical Soc., 2001.
- [Duo03] Javier Duoandikoetxea. *Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier*. UNAN, 2003.
- [EG15] Lawrence Craig Evans and Ronald F Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC press, 2015.
- [Fol84] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 1984.
- [Fol95] Gerald B Folland. *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, 2nd edition, 1995.
- [Gra08] Loukas Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. New York: Springer, 2nd edition, 2008.
- [Her06] Horst Herrlich. *Axiom of choice*, volume 1876. Springer, 2006.
- [HOH10] Harald Hanche-Olsen and Helge Holden. The Kolmogorov–Riesz compactness theorem. *Expo. Math.*, 28(4):385–394, 2010.
- [Kat68] Yitzhak Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Dover Publications, inc., 1968.
- [Kör88] T. W. Körner. *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 1988.
- [Kra99] Steven G. Krantz. *A Panorama of Harmonic Analysis*. Number 27 in The Carus Mathematical Monographs. Mathematical Association of America, 1999.
- [OS10] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer. *Discrete-time signal processing*. Pearson, 3rd edition, 2010.
- [Pin02] Mark A. Pinsky. *Introduction to Fourier analysis and wavelets*. Number 102 in Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2002.

Bibliografía

- [PW12] María Cristina Pereyra and Lesley A. Ward. *Harmonic Analysis: From Fourier to Wavelets*. American Mathematical Society, 2012.
- [Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-Hill Education, 1987.
- [Sha49] C.E. Shannon. Communications in the presence of noise. *Proc. Inst. Radio Eng.*, 37:10–21, 1949.
- [SM93] Elias M Stein and Timothy S Murphy. *Harmonic Analysis: Real-variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, volume 3. Princeton University Press, 1993.
- [SS03] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis. An introduction*. Number I in Princeton lectures in analysis. Princeton University Press, 2003.
- [Ste70] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*, volume 30 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, 1970.
- [Str94] Robert S Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. Studies in advanced mathematics. CRC press, 1994.
- [Str00] Robert S Strichartz. *The way of analysis*. Jones & Barlett publishers, revised edition, 2000.
- [SW71] Elias M Stein and Guido L Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, volume 32 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, 1971.

10 Solucions

Solució de l'exercici 1.12

1. $f(\theta) = \theta, (-\pi < \theta < \pi)$

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{i(-1)^n}{n} & \text{altrament,} \end{cases} \quad b_n(f) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad c_n(f) = 0.$$

2. $f(\theta) = |\theta|, (-\pi < \theta < \pi)$

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 0, \\ \frac{-2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ és imparell,} \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases} \quad b_n(f) = 0, \quad c_n(f) = \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0, \\ \frac{-4}{\pi n^2} & \text{si } 2 \nmid n, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

3. $f(\theta) = \pi - \theta, (0 < \theta < 2\pi),$

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{-i}{n} & \text{si } n \neq 1, \end{cases} \quad b_n(f) = \frac{2}{n} \quad c_n(f) = 0$$

4. $f(\theta) = \begin{cases} 0, & (-\pi < \theta < 0); \\ \theta, & (0 < \theta < \pi), \end{cases}$

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{c_n(f) - ib_n(f)}{2} & \text{si } n > 0, \\ \frac{c_n(f)}{2} & \text{si } n = 0, \\ \frac{c_{-n}(f) + ib_{-n}(f)}{2} & \text{si } n < 0, \end{cases} \quad b_n(f) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 0, \\ \frac{2}{\pi n^2} & \text{si } 2 \nmid n, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

5. $f(\theta) = \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2},$

$$b_n(f) = 0 \quad c_n(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \frac{-1}{2} & \text{si } n = 2, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

6. $f(\theta) = \begin{cases} -1, & (-\pi < \theta < 0); \\ 1, & (0 < \theta < \pi), \end{cases}$

$$b_n(f) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ és imparell,} \\ 0 & \text{si } n \text{ és parell,} \end{cases} \quad c_n(f) = 0.$$

10 Solucions

$$7. f(\theta) = \begin{cases} 0, & (-\pi < \theta < 0); \\ 1, & (0 < \theta < \pi), \end{cases}$$

$$b_n(f) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ és imparell,} \\ 0 & \text{si } n \text{ és parell.} \end{cases} \quad c_n(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$8. f(\theta) = |\sin \theta|,$$

$$b_n(f) = 0 \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \text{ és imparell,} \\ \frac{-4}{\pi(n^2-1)} & \text{si } n \text{ és parell no nul.} \end{cases}$$

$$9. f(\theta) = |\cos \theta|,$$

$$b_n(f) = 0 \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \text{ és imparell,} \\ \frac{4(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{\pi(n^2-1)} & \text{si } n \text{ és parell no nul.} \end{cases}$$

$$10. f(\theta) = \begin{cases} 0, & (-\pi < \theta < 0); \\ \sin \theta, & (0 < \theta < \pi), \end{cases} \quad \text{així que } f(\theta) = \frac{\sin \theta + |\sin \theta|}{2} :$$

$$b_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases} \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \text{ és imparell,} \\ \frac{-2}{\pi(n^2-1)} & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$11. f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & (|\theta| < a); \\ 0, & (a < |\theta| < \pi), \end{cases}$$

$$b_n(f) = 0 \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } n = 0, \\ \frac{\sin(na)}{na\pi} & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$12. f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & (|\theta - \theta_0| < a); \\ 0, & (a < |\theta - \theta_0| < \pi), \end{cases}$$

$$b_n(f) = \frac{\sin(n\theta_0) \sin(na)}{na\pi} \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } n = 0, \\ \frac{\cos(n\theta_0) \sin(na)}{na\pi} & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$13. f(\theta) = \begin{cases} 1, & (|\theta| < a); \\ -1, & (2a < \theta < 4a); \quad \text{on } a < \frac{\pi}{4} \text{ i } -\pi < \theta < \pi \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

$$b_n(f) = \frac{-2 \sin(3na) \sin(na)}{n\pi} \quad c_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{2 \sin(na)(1 - \cos(3na))}{n\pi} & \text{altrament.} \end{cases}$$

10 Solucions

$$14. f(\theta) = \begin{cases} \theta, & (|\theta| < a); \\ a \frac{\pi - \theta}{\pi - a}, & (a < \theta < \pi); \\ a \frac{\pi + \theta}{a - \pi}, & (-\pi < \theta < -a), \end{cases} \quad \text{és a dir } f(\theta) = \begin{cases} \theta, & (|\theta| < a); \\ a \frac{\pi - \theta}{\pi - a}, & (a < \theta < 2\pi - a), \end{cases}$$

Com que $a < \pi$ tenim

$$b_n(f) = \frac{2 \sin(na)}{(\pi - a)n^2}, \quad c_n(f) = 0.$$

$$15. f(\theta) = \begin{cases} \frac{(a - |\theta|)}{a^2}, & (|\theta| < a); \\ 0, & (a < |\theta| < \pi), \end{cases}$$

$$b_n(f) = 0 \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } n = 0, \\ \frac{2(1 - \cos(na))}{\pi n^2 a^2} & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$16. f(\theta) = \theta^2 \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

$$b_n(f) = 0 \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & \text{si } n = 0, \\ \frac{4(-1)^n}{n^2} & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$17. f(\theta) = \theta(\pi - |\theta|) \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

$$b_n(f) = \begin{cases} \frac{8}{\pi n^3} & \text{si } n \text{ és imparell,} \\ 0 & \text{si } n \text{ és parell,} \end{cases} \quad c_n(f) = 0$$

$$18. f(\theta) = e^{b\theta} \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

$$b_n(f) = \frac{2n(-1)^{n+1}}{\pi(n^2 + b^2)} \sinh(b\pi) \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{2 \sinh(b\pi)}{b\pi} & \text{si } n = 0, \\ \frac{2b(-1)^n}{\pi(n^2 + b^2)} \sinh(b\pi) & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$19. f(\theta) = e^{b\theta} \quad (0 < \theta < 2\pi),$$

$$b_n(f) = \frac{-2ne^{b\pi}}{\pi(b^2 + n^2)} \sinh(b\pi) \quad c_n(f) = \begin{cases} \frac{e^{2b\pi} - 1}{\pi b} & \text{si } n = 0, \\ \frac{2be^{b\pi}}{\pi(b^2 + n^2)} \sinh(b\pi) & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$20. f(\theta) = \sinh \theta \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

$$b_n(f) = \frac{2n(-1)^{n+1} \sinh \pi}{\pi(n^2 + 1)} \quad c_n(f) = 0$$

Solució de l'exercici 1.13

Si f és parella, aleshores fem el canvi $t = -\theta$ i queda

$$\hat{f}(-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \hat{f}(n).$$

Si f és senar, aleshores fem el canvi $t = -\theta$ i queda

$$\hat{f}(-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -f(t) e^{-int} dt = -\hat{f}(n).$$

Si f és π -periòdica, aleshores fem el canvi $t = \theta - \pi$ a la integral de 0 a π i queda

$$\begin{aligned} 2\pi \hat{f}(n) &= \int_{-\pi}^0 f(\theta) e^{-in\theta} d\theta + \int_{-\pi}^0 f(t + \pi) e^{-int - in\pi} dt \\ &= \int_{-\pi}^0 (f(\theta) + e^{-in\pi} f(\theta)) e^{-in\theta} d\theta \stackrel{n \text{ senar}}{=} 0. \end{aligned}$$

Si f pren valors reals, aleshores $f = \bar{f}$. Per tant

$$\overline{\hat{f}(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\theta) e^{-in\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta = \hat{f}(-n).$$

Notem que si $\widehat{\hat{f}(-n)} = \widehat{\hat{f}(n)}$, aleshores podem veure que

$$0 = \widehat{\hat{f}(-n)} - \widehat{\hat{f}(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) - \overline{f(\theta)}) e^{in\theta} d\theta,$$

és a dir que per tot $n \in \mathbb{Z}$ tenim $\widehat{f - \bar{f}}(n) = 0$. Quan veiem la unicitat dels coeficients de Fourier podem deduir que es tracta d'un "si i només si".

Solució de l'exercici 1.14

Per resoldre aquest exercici convé utilitzar un canvi de variables $t = \theta - \frac{2j\pi}{n}$ a cada interval $[\frac{2j\pi}{n}, \frac{2(j+1)\pi}{n}]$, i veure com en cas que $n|m$ les integrals coincideixen mentre que hi ha una suma d'arrels de la unitat en cas contrari. Fem-ho:

$$\hat{p}(m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{2j\pi/n}^{2(j+1)\pi/n} p(\theta) e^{-im\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{2\pi/n} p\left(t + \frac{2j\pi}{n}\right) e^{-im(t + \frac{2j\pi}{n})} dt.$$

Ens ara que la funció p és $\frac{2\pi}{n}$ -periòdica, ja que $p(x + \frac{2\pi}{n}) = f(nx + 2\pi) = f(nx) = p(x)$. Així doncs

$$\begin{aligned} \hat{p}(m) &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{-i\frac{2mj\pi}{n}} \right) \int_0^{2\pi/n} p(t) e^{-imt} dt \\ &\stackrel{t = \frac{\theta}{n}}{=} \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta/n) e^{-i\frac{m}{n}\theta} d\theta \left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{-i\frac{2mj\pi}{n}} \right). \end{aligned}$$

10 Solucions

Separem ara els dos casos. Si $n|m$, aleshores tenim $e^{-i\frac{2mj\pi}{n}} = 1$ i, per tant,

$$\hat{p}(m) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta/n) e^{-i\frac{m}{n}\theta} d\theta \sum_{j=0}^{n-1} 1 = \frac{n}{2n\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-i\frac{m}{n}\theta} d\theta = \hat{f}(m/n),$$

tal i com volíem veure.

Si, en canvi, m no és un múltiple de n , aleshores tenim una suma de potències d'arrels de la unitat. Per demostrar que la seva suma és zero convé usar que $(1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) = 1-x^n$. Al ser $x \neq 1$, se'n deriva la suma geomètrica $1+x+\dots+x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$. Tenim doncs

$$\hat{p}(m) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta/n) e^{-i\frac{m}{n}\theta} d\theta \frac{1 - e^{-i\frac{2mn\pi}{n}}}{1 - e^{-i\frac{2m\pi}{n}}} = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta/n) e^{-i\frac{m}{n}\theta} d\theta \frac{1-1}{1 - e^{-i\frac{2m\pi}{n}}} = 0.$$

Solució de l'exercici 1.17

Per $n \geq 1$ i $0 \leq j \leq n-1$, tenim que la integral

$$\int_{j2\pi/n}^{(j+1)2\pi/n} \sin nx \, dx = 0.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \int_{j2\pi/n}^{(j+1)2\pi/n} f(x) \sin nx \, dx &= \int_{2j\pi/n}^{(2j+1)\pi/n} (f(x) - f((2j+1)\pi/n)) \sin nx \, dx \\ &\quad + \int_{(2j+1)\pi/n}^{(2j+2)\pi/n} (f(x) - f((2j+1)\pi/n)) \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

Notem que hem pogut afegir una constant multiplicant al sinus degut a la cancel·lació esmentada.

Ara en les primeres integrals multipliquem dues funcions positives ja que per $x \in (2j\pi/n, (2j+1)\pi/n)$ tenim $f(x) \geq f((2j+1)\pi/n)$ i $\sin(nx) \geq 0$. Per altra banda, en les segones integrals tenim el producte de dues funcions negatives, ja que per $x \in ((2j+1)\pi/n, (2j+2)\pi/n)$ tenim $f(x) \leq f((2j+1)\pi/n)$ i $\sin(nx) \leq 0$. Així

$$\int_{2j\pi/n}^{2(j+1)\pi/n} f(x) \sin nx \, dx \geq 0.$$

Sumant en j , obtenim

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{j2\pi/n}^{(j+1)2\pi/n} f(x) \sin nx \, dx \geq 0.$$

Solució de l'exercici 1.18

Escrivim les definicions i usem l'acotació del valor absolut de $f(x)$:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(1) - \hat{f}(0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-ix} f(x) - f(x)) dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{-ix} - 1| |f(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos x)} dx. \end{aligned}$$

Per la fórmula del sinus de l'angle doble, tenim que $\sin^2(x/2) = \frac{1 - \cos x}{2}$, així que

$$|\hat{f}(1) - \hat{f}(0)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{x}{2} \right| dx = \frac{4}{\pi}.$$

Per trobar f que satisfaci la igualtat, ens cal

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-ix} - 1) f(x) dx \right| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{-ix} - 1| |f(x)| dx$$

Provem doncs amb $f(x) = \frac{e^{ix} - 1}{|e^{ix} - 1|}$. En tal cas,

$$\begin{aligned} \hat{f}(1) - \hat{f}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-ix} - 1) \frac{e^{ix} - 1}{|e^{ix} - 1|} dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{-ix} - 1| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos x)} dx = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 2.5

Un conjunt obert a \mathbb{R} és una unió d'interval oberts disjunts. Com que cada interval obert conté un racional, aquesta unió és numerable. Així, com que la unió numerable de conjunts nuls és nul·la, podem suposar d'entrada que U és un interval.

Fem encara una segona reducció: sigui I un interval obert i $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua amb derivada contínua. Donat un interval tancat $J \subset I$, volem veure que $f(N \cap J)$ és nul. Aleshores tindrem que $f(N \cap I) = \bigcup f(N \cap J_n)$ on $J_n := \{x \in I : \text{dist}(x, I^c) \geq 1/n\}$. Aplicant el nostre resultat i la subadditivitat de la mesura, obtindrem que $|f(N \cap I)| \leq \sum |f(N \cap J_n)| = 0$.

Procedim a demostrar el resultat per J tancat. En tal cas, en ser f' contínua en J , deduïm que f' té un màxim en J . És a dir que $|f'(x)| \leq C_J$. Com que $N \cap J$ és un conjunt nul, existeix un recobriment per intervals I_n tals que $\sum |I_n| \leq \varepsilon/C_J$. Aleshores $f(I_n)$ recobreix $f(N \cap J)$ i tenim

$$|f(N \cap J)| \leq \sum |f(I_n)| \leq \sup_{I_n} |f'| |I_n| \leq C_J \varepsilon / C_J = \varepsilon.$$

Com que ε és arbitrari, deduïm que $f(N \cap J)$ és un conjunt nul, tal i com volíem veure.

Solució de l'exercici 2.17

Tenim que S_ϵ és intersecció numerable d'oberts i per tant és mesurable. L'interval també ho és i, per tant, $U_\epsilon := [0, 1] \setminus S_\epsilon$ és mesurable.

En primer lloc observem que U_ϵ és precisament la frontera de S_ϵ llevat dels punts 0 i 1. N'hi ha prou amb veure que si $x \in U_\epsilon$ aleshores $x \in \partial S_\epsilon$, la implicació contrària és òbvia ja que $S_\epsilon \setminus \{0, 1\}$ és un obert. Sigui $x \in U_\epsilon$. Aleshores per tot δ existeix un racional x_δ tal que $|x - x_\delta| < \delta$. Però els racionals són inclosos en S_ϵ per definició. Per tant, podem trobar una successió de punts de S_ϵ convergint a $x \in S_\epsilon^c$, és a dir que $x \in \partial S_\epsilon$ tal i com hem observat.

Com que S_ϵ i $U_\epsilon = \partial S_\epsilon$ són mesurables, disjunts i la seva unió és $[0, 1]$, obtenim que

$$|\partial S_\epsilon| = |[0, 1]| - |S_\epsilon| \geq 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{2\epsilon}{2^n} = 1 - 2\epsilon > 0.$$

Solució de l'exercici 2.35

Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\int_0^x f(t) dt = C$ per a tot $x \in \mathbb{T}$. En particular $C = \int_0^0 f(t) dt = 0$. Per tant la integral és sempre nul·la.

Donat un obert $U \subset \mathbb{T}$ es pot expressar com a unió numerable (o finita) d'interval·ls oberts $U = \bigcup_j I_j$, on $I_j = (a_j, b_j)$ (identifiquem com és habitual \mathbb{T} amb $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$). Aleshores

$$\int_U f(t) dt = \sum_j \int_{I_j} f(t) dt = \sum_j \left(\int_0^{b_j} f(t) dt - \int_0^{a_j} f(t) dt \right) = 0.$$

Per tant, la integral s'anul·la en tot obert.

Ara argumentem per contradicció. Suposem que $f > 0$ en un conjunt de mesura positiva (el cas $f < 0$ és anàleg). Com que

$$\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_n \{x : f(x) > 1/n\}$$

i tots aquests conjunts són mesurables, la mesura de la unió és menor que la suma de les mesures i, per tant, existeix un $n > 0$ tal que $\{x : f(x) > 1/n\}$ té mesura positiva. Aleshores existeix un tancat T de mesura positiva tal que $f > 1/n$ en T , per la regularitat de la mesura de Lebesgue (vegeu observació 2.18). Aleshores tindriem

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_T f(t) dt + \int_{\mathbb{T} \setminus T} f(t) dt = \int_T f(t) dt > \frac{|T|}{n} > 0.$$

Hem arribat a una contradicció i, per tant, el conjunt $\{x : f(x) > 0\}$ és nul.

Solució de l'exercici 2.36

Apartat a): Si $a = 0$ o $b = 0$, la desigualtat és trivial, i la igualtat només es dona si ambdós són nuls.

Suposem que $ab \neq 0$. Aleshores

$$f(t) := \frac{(ta)^p}{p} + \frac{(b/t)^{p'}}{p'}$$

Els extrems locals de f en $(0, +\infty)$ es troben quan $f'(t) = 0$, és a dir quan

$$t^{p-1}a^p - t^{-p'-1}b^{p'} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^{p+p'} = b^{p'}a^{-p} \quad \Longleftrightarrow \quad t = b^{\frac{p'}{p+p'}}a^{\frac{-p}{p+p'}}.$$

És clar que $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = +\infty$, de manera que l'únic extrem local ha de ser el mínim absolut de f . Per tant,

$$f(t) \geq f\left(b^{\frac{p'}{p+p'}}a^{\frac{-p}{p+p'}}\right) = \frac{\left(b^{\frac{p'}{p+p'}}a^{\frac{-p}{p+p'}}a\right)^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'\left(b^{\frac{p'}{p+p'}}a^{\frac{-p}{p+p'}}\right)^{p'}} = \frac{(ab)^{\frac{pp'}{p+p'}}}{p} + \frac{(ab)^{\frac{pp'}{p+p'}}}{p'}.$$

Ara notem que

$$\frac{pp'}{p+p'} = \frac{1}{1/p + 1/p'} = 1.$$

Per tant,

$$f(t) \geq \frac{ab}{p} + \frac{ab}{p'} = ab$$

i, en particular,

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} = f(1) \geq ab.$$

Com que la derivada només s'anul·la al mínim absolut, en qualsevol altre punt la desigualtat serà estricta llevat que $1 = b^{\frac{p'}{p+p'}}a^{\frac{-p}{p+p'}}$, és a dir quan

$$b^{\frac{p'}{p+p'}} = a^{\frac{p}{p+p'}} \quad \Longleftrightarrow \quad b^{p'} = a^p.$$

Apartat b): Si $\|f\|_p = 0$, aleshores $f = 0$ g.p.t. arreu. Per tant, $\|fg\|_1 = 0$. El mateix passa si $\|g\|_{p'} = 0$. Per altra banda, si una de les dues normes és infinit, no hi ha res a demostrar. Per tant, podem suposar que $0 < \|f\|_p < \infty$ i $0 < \|g\|_{p'} < \infty$. De fet, dividint per la norma de f i g respectivament, podem suposar que $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$. Per simplificar, suposarem a més que $f, g \geq 0$, cosa que podem fer sense pèrdua de generalitat.

Si $p = 1$ i $p' = \infty$, utilitzem que

$$f(x)g(x) \leq f(x)\|g\|_\infty \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R}.$$

Integrant, i usant la monotonia de la integral de Lebesgue, trobem que

$$\int f(x)g(x) dx \leq \|g\|_\infty \int f(x) dx.$$

Si $p = \infty$ i $p' = 1$, procedim anàlogament. Per obtenir igualtat ens cal igualtat gairebé per tot, és a dir que g és constant.

En cas que $1 < p, p' < \infty$, sabem per la desigualtat de Young que

$$f(x)g(x) \leq \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^{p'}}{p'} \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R}.$$

Aleshores integrant, i usant la monotonia de la integral de Lebesgue i la desigualtat triangular, trobem que

$$\int f(x)g(x) dx \leq \int \frac{f(x)^p}{p} dx + \int \frac{g(x)^{p'}}{p'} dx,$$

és a dir que

$$\|fg\|_1 \leq \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|f\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Per obtenir igualtat en aquest cas, es requereix que la desigualtat de Young sigui una igualtat gairebé per tot arreu, és a dir, que

$$f(x)^p = g(x)^{p'}.$$

Si traiem les simplificacions $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$ i $f, g \geq 0$, aleshores la igualtat es dona si i només si

$$a|f(x)|^p = b|g(x)|^{p'} \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R},$$

per alguns valors de $a, b \in \mathbb{R}$. Notem que el cas $a = 0$ i $b = 0$ corresponen als casos $g = 0$ i $f = 0$ respectivament.

Apartat c): El cas $p = 1$ s'obté mitjançant la desigualtat triangular $|f + g| \leq |f| + |g|$ combinada amb la monotonia de la integral de Lebesgue. El cas $p = \infty$ també s'obté usant la desigualtat triangular i restringint-se al complement de la unió dels conjunts excepcionals $E_f := \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ i $E_g := \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$, que són de mesura nul·la.

Suposem doncs $1 < p < \infty$. En primer lloc, la convexitat de la funció $x \mapsto x^p$ quan $p > 1$ i $x \geq 0$ implica que

$$\left| \frac{f+g}{2} \right|^p \leq \frac{|f|^p + |g|^p}{2},$$

i tenim

$$|f+g|^p \leq 2^{p-1} (|f|^p + |g|^p).$$

Integrant concloem que $\|f+g\|_p < \infty$.

Per demostrar la cota, suposem que $\|f+g\|_p > 0$. Usant la desigualtat triangular i que $p-1 = \frac{p}{p'}$, obtenim

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p = \int |f+g||f+g|^{p-1} \stackrel{\text{D.T.}}{\leq} \int |f||f+g|^{\frac{p}{p'}} + \int |g||f+g|^{\frac{p}{p'}}.$$

Per la desigualtat de Hölder

$$\|f + g\|_p^p \stackrel{\text{D.H.}}{\leq} \|f\|_p \|f + g\|_{p'}^{\frac{p}{p'}} + \|g\|_p \|f + g\|_{p'}^{\frac{p}{p'}} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_{p'}^{\frac{p}{p'}},$$

i la desigualtat de Minkowski s'obté en aïllar la norma $\|f + g\|_p$.

La igualtat es dona si i només si

$$|f + g| = |f| + |g| \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R},$$

$$a|f|^p = b|f + g|^p \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R},$$

i

$$c|g|^p = d|f + g|^p \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R}.$$

Perquè ocorrin les tres coses, cal que $af = bg$, amb $a, b \geq 0$.

Solució de l'exercici 2.53

Fent un canvi de variable i usant la fórmula d'Euler, tenim

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx} dx \stackrel{\text{c.v.}}{=} \int_0^{2\pi} f(x + \pi/k)e^{-ik(x+\pi/k)} dx \stackrel{\text{f.E.}}{=} - \int_0^{2\pi} f(x + \pi/k)e^{-ikx} dx.$$

Aleshores, fent la mitjana de les dues expressions, obtenim

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - f(x + \pi/k)) e^{-ikx} dx.$$

Prenent valors absoluts

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - f(x + \pi/k)| dx \leq \frac{1}{2} \omega_1 f(\pi/|k|),$$

tal i com volíem veure.

Solució de l'exercici 3.3

Vegeu la solució de l'exercici 1.13. Allà veiem que si $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}$, aleshores $\widehat{f - \overline{f}}(n) = 0$ per a tot n . Pel Teorema de Féjér i l'observació que el segueix, això implica que $f - \overline{f} = 0$, és a dir que $f = \overline{f}$. L'altra implicació ja està demostrada a l'exercici 1.13.

Solució de l'exercici 3.8

Sigui $f(x) := \frac{e^{ix}}{(2 - e^{ix})^2}$. Volem demostrar que $2\hat{f}(n) = n2^{-n}$ per tot $n > 0$. Veient (3.2) sembla que podem provar de treballar amb la seva primitiva $g(x) := \frac{-i}{2 - e^{ix}}$, ja que efectivament $g'(x) = f(x)$. Per tant, com que $g \in C^\infty(\mathbb{T})$, el Lema 3.6 diu que és equivalent veure que

$$\hat{g}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{in} = -i2^{-n-1} \quad \text{per tot } n \in \mathbb{N}.$$

Notem que $g(x)$ és precisament una suma geomètrica:

$$g(x) = \frac{-i/2}{1 - e^{ix}/2} = \frac{-i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n.$$

A més, com que $\left|\frac{e^{ix}}{2}\right| = 1/2$, podem aplicar el criteri M de Weierstrass (vegeu el teorema 2.43) per concloure que la convergència és uniforme en x . Aleshores podem aplicar el teorema 2.40 sobre la integral d'un límit uniforme per veure que per $n > 0$ tenim

$$\begin{aligned} \widehat{g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-i}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{ijx}}{2^j} e^{-inx} dx \\ &\stackrel{\text{T. 2.40}}{=} \frac{-i}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx} e^{-inx} dx \stackrel{\text{Ex. 1.7}}{=} \frac{-i}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 3.13

Suposem que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$. Aleshores existeix n_ϵ tal que $|a_n - \ell| < \epsilon/2$ per tot $n > n_\epsilon$. Tenim

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \ell \right| \leq \frac{|a_1 - \ell| + \cdots + |a_n - \ell|}{n} = \sum_{j=0}^{n_\epsilon-1} \frac{|a_j - \ell|}{n} + \sum_{j=n_\epsilon}^n \frac{|a_j - \ell|}{n}.$$

Per tant, si escrivim $C_\epsilon := \sum_{j=0}^{n_\epsilon-1} |a_j - \ell|$, aleshores tenim que

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \ell \right| \leq \frac{C_\epsilon}{n} + \frac{\epsilon(n - n_\epsilon + 1)}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \epsilon/2.$$

És a dir que per n prou gran

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \ell \right| \leq \epsilon.$$

Solució de l'exercici 3.22

Sigui $k \geq 0$. Notem que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| n^k \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} C e^{-a|n|} n^k < \infty.$$

Pel teorema 3.19 la funció és infinitament diferenciable i les sèries de Fourier de les derivades convergeixen a les derivades respectives, i pel lema 3.6 tenim

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n).$$

Així doncs,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f^{(k)}}(n) e^{in\theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (in)^k \hat{f}(n) e^{in\theta}.$$

Prenent valors absoluts, tenim que

$$|f^{(k)}(x)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^k |\hat{f}(n)| \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^k e^{-a|n|}.$$

Com que aquesta cota només depèn del valor absolut en la sèrie doble, podem simplificar a

$$|f^{(k)}(x)| \leq 2C \sum_{n \geq 0} n^k e^{-an}.$$

Ara usarem el criteri integral. Per $n \leq x < n + 1$ tenim $n^k e^{-an} \leq x^k e^{-a(n-x)} e^{-ax} \leq x^k e^{-ax} e^a$. Així doncs,

$$|f^{(k)}(x)| \leq 2C e^a \int_0^\infty x^k e^{-ax} dx = 2C e^a \frac{k!}{a^{k+1}},$$

és a dir que podem prendre $R = a^{-1}$ i obtenim la cota demanada, amb $M = 2C e^a / a$.

Per veure que f és analítica usem el teorema del residu del polinomi de Taylor centrat a t :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{N!} \sup_{y \in \mathbb{T}} |f^{(N)}(y)| |x-t|^N \leq \frac{1}{N!} \sup_{y \in \mathbb{T}} M R^N N! |x-t|^N$$

Aquesta cota convergeix a zero si $|x-t| < R^{-1}$.

Solució de l'exercici 3.24

Segui f uniformement contínua, és a dir, suposem que per tot $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$|f(x+h) - f(x)| < \epsilon \quad \text{per tot } x, x+h \in I, |h| \leq \delta.$$

Notem que $\omega_\infty f$ és creixent per definició i, en particular, té sempre límits laterals.

Argumentem per contradicció. Suposem que $\lim_{\delta \searrow 0} \omega_\infty(\delta) = C > 0$. Aleshores prenem $\epsilon = C/2$ en la definició de continuïtat uniforme, existeix un δ tal que

$$|f(x+h) - f(x)| < C/2 \text{ per tot } x, x+h \in I, |h| \leq \delta.$$

En particular,

$$C \stackrel{\omega_\infty f \text{ creixent}}{\leq} \omega_\infty f(\delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \sup_{x \in I} |f(x+\delta) - f(x)| \leq \sup_{|h| \leq \delta} C/2 \stackrel{C > 0}{<} C,$$

i arribem a contradicció. Amb això acaba l'exercici.

Notem que en realitat es tracta d'un si i només si: si $\lim_{t \searrow 0} \omega_\infty f(t) = 0$, aleshores per qualsevol $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$\omega_\infty f(t) < \epsilon \quad \text{per tot } t \leq \delta,$$

i com que $|f(x+h) - f(x)| \leq \omega_\infty f(|h|)$, obtenim que

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \omega_\infty f(|h|) \leq \omega_\infty f(t) < \epsilon \quad \text{per tot } x, x+h \in I, |h| \leq t \leq \delta.$$

Solució de l'exercici 3.25

Del teorema de Bolzano-Weierstrass es deriva fàcilment que f és uniformement contínua ja que f s'estén de manera periòdica a \mathbb{R} i, per tant, és uniformement contínua en $[-2\pi, 2\pi]$. Obtenim de l'exercici anterior que

$$\|f(\cdot) - f(\cdot + \pi/n)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \omega_\infty f(\pi/n) \rightarrow 0$$

Solució de l'exercici 3.26

La condició Lipschitz es pot traduir per

$$\omega_\infty f(\delta) \leq K\delta.$$

A la demostració del lema de Riemann-Lebesgue hem vist que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \|f(\cdot) - f(\cdot + \pi/n)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \frac{1}{2} \omega_\infty f(\pi/n) \leq \frac{K\pi\delta}{2n}.$$

Solució de l'exercici 3.28

Per les fórmules trigonomètriques sabem que

$$\begin{aligned} \int_E \cos^2(nx + \alpha_n) dx &= \int_E \frac{\cos(2nx + 2\alpha_n) + 1}{2} dx \\ &= \cos(2\alpha_n) \int_E \frac{\cos(2nx)}{2} dx - \sin(2\alpha_n) \int_E \frac{\sin(2nx)}{2} dx + \frac{|E|}{2}. \end{aligned}$$

En termes de Fourier, això és

$$\int_E \cos^2(nx + \alpha_n) dx = \frac{\pi}{2} (\cos(2\alpha_n)c_{2n}(\chi_E) - \sin(2\alpha_n)b_{2n}(\chi_E)) + \frac{|E|}{2}.$$

Pel lema de Riemann-Lebesgue, els coeficients de Fourier convergeixen a zero, i els sinus i cosinus romanen acotats.

Solució de l'exercici 3.35

N'hi ha prou amb veure que no té variació acotada a $[0, \pi]$. És a dir que podem trobar una partició amb variació arbitràriament gran.

Sigui $P_N = \{0\} \cup \left\{ \theta_n := \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \right\}_{n=0}^N$. Aleshores

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |f(\theta_n) - f(\theta_{n-1})| &= \sum_{n=1}^N |\theta_n \sin(\theta_n^{-1}) - \theta_{n-1} \sin(\theta_{n-1}^{-1})| \\ &= \sum_{n=1}^N \left| \frac{\sin(\pi/2 + 2n\pi)}{\pi/2 + 2n\pi} - \frac{\sin(\pi/2 + 2(n-1)\pi)}{\pi/2 + 2(n-1)\pi} \right| \\ &= \sum_{n=1}^N \left| \frac{(-1)^n}{\pi/2 + 2n\pi} - \frac{(-1)^{n-1}}{\pi/2 + 2(n-1)\pi} \right| \end{aligned}$$

Traient $(-1)^n$ de factor comú, obtenim

$$\sum_{n=1}^N |f(\theta_n) - f(\theta_{n-1})| = \sum_{n=1}^N \left| \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} + \frac{1}{\pi/2 + 2(n-1)\pi} \right| \approx \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty.$$

Deduïm que la variació no és acotada.

Solució de l'exercici 3.45

1. $f(\theta) = \theta$, $(-\pi < \theta < \pi)$.

La funció és discontinua a π però la seva derivada és constant a $(-\pi, \pi)$ i, per tant, té límits laterals a la discontinuïtat. Pel teorema de Dirichlet la sèrie de Fourier convergeix a tot arreu. En l'interval $(-\pi, \pi)$ convergeix a la funció i a π convergeix al punt mig que és $(\pi - \pi)/2 = 0$.

2. $f(\theta) = |\theta|$, $(-\pi < \theta < \pi)$.

La funció és contínua i la seva derivada és constant a $(-\pi, 0)$ i a $(0, \pi)$ i, per tant, té límits laterals als vèrtexs de la gràfica. Pel teorema de Dirichlet la sèrie de Fourier convergeix a tot arreu. Pel teorema de Jordan la convergència és uniforme.

Efectivament, notem que pel teorema del valor mitjà

$$V(f) = \sup_P \sum_1^N |f(\theta_n) - f(\theta_{n-1})| \stackrel{\text{T.V.M.}}{\leq} \|f'\|_{L^\infty} \sup_P \sum_1^N |\theta_n - \theta_{n-1}| = 2\pi \|f'\|_{L^\infty}$$

Així, en les condicions del teorema de Dirichlet la funció és de variació fitada i el teorema de Jordan es pot aplicar. De fet, si la funció f és Lipschitz, es pot argumentar de la mateixa manera.

3. $f(\theta) = \pi - \theta$, $(0 < \theta < 2\pi)$.

La funció és discontinua a 0 però la seva derivada és constant a $(0, 2\pi)$ i, per tant, té límits laterals a la discontinuïtat. Pel teorema de Dirichlet la sèrie de Fourier convergeix a tot arreu. En l'interval $(0, 2\pi)$ convergeix a la funció i a 0 convergeix al punt mig que és $(\pi - \pi)/2 = 0$.

$$4. f(\theta) = \begin{cases} 0, & (-\pi < \theta < 0); \\ \theta, & (0 < \theta < \pi), \end{cases}$$

La funció és discontinua a π però la seva derivada és constant a $(-\pi, 0)$ i a $(0, \pi)$ i, per tant, té límits laterals tant a la discontinuïtat π com al vèrtex de la gràfica situat a l'origen. Pel teorema de Dirichlet la sèrie de Fourier convergeix a tot arreu. En l'interval $(-\pi, \pi)$ convergeix a la funció i a π convergeix al punt mig que és $(\pi + 0)/2 = \pi/2$.

$$5. f(\theta) = \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}.$$

Es tracta d'un polinomi trigonomètric. Podríem dir que hi ha convergència uniforme, però en realitat és directament una igualtat a partir del grau 2, $S_2 f = f$.

$$6. f(\theta) = \begin{cases} -1, & (-\pi < \theta < 0); \\ 1, & (0 < \theta < \pi), \end{cases}$$

La funció és discontinua a 0 i a π però la seva derivada és nul·la allà on existeix i, per tant, té límits laterals a les discontinuïtats. Pel teorema de Dirichlet la sèrie de Fourier convergeix a tot arreu. En els intervals $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ convergeix a la funció i a 0 i π convergeix al punt mig que és $(1 - 1)/2 = 0$.

$$7. f(\theta) = \begin{cases} 0, & (-\pi < \theta < 0); \\ 1, & (0 < \theta < \pi), \end{cases}$$

La funció és discontinua a 0 i a π però la seva derivada és nul·la allà on existeix i, per tant, té límits laterals a les discontinuïtats. Pel teorema de Dirichlet la sèrie de Fourier convergeix a tot arreu. En els intervals $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ convergeix a la funció i a 0 i π convergeix al punt mig que és $(1 + 0)/2 = 1/2$.

8. $f(\theta) = |\sin \theta|$, La funció és contínua i la seva derivada és contínua a $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. A més, la derivada té límits laterals en els dos vèrtexs de la gràfica 0 i π . Pel teorema de Dirichlet la sèrie de Fourier convergeix a tot arreu a la funció. La convergència és uniforme pel teorema de Jordan.

9. $f(\theta) = |\cos \theta|$, Es tracta d'una translació de l'anterior i, per tant, té les mateixes propietats de convergència.

10. $f(\theta) = \frac{\sin \theta + |\sin \theta|}{2}$. És la suma d'un polinomi trigonomètric i una funció que com hem vist té sèrie absolutament convergent. Per tant, la sèrie convergeix uniformement.

$$11. f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & (|\theta| < a); \\ 0, & (a < |\theta| < \pi), \end{cases}$$

La funció és constant a trossos. Com hem vist hi ha convergència als intervals oberts i convergència al valor mitjà als punts de discontinuïtat.

$$12. f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & (|\theta - \theta_0| < a); \\ 0, & (a < |\theta - \theta_0| < \pi), \end{cases}$$

La funció és constant a trossos. Com hem vist hi ha convergència als intervals oberts i convergència al valor mitjà als punts de discontinuïtat.

$$13. f(\theta) = \begin{cases} 1, & (|\theta| < a); \\ -1, & (2a < \theta < 4a); \text{ on } a < \frac{\pi}{4} \text{ i } -\pi < \theta < \pi. \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

La funció és constant a trossos. Com hem vist hi ha convergència als intervals oberts i convergència al valor mitjà als punts de discontinuïtat.

$$14. f(\theta) = \begin{cases} \theta, & (|\theta| < a); \\ a \frac{\pi - \theta}{\pi - a}, & (a < \theta < 2\pi - a), \end{cases}$$

Es tracta d'una funció contínua i Lipschitz. Pel teorema de Jordan la sèrie convergeix uniformement a tot arreu.

$$15. f(\theta) = \begin{cases} \frac{(a-|\theta|)}{a^2}, & (|\theta| < a); \\ 0, & (a < |\theta| < \pi), \end{cases} \quad \text{Es tracta d'una funció contínua i Lipschitz. Pel teorema de Jordan la sèrie convergeix uniformement a tot arreu.}$$

$$16. f(\theta) = \theta^2 \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

Es tracta d'una funció contínua i Lipschitz. Pel teorema de Jordan la sèrie convergeix uniformement a tot arreu.

$$17. f(\theta) = \theta(\pi - |\theta|) \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

Es tracta d'una funció contínua i Lipschitz. Pel teorema de Jordan la sèrie convergeix uniformement a tot arreu.

$$18. f(\theta) = e^{b\theta} \quad (-\pi < \theta < \pi),$$

La funció és contínua a $(-\pi, \pi)$ i presenta una discontinuïtat de salt a π . A la resta té derivada contínua i acotada i aquesta té límits laterals al punt de discontinuïtat. Pel teorema de Dirichlet, la sèrie convergeix a tot arreu. El límit és f en l'interval obert i al punt mitjà $(e^{b\pi} + e^{-b\pi})/2 = \cosh(b\pi)$.

$$19. f(\theta) = e^{b\theta} \quad (0 < \theta < 2\pi), \text{ La funció és contínua a } (0, 2\pi) \text{ i presenta una discontinuïtat de salt a } 0. \text{ A la resta té derivada contínua i acotada i aquesta té límits laterals al punt de discontinuïtat. Pel teorema de Dirichlet, la sèrie convergeix a tot arreu. El límit és } f \text{ en l'interval obert i al punt mitjà } (e^{2b\pi} + 1)/2 = e^{b\pi} \cosh(b\pi).$$

$$20. f(\theta) = \sinh \theta \quad (-\pi < \theta < \pi), \text{ La funció és contínua a } (-\pi, \pi) \text{ i presenta una discontinuïtat de salt a } \pi. \text{ A la resta té derivada contínua i acotada i aquesta té límits laterals al punt de discontinuïtat. Pel teorema de Dirichlet, la sèrie convergeix a tot arreu. El límit és } f \text{ en l'interval obert i al punt mitjà } (\sinh \pi + \sinh(-\pi))/2 = 0.$$

Solució de l'exercici 3.46

1. L'apartat 8 ens diu que per tot $-\pi < \theta \leq \pi$ tenim

$$|\sin \theta| = f(\theta) = Sf(\theta) = \frac{2}{\pi} + \sum_1^{\infty} \frac{4 \cos(2n\theta)}{\pi(1 - 4n^2)}.$$

Avaluant l'expressió a $\theta = 0$ i a $\theta = \frac{\pi}{2}$ obtenim que $\sum_1^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$, $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{\pi - 2}{4}$.

2. L'apartat 16 ens diu que per tot $-\pi < \theta \leq \pi$ tenim

$$\theta^2 = f(\theta) = Sf(\theta) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\theta)}{n^2}.$$

Avaluant l'expressió a $\theta = \pi$ i a $\theta = 0$ obtenim que $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

3. L'apartat 17 ens diuen que per tot $-\pi < \theta < \pi$ tenim

$$\theta(\pi - |\theta|) = f(\theta) = Sf(\theta) = \frac{8}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\theta)}{(2n-1)^3}.$$

Avaluant l'expressió a $\theta = \frac{\pi}{2}$ obtenim que $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

4. L'apartat 18 ens diuen que per tot $-\pi < \theta < \pi$ tenim

$$e^{b\theta} = f(\theta) = Sf(\theta) = \frac{\sinh(b\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{b} + \sum_1^{\infty} \frac{2(-1)^n (b \cos(n\theta) - n \sin(n\theta))}{n^2 + b^2} \right).$$

Avaluant l'expressió a $\theta = 0$ obtenim que $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + b^2} = \frac{\pi}{2b} \operatorname{csch} b\pi - \frac{1}{2b^2}$.

5. Avaluant als extrems l'expressió de l'apartat anterior, obtenim per la discontinuïtat de salt la identitat

$$\frac{e^{b\pi} + e^{-b\pi}}{2} = Sf(\pi) = \frac{\sinh(b\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{b} + \sum_1^{\infty} \frac{2(-1)^n (b \cos(n\pi) - n \sin(n\pi))}{n^2 + b^2} \right).$$

Avaluant l'expressió obtenim que $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2 + b^2} = \frac{\pi}{2b} \coth b\pi - \frac{1}{2b^2}$.

Solució de l'exercici 3.47

La funció f és contínua (i infinitament diferenciable) per $\theta \in \mathbb{R}$, tot i que al perioditzar-la, apareix un salt a l'extrem de l'interval $[0, 2\pi]$. Es pot comprovar que

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\alpha + n}.$$

Així, pel teorema de Jordan (vegeu teorema 3.34), la sèrie $Sf(\theta) = \sum_{\mathbb{Z}} \frac{e^{in\theta}}{\alpha+n}$ convergeix a $\frac{f(0)+f(2\pi)}{2}$ a l'origen. Per tant,

$$\sum_{\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha+n} = \frac{f(0)+f(2\pi)}{2} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{e^{i\pi\alpha} + e^{-i\pi\alpha}}{2} = \frac{\pi}{\tan \pi\alpha}$$

Solució de l'exercici 3.48

Sigui $f(x) = \frac{4 \sin x}{17-8 \cos x}$. Volem veure que

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4 \sin x}{17-8 \cos x} \sin(nx) dx = \frac{1}{4^n}.$$

Sabem, de fet, que $S_n f$ convergeix uniformement a f a \mathbb{T} ja que és infinitament diferenciable a \mathbb{T} . Com que f és imparella, tenim $c_n(f) = 0$. És a dir que $f(x) = \sum_1^{\infty} b_n(f) \sin(nx)$ uniformement en $x \in \mathbb{T}$.

Considerem

$$g(x) := \sum_1^{\infty} \frac{\sin(nx)}{4^n}.$$

Aquesta funció és suma de funcions infinitament diferenciables i en particular contínues a \mathbb{T} , i la convergència és uniforme, ja que es pot acotar per una suma geomètrica. Així doncs g és una funció uniformement contínua. Pel teorema 2.40 obtenim que

$$b_n(g) = \frac{1}{4^n}.$$

Per altra banda, per la fórmula d'Euler (1.2) i usant l'expressió de la sèrie geomètrica, per tot $x \in \mathbb{T}$ tenim

$$g(x) \stackrel{(1.2)}{=} \sum_1^{\infty} \frac{e^{inx}}{2i4^n} + \sum_1^{\infty} \frac{e^{-inx}}{2i4^n} = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{ix}}{4} \frac{1}{1-e^{ix}/4} - \frac{e^{-ix}}{4} \frac{1}{1-e^{-ix}/4} \right).$$

Calculant la suma, obtenim

$$g(x) = \frac{1}{2i} \frac{4e^{ix} - 1 - 4e^{-ix} + 1}{16 - 4e^{ix} - 4e^{-ix} + 1} \stackrel{(1.2)}{=} \frac{4 \sin x}{17 - 8 \cos x} = f(x).$$

Solució de l'exercici 3.49

Sabem que

$$\widehat{g}(n) = \int_{\mathbb{T}} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \int_{\mathbb{T}} f(\theta+a) e^{-in\theta} d\theta = \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-in(t-a)} dt = e^{ina} \widehat{f}(n).$$

Per tant,

$$S_N g(\theta) = \sum_{|n| \leq N} \widehat{g}(n) e^{in\theta} = \sum_{|n| \leq N} \widehat{f}(n) e^{in(\theta+a)} = S_N f(\theta+a).$$

En particular,

$$|g(\theta) - S_N g(\theta)| = |f(\theta + a) - S_N g(\theta + a)|$$

i la convergència de l'una implica la convergència de l'altra, tant puntual com uniforme en intervals o en norma L^p .

Solució de l'exercici 3.50

Donades dues successions de nombres complexos $\{a_n\}_{n \geq 0}$ i $\{b_n\}_{n \geq 0}$, definim $S_N := \sum_{k=0}^N a_k b_k$. Volem veure que la fórmula de suma per parts:

$$S_N = a_N B_N - \sum_{k=0}^{N-1} B_k (a_{k+1} - a_k),$$

on $B_N = \sum_{k=0}^N b_k$ se satisfà.

Raonarem per inducció. Si $N = 0$, aleshores $S_0 = a_0 b_0$ i la fórmula es compleix trivialment.

Suposem que la fórmula és certa per N , és a dir que

$$S_N = a_N B_N - \sum_{k=0}^{N-1} B_k (a_{k+1} - a_k).$$

Aleshores

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= a_{N+1} b_{N+1} + S_N = a_{N+1} (B_{N+1} - B_N) + a_N B_N - \sum_{k=0}^{N-1} B_k (a_{k+1} - a_k) \\ &= a_{N+1} B_{N+1} - \sum_{k=0}^N B_k (a_{k+1} - a_k), \end{aligned}$$

tal i com volíem veure.

Procedim amb el primer apartat: sigui $\{A_n\}_n$ una successió de termes positius tal que $A_n \geq A_{n+1}$ i $\lim_n A_n = 0$. Aleshores veurem que

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{inx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N A_n e^{inx}$$

és convergent si $x \neq 0$. Per la fórmula de suma per parts i la fórmula de la suma geomètrica, tenim

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A_n e^{inx} &= A_n \sum_{n=0}^N e^{inx} - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^k e^{ijx} (A_{k+1} - A_k). \\ &= A_n \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1 - e^{i(k+1)x}}{1 - e^{ix}} (A_{k+1} - A_k). \end{aligned}$$

Ara bé, com que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{1 - e^{i(k+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| |A_{k+1} - A_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{1 - e^{ix}} (A_k - A_{k+1}) \leq \frac{2}{1 - e^{ix}} (A_0 - A_N)$$

és absolutament convergent, obtenim que la sèrie convergeix. De fet, notem que si prenem x lluny de 0, obtenim convergència uniforme mitjançant el criteri M de Weierstrass.

L'altre apartat demana veure que que la sèrie

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nx}{\log n},$$

és convergent per a tot x . Usem que el logaritme és creixent per definir $A_n := \frac{1}{\log n}$, satisfent les hipòtesis del primer apartat. Ara usem la fórmula d'Euler per escriure $\sin(nx) = \text{Im}(e^{inx})$. Obtenim

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nx}{\log n} = \text{Im} \sum_{n \geq 2} \frac{e^{inx}}{\log n},$$

que és convergent per $x \neq 0$ per l'apartat anterior. Si, en canvi $x = 0$, aleshores $\sin(nx) = 0$ per tot x i la suma és nul·la i, per tant, convergent.

Pel mateix argument veiem que $\sum_{n \geq 2} \frac{\cos nx}{\log n}$ convergeix fora de l'origen, però a l'origen ens queda la sèrie divergent $\sum \frac{1}{\log n} = \infty$.

Solució de l'exercici 4.2

Tenim $f(\theta) = (\theta + 1)\chi_{[-1,0]}(\theta) + (-\theta + 1)\chi_{[0,1]}(\theta)$ i $g(\theta) = \chi_{[-1/2,1/2]}(\theta)$, així que

$$f * g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int \chi_{[-1/2,1/2]}(\theta - t) ((\theta + 1)\chi_{[-1,0]}(\theta) + (-\theta + 1)\chi_{[0,1]}(\theta)) dt.$$

Donat $\theta \in [-3/2, -1/2]$, tenim $\theta - 1/2 \leq -1 \leq \theta + 1/2 \leq 0$, i per tant

$$f * g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-1/2}^{\theta+1/2} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{\theta+1/2} (t+1) dt = \frac{1}{2\pi} [(t+1)^2/2]_{-1}^{\theta+1/2} = \frac{1}{4\pi} (\theta + 3/2)^2.$$

Donat $\theta \in [-1/2, 1/2]$, tenim $-1 \leq \theta - 1/2 \leq 0 \leq \theta + 1/2 \leq 1$, i per tant

$$\begin{aligned} f * g(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\theta-1/2}^0 (t+1) dt + \int_0^{\theta+1/2} (-t+1) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left([(t+1)^2/2]_{\theta-1/2}^0 - [(-t+1)^2/2]_0^{\theta+1/2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 - (\theta + 1/2)^2 - (1/2 - \theta)^2 + 1}{2} \right) = \frac{3/4 - \theta^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

Si $\theta > 0$ podem usar que

$$f * g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int f(\theta - t)g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int f(-\theta + t)g(-t) dt$$

ja que les dues funcions són parelles, i fent el canvi $s = -t$ obtenim

$$f * g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int f(-\theta - s)g(s) dt = f * g(-\theta).$$

Per tant, $f * g$ és també una funció parella i l'exercici queda completat.

Solució de l'exercici 4.3

En primer lloc, volem calcular

$$f * f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int \chi_{[0,1]}(t)\chi_{[0,1]}(\theta - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \chi_{[0,1]}(\theta - t) dt$$

Si $\theta < 1$, aleshores per $t \in [0, \theta]$ tenim $\chi_{[0,1]}(\theta - t) = 1$ i per $t \in (\theta, 1]$ tenim $\chi_{[0,1]}(\theta - t) = 0$, és a dir que

$$f * f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\theta dt = \frac{\theta}{2\pi}.$$

Si $1 \leq \theta < 2$, aleshores per $t \in [0, \theta - 1]$ tenim $\chi_{[0,1]}(\theta - t) = 0$ i per $t \in [\theta - 1, 1]$ tenim $\chi_{[0,1]}(\theta - t) = 1$, és a dir que

$$f * f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-1}^1 dt = \frac{2 - \theta}{2\pi}.$$

En segon lloc, volem calcular

$$f * (f * f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int (f * f)(t)f(\theta - t) dt$$

Si escrivim \tilde{f} per la funció f de l'exercici anterior, $f * f(\theta) = \frac{\tilde{f}(\theta-1)}{2\pi}$, gairebé per tot (al punt $\theta = 1$, la funció \tilde{f} val 2, però el valor a un punt no modifica la integral). A més a més, amb la notació de l'exercici anterior tenim $f(\theta) = g(\theta - 1/2)$. Així,

$$f * (f * f)(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{f}(t-1)g(\theta - t - 1/2) dt.$$

Prenent $s = t - 1$ obtenim

$$f * (f * f)(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{f}(s)g(\theta - s - 3/2) ds = \frac{\tilde{f} * g(\theta - 3/2)}{2\pi},$$

i aplicant l'exercici anterior obtenim

$$f * (f * f)(\theta) = \frac{\theta^2 \chi_{[0,1]}(\theta) + 2(3\theta - \theta^2 - 3/2) \chi_{(1,2)}(\theta) + (\theta - 3)^2 \chi_{[2,3]}(\theta)}{2(2\pi)^2}.$$

Solució de l'exercici 4.11

Per la desigualtat de Hölder, la convolució està definida puntualment quan $f \in L^p$ i $g \in L^{p'}$:

$$\|f(\cdot)g(\theta - \cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})} \stackrel{H}{\leq} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{T})}. \quad (4.4)$$

Donades $f \in L^p(\mathbb{T})$, $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$, per densitat existeixen funcions $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\mathbb{T})$ tals que $f_k \rightarrow f$ i $g_k \rightarrow g$ en les normes L^p i $L^{p'}$ respectivament. Vegem que $f_k * g_k \rightarrow f * g$ uniformement en \mathbb{T} .

Ens cal mirar les seves diferències puntuals, que recordem que estan ben definides arreu ja que les funcions són dels espais duals L^p i $L^{p'}$:

$$|f_k * g_k(\theta) - f * g(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_k(\zeta)g_k(\theta - \zeta) - f(\zeta)g(\theta - \zeta)| d\zeta.$$

Sumant i restant $f_k(\zeta)g(\theta - \zeta)$ i aplicant la desigualtat triangular obtenim

$$\begin{aligned} |f_k * g_k(\theta) - f * g(\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_k(\zeta)(g_k(\theta - \zeta) - g(\theta - \zeta))| d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f_k(\zeta) - f(\zeta))g(\theta - \zeta)| d\zeta. \end{aligned}$$

Aplicant la desigualtat de Hölder deduïm que

$$|f_k * g_k(\theta) - f * g(\theta)| \leq \|f_k\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g_k - g\|_{L^{p'}(\mathbb{T})} + \|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{T})}.$$

Notem que la cota és independent de θ . Així,

$$\|f_k * g_k - f * g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|f_k\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g_k - g\|_{L^{p'}(\mathbb{T})} + \|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{T})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Però el límit uniforme de funcions contínues és contínua, de manera que $f * g \in C(\mathbb{T})$, tal i com volíem veure.

Solució de l'exercici 4.12

Sabem que

$$\widehat{f * P}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{P}(n)$$

Per tant, si $|n| > N$, aleshores $\widehat{f * P}(n) = 0$ i si $|n| < N$ tenim $\widehat{f * P}(n) = a_n \widehat{f}(n)$. Pel teorema 3.14 sabem que

$$(f * P)(x) = S(f * P)(x) = \sum_{n=-N}^N a_n \widehat{f}(n) e^{inx},$$

tal i com volíem demostrar.

Solució de l'exercici 4.16

Pel teorema fonamental del càlcul, tenim que per $x < \theta + \pi$

$$F(x) := \int_{\theta-\pi}^x f(t) dt$$

és una funció derivable amb $F'(x) = f(x)$. Pel teorema del valor mitjà existeix un punt $c_{\theta,n} \in [\theta - \frac{1}{n}, \theta + \frac{1}{n}]$ tal que

$$F(\theta + 1/n) - F(\theta - 1/n) = F'(c_{\theta,n}) \frac{2}{n} = f(c_{\theta,n}) \frac{2}{n}.$$

Com que $|f(\theta) - f(c_{\theta,n})| \leq \omega_{\infty} f(\frac{1}{n})$, obtenim que la mitjana de f és

$$\int_{\theta-\frac{1}{n}}^{\theta+\frac{1}{n}} f(t) dt = \frac{n}{2} (F(\theta + 1/n) - F(\theta - 1/n)) = f(c_{\theta,n}) - f(\theta) + f(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\theta).$$

Solució de l'exercici 4.17

La primera propietat es demostra amb un canvi de variable $\zeta = n\theta$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta = \int_{-\pi/n}^{\pi/n} nK(n\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} nK(\zeta) \frac{d\zeta}{n} = 2\pi.$$

En segon lloc, al ser K contínua, existeix una cota M tal que $|K| \leq M$. Així,

$$\int_{-\pi/n}^{\pi/n} |K_n(\theta)| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} n|K(\zeta)| \frac{d\zeta}{n} = 2\pi M.$$

Per acabar, donada $\delta > 0$ existeix n_0 tal que $\frac{\pi}{n_0} < \delta$. Per tot $n > n_0$ tenim

$$\int_{|\theta| > \delta} K_n(\theta) d\theta = 0,$$

ja que el suport de K_n està contingut en $[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}] \subset [-\frac{\pi}{n_0}, \frac{\pi}{n_0}] \subset \{|\theta| > \delta\}^c$.

Solució de l'exercici 4.19

El cas $f \in L^p(\mathbb{T})$ tenim

$$\|K_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\zeta) [f(\theta - \zeta) - f(\theta)] d\zeta \right|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aleshores usant la desigualtat integral de Minkowski obtenim

$$\|K_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(\zeta)| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |[f(\theta - \zeta) - f(\theta)]|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} d\zeta.$$

A la part local tenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < \delta} |K_n(\zeta)| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - \zeta) - f(\theta)|^p d\theta \right) d\zeta \\ \leq \sup_{|\zeta| < \delta} \|f(\cdot - \zeta) - f(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{T})} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(\zeta)| d\zeta \stackrel{b)}{\leq} \omega_p f(\delta) M. \end{aligned}$$

on hem escrit el mòdul de continuïtat integral

$$\omega_p f(\delta) := \sup_{|\zeta| < \delta} \|f(\cdot - \zeta) - f(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Pel corollari 2.51 sabem que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_p f(\delta) = 0.$$

A la part no local procedim com abans:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\zeta| \leq \pi} |K_n(\zeta)| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - \zeta) - f(\theta)|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} d\zeta \\ \leq 2 \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\zeta| \leq \pi} |K_n(\zeta)| d\zeta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Per tant, donat $\varepsilon > 0$, prenent δ prou petit i n prou gran obtenim

$$\|K_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \omega_p f(\delta) M + \frac{1}{\pi} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \int_{\delta \leq |\zeta| \leq \pi} |K_n(\zeta)| d\zeta < \varepsilon.$$

Solució de l'exercici 4.20

Notem d'entrada que, respecte al teorema 4.18, estem relaxant dues condicions: I enlloc de demanar continuïtat, estem demanant l'existència de límits laterals, cosa que es compensa demanant que els nuclis siguin parells. I enlloc de demanar que la funció sigui acotada essencialment, només demanem integrabilitat, i això fa que necessitem la condició c) alternativa.

Sigui θ un amb límits laterals de f , és a dir

$$\varepsilon_f^+(\delta, \theta) = \sup_{0 < h < \delta} |f(\theta + h) - f(\theta^+)| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

i

$$\varepsilon_f^-(\delta, \theta) = \sup_{0 < h < \delta} |f(\theta - h) - f(\theta^-)| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Com que les funcions K_n són parelles, tenim que Utilitzant la propietat a) de la Definició 4.14, obtenim que

$$\int_{-\pi}^0 K_n(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\zeta) f(\theta - \zeta) d\zeta = \pi.$$

Així doncs

$$\begin{aligned} K_n * f(\theta) &= \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 K_n(\zeta) f(\theta - \zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K_n(\zeta) f(\theta - \zeta) d\zeta - \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2} \\ &\stackrel{a)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 K_n(\zeta) [f(\theta - \zeta) - f(\theta^+)] d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K_n(\zeta) [f(\theta - \zeta) - f(\theta^-)] d\zeta \end{aligned}$$

Prenent valors absoluts deduïm que

$$\begin{aligned} \left| K_n * f(\theta) - \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2} \right| \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 |K_n(\zeta)| |f(\theta - \zeta) - f(\theta^+)| d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |K_n(\zeta)| |f(\theta - \zeta) - f(\theta^-)| d\zeta \end{aligned}$$

Per la part local utilitzem que la funció f té límits laterals i l'acotació uniforme de les normes L^1 de K_n :

$$\begin{aligned} \int_{-\delta < \zeta < 0} |K_n(\zeta)| |f(\theta - \zeta) - f(\theta^+)| d\zeta &\leq M\varepsilon_f^+(\delta, \theta), \\ \int_{0 < \zeta < \delta} |K_n(\zeta)| |f(\theta - \zeta) - f(\theta^-)| d\zeta &\leq M\varepsilon_f^-(\delta, \theta), \end{aligned}$$

i per la part no local, demanem que $\pi/n < \delta$, de manera que

$$\int_{\delta \leq |\zeta| \leq \pi} |K_n(\zeta)| |f(\theta - \zeta) - f(\theta^\pm)| d\zeta \leq \|K_n\|_{L^\infty(\delta \leq |\zeta| \leq \pi)} 2\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Prenent δ prou petit acotem la part local per $\varepsilon/2$ i prenent n prou gran en funció de δ acotem la part no local per $\varepsilon/2$.

Solució de l'exercici 4.22

Suposem que $f_n \rightarrow \chi_{[0,1]}$ de manera uniforme. Aleshores $\chi_{[0,1]}$ seria contínua. Però no és així.

Alternativament, sense fer servir el resultat “límit uniforme de funcions contínues és continu”, n'hi ha prou amb veure que si existeix k tal que $\|\chi_{[0,1]} - f_k\|_\infty < \epsilon$, aleshores $|\chi_{[0,1]}(1 + \delta) - f_k(1 + \delta)| < \epsilon$ i $|\chi_{[0,1]}(1) - f_k(1)| < \epsilon$ per tot $\delta > 0$. Aleshores

$$\begin{aligned} |f_k(1 + \delta) - f_k(1)| &\geq |\chi_{[0,1]}(1 + \delta) - \chi_{[0,1]}(1)| - |\chi_{[0,1]}(1 + \delta) - f_k(1 + \delta)| \\ &\quad - |\chi_{[0,1]}(1) - f_k(1)| \\ &\geq 1 - 2\epsilon \end{aligned}$$

i arribem a una contradicció amb la continuïtat de f_k .

Solució de l'exercici 4.24

Notem que

$$\langle P, D_N(x - \cdot) \rangle = P * D_N(x) \stackrel{\text{E.4.12}}{=} \sum_{|j| \leq N} a_j \widehat{D_N}(j) e^{ijx}.$$

Com que D_N és un polinomi trigonomètric amb coeficients $a_n = 1$, deduïm que

$$\langle P, D_N(x - \cdot) \rangle = \sum_{|j| \leq N} a_j e^{ijx} = P(x).$$

Solució de l'exercici 4.26

Recordem que

$$D_N(\theta) = \frac{\sin((2N+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Aleshores

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)| d\theta = 2 \int_0^{\frac{2}{2N+1}\pi} \left| \frac{\sin((2N+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right| d\theta + 2 \int_{\frac{2\pi}{2N+1}}^{\pi} \left| \frac{\sin((2N+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right| d\theta.$$

Per $\theta \leq \pi$ tenim que $\sin(\theta/2) \geq \theta/\pi$. Per tant,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{2N+1}} \left| \frac{\sin((2N+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right| d\theta \leq \int_0^{\frac{2\pi}{2N+1}} \frac{(2N+1)\theta/2}{\theta/\pi} d\theta \leq \frac{2\pi^2(2N+1)}{2N+1} = 2\pi^2.$$

Per altra banda,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2\pi}{2N+1}}^{\pi} \left| \frac{\sin((2N+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right| d\theta &\leq \int_{\frac{2\pi}{2N+1}}^{\pi} \left| \frac{1}{\theta/\pi} \right| d\theta \leq [\pi \log(\theta)]_{\frac{2\pi}{2N+1}}^{\pi} \\ &= \pi \log(\pi) - \pi \log\left(\frac{2\pi}{2N+1}\right). \end{aligned}$$

Hem vist doncs que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)| d\theta &\leq 2\pi^2 + \pi \log(\pi) - \pi \log(2\pi) + \pi \log(2N+1) \\ &= 2\pi^2 - \pi \log(2) + \pi \log(2N+1). \end{aligned}$$

Per N prou gran, això implica

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)| d\theta \leq 2\pi \log(2N+1).$$

Solució de l'exercici 4.28

Per $|y| < \pi$, tenim $|y| \lesssim |\tan(y/2)|$. Així, la condició de l'enunciat

$$\int_0^1 \left| \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} - A \right| \frac{dy}{|y|} < \infty$$

implica en particular que

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} - A \right| \frac{dy}{|\tan(y/2)|} < \infty.$$

Volem veure que $Sf(x) = A$, és a dir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (D_N * f(x) - A) = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f(x) - A) = 0.$$

Escrivint aquesta convolució explícitament, com que el nucli té integral 1 podem escriure

$$\begin{aligned} D_N * f(x) - A &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - A) \frac{\sin((2N+1)y/2)}{\sin(y/2)} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(x-y) + f(x+y)}{2} - A \right) \frac{\sin((2N+1)y/2)}{\sin(y/2)} dy. \end{aligned}$$

Utilitzant l'expressió del sinus de la suma tenim

$$\sin((2N+1)y/2) = \sin(Ny) \cos(y/2) + \cos(Ny) \sin(y/2).$$

Així,

$$\begin{aligned} D_N * f(x) - A &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(x-y) + f(x+y)}{2} - A \right) \cos(Ny) dy \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(x-y) + f(x+y)}{2} - A \right) \frac{\sin(Ny)}{\tan(y/2)} dy. \end{aligned}$$

La primera integral és immediata, ja que

$$\int_0^\pi \left(\frac{f(x-y) + f(x+y)}{2} - A \right) \cos(Ny) dy = \pi c_N ((\tau_{-x}f(\cdot) + \tau_x f)/2 - A) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

pel lema de Riemman-Lebesgue.

Pel que fa a la segona integral, com hem vist, la condició de l'enunciat implica que

$$g(y) = \left(\frac{f(x-y) + f(x+y)}{2} - A \right) \frac{1}{\tan(y/2)}$$

satisfà que $g \in L^1(0, \pi)$. Així doncs, pel lema de Riemann-Lebesgue altra vegada, obtenim

$$\int_0^\pi \left(\frac{f(x-y) + f(x+y)}{2} - A \right) \frac{\sin(Ny)}{\tan(y/2)} dy = b_n(g) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Solució de l'exercici 4.29

Només cal veure que f satisfà el test de Dini. Usant la desigualtat triangular i la condició Lipschitz, obtenim

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x_0 + y) + f(x_0 - y)}{2} - f(x_0) \right| \frac{dy}{|y|} \leq \int_0^\pi \frac{|f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - 2f(x_0)|}{2} \frac{dy}{|y|} \leq C\pi.$$

Així doncs, f satisfà la hipòtesi del test de Dini i concloem que $Sf(x_0) = f(x_0)$.

Solució de l'exercici 4.31

És clar que f satisfà la condició del test de Dini en conjunts compactes K de l'interval I : per $x \in K$ tenim

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2} - 0 \right| \frac{dy}{|y|} = \int_{\text{dist}(x, I^c)}^\pi \left| \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2} \right| \frac{dy}{|y|} \leq \frac{C\|f\|_L^1(\mathbb{T})}{\text{dist}(x, I^c)},$$

i concloem que $Sf(x) = 0$. Falta veure que la convergència és uniforme.

Per fer-ho, seguirem la demostració del teorema 4.18. Notem que el nucli de Dirichlet no satisfà la propietat (b) ni la propietat (c), així que ens haurem d'espavilar per substituir-les. En primer lloc, suposem que f s'anul·la en (a, b) , i volem demostrar que la convergència és uniforme en $[a + \delta, b - \delta]$.

Tenim

$$D_N * f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi D_N(\zeta) f(\theta - \zeta) d\zeta.$$

Segui $\theta \in [a + \delta, b - \delta]$. Seguint el raonament de l'exercici 4.28, obtenim

$$|D_N * f(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^\pi f(\theta - \zeta) \cos(N\zeta) d\zeta \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^\pi f(\theta - \zeta) \frac{\sin(N\zeta)}{\tan(\zeta/2)} d\zeta \right|.$$

A la demostració del lema de Riemann-Lebesgue, hem comprovat la cota

$$\hat{f}(n) \leq \frac{1}{2} \omega_1 f(\pi/|n|) = 0$$

per tota funció integrable f . Aleshores

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^\pi f(\theta - \zeta) \cos(N\zeta) d\zeta \right| = \frac{|c_N(f(\theta - \cdot))|}{2} \stackrel{\text{ex. 3.49}}{\leq} |\hat{f}(N)| + |\hat{f}(-N)| \leq C\omega_1 f(\pi/N)$$

que convergeix uniformement a 0 independentment de θ .

Per controlar el terme corresponent a $\sin(N\zeta)$, al tenir la tangent al denominador ens cal anar més amb compte. Necessitem controlar el mòdul de continuïtat integral d'un producte: donades $f \in L^1$, $g \in C(\mathbb{T})$, tenim

$$\begin{aligned} \omega_1(fg)(h) &= \sup_{|t| \leq h} \|\tau_t f \tau_t g - fg\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \sup_{|t| \leq h} \|\tau_t f \tau_t g - f \tau_t g\|_{L^1(\mathbb{T})} + \sup_{|t| \leq h} \|f \tau_t g - fg\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \omega_1 f(h) + \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \omega_\infty g(h). \end{aligned}$$

Aplicant aquest argument al producte de f amb $\frac{\chi_{\delta \leq |\zeta|}}{\tan(\zeta/2)}$, ens trobaríem que la discontinuïtat ens posa un problema. Per sort, com que f s'anul·la $(\theta - \delta, \theta + \delta)$, podem agafar una versió suau de la funció característica: sigui $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\chi_{(\delta, \infty)}(|\zeta|) \leq \psi(t) \leq \chi_{(\delta/2, \infty)}(|\zeta|)$. Aleshores definim $g(\zeta) = \frac{\psi(|\zeta|)}{\tan(\zeta/2)}$ i tenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \zeta) \frac{\sin(N\zeta)}{\tan(\zeta/2)} d\zeta \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \zeta) \frac{\psi(|\zeta|)}{\tan(\zeta/2)} \sin(N\zeta) d\zeta \right| \\ &= C |b_N(f(\theta - \cdot)g(\cdot))| \leq C \omega_1(f(\theta - \cdot)g(\cdot))(\pi/N) \\ &\lesssim \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \omega_1 f(\pi/N) + \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \omega_\infty g(\pi/N). \end{aligned}$$

Obtenim doncs que la velocitat de convergència no depèn de θ . En canvi sí que depèn de $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \geq 1/\tan(\delta/2)$ i de $\omega_\infty g(\pi/N)$, i ambdós empitjoren a mida que δ es fa més petit.

Solució de l'exercici 4.32

Recordem que

$$D_N(\theta) = \frac{e^{i(2N+1)\theta/2} - e^{-i(2N+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}.$$

Per tant

$$\begin{aligned} F_N(\theta) &= \frac{D_0(\theta) + D_1(\theta) + \dots + D_{N-1}(\theta)}{N} \\ &= \frac{1}{N(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i(2n+1)\theta/2} - e^{-i(2n+1)\theta/2} \right), \end{aligned}$$

i usant la fórmula de la sèrie geomètrica

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} \left(e^{i\theta/2} \frac{1 - e^{iN\theta}}{1 - e^{i\theta}} - e^{-i\theta/2} \frac{1 - e^{-iN\theta}}{1 - e^{-i\theta}} \right),$$

és a dir

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} \left(\frac{1 - e^{iN\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} - \frac{1 - e^{-iN\theta}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \right) = \frac{e^{iN\theta} + e^{-iN\theta} - 2}{N(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})^2},$$

Tenim doncs

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right)^2,$$

tal i com volíem veure.

Solució de l'exercici 4.33

Veurem que

a) Per tot $N \in \mathbb{N}$ tenim $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(\theta) d\theta = 1$.

b) Existeix $M > 0$ tal que $\|F_N\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq M$ per tot $N \in \mathbb{N}$.

c) Per cada $\delta > 0$ tenim $\sup_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |F_N(\theta)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

La primera condició és trivial, ja que

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_N(\theta) d\theta := \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(\theta) d\theta}{N} = 1.$$

La segona condició és immediata ja que al ser $F_N \geq 0$, deduïm que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_N(\theta)| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(\theta) d\theta = 1.$$

Finalment,

$$\sup_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |F_N(\theta)| d\theta \stackrel{(4.7)}{\leq} \frac{1}{N} \left(\frac{1}{\sin(\delta/2)} \right)^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Solució de l'exercici 4.36

Al tenir els mateixos coeficients de Fourier,

$$\sigma_N f = \sigma_N g.$$

Per tant,

$$\|f - g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f - \sigma_N f\|_{L^1(\mathbb{T})} + \|g - \sigma_N f\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Pel teorema de Féjer sabem que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \sigma_N f\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0.$$

i

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|g - \sigma_N g\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0.$$

Així, necessàriament tenim $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0$ i aquestes dues funcions han de coincidir g.p.t. arreu.

Solució de l'exercici 4.38

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} &= \sum_{n \geq 0} r^{|n|} e^{in\theta} + \sum_{n \geq 1} r^n e^{-in\theta} = \frac{1}{1 - re^{i\theta}} + re^{-i\theta} \frac{1}{1 - re^{-i\theta}}. \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} &= \frac{1 - re^{-i\theta} + re^{-i\theta}(1 - re^{i\theta})}{(1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta})} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}. \end{aligned}$$

Si $r = 0$, r^0 no està ben definit. Però la segona expressió sí que és correcta i val 1.

Solució de l'exercici 4.39

Veurem que

a) Per tot $r \in [0, 1)$ tenim $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$.

b) Existeix $M > 0$ tal que $\|P_r\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq M$ per tot $r \in [0, 1)$.

c) Per cada $\delta > 0$ tenim $\sup_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |P_r(\theta)| \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$.

Com que $|r^{|n|} e^{in\theta}| = r^n$, pel criteri M de Weierstrass tenim convergència uniforme i, pel teorema 2.44 podem intercanviar el límit i la suma:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|} e^{in\theta} d\theta = 2\pi.$$

Obtenim així la primera propietat per $r \neq 0$. Per $r = 0$ el nucli de Poisson és constant igual a 1 i també ho compleix.

Per la segona, observem que

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \geq 0,$$

així que se segueix de la primera propietat.

Per la tercera, per r proper a 1 i $\delta \leq |\theta| \leq \pi$, tenim $\cos \theta \leq \cos \delta$ i

$$|P_r(\theta)| = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} \xrightarrow{r \rightarrow 1} \frac{0}{2 - 2 \cos \delta} = 0.$$

Solució de l'exercici 4.41

Considerem $r < 1$ fixat. De fet, la convergència de la sèrie $P_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$ és uniforme pel criteri M de Weierstrass. Així doncs, pel teorema 2.44 podem intercanviar l'ordre de la suma i la integral per escriure

$$\begin{aligned} P_r * f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_r(t) f(\theta - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} f(\theta - t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\theta} \int_{\mathbb{T}} r^{|n|} e^{in(t-\theta)} f(\theta - t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{in\theta} = A_r f(\theta). \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 4.42

Per l'exercici anterior tenim

$$A_r f = P_r * f.$$

Com que la funció $P_r \in C^\infty$, aleshores també $A_r f \in C^\infty$.

Efectivament, si $f \in L^1$ i $g \in C^\infty$, per $k \in \mathbb{N}$ sabem que $\widehat{g}(n) \leq C_k n^{-k}$ pel corollari 3.9, i $\widehat{f}(n) \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$. Aleshores

$$|\widehat{f * g}(n)| = \widehat{f}(n) |\widehat{g}(n)| \leq C_k n^{-k}$$

i pel teorema 3.19 deduïm que $f * g \in C^\infty$.

Solució de l'exercici 5.3

Per una banda tenim

$$\|f_1\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} [\theta^3/3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3/3}{2\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Per l'altra, del primer apartat de l'exercici 1.12, sabem que $\widehat{f}_1(n) = \frac{i(-1)^n}{n}$ i, per tant,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_1(n)|^2 = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

De la identitat de Parseval, resulta que

$$\frac{\pi^2}{3} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Prenem ara $f_2(\theta) = \theta^2$. Aleshores

$$\|f_2\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^4 d\theta = \frac{1}{2\pi} [\theta^5/5]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^5/5}{2\pi} = \frac{\pi^4}{5}.$$

Per l'altra, del setzè apartat de l'exercici 1.12, sabem que

$$b_n(f_2) = 0 \quad c_n(f_2) = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & \text{si } n = 0, \\ \frac{4(-1)^n}{n^2} & \text{altrament.} \end{cases}$$

i

$$\widehat{f}_2(n) = \frac{c_n(f_2) - ib_n(f_2)}{2} = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} & \text{si } n = 0, \\ \frac{2(-1)^n}{n^2} & \text{altrament.} \end{cases}$$

Per tant,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_2(n)|^2 = \frac{\pi^4}{9} + \sum_{n \neq 0} \frac{2^2}{n^4} = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

La identitat de Parseval implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \right) = \frac{4\pi^4}{360} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Prenem ara $f_3(\theta) = \theta^3$. Aleshores

$$\|f_3\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^6 d\theta = \frac{1}{2\pi} [\theta^7/7]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^7/7}{2\pi} = \frac{\pi^6}{7}.$$

Per l'altra, calculem el coeficient de Fourier enèsim:

$$\widehat{f}_3(0) = \int \theta^3 d\theta = 0,$$

i per $n \neq 0$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_3(n) &= \frac{1}{2\pi} \int \theta^3 e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\theta^3 e^{-in\theta}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{3i}{2\pi n} \int \theta^2 e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{i\pi^2(-1)^n}{n} - \frac{3i}{n} \widehat{f}_2(n) = \frac{i\pi^2(-1)^n}{n} - \frac{6i(-1)^n}{n^3} = (-1)^n i \frac{\pi^2 n^2 - 6}{n^3},\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_3(n)|^2 &= \sum_{n \neq 0} \frac{(\pi^2 n^2 - 6)^2}{n^6} = \sum_{n \neq 0} \frac{\pi^4}{n^2} + \sum_{n \neq 0} \frac{-12\pi^2}{n^4} + \sum_{n \neq 0} \frac{36}{n^6} \\ &= 2\pi^4 \frac{\pi^2}{6} - 24\pi^2 \frac{\pi^4}{90} + 72 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.\end{aligned}$$

La identitat de Parseval implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{72} \left(\frac{\pi^6}{7} - 2\pi^4 \frac{\pi^2}{6} + 24\pi^2 \frac{\pi^4}{90} \right) = \frac{90 - 210 + 168}{72 \cdot 630} \pi^6 = \frac{\pi^6}{945}.$$

Solució de l'exercici 5.6

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 \rangle &= \alpha_1 \langle f_1, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 \rangle + \alpha_2 \langle f_2, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 \rangle \\ &= \alpha_1 \overline{\langle \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2, f_1 \rangle} + \alpha_2 \overline{\langle \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2, f_2 \rangle} \\ &= \alpha_1 \overline{\beta_1 \langle g_1, f_1 \rangle} + \beta_2 \overline{\langle g_2, f_1 \rangle} + \alpha_2 \overline{\beta_1 \langle g_1, f_2 \rangle} + \beta_2 \overline{\langle g_2, f_2 \rangle} \\ &= \alpha_1 \overline{\beta_1} \langle f_1, g_1 \rangle + \alpha_1 \overline{\beta_2} \langle f_1, g_2 \rangle + \alpha_2 \overline{\beta_1} \langle f_2, g_1 \rangle + \alpha_2 \overline{\beta_2} \langle f_2, g_2 \rangle.\end{aligned}$$

Solució de l'exercici 5.7

La regla del paral·lelogram se segueix dels següents càlculs:

$$2\|f\|_H^2 + 2\|g\|_H^2 = 2\langle f, f \rangle + 2\langle g, g \rangle$$

$$\begin{aligned}\|f+g\|_H^2 + \|f-g\|_H^2 &= \langle f+g, f+g \rangle + \langle f-g, f-g \rangle \\ &\stackrel{\text{Ex. 5.6}}{=} \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle + \langle f, f \rangle - \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle.\end{aligned}$$

El teorema de Pitàgores és immediat, ja que $\langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle = 0$:

$$\|f\|_H^2 + \|g\|_H^2 = \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle = \langle f+g, f+g \rangle.$$

La desigualtat de Cauchy-Schwarz porta una mica més de feina. Si $f = 0$, aleshores $f = 0g$ i

$$\langle f, g \rangle = 0 \langle g, g \rangle = 0 \|g\|_H^2 = 0 = 0 \langle f, f \rangle = \langle f, f \rangle = \|f\|_H^2.$$

Falta veure el cas $f \neq 0$, és a dir $\|f\|_H > 0$. En tal cas, definim

$$h := g - \frac{\overline{\langle f, g \rangle}}{\langle f, f \rangle} f.$$

Aleshores

$$\langle f, h \rangle = \langle f, g - \frac{\overline{\langle f, g \rangle}}{\langle f, f \rangle} f \rangle = \langle f, g \rangle - \frac{\langle f, g \rangle}{\langle f, f \rangle} \langle f, f \rangle = 0.$$

Deduïm que f i h són ortogonals i, per tant, també ho són $\frac{\overline{\langle f, g \rangle}}{\langle f, f \rangle} f$ i h . Podem aplicar el teorema de Pitàgores:

$$\|g\|_H^2 = \left\| h + \frac{\overline{\langle f, g \rangle}}{\langle f, f \rangle} f \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 + \left| \frac{\overline{\langle f, g \rangle}}{\langle f, f \rangle} \right|^2 \|f\|_H^2 = \|h\|_H^2 + \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|f\|_H^2} \geq \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|f\|_H^2},$$

obtenint així la desigualtat de Cauchy-Schwarz. Notem que la igualtat només s'assoleix si $h = 0$, que implica en particular que f i g són linealment dependents.

Per acabar, la desigualtat triangular és conseqüència de la de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_H^2 &= \|f\|_H^2 + \|g\|_H^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle \leq \|f\|_H^2 + \|g\|_H^2 + 2|\langle f, g \rangle| \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_H^2 + \|g\|_H^2 + 2\|f\|_H\|g\|_H = (\|f\|_H + \|g\|_H)^2. \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 5.9

1. Tota successió de Cauchy $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ té una parcial $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\|f_{n_k} - f_{n_j}\|_{L^2} \leq 2^{-m}$ si $j, k > m$, es pot obtenir reindexant convenientment.
2. Suposem que aquesta condició es compleix d'entrada. Aleshores $f_n \rightarrow f$ és equivalent a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n = f$, on $g_n = f_n - f_{n-1}$ (prenem $f_{-1} := 0$).
3. En aquest cas tenim $\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_{L^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 < \infty$.
4. Definim $\tilde{g} := \sum_{n=0}^{\infty} |g_n|$. En ser una successió creixent, el límit està ben definit per tot arreu. Aquesta funció és de quadrat integrable per la desigualtat de Minkowski:

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int \tilde{g}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} |g_n| \right\|_{L^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_{L^2} < \infty.$$

En particular \tilde{g} és finita gairebé per tot arreu. Allà on la suma dels valors absoluts és finita, també ho serà la suma, ja que la convergència absoluta d'una sèrie numèrica n'implica la convergència. A més, tenim $|\sum g_n| \leq \sum |g_n|$. Així doncs, $f := \sum g_n$ està ben definida gairebé per tot arreu, i $|f| \leq \tilde{g}$.

5. Com que $|f - \sum_{n=1}^N g_n| \leq 2\tilde{g}$, podem aplicar el teorema de convergència dominada per concloure que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int \left(f - \sum_{n=1}^N g_n \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int \lim_{N \rightarrow \infty} \left(f - \sum_{n=1}^N g_n \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Solució de l'exercici 5.11

Que \langle, \rangle és un producte escalar és fàcil de veure.

Vegem que l'espai és complet. Donada una successió $\{\{a_n^k\}_{n=1}^\infty\}_{k=1}^\infty$ de Cauchy de successions de $\ell^2(\mathbb{Z})$, és a dir que per tot ε existeix k_0 tal que per $k, j > k_0$ tenim

$$\left\| \{a_n^k - a_n^j\}_{n=1}^\infty \right\|_{\ell^2(\mathbb{T})} < \varepsilon.$$

Passant a una parcial, podem suposar que per $k, j > k_0$ tenim

$$\left\| \{a_n^k - a_n^j\}_{n=1}^\infty \right\|_{\ell^2(\mathbb{T})} < 2^{-k_0}.$$

Cada coordenada de la successió defineix una successió de Cauchy a \mathbb{C} , ja que per tot $n_0 \in \mathbb{N}$ tenim

$$|a_{n_0}^k - a_{n_0}^j| \leq \left\| \{a_n^k - a_n^j\}_{n=1}^\infty \right\|_{\ell^\infty(\mathbb{T})} \leq \left\| \{a_n^k - a_n^j\}_{n=1}^\infty \right\|_{\ell^2(\mathbb{T})} < \varepsilon,$$

i així es pot definir la successió candidata a ser el límit de manera unívoca:

$$a_{n_0} := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_0}^k.$$

Vegem que la successió $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ pertany a $\ell^2(\mathbb{Z})$ i, de fet, n'és el límit. Per tot n existeix un k_n tal que si $k > k_n$ aleshores tenim

$$|a_n - a_n^k| \leq \varepsilon 2^{-n}.$$

Aleshores, fixat $N \in \mathbb{N}$, si prenem $k > k_n$ per tot $n \leq N$ i $k > j$, i prenent $\varepsilon = 2^{-2j}$ obtenim

$$\sum_{n=1}^N |a_n - a_n^j|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^N |a_n - a_n^k|^2 + 2 \sum_{n=1}^N |a_n^k - a_n^j|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^N \varepsilon 2^{-n} + 2^{-2j+1} \leq 2^{-2j+2}.$$

Com que aquesta cota és independent de N , deduïm que

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n - a_n^j|^2 \leq 2^{-j}.$$

així que efectivament $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ n'és el límit i és de ℓ^2 per la desigualtat triangular.

Solució de l'exercici 5.13

La nostra hipòtesi és que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^N h_k \right\|_H = 0.$$

Usant la sesquilinealitat del producte escalar i la desigualtat de Cauchy-Schwarz,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^N \langle g, h_k \rangle - \langle g, f \rangle \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \langle g, \sum_{k=1}^N h_k - f \rangle \right| \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \lim_{N \rightarrow \infty} \|g\|_H \left\| \sum_{k=1}^N h_k - f \right\|_H = 0.$$

Solució de l'exercici 5.14

Per l'exercici anterior, tenim

$$\langle a_m e_m, \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e_n \rangle \stackrel{\text{ex. 5.13}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle a_m e_m, b_n e_n \rangle \stackrel{\text{ex. 5.6}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_m \bar{b}_n \langle e_m, e_n \rangle \stackrel{\text{ex. 1.7}}{=} a_m \bar{b}_m.$$

Altra vegada per l'exercici anterior tenim

$$\left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e_m, \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e_n \right\rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle a_m e_m, \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e_n \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \bar{b}_m.$$

Solució de l'exercici 5.15

Sigui $J \subset \Lambda$ un conjunt finit i siguin $\alpha_\lambda \in \mathbb{C}$ coeficients tals que

$$\sum_{\lambda \in J} \alpha_\lambda f_\lambda = 0.$$

Per la sesquilinealitat del producte escalar i l'ortogonalitat dels elements de Λ , tenim que

$$0 = \left\langle \sum_{\lambda \in J} \alpha_\lambda f_\lambda, \sum_{\mu \in J} \alpha_\mu f_\mu \right\rangle \stackrel{\text{sesq.}}{=} \sum_{\lambda \in J} \sum_{\mu \in J} \alpha_\lambda \bar{\alpha}_\mu \langle f_\lambda, f_\mu \rangle \stackrel{\text{ort.}}{=} \sum_{\lambda \in J} |\alpha_\lambda|^2 \|f_\lambda\|_H^2.$$

Com a suma de termes no negatius que s'anul·la, tots els termes han de ser zero i, per tant, $\alpha_\lambda = 0$. Així doncs, la família $\{f_\lambda\}_{\lambda \in J}$ és linealment independent, tal i com volíem veure.

Solució de l'exercici 6.3

Notem que

$$\langle e_k, e_j \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{kn} \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{jn}}.$$

Com que $\bar{\omega} = e^{\overline{2\pi i/N}} = e^{-2\pi i/N} = \omega^{-1}$, tenim

$$\langle e_k, e_j \rangle = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \omega^{(k-j)n}.$$

Si $k = j$, aleshores

$$\langle e_k, e_j \rangle = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \omega^0 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} 1 = 1.$$

En cas contrari, notem que $\omega^{(k-j)} \neq 1$, i

$$(\omega^{k-j})^N = (\omega^N)^{k-j} = 1^{k-j} = 1.$$

Però qualsevol solució de $z^N - 1 = 0$ tal que $z \neq 1$ satisfà que

$$z^{N-1} + z^{N-2} + \dots + z^0 = 0,$$

ja que $z^N - 1 = (z - 1)(z^{N-1} + z^{N-2} + \dots + z^0)$. Per tant,

$$\sum_0^{N-1} \omega^{(k-j)n} = 0$$

i deduïm que per $k \neq j$ tenim

$$\langle e_k, e_j \rangle = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \omega^{(k-j)n} = 0.$$

Solució de l'exercici 6.4

Vegem quin és el quadrat del mòdul de la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{v}(k)|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \hat{v}(k) \overline{\hat{v}(k)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} v(n) \omega^{-kn} \right) \left(\sum_{m=0}^{N-1} \overline{v(m)} \omega^{km} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) \sum_{m=0}^{N-1} \overline{v(m)} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(m-n)} \stackrel{\text{ex. 6.3}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) \sum_{m=0}^{N-1} \overline{v(m)} \delta_{m,n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v(n) \overline{v(n)} = \sum_{n=0}^{N-1} |v(n)|^2 \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 6.9

La condició d'ortonormalitat és trivial per la definició, ja que $B^{-1}B = Id$.

Per altra banda,

$$\begin{aligned} v^T &= BB^{-1}v^T = B \begin{bmatrix} \langle v, w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, w_N \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_N \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v, w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, w_N \rangle \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^N \langle v, w_j \rangle \begin{bmatrix} | \\ v_j \\ | \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^N \langle v, w_j \rangle v_j^T. \end{aligned}$$

L'altra igualtat es demostra anàlogament.

Solució de l'exercici 6.11

Notem que

$$\langle Uv, Uw \rangle = (Uv)^T (\overline{Uw}) = v^T U^T \overline{Uw} = v^T Id\overline{w} = \langle v, w \rangle.$$

Solució de l'exercici 6.14

Això és conseqüència de l'exercici 6.3 i del fet que la matriu F_N és simètrica, ja que $e_n(k) = \omega^{nk} = e_k(n)$.

Solució de l'exercici 6.15

Es pot aplicar l'exercici 6.11 directament ja que la matriu de Fourier normalitzada és unitària. Alternativament, podem replicar l'argument:

$$\langle \widehat{v}, \widehat{w} \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{N}} F_N v, \frac{1}{\sqrt{N}} F_N w \right\rangle = \frac{1}{N} (F_N v)^T (\overline{F_N w}) = \frac{1}{N} v^T F_N^T \overline{F_N w} = v^T Id\overline{w} = \langle v, w \rangle.$$

Solució de l'exercici 6.16

$$\begin{aligned} \widehat{v * w}(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} v * w(n) e^{-2\pi i n k / N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} v(m) w(n-m) e^{-2\pi i (n-m+k) k / N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} v(m) e^{-2\pi i m k / N} \sum_{n=0}^{N-1} w(n-m) e^{-2\pi i (n-m) k / N} = \widehat{v}(k) \widehat{w}(k). \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 7.2

Per demostrar 7.7, n'hi ha prou amb observar que $|f \chi_{[-R,R]}| \leq |f| \in L^1$, de manera que podem aplicar el teorema de la convergència dominada per concloure que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \widehat{f}(\xi).$$

Solució de l'exercici 7.4

Tenim

$$\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\zeta) = \int \left(e^{-2\pi i \xi x} - e^{-2\pi i \zeta x} \right) f(x) dx = \int e^{-2\pi i \xi x} \left(1 - e^{-2\pi i (\zeta - \xi) x} \right) f(x) dx$$

Prenent valors absoluts tenim

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\zeta)| \leq \int_{|x| < R} |1 - e^{-2\pi i(\zeta - \xi)x}| |f(x)| dx + \int_{|x| > R} |1 - e^{-2\pi i(\zeta - \xi)x}| |f(x)| dx.$$

Fixats $R > 0$, escollint $|\zeta - \xi| < \frac{1}{2\pi MR}$ amb $M > \frac{2\|f\|_1}{\varepsilon}$, com que

$$|1 - e^{-ix}| = \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} = \sqrt{4 \sin^2(x/2)} \leq |x|,$$

tenim que

$$\int_{|x| < R} |1 - e^{-2\pi i(\zeta - \xi)x}| |f(x)| dx \leq 2\pi |\zeta - \xi| R \|f\|_1 \leq \frac{\|f\|_1}{M} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per altra banda,

$$\int_{|x| > R} |1 - e^{-2\pi i(\zeta - \xi)x}| |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

si R és prou gran, ja que $\|f\|_1 < +\infty$.

Notem que hem demostrat que el mòdul de continuïtat de \widehat{f} és uniforme, és a dir que \widehat{f} és uniformement contínua. Per altra banda,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \omega_1 f \left(\frac{1}{2|\xi|} \right),$$

com ja hem vist al lema de Riemann Lebesgue, de manera que $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0$.

Solució de l'exercici 7.5

Efectivament,

$$\widehat{\chi_{(-1,1)}}(\xi) = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{e^{-2\pi i \xi} - e^{2\pi i \xi}}{-2\pi i \xi} = \frac{\sin(2\pi \xi)}{\pi \xi}.$$

Solució de l'exercici 7.7

Fem el primer cas:

$$\begin{aligned} \widehat{af + bg}(\xi) &= \int e^{-2\pi i x \xi} (af(x) + bg(x)) dx \\ &= a \int e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx + b \int e^{-2\pi i x \xi} g(x) dx = a\widehat{f}(\xi) + b\widehat{g}(\xi) \end{aligned}$$

El segon apartat es veu amb un canvi de variable:

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_h f}(\xi) &= \int e^{-2\pi i x \xi} f(x - h) dx = \int e^{-2\pi i (y+h)\xi} f(y) dy \\ &= e^{-2\pi i h \xi} \int e^{-2\pi i y \xi} f(y) dy = M_{-h} \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

El tercer és immediat:

$$\widehat{M}_h f(\xi) = \int e^{-2\pi i x \xi} e^{2\pi i x h} f(x) dx = \widehat{f}(\xi - h) = \tau_h \widehat{f}(\xi)$$

El quart torna a sortir amb un canvi de variable: per tot $s \neq 0$ tenim

$$\widehat{D}_s f(\xi) = \int e^{-2\pi i x \xi} s f(sx) dx = \int e^{-2\pi i (y/s)\xi} s f(y) \frac{dy}{|s|} = \widehat{f}(\xi/s) = |s| D_{s^{-1}} \widehat{f}(\xi).$$

Notem que el cinquè apartat és el mateix prenent $s = -1$.

El conjugat és similar:

$$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \xi} \overline{f(x)} dx = \int \overline{e^{2\pi i x \xi} f(x)} dx = \overline{\widehat{f}(-\xi)} = \widetilde{\widehat{f}}(\xi) = \widetilde{\overline{f}}(\xi).$$

L'apartat g es demostra usant integració per parts:

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(\xi) &= \int e^{-2\pi i x \xi} f'(x) dx \stackrel{\text{Ex.7.2}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-2\pi i x \xi} f'(x) dx \\ &\stackrel{\text{TFC}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[e^{-2\pi i x \xi} f(x) \right]_{-R}^R - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R (-2\pi i \xi) e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \\ &\stackrel{\text{Ex.7.2}}{=} 0 + 2\pi i \xi \int e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 7.8

El cas $k = 1$ es resol repetint la demostració de la propietat h), però usant $h_0 := \frac{\varepsilon}{2CM^2 \|f\|_1}$ per la part local, mentre que la part no local surt directament.

Suposem que la fórmula és certa per tot $j \leq k - 1$. Volem veure que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(\xi + h) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \widehat{f}^{(j)}(\xi) h^j}{h^k} - \frac{1}{k!} ((-2\pi i \cdot)^k f(\cdot))^\wedge(\xi) = 0,$$

és a dir que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(\xi + h) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \widehat{f}^{(j)}(\xi) h^j - \frac{1}{k!} \int (-2\pi i x)^k f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx h^k}{h^k} = 0.$$

Per la hipòtesi inductiva, les derivades d'ordre menor ja les tenim, i ens queda que volem veure que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int f(x) e^{-2\pi i x (\xi + h)} dx - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \int (-2\pi i x)^j f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx h^j}{h^k} = 0.$$

Agrupant les integrals i traient factor comú, obtenim que és suficient veure que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int f(x) e^{-2\pi i x \xi} \left(\frac{e^{-2\pi i x h} - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} (-2\pi i x h)^j}{h^k} \right) dx = 0.$$

I prenent valors absoluts veiem que és suficient demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int |f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i x h} - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} (-2\pi i x h)^j}{h^k} \right| dx = 0.$$

Considerem primer la part local de la integral, quan la variable $|x| < M$, amb $M \gg 1$. Sabem que la funció exponencial és analítica amb radi de convergència infinit. En particular, per $|z| < 1$, tenim

$$\left| e^z - \sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j!} \right| \leq C_0 |z|^{k+1}.$$

Prenem $|h| < h_0 := \frac{\varepsilon}{2(2\pi)^{k+1} C_0 \|f\|_1 M^{k+1}}$ i suposem que $\varepsilon \leq C_0/\pi \|F\|_1$, és a dir que és prou petit per garantir que $2\pi h_0 M < 1$. Notem que si $x < M$, aleshores $|2\pi i h x| < 1$ i, per tant,

$$\left| e^{2\pi i h x} - \sum_{j=0}^k \frac{(2\pi i h x)^j}{j!} \right| \leq C_0 |2\pi i h x|^{k+1} \leq (2\pi)^{k+1} C_0 |h|^{k+1} M^{k+1}.$$

Així,

$$\begin{aligned} \textcircled{1}_h &:= \int_{|x| < M} |f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i x h} - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} (-2\pi i x h)^j}{h^k} \right| dx \\ &\leq \int_{|x| < M} |f(x)| \frac{(2\pi)^{k+1} C_0 |h|^{k+1} M^{k+1}}{|h|^k} dx \end{aligned}$$

satisfà que

$$\textcircled{1}_h \leq \|f\|_1 (2\pi)^{k+1} C_0 h_0 M^{k+1} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per altra banda, notem que

$$\begin{aligned} \left| e^{-2\pi i x h} - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} (-2\pi i x h)^j \right| &\leq \left| \cos(-2\pi x h) - \sum_{j=0 \text{ tq } j \text{ és parell}}^k \frac{1}{j!} (2\pi x h)^j (-1)^{j/2} \right| \\ &\quad + \left| \sin(-2\pi x h) - \sum_{j=0 \text{ tq } j \text{ és senar}}^k \frac{1}{j!} (2\pi x h)^j (-1)^{j/2} \right| \end{aligned}$$

Recordem que l'error dels polinomis de Taylor de sinus i cosinus en t està acotat per

$$\left| \cos(t) - \sum_{j=0 \text{ tq } j \text{ és parell}}^{k-1} \frac{1}{j!} t^j (-1)^{j/2} \right| \leq \sup_{|y| \leq |t|} \frac{|\sin(y)|}{k!} t^k \leq |t|^k / k!,$$

i anàlogament passa amb el sinus. Així,

$$\begin{aligned} \textcircled{2h} &:= \int_{|x|>M} |(2\pi x)^k f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i x h} - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} (-2\pi i x h)^j}{|2\pi x h|^k} \right| dx \\ &\leq C \int_{|x|>M} |x|^k |f(x)| \left| \frac{1}{k!} + \frac{1}{k!} \right| dx \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

ja que $|x|^k f \in L^1(\mathbb{R})$.

Ara, prenent M de manera que $\textcircled{2h} < \varepsilon/2$ i escollint després h_0 com hem fet abans, garantim que

$$\int |f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i x h} - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} (-2\pi i x h)^j}{h^k} \right| dx < \varepsilon,$$

i obtenim el pas inductiu. Per tant, la derivada k -èsima de la transformada de Fourier existeix i és precisament

$$\frac{d^k}{d\xi^k} \hat{f}(\xi) = ((-2\pi i \cdot)^k f(\cdot))^\wedge(\xi).$$

Solució de l'exercici 7.9

Escrivim $G(x) = e^{-\pi x^2}$, i notem que $f_1 = G$. Si veiem que $\hat{G}(\xi) = G(\xi)$, aleshores tenim que

$$\begin{aligned} \widehat{f_\alpha}(\xi) &= \alpha^{-1/2} \widehat{D_{\alpha^{1/2}} f_1}(\xi) \stackrel{d)}{=} \alpha^{-1/2} \alpha^{1/2} D_{\alpha^{-1/2}} \hat{f}_1(\xi) = D_{\alpha^{-1/2}} \hat{G}(\xi) \\ &= D_{\alpha^{-1/2}} G(\xi) = \alpha^{-1/2} e^{-\pi \frac{\xi^2}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Manca justificar que la campana de Gauss és invariant per Fourier. Ho farem usant la unicitat de les solucions d'una equació diferencial ordinària. Notem primer que

$$\begin{cases} G'(x) = -2\pi x G(x), \\ G(0) = 1. \end{cases}$$

Tot seguit comprovarem que \hat{G} satisfà la mateixa EDO que la campana de Gauss. En primer lloc, sabem que

$$\hat{G}(0) = \int_{\mathbb{R}} G(x) dx = 1.$$

Per altra banda,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \hat{G}(\xi) &= -2\pi i \cdot \widehat{G(\cdot)}(\xi) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x G(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = i \int_{\mathbb{R}} G'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &\stackrel{\text{per parts}}{=} [i e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} i e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} (-2\pi i \xi) dx \\ &= 0 - 2\pi \xi \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = -2\pi \xi \hat{G}(\xi). \end{aligned}$$

Troblem doncs que G i \widehat{G} satisfan la mateixa EDO amb la mateixa condició inicial. Són doncs iguals en un obert. El conjunt on coincideixen, per la unicitat de les EDO's és, de fet, un obert. Però a la vegada, com que les dues funcions són contínues a \mathbb{R} , el conjunt de coincidència és necessàriament també un conjunt tancat. Per tant, coincideixen a tota la recta real.

Solució de l'exercici 7.10

Tenim

$$\widehat{g}_\alpha(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha|x|} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_0^{\infty} e^{-2\pi(\alpha-i\xi)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-2\pi(\alpha+i\xi)x} dx.$$

Així,

$$\widehat{g}_\alpha(\xi) = \left[\frac{e^{-2\pi(\alpha-i\xi)x}}{-2\pi(\alpha-i\xi)} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{-2\pi(\alpha+i\xi)x}}{-2\pi(\alpha+i\xi)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi(\alpha-i\xi)} + \frac{1}{2\pi(\alpha+i\xi)} = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \xi^2)}.$$

Solució de l'exercici 7.11

En primer lloc, amb el canvi de variable $y = x/t$, per $a > 0$ tenim que

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-ty} (ty)^{a-1} t dy = t^a \int_0^{\infty} e^{-tx} x^{a-1} dx.$$

Aleshores, si $a = \alpha/2$ i $t = \frac{1+4\pi^2\xi^2}{4\pi}$, deduïm que

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(1+4\pi^2\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{4\pi}(1+4\pi^2\xi^2)} x^{\frac{\alpha}{2}-1} dx.$$

Aïllant $(1+4\pi^2\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}}$, trobem que

$$F_\alpha(\xi) = \frac{1}{(1+4\pi^2\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{4\pi}(1+4\pi^2\xi^2)} x^{\frac{\alpha}{2}-1} dx.$$

Notem que per $\alpha > 1$, la funció F_α és integrable. Per tant, \widetilde{F}_α està definit puntualment, i es pot calcular com

$$\begin{aligned} G_\alpha(x) &:= \widetilde{F}_\alpha(x) = \int e^{2\pi i x \xi} F_\alpha(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int e^{2\pi i x \xi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{4\pi}(1+4\pi^2\xi^2)} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt d\xi. \end{aligned}$$

En el pas següent usem els teoremes de Fubini i Tonelli, que requereixen una justificació que deixem per més endavant:

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^{\infty} \int e^{2\pi i x \xi} e^{-\pi t \xi^2} d\xi e^{-\frac{t}{4\pi} t^{\frac{\alpha}{2}-1}} dt.$$

Per l'exercici 7.9 sabem que

$$\int e^{2\pi i x \xi} e^{-\pi t \xi^2} d\xi = \widehat{f}_t(x) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi x^2}{t}},$$

de manera que

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi x^2}{t}} e^{-\frac{t}{4\pi} t^{\frac{\alpha}{2}-1}} dt = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi x^2}{t}} e^{-\frac{t}{4\pi} t^{\frac{\alpha-1}{2}}} \frac{dt}{t}.$$

Amb el canvi $y = t/4\pi$ obtenim, tal i com volíem veure, que

$$G_\alpha(x) = \frac{(4\pi)^{-1}}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-y - \frac{x^2}{4y}} y^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{dy}{y}.$$

Per justificar el canvi d'ordre en la integració, notem que el teorema de Tonelli ens diu que

$$\int \int_0^\infty e^{-\frac{t}{4\pi}(1+4\pi^2\xi^2)} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt d\xi = \int_0^\infty \int e^{-t\pi\xi^2} d\xi e^{-\frac{t}{4\pi} t^{\frac{\alpha}{2}-1}} dt.$$

Emprant el canvi de variable $\zeta = \sqrt{t}\xi$,

$$\int \int_0^\infty e^{-\frac{t}{4\pi}(1+4\pi^2\xi^2)} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt d\xi = \int_0^\infty \int e^{-t\pi\zeta^2} \frac{d\zeta}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{4\pi} t^{\frac{\alpha}{2}-1}} dt = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{4\pi} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}}} dt.$$

Aquesta integral impròpia és convergent a l'infinit sempre, i és convergent a l'origen si i només si $\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2} > -1$, és a dir, si $\alpha > 1$, tal i com assumim a l'enunciat.

Solució de l'exercici 7.13

Un cop més tot es redueix a utilitzar els teoremes de Fubini i Tonelli i el canvi de variable $w = x - y$:

$$\begin{aligned} \int \int f(y)g(x-y) dy e^{-2\pi i x \xi} dx &= \int \int g(x-y) e^{-2\pi i x \xi} dx f(y) dy \\ &= \int g(w) e^{-2\pi i w \xi} dw \int f(y) e^{-2\pi i y \xi} dy. \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 7.16

Cal veure que

- i) Les funcions K_t tenen integral unitària: $\int_{\mathbb{R}} K_t(x) dx = 1$.
- ii) Les funcions K_t tenen massa uniformement acotada: existeix una constant $C \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |K_t(x)| dx \leq C$ per tot $t \in \Lambda$.
- iii) La massa de K_t es concentra a prop de $x = 0$ a mida que el paràmetre s'acosta a t_0 : $\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{|x| > \delta} |K_t(x)| dx = 0$ per tot $\delta > 0$.

Les dues primeres condicions ex comproven mitjançant el canvi de variables:

$$\int tK(tx) dx = \int K(y) dy = 1.$$

Pel que fa a la tercera propietat, com que $K \in L^1$, les cues tenen massa cada vegada més petita i convergint a zero a l'infinit (pel teorema de la convergència monòtona). Per tant

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta} tK(tx) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{|y| > \delta/t} K(y) dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y| > R} K(y) dy = 0.$$

Solució de l'exercici 7.21

Raonem com en la demostració anterior, però cal canviar alguns detalls. Notem en primer lloc que les nostres hipòtesis garanteixen que $K_t > 0$. A la part local usem la propietat del punt de Lebesgue. Vegem que

$$\int_{|y| < \delta} |K_t(y)| |f(x-y) - f(x)| dy \leq C\tilde{\varepsilon}_f(\delta, x).$$

Efectivament, el nucli K_t és integrable Riemann en $[-\delta, \delta]$ per ser una funció monòtona a trossos, i en particular existeix una partició $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_N$ tal que per tot $y < \delta$ tenim

$$K_t(y) \leq \sum_{n=0}^N \alpha_n \chi_{[-a_n, a_n]}(y) =: S_N(y)$$

amb $\alpha_n > 0$, amb

$$\sum \alpha_n 2a_n = \int S_N \leq 2 \int K_t = 2.$$

Així doncs,

$$\begin{aligned} \int_{|y| < \delta} |K_t(y)| |f(x-y) - f(x)| dy &\leq \int_{|y| < \delta} S_N(y) |f(x-y) - f(x)| dy \\ &= \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_{-a_n}^{a_n} |f(x-y) - f(x)| dy \\ &= \sum_{n=1}^N \alpha_n 2a_n \int_{-a_n}^{a_n} |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\leq 2\tilde{\varepsilon}_f(\delta, x). \end{aligned}$$

A la part no local usarem la propietat *iii'*):

$$\int_{|y| > \delta} |K_t(y)| |f(x-y) - f(x)| dy \leq 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \sup_{|y| > \delta} |K_t(y)| dy.$$

Donat $\varepsilon > 0$ escollim t tal que $\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \sup_{|y| \geq \delta} |K_t(y)| dy \leq \varepsilon/4$ i escollim prèviament δ perquè $\tilde{\varepsilon}_f(\delta, x) < \varepsilon/4$. Amb aquestes eleccions obtenim

$$|K_t * f(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

tal i com volíem veure.

Solució de l'exercici 7.22

Notem que $\int \int f(s)g(\zeta) d\zeta ds = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$. Podem doncs aplicar el teorema de Fubini per trobar que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(s)\hat{g}(s) ds &= \int f(s) \int e^{-2\pi i s \zeta} g(\zeta) d\zeta ds \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int \int f(s) e^{-2\pi i s \zeta} ds g(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\zeta) g(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 7.23

Veiem que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n)g(n) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i mn}{N}} f(m)g(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i mn}{N}} g(n)f(m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} f(m)\hat{g}(m). \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 7.25

Usarem la fórmula d'inversió i els teoremes de Fubini i Tonelli.

$$\begin{aligned} \hat{f} * \hat{g}(\xi) &= \int \hat{f}(\xi - \zeta)\hat{g}(\zeta) d\zeta = \int \int e^{-2\pi i x(\xi - \zeta)} f(x) dx \hat{g}(\zeta) d\zeta \\ &= \int e^{-2\pi i x \xi} f(x) \int e^{2\pi i x \zeta} \hat{g}(\zeta) d\zeta dx \\ &= \int e^{-2\pi i x \xi} f(x) \check{\hat{g}}(x) dx \stackrel{\text{T.7.24}}{=} \int e^{-2\pi i x \xi} f(x)g(x) dx \\ &= \widehat{fg}(\xi). \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 7.26

En primer lloc suposem $\alpha < \beta \leq 1$. En tal cas,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx.$$

La funció $\frac{\sin x}{x}$ és positiva i acotada per una constant C a l'interval $(0, 1)$. De fet, $\frac{\sin z}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Així,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = C.$$

D'altra banda, si $1 \leq \alpha < \beta < +\infty$, integrant per parts

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq 2 + \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{1}{x^2} \right| dx \leq 3.$$

D'altra banda, si $1 \in (\alpha, \beta)$, aleshores trenquem la integral en dues parts.

Considerem $f \in L^1(\mathbb{R})$ senar. Aleshores

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi} d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\int f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx}{\xi} d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\int f(x) (\cos(2\pi \xi x) - i \sin(2\pi \xi x)) dx}{\xi} d\xi$$

Com que f és senar i $\cos(2\pi \xi x)$ és parell, tenim $\int f(x) \cos(2\pi \xi x) dx = 0$ i, per tant,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi} d\xi = -i \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\int f(x) \sin(2\pi \xi x) dx}{\xi} d\xi.$$

Mentre $0 < \alpha < \beta < \infty$, podem aplicar el teorema de Fubini i obtenim, usant (7.14), que

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi} d\xi \right| = \left| \int f(x) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin(2\pi \xi x) dx}{\xi} d\xi \right| \leq C \|f\|_{L^1}.$$

Notem que si g és senar i $g = \widehat{f}$, amb $f \in L^1$, aleshores f ha de ser senar. Efectivament, tenim $g = \widetilde{g}$, és a dir, $\widehat{f} = \widetilde{\widehat{f}} = \widehat{\widetilde{f}}$ i, per tant, $f - \widetilde{f} = 0 \in L^1(\mathbb{R})$, de manera que $f - \widetilde{f} = \widehat{0} = 0$. És a dir que f és senar.

Prenem $g(\xi) := \frac{\xi}{|\xi| \log |\xi|} \chi_{|\xi| \leq 1/2}$. Aleshores

$$\int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{g(\xi)}{\xi} d\xi = \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\xi \log \xi} d\xi = [\log |\log \xi|]_{\alpha}^{\frac{1}{2}} = \left[\log \left| \log \frac{1}{2} \right| - \log |\log \alpha| \right] \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} -\infty,$$

que no és acotat. Per tant, és impossible que $g = \widehat{f}$.

Solució de l'exercici 7.28

És clar que

$$f_a(t) := \frac{a}{t^2 + a^2}$$

és una funció integrable i de quadrat integrable. A més a més, de l'exercici 7.10 sabem que

$$f_a = \widehat{g}_a,$$

on $g_a(x) := \pi e^{-2\pi a|x|}$. Aleshores,

$$\int \frac{ab}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)} dt = \int \widehat{g}_a(t)\widehat{g}_b(t) dt = \int \widetilde{g}_a(x)g_b(x) dx.$$

Per tant,

$$\int \frac{ab}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)} dt = \int \pi e^{-2\pi a|x|}\pi e^{-2\pi b|x|} dx$$

Aquesta integral es pot calcular directament, però usarem els càlculs que ja tenim fets:

$$\begin{aligned} \int \frac{ab}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)} dt &= \pi^2 \int e^{-2\pi(a+b)|x|} dx = \pi \widehat{g_{a+b}}(0) = \pi f_{a+b}(0) = \pi \frac{a+b}{(a+b)^2} \\ &= \frac{\pi}{a+b}. \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 7.29

Hem definit la transformada de Radon com

$$R_\theta f(t) := \int_{\mathbb{R}} f(-t \sin \theta + \rho \cos \theta, t \cos \theta + \rho \sin \theta) d\rho.$$

Aleshores, la seva transformada de Fourier en la variable t és

$$\widehat{R_\theta f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi t} \int_{\mathbb{R}} f(-t \sin \theta + \rho \cos \theta, t \cos \theta + \rho \sin \theta) d\rho dt.$$

Aplicant els teoremes de Fubini i Tonelli, obtenim

$$\widehat{R_\theta f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi t} f(-t \sin \theta + \rho \cos \theta, t \cos \theta + \rho \sin \theta) dt d\rho.$$

Tot seguit apliquem el canvi de variable

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, \rho) &\mapsto \phi(t, \rho) = (-t \sin \theta + \rho \cos \theta, t \cos \theta + \rho \sin \theta) = (x, y). \end{aligned}$$

Aleshores

$$D\phi = \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \implies |J\phi| \equiv 1.$$

Aplicant el canvi de variable anterior a la integral doble, obtenim

$$\widehat{R_\theta f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi \phi^{-1}(x,y)_1} f(x, y) dy dx,$$

on $\phi^{-1}(x, y)_1$ denota la primera coordenada de l'antiimatge de (x, y) pel canvi de variable definit abans. Ara, si

$$\begin{cases} x = -t \sin \theta + \rho \cos \theta \\ y = t \cos \theta + \rho \sin \theta \end{cases} \implies -\sin \theta x + \cos \theta y = t = \phi^{-1}(x, y)_1.$$

Per tant, hem vist que

$$\begin{aligned}\widehat{R_\theta f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi (-\sin \theta x + \cos \theta y)} f(x, y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i (-\xi \sin \theta, \xi \cos \theta) \cdot (x, y)} f(x, y) dy dx \\ &= \widehat{f}_{\mathbb{R}^2}(-\xi \sin \theta, \xi \cos \theta).\end{aligned}$$

Així, si coneixem $R_\theta f$, podem recuperar la funció f usant que

$$f = \check{\check{f}} = \left(\widehat{R_\theta f}(\xi) \right) \check{\check{,}}$$

o, per ser més curiosos, en calcular la transformada de Fourier unidimensional de $R_\theta f$, obtenim la transformada de Fourier bidimensional de f parametritzada en coordenades polars. Fent el canvi de variable i computant la transformada de Fourier inversa, obtenim f .

Solució de l'exercici 8.1

Suposem en primer lloc que $f \in \mathcal{S}$. Aleshores, com que

$$|x|^k f^{(\ell)}(x)$$

és una funció contínua i té límit zero a l'infinit, és acotada.

Suposem que $|x|^k f^{(\ell)}(x)$ és acotada per tot k, ℓ . Aleshores, donats $k, \ell \in \mathbb{N}$ tenim

$$|x|^k |f^{(\ell)}(x)| = \frac{|x|^{k+1} |f^{(\ell)}(x)|}{|x|} \leq C|x|.$$

Solució de l'exercici 8.4

Si $f \in C_c^\infty(-R, R)$, aleshores $f^{(\ell)}$ té suport compacte també en $[-R, R]$ i és acotada pel teorema de Weierstrass. Així,

$$|x|^k |f^{(\ell)}(x)| \leq R^k \|f^{(\ell)}\|_\infty < +\infty.$$

Solució de l'exercici 8.6

En ser la característica i l'exponencial infinitament derivables a l'interior dels intervals respectius, només cal veure la derivabilitat als punts $x = a$ i $x = b$. Per simetria, n'hi ha prou amb estudiar la derivabilitat de $h(x) = e^{-\frac{1}{x-a}}$ en $x = a$.

Notem que si $x \in (a, b)$, aleshores

$$h'(x) = e^{-\frac{1}{x-a}} \frac{1}{(x-a)^2}.$$

Per inducció, tenim

$$h^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x-a}} P_k \left(\frac{1}{(x-a)} \right).$$

on P_k és un polinomi de grau $2k$, ja que les derivades k -èsimes de $1/(x-a)^2$ són múltiples de potències de grau menor o igual a $2k$.

Raonant per inducció, suposem que $h^{(k-1)}(0) = 0$. Aleshores

$$\lim_{t \rightarrow 0} |h^{(k-1)}(a+t) - h^{(k-1)}(a)| = \lim_{t \rightarrow 0} |P_{(k-1)}(1/t)| e^{-\frac{1}{t}} = 0,$$

així que $h^{(k)}(0) = 0$.

Solució de l'exercici 8.2

Sigui $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Aleshores

$$\begin{aligned} \int |f| &= \int \frac{|f(x)| + |x|^2 |f(x)|}{1 + |x|^2} dx \leq (\rho_{0,0}(f) + \rho_{0,2}(f)) [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} \\ &\leq \pi (\rho_{0,0}(f) + \rho_{0,2}(f)). \end{aligned}$$

Hem vist doncs que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

Solució de l'exercici 8.7

Suposem que $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, és a dir que per tot $k, \ell \in \mathbb{N}$ tenim $\rho_{k,\ell}(f) < \infty$, i el mateix passa amb g . Les combinacions lineals de f i g són de Schwartz:

$$|x|^k |(\alpha f + \beta g)^{(\ell)}(x)| \leq |\alpha| \rho_{k,\ell}(f) + |\beta| \rho_{k,\ell}(g) < +\infty.$$

Demostrem ara que $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$|x|^k |(fg)^{(\ell)}(x)| = |x|^k \left| \sum_{j=0}^{\ell} c_{\ell,j} |f^{(j)}(x) g^{(\ell-j)}(x)| \right| \leq \sum_{j=0}^{\ell} c_{\ell,j} \rho_{k,j}(f) \rho_{0,\ell-j}(g) < +\infty.$$

Vegem tot seguit el producte per x :

$$|x|^k |(xf)^{(\ell)}(x)| = |x|^k \left| x f^{(\ell)} + \ell f^{(\ell-1)}(x) \right| \leq \rho_{k+1,\ell}(f) + \ell \rho_{k,\ell-1}(f) < +\infty.$$

Per inducció obtenim que el producte per qualsevol monomi és de la classe de Schwartz i per l'estructura d'espai vectorial obtenim el producte per qualsevol polinomi.

Considerem $e_{\xi}(x) = e^{2\pi i \xi x}$. Aleshores

$$\begin{aligned} |x|^k |(e_{\xi} f)^{(\ell)}(x)| &= |x|^k \left| \sum_{j=0}^{\ell} c_{\ell,j} |f^{(j)}(x) e_{\xi}^{(\ell-j)}(x)| \right| = \sum_{j=0}^{\ell} c_{\ell,j} |(2\pi i \xi)^{\ell-j} e_{\xi}(x) f^{(j)}(x)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\ell} c_{\ell,j} \rho_{k,j}(f) |2\pi \xi|^{\ell-j} < +\infty. \end{aligned}$$

La derivació preserva també la classe de Schwartz:

$$|x|^k |(f')^{(\ell)}(x)| = |x|^k |f^{\ell+1}(x)| \leq \rho_{k,\ell+1}(f).$$

Ara bé, no tota funció de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ és derivada d'una funció de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Efectivament, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores per l'exercici 7.1, tenim

$$\int f' = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f' = \lim_{R \rightarrow \infty} [f(x)]_{-R}^R = 0.$$

Per tant, només les funcions f que tenen integral zero poden tenir primitiva a la classe de Schwartz. La campana de Gauss, per exemple, no té primitiva a la classe de Schwartz.

Solució de l'exercici 8.9

Siguin $x, t \in \mathbb{R}$. Aleshores

$$\begin{aligned} & |(f * g)(x + h) - (f * g)(x) - (f') * g(x)h| \\ &= \left| \int (f(x + h - y) - f(x - y) - f'(x - y)h)g(y) dy \right| \end{aligned}$$

Ara bé, com que $f \in C^2$, del residu de Taylor en deduïm que per $x, y, h \in \mathbb{R}$ existeix $c \in B(x - y, h)$ tal que

$$|f(x + h - y) - f(x - y) - f'(x - y)h| \leq f''(c)|h|^2.$$

Per tant,

$$|(f * g)(x + h) - (f * g)(x) - (f') * g(x)h| = \sup_{c \in \mathbb{R}} |f''(c)| |h|^2 \int |g(y)| dy.$$

Concloem que

$$(f') * g(x) = (f * g)'(x),$$

tal i com volíem veure.

Notem que la condició $f \in C^2$ es pot substituir per $f \in C^{1+\varepsilon}$ amb petits canvis a la demostració, només cal demostrar que la cota de l'error de Taylor és una constant per $|h|^{1+\varepsilon}$.

Si només tenim $f \in C^1$ amb f' uniformement contínua, aleshores hem d'afinar més. Notem que si $z = x - y$, aleshores pel teorema del valor mitjà existeix $c \in B(z, h)$ tal que

$$|f(z + h) - f(z) - f'(z)h| = |f'(c)h - f'(z)h| = \omega_\infty f'(|h|).$$

Solució de l'exercici 8.10

Notem que per l'exercici 8.9 tenim

$$|x|^k |(f * g)^{(\ell)}(x)| = |x|^k |(f^{(\ell)} * g)(x)| \stackrel{(8.1)}{\leq} 2^k \|g\|_{L^1} \rho_{k,\ell}(f) + 2^k \|f\|_{L^1} \rho_{k,0}(g)$$

Solució de l'exercici 8.16

Diem que T és contínua a φ_0 si per tota successió $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_0$ se satisfà que $T(\varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(\varphi_0)$, és a dir si $T(\varphi_n - \varphi_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Segui $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ i considerem una successió $\{\varphi_n\}_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ a la classe de Schwartz. Aleshores tenim que $\varphi_n + \varphi_0 - \varphi \rightarrow \varphi_0$:

$$\rho_{k,\ell}((\varphi_n + \varphi_0 - \varphi) - \varphi_0) = \rho_{k,\ell}(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Per continuïtat de T a φ_0 , obtenim que

$$T(\varphi_n - \varphi) = T((\varphi_n + \varphi_0 - \varphi) - \varphi_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Solució de l'exercici 8.17

Sabem que

$$\left\| \varphi_n^{(\ell)} - \varphi^{(\ell)} \right\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \varphi_n^{(\ell)}(x) - \varphi^{(\ell)}(x) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| (\varphi_n - \varphi)^{(\ell)}(x) \right| = \rho_{0,\ell}(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Solució de l'exercici 8.18

La linealitat no depèn de les condicions de f , més enllà d'assegurar-se que el producte $f\varphi$ sigui integrable per tota $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$T_f(a\varphi + b\psi) = \int f(a\varphi + b\psi) = a \int f\varphi + b \int f\psi = aT_f(\varphi) + bT_f(\psi).$$

Comprovem la continuïtat a l'origen, que és suficient per l'exercici 8.16, per exemple f és acotada. Si $\varphi_n \rightarrow 0$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, aleshores

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi_n)| &= \left| \int f\varphi_n \right| \leq \|f\|_\infty \int |\varphi_n| = \|f\|_\infty \int \frac{(1 + |x|^2)|\varphi_n(x)|}{1 + |x|^2} dx \\ &\leq \|f\|_\infty (\rho_{0,0}(\varphi_n) + \rho_{2,0}(\varphi_n)) \int \frac{dx}{1 + |x|^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Si, en canvi, $|f| \leq C|P(x)|$, on $P(x)$ és un polinomi de grau N , aleshores usem que $\|f/P\|_\infty < C$ i que $|P(x)|(1 + |x|^2) \leq C(1 + |x|^{N+2})$ i escrivim

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi_n)| &= \left| \int f\varphi_n \right| \leq \|f\|_\infty \int |\varphi_n| = \|f/P\|_\infty \int \frac{|P(x)|(1 + |x|^2)|\varphi_n(x)|}{1 + |x|^2} dx \\ &\leq C\|f\|_\infty (\rho_{0,0}(\varphi_n) + \rho_{2+N,0}(\varphi_n)) \int \frac{dx}{1 + |x|^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Així, una condició suficient per tal que T_f sigui una distribució temperada és que $|f| \leq C(1 + |x|^N)$. De fet, és suficient que $f \in L^1_{\text{loc}}$ i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{p(x)} < +\infty$$

per algun polinomi p . Fins i tot podem relaxar més la condició demanant que f es pugui expressar com la suma d'una funció de L^1 i una funció que satisfaci la darrera condició, per exemple,

$$f(x) = p(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{(n-1, n+1)}(x)}{2^n} \log(|x - n|).$$

Solució de l'exercici 8.19

Vegem que ε és injectiva. Suposem que $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ satisfan que $T_\psi(\varphi) = T_\phi(\varphi)$ per tota $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, és a dir que

$$\int \phi(x)\varphi(x) dx = \int \psi(x)\varphi(x) dx \quad \text{per tota } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Sigui $\varphi_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ una aproximació de la identitat. Aleshores, per tot $x \in \mathbb{R}$ deduïm que

$$\int \phi(y)\varphi_n(x - y) dy = \int \psi(y)\varphi_n(x - y) dy.$$

Però quan $n \rightarrow \infty$, pel teorema 7.18 deduïm que

$$\phi(x) = \psi(x).$$

Com que això ocorre per tot $x \in \mathbb{R}$, tenim que les funcions coincideixen arreu.

Vegem ara que ε és contínua. Suposem que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Volem veure que $T_{\varphi_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_\varphi$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, és a dir que per tota $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenim

$$T_{\varphi_n}(\psi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_\varphi(\psi)$$

a \mathbb{C} . Efectivament,

$$|T_{\varphi_n}(\psi) - T_\varphi(\psi)| = \int (\varphi_n - \varphi)\psi \leq \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \|\psi\|_1 \leq \rho_{0,0}(\varphi_n - \varphi) \|\psi\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Solució de l'exercici 8.22

- $D_s T_f(\varphi) \stackrel{\text{T.8.1.b}}{:=} T_f(sD_{s^{-1}}\varphi) \stackrel{\text{T.7.1.d}}{=} \int f(x) s s^{-1} \varphi(x/s) dx = \int f(sy)\varphi(y) s dy \stackrel{\text{T.8.1.b}}{=} T_{D_s f}(\varphi)$.
- $(T_f)'(\varphi) := -T_f(\varphi') = -\int f\varphi' = -[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} + \int f'\varphi = T_{f'}(\varphi)$. Notem que $[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty}$ s'ha d'entendre com un límit i que aquest s'anul·la en ser les funcions f i φ de Schwartz.
- $\widehat{T}_f(\varphi) := T_f(\widehat{\varphi}) = \int f\widehat{\varphi} \stackrel{\text{Ex.7.22}}{=} \int \widehat{f}\varphi = T_{\widehat{f}}(\varphi)$.
- $\widetilde{T}_f(\varphi) := T_f(\check{\varphi}) = \int f\check{\varphi} \stackrel{\text{Ex.7.22}}{=} \int \check{f}\varphi = T_{\check{f}}(\varphi)$.

- $\mathcal{M}_g T_f(\varphi) := T_f(\mathcal{M}_g \varphi) = T_f(g\varphi) = \int fg\varphi = T_{gf}(\varphi) = T_{\mathcal{M}_g f}(\varphi)$.
- $\widetilde{T}_f(\varphi) := T_f(\widetilde{\varphi}) = \int f(x)\varphi(-x) dx = \int f(-x)\varphi(x) dx = T_{\widetilde{f}}(\varphi)$.
- $\overline{T}_f(\varphi) := \overline{T_f(\overline{\varphi})} = \overline{\int f\overline{\varphi}} = \int \overline{f}\varphi = T_{\overline{f}}(\varphi)$.
- $\psi * T_f(\varphi) := T_f(\widetilde{\psi} * \varphi) = \int f(x)\widetilde{\psi} * \varphi(x) dx = \int f(x) \int \widetilde{\psi}(x-y)\varphi(y) dy dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int \int \psi(y-x)f(x)\varphi(y) dy dx = \int \psi * f(y)\varphi(y) dy = T_{\psi * f}(\varphi)$.

Solució de l'exercici 8.24

Comprovem en primer lloc la linealitat de $\tau_h T$. Siguin $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Aleshores, usant la linealitat de la translació per funcions de Schwartz, tenim

$$\tau_h T(\alpha\varphi + \beta\psi) := T(\tau_{-h}(\alpha\varphi + \beta\psi)) = T(\alpha\tau_{-h}\varphi + \beta\tau_{-h}\psi).$$

Ara usem la linealitat de T per deduir que

$$\tau_h T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\tau_{-h}\varphi) + \beta T(\tau_{-h}\psi) = \alpha\tau_h T(\varphi) + \beta\tau_h T(\psi),$$

tal i com volíem veure. Per la resta d'operacions ometrem la linealitat ja que la prova és sempre igual.

Anem a veure la continuïtat a l'origen de les distribucions definides a la taula 8.1. Suposem que $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ és tal que $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Això és tant com dir que per totes $k, \ell \in \mathbb{N}$ tenim $\rho_{k, \ell}(\varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Utilitzem aquest fet i la continuïtat de T a l'origen per demostrar que les distribucions definides aplicades a aquesta successió també van donen una successió amb límit zero:

- Com que $\tau_h T(\varphi_n) = T(\tau_{-h}\varphi_n)$, volem veure que la successió $\{\tau_{-h}\varphi_n\}_n$ convergeix a zero a la classe de Schwartz. Efectivament,

$$\begin{aligned} \rho_{k, \ell}(\tau_{-h}\varphi_n) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |(\tau_{-h}\varphi_n)^{(\ell)}(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |\varphi_n^{(\ell)}(x+h)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x-h|^k |\varphi_n^{(\ell)}(x)| \\ &\leq C_k \sup_{x \in \mathbb{R}} (|h|^k + |x|^k) |\varphi_n^{(\ell)}(x)| \leq C_k (\rho_{k, \ell}(\varphi_n) + \rho_{0, \ell}(\varphi_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Per tant, com que T és continu a l'origen, deduïm que

$$|\tau_h T(\varphi_n)| = |T(\tau_{-h}\varphi_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- En el cas de la dilatació, estudiem $sD_{s^{-1}}(\varphi_n)(x) = \varphi_n(x/s)$.

$$\begin{aligned} \rho_{k, \ell}(sD_{s^{-1}}\varphi_n) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |(sD_{s^{-1}}\varphi_n)^{(\ell)}(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} s^k |x/s|^k |s^{-\ell} \varphi_n^{(\ell)}(x/s)| \\ &\leq s^{k-\ell} \rho_{k, \ell}(\varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Per tant, com que T és continu a l'origen, deduïm que

$$|D_s T(\varphi_n)| = |T(sD_{s^{-1}}\varphi_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- Per la derivada, tenim que

$$\rho_{k,\ell}(\varphi'_n) = \rho_{k,\ell+1}(\varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- Per la transformada de Fourier,

$$\rho_{k,\ell}(\widehat{\varphi}_n) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\xi|^k |(\widehat{\varphi}_n)^{(\ell)}(\xi)| = C_{k,\ell} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |(|x|^{(\ell)} \varphi_n)^{(k)}(\xi)| \leq C_{k,\ell} \rho_{\ell,k}(\varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Per tant, com que T és continu a l'origen, deduïm que

$$|\widehat{T}(\varphi_n)| = |T(\widehat{\varphi}_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- Per tractar la multiplicació per funcions, cal saber en quin cas ens situem. Cal recordar que suposem que g satisfà que $\mathcal{M}_g f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ per tota $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. De fet, la condició que fa que $\mathcal{M}_g T$ sigui contínua és que $\mathcal{M}_g : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sigui contínua. Així, automàticament tenim

$$\rho_{k,\ell}(\mathcal{M}_g \varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Per tant, com que T és continu a l'origen, deduïm que

$$|\mathcal{M}_g T(\varphi_n)| = |T(\mathcal{M}_g \varphi_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Una condició raonable és que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ i que per tot $\ell \in \mathbb{N}$ existeixi un $j \in \mathbb{N}$ tal que $|g^{(\ell)}(x)| \leq C(1 + |x|^j)$. Aleshores és un exercici que queda per l'estudiant veure que $(g\varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal i com hem fet en els exercicis anteriors, usant la fórmula de Leibnitz per les derivades d'ordre ℓ del producte.

- La simetria central es resol molt fàcilment.
- La conjugació també.
- La convolució porta més feina:

$$|x|^k \left| (\tilde{\psi} * \varphi_n)^{(\ell)}(x) \right| = |x|^k \left| (\tilde{\psi}^{(\ell)} * \varphi_n)(x) \right|$$

Tot seguit notem que

$$\begin{aligned} |(\tilde{\psi}^{(\ell)} * \varphi_n)(x)| &= \left| \int \tilde{\psi}^{(\ell)}(y) \varphi_n(x-y) dy \right| \\ &\leq \int_{-|x|/2}^{|x|/2} |\tilde{\psi}^{(\ell)}(y) \varphi_n(x-y)| dy + \int_{|y| > |x|/2} |\tilde{\psi}^{(\ell)}(y) \varphi_n(x-y)| dy \\ &\leq \int_{-|x|/2}^{|x|/2} |\tilde{\psi}^{(\ell)}(y)| dy \sup_{|y| \leq |x|/2} \frac{|x-y|^k |\varphi_n(x-y)|}{|x-y|^k} \\ &\quad + \int_{|y| > |x|/2} |\varphi_n(x-y)| dy \sup_{|y| > |x|/2} \frac{|y|^k |\tilde{\psi}^{(\ell)}(y)|}{|y|^k} \\ &\leq \|\tilde{\psi}^{(\ell)}\|_1 \frac{\rho_{k,0}(\varphi_n)}{(|x|/2)^k} + \|\varphi_n\|_1 \frac{\rho_{k,\ell}(\tilde{\psi})}{(|x|/2)^k}. \end{aligned}$$

Al darrer pas hem usat que si $|y| \leq |x|/2$, aleshores $|x - y| \geq |x| - |y| \geq |x|/2$ (desigualtat triangular).

Hem vist doncs que

$$\rho_{k,\ell}(\tilde{\psi} * \varphi_n) \leq 2^k \left(\|\tilde{\psi}^{(\ell)}\|_1 \rho_{k,0}(\varphi_n) + \|\varphi_n\|_1 \rho_{k,\ell}(\tilde{\psi}) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Per tant, com que T és continu a l'origen, deduïm que

$$|\psi * T(\varphi_n)| = |T(\tilde{\psi} * \varphi_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Solució de l'exercici 8.26

- $(aT + bU)\widehat{(\varphi)} = (aT + bU)(\widehat{\varphi}) = aT(\widehat{\varphi}) + bU(\widehat{\varphi}) = a\widehat{T}(\varphi) + b\widehat{U}(\varphi)$
- $\widehat{\tau_h T}(\varphi) \stackrel{8.1.d)}{=} \tau_h T(\widehat{\varphi}) \stackrel{8.1.a)}{=} T(\tau_{-h}\widehat{\varphi}) \stackrel{7.1.c)}{=} T(\widehat{M_{-h}\varphi}) \stackrel{8.1.d)}{=} \widehat{T}(M_{-h}\varphi) \stackrel{8.1.f)}{=} M_{-h}\widehat{T}(\varphi).$
- $\widehat{M_h T}(\varphi) = M_h T(\widehat{\varphi}) = T(M_h\widehat{\varphi}) \stackrel{7.1.b)}{=} T(\widehat{\tau_{-h}\varphi}) = \widehat{T}(\tau_{-h}\varphi) = \tau_h\widehat{T}(\varphi).$
- $\widehat{D_s T}(\varphi) = D_s T(\widehat{\varphi}) = T(sD_{s^{-1}}\widehat{\varphi}) \stackrel{7.1.d)}{=} T(s(s^{-1}D_s\varphi)\widehat{}) = \widehat{T}(D_s\varphi) = sD_{s^{-1}}\widehat{T}(\varphi).$
- $\widehat{\widetilde{T}}(\varphi) = \widetilde{T}(\widehat{\varphi}) = T(\widetilde{\widehat{\varphi}}) \stackrel{7.1.e)}{=} T(\widehat{\varphi}) = \widehat{T}(\varphi) = \widetilde{\widehat{T}}(\varphi).$
- $\widehat{\widetilde{T}}(\varphi) = \widetilde{T}(\widehat{\varphi}) = \overline{T(\widehat{\varphi})} = \overline{T(\widetilde{\widehat{\varphi}})} \stackrel{7.1.f)}{=} \overline{T(\widehat{\varphi})} \stackrel{7.1.e)}{=} \overline{T(\widetilde{\widehat{\varphi}})} = \overline{\widetilde{T}(\widehat{\varphi})} = \widetilde{\overline{T(\widehat{\varphi})}} = \widetilde{\widehat{T}(\varphi)} = \widetilde{\widehat{T}}(\varphi).$ Per altra banda, $\widehat{\widetilde{T}}(\varphi) = \overline{T(\widetilde{\widehat{\varphi}})} = \overline{\widetilde{T}(\widehat{\varphi})} = \widetilde{\overline{T(\widehat{\varphi})}} = \widetilde{\widehat{T}(\varphi)} = \widetilde{\widehat{T}}(\varphi).$
- $\widehat{(T')(\varphi)} = T'(\widehat{\varphi}) = T(-(\widehat{\varphi})') \stackrel{7.1.h)}{=} T(\widehat{\mathcal{M}_{2\pi i\xi}\varphi}) = \widehat{T}(\mathcal{M}_{2\pi i\xi}\varphi) = \mathcal{M}_{2\pi i\xi}\widehat{T}(\varphi).$
- $\widehat{\mathcal{M}_{-2\pi i\xi} T}(\varphi) = \mathcal{M}_{-2\pi i\xi} T(\widehat{\varphi}) = T(\mathcal{M}_{-2\pi i\xi}\widehat{\varphi}) \stackrel{7.1.g)}{=} T(-\widehat{\varphi}') = -\widehat{T}(\varphi)' = (\widehat{T})'(\varphi).$

Solució de l'exercici 8.28

Tenim

$$\delta_h(\varphi) := \tau_h\delta_0(\varphi) \stackrel{T.8.1.a)}{=} \delta_0(\tau_{-h}\varphi) = \tau_{-h}\varphi(0) = \varphi(0+h) = \varphi(h).$$

Per altra banda, a l'exercici 8.24 hem vist que la multiplicació per funcions trigonomètriques està ben definida a l'espai de distribucions temperades. A més tenim

$$\widehat{\delta}_h = \widehat{\tau_h\delta_0} \stackrel{T.8.2.b)}{=} M_{-h}\widehat{\delta_0} = \mathcal{M}_{e^{-h}}T_1 \stackrel{\text{Ex.8.22}}{=} T_{\mathcal{M}_{e^{-h}}1} = T_{e^{-h}}.$$

Solució de l'exercici 8.29

Donada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, tenim

$$\delta_0^{(k)}(\varphi) = \delta_0((-1)^k \varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

És a dir que la derivada de la delta de Dirac és l'avaluació de la derivada a l'origen amb el signe corresponent a la paritat del nombre de derivades.

La seva transformada de Fourier és un polinomi:

$$\widehat{\delta_0^{(k)}} = \mathcal{M}_{(2\pi i\xi)^k} \widehat{\delta_0} = T_{\mathcal{M}_{(2\pi i\xi)^k}} 1 = T_{(2\pi i\xi)^k}.$$

Finalment, notem que

$$H'(\varphi) = -H(\varphi') = -\int \chi_{x>0} \varphi' = -\int_0^\infty \varphi' = -[\varphi(x)]_0^\infty = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

Així, efectivament, la derivada de la funció graó de Heaviside és la delta de Dirac.

Solució de l'exercici 8.31

Donada $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, volem veure que

$$\psi * \delta_0 = T_\psi.$$

Però per $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenim

$$\psi * \delta_0(\varphi) = \delta_0(\tilde{\psi} * \varphi) = \tilde{\psi} * \varphi(0) = \int \tilde{\psi}(0-y)\varphi(y) dy = \int \psi(y)\varphi(y) dy = T_\psi(\varphi).$$

Solució de l'exercici 8.32

Sigui $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Volem veure que $\lim_{t \rightarrow t_0} T_{K_t}(\varphi) = \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$. Però efectivament

$$\lim_{t \rightarrow t_0} T_{K_t}(\varphi) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int K_t(x)\varphi(x) dx = \lim_{t \rightarrow t_0} \int K_t(x)\tilde{\varphi}(0-x) dx \stackrel{\text{T.7.18}}{=} \tilde{\varphi}(0) = \varphi(0).$$

Solució de l'exercici 8.33

Efectivament,

$$\|f\|_{L^p}^p = \int \frac{|f(x)|^p + (|x|^{\frac{2}{p}}|f(x)|)^p}{1 + |x|^2} dx \leq C_p \left(\rho_{0,0}(f)^p + \rho_{0, [\frac{2}{p}]}(f)^p \right),$$

on

$$\rho_{k,\ell}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |\varphi^{(\ell)}(x)|$$

són nombres acotats per l'exercici 8.1.

Solució de l'exercici 8.34

Que T_f és lineal es deriva de la linealitat de la integral. Vegem que és contínua: suposem que $\{\varphi_n\}_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Aplicant la desigualtat de Hölder i la desigualtat obtinguda en l'exercici anterior, tenim

$$|T_f(\varphi_n)| \leq \int |f| |\varphi_n| \leq \|f\|_p \|\varphi_n\|_{p'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Solució de l'exercici 8.36

Notem que per la desigualtat integral de Minkowski, podem estendre la desigualtat de Young del lema 4.5 a

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p},$$

de manera que $K_t * f$ està ben definida g.p.t. arreu, i és una funció de L^p .

Sigui $f \in L^p(\mathbb{T})$. Tenim

$$\|K_t * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \stackrel{i)}{=} \left(\int \left| \int K_t(y) [f(x-y) - f(x)] dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aleshores usant la desigualtat integral de Minkowski, obtenim

$$\|K_t * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \int \left(\int |K_t(y) [f(x-y) - f(x)]|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

A la part local tenim

$$\int_{|y| < \delta} |K_t(y)| \left(\int |f(x-y) - f(x)| dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \leq \sup_{|y| < \delta} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})} \int |K_t(y)| dy.$$

Dit d'una altra manera, escrivint el mòdul de continuïtat integral

$$\omega_p f(\delta) := \sup_{|y| < \delta} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

hem obtingut

$$\int_{|y| < \delta} |K_t(y)| \left(\int |f(x-y) - f(x)| dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \stackrel{ii)}{\leq} \omega_p f(\delta) C.$$

Pel corollari 2.51 i l'exercici 2.52, sabem que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_p f(\delta) = 0.$$

A la part no local, usant la desigualtat triangular

$$\int_{\delta \leq |y|} |K_t(\zeta)| \left(\int |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \leq 2 \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \int_{\delta \leq |y|} |K_t(y)| dy \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0.$$

Per tant, donat $\varepsilon > 0$, prenent δ prou petit i t prou proper a t_0 obtenim

$$\|K_t * f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \omega_p f(\delta)C + 2\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \int_{\delta \leq |y|} |K_t(y)| dy \stackrel{\text{iii)}}{<} \varepsilon.$$

Solució de l'exercici 8.38

Tenim que $|e_{-\xi}f| = |f|$ és una funció integrable i, per tant, la integral

$$\mathcal{F}_1(f)(\xi) = \int e_{\xi}f$$

està ben definida puntualment. A més,

$$|\mathcal{F}_1(f)(\xi)| \leq \int |e_{\xi}f| = \int |f| = \|f\|_{L^1}.$$

Per tant, $\mathcal{F}_1(f) \in L^{\infty}(\mathbb{R})$. De fet, podem veure que $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ (vegeu l'exercici 7.4).

Per veure que $\mathcal{F}_1 f = \widehat{f}$, és a dir que $T_{\mathcal{F}_1 f} = \widehat{T}_f$, suposem donada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ i vegem que l'acció dels dos funcionals coincideix. En primer lloc,

$$\widehat{T}_f(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}) = \int f(x)\widehat{\varphi}(x) dx.$$

Per altra banda,

$$T_{\mathcal{F}_1 f}(\varphi) = \int \mathcal{F}_1 f(\xi)\varphi(\xi) = \int \int e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \varphi(\xi) d\xi$$

Pels teoremes de Fubini i Tonelli, obtenim que

$$T_{\mathcal{F}_1 f}(\varphi) = \int f(x) \int e^{-2\pi i x \xi} \varphi(\xi) d\xi dx = \int \widehat{\varphi}(x) f(x) dx = \widehat{T}_f(\varphi).$$

Solució de l'exercici 8.41

Notem que $f_a(t) = \frac{\sin(at)}{t}$ és una funció de quadrat integrable tot i no ser integrable. Així doncs, podem aplicar la fórmula d'intercanvi de barrets que acabem de demostrar. Notem també que si $g_a(t) := \sin(at)$, aleshores

$$\widehat{g}_a = \frac{1}{2i} \widehat{e^{iat} - e^{-iat}} = \frac{1}{2i} \left(\widehat{M_{\frac{a}{2\pi}} 1} - \widehat{M_{-\frac{a}{2\pi}} 1} \right) = \frac{1}{2i} \left(\tau_{\frac{a}{2\pi}} \widehat{1} - \tau_{-\frac{a}{2\pi}} \widehat{1} \right) = \frac{1}{2i} \left(\delta_{\frac{a}{2\pi}} - \delta_{-\frac{a}{2\pi}} \right).$$

I com que $g_a(t) = t f_a(t)$, aleshores

$$\widehat{g}_a = \frac{1}{2\pi i} \widehat{\mathcal{M}_{2\pi i t} f_a} = \frac{1}{2\pi i} (\widehat{f_a})'.$$

és a dir que

$$\widehat{f_a}' = 2\pi i \widehat{g}_a = \pi \left(\delta_{\frac{a}{2\pi}} - \delta_{-\frac{a}{2\pi}} \right).$$

Coneixem una distribució que té per derivada la delta de Dirac, i és la funció Heaviside. Així, tindrem que

$$\widehat{f}_a = \pi \left(\tau_{\frac{a}{2\pi}} H - \tau_{\frac{-a}{2\pi}} H \right) + C = \pi \left(\chi_{x > \frac{a}{2\pi}} - \chi_{x > \frac{-a}{2\pi}} \right) + C.$$

Alerta, estem fent servir que si la derivada d'una distribució és zero, aleshores la distribució és T_C per alguna constant. Sabries demostrar-ho?

Com que \widehat{f}_a és constant a trossos i de quadrat integrable, a les components no acotades s'ha d'anul·lar. Així, $C = -\pi$, i tenim

$$\widehat{f}_a = -\pi \chi_{\frac{a}{2\pi} < x < \frac{-a}{2\pi}}.$$

Ara ja tenim que

$$\int f_a f_b = \int \widehat{f}_a \widehat{f}_b = \int \check{f}_a \widehat{f}_b = \int \widetilde{f}_a \widehat{f}_b = \pi^2 \int \chi_{\frac{a}{2\pi} < x < \frac{-a}{2\pi}}(-x) \chi_{\frac{b}{2\pi} < x < \frac{-b}{2\pi}}(x) dx,$$

és a dir que

$$\int f_a f_b = \pi^2 \int_{-\frac{\min\{a,b\}}{2\pi}}^{\frac{\min\{a,b\}}{2\pi}} dx = \pi \min\{a, b\}.$$

Solució de l'exercici 8.43

Sabem que la funció

$$\chi_{\{|x|>1\}} |x|^{-\frac{1}{p}} \notin L^p,$$

ja que la primitiva de $|x|^{-\frac{p}{p}}$ és el logaritme, que divergeix a infinit. Però, en canvi,

$$\chi_{\{|x|>1\}} |x|^{-\frac{1}{p}} \in L^q \quad \text{per tot } q > p,$$

ja que

$$\int_1^\infty x^{-\frac{q}{p}} dx = \frac{p}{p-q} \left[x^{\frac{p-q}{p}} \right]_1^\infty = \frac{p}{q-p}.$$

Per altra banda, la funció

$$\chi_{\{|x|<1\}} |x|^{-\frac{1}{q}} \notin L^q,$$

ja que la primitiva de $|x|^{-\frac{q}{q}}$ és el logaritme, que divergeix a l'origen. Però, en canvi,

$$\chi_{\{|x|<1\}} |x|^{-\frac{1}{q}} \in L^p \quad \text{per tot } p < q,$$

ja que

$$\int_0^1 x^{-\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{q-p} \left[x^{\frac{q-p}{q}} \right]_0^1 = \frac{q}{q-p}.$$

Solució de l'exercici 8.46

Notem que al ser $p < 2$ tenim

$$|f_\lambda|^2 \leq \lambda^{2-p} |f|^p.$$

Per tant,

$$\|f_\lambda\|_2^2 = \int |f_\lambda|^2 \leq \lambda^{2-p} \int |f|^p = \lambda^{2-p} \|f\|_p^p < +\infty.$$

Per veure l'altra implicació necessitem demostrar que la mesura del suport de f^λ és finita. Per veure-ho, notem que

$$\{x : f^\lambda(x) \neq 0\} = \{x : |f(x)| > \lambda\}.$$

Sabem que

$$|\{x : |f(x)| > \lambda\}| = \int_{\{x : |f(x)| > \lambda\}} 1 \, dx \leq \frac{1}{\lambda^p} \int |f(x)|^p \, dx < +\infty.$$

Per tant, usant la desigualtat de Hölder, veiem que

$$\|f^\lambda\|_1 = \int |f^\lambda| = \int_{\{x : f^\lambda(x) \neq 0\}} |f^\lambda| = \int f \chi_{\{x : |f(x)| > \lambda\}} \leq \|f\|_{L^p} |\{x : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p'}} < +\infty.$$

Solució de l'exercici 8.53

Recordem que f és de decreixement moderat si $|f(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^{1+\varepsilon}}$ per uns certs valors $C, \varepsilon > 0$. Estudiem primer la convergència de la sèrie Pf . Com que $Pf(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m)$, i

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |f(x+m)| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+|x+m|^{1+\varepsilon}} < \infty.$$

Pel criteri M de Weierstrass, la convergència de la sèrie Pf és doncs uniforme i, en particular, en ser f contínua trobem que les parcials també ho són i, per tant, la suma Pf també ho és. Per tant, podem intercanviar la suma i la integral:

$$\begin{aligned} \widehat{Pf}(n) &= \int_0^1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) \right) e^{-2\pi i n x} \, dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m) e^{-2\pi i n x} \, dx \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(y) e^{-2\pi i n y} \, dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i n y} \, dy = \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Pel Teorema 3.18, SPf és contínua i coincideix gairebé per tot arreu amb Pf . Però com que Pf és contínua també, la convergència és a tot arreu.

Per altra banda,

$$S_1 f(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{Pf}(n) e^{2\pi i n x} = SPf(x) = f(x).$$

Apliquem-ho ara al cas del nucli de Poisson. Notem que $P_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$ és un nucli de decreixement moderat, ja que, fixada la $y > 0$, tenim

$$0 < P_y(x) \leq \frac{y}{1+x^2} \frac{1+x^2}{\pi(x^2+y^2)} \leq C_y \frac{1}{1+x^2},$$

ja que la funció $\frac{y(1+x^2)}{\pi(x^2+y^2)}$ és infinitament diferenciable a la recta real i acotada a prop de l'infinit: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(1+x^2)}{\pi(x^2+y^2)} = \frac{y}{\pi}$. Al seu torn, per l'exercici 7.10 tenim

$$0 < \widetilde{P}_y(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|}$$

que és de decreixement exponencial i, en particular, de decreixement moderat. Notem que \widetilde{P}_y és parella i, per tant, $\widehat{P}_y(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|}$.

Per la fórmula del sumatori de Poisson, obtenim que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} P_y(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{P}_y(n) e^{2\pi i n x},$$

és a dir que la periodització del nucli de Poisson és

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{y}{\pi((x+n)^2+y^2)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi y|n|} e^{2\pi i n x},$$

que efectivament coincideix amb el nucli de Poisson a \mathbb{T} :

$$P_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}.$$

per $r = e^{-2\pi y}$ i $\theta = 2\pi x \in \mathbb{T}$.

A continuació treballem el nucli de Féjer $F_R(x) := R \left(\frac{\sin(\pi R x)}{\pi R x} \right)^2$ per $R > 0$. Notem que

$$0 \leq F_R(x) = R \operatorname{sinc}(R x)^2 \leq \frac{C_R}{1+|R x|^2},$$

ja que per $R|x| < 1$ la funció és acotada, mentre que per $R|x| \geq 1$ tenim $F_R(x) \leq \frac{R}{\pi^2 R^2 x^2}$. Ajuntant les dues acotacions obtenim el decaïment moderat. A més, $\sin^2 z/z^2$ és una funció holomorfa del pla complex, és a dir entera, de manera que F_R és analítica i, en particular, C^∞ . Per altra banda, la derivada està acotada en qualsevol compacte i, per valors grans de $|x|$, la derivada és una funció trigonomètrica per $1/x^2$ més una funció trigonomètrica per $1/x^3$, és a dir que és també integrable. També podem deduir el mateix per f'' .

Per l'exercici 7.7, trobem que $\widehat{f}'(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi)$. Anàlogament tenim que $\widehat{f}''(\xi) = (2\pi i \xi)^2 \widehat{f}(\xi)$. Així doncs, \widehat{f} és una funció acotada tal que per valors grans de $|\xi|$, $|\widehat{f}(\xi)| \leq C/|\xi|^2$, ja que $\widehat{f}''(\xi)$ és una funció acotada per ser la transformada d'una funció integrable. Per tant,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{1+|\xi|^2},$$

i podem aplicar la fórmula del sumatori de Poisson.

Tot seguit calcularem explícitament quan val \widehat{F}_R . Notem que $F_R(x) = \frac{1 - \cos(2\pi Rx)}{2(\pi Rx)^2}$. Així, definim

$$g(x) := 1 - \cos(2\pi Rx) = \frac{2(\pi Rx)^2}{R} F_R(x).$$

Tenim per tant que

$$\widehat{g} = \frac{2(\pi R \cdot)^2}{R} F_R = \frac{-2R^2}{4R} ((-2\pi i \cdot)^2 F_R)^\wedge = \frac{-R}{2} (\widehat{F}_R)''.$$

Notem que

$$\widehat{\cos(\alpha x)} = e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x} = \frac{1}{2} \left(\widehat{M_{\frac{\alpha}{2\pi}} 1} + \widehat{M_{-\frac{\alpha}{2\pi}} 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\delta_{\frac{\alpha}{2\pi}} + \delta_{-\frac{\alpha}{2\pi}} \right).$$

Deduïm que

$$\widehat{g}(\xi) = 1 - \widehat{\cos(2\pi Rx)} = \delta_0 - \frac{1}{2} (\delta_R + \delta_{-R}).$$

Tenim doncs que

$$\widehat{F}_R' = \frac{-2}{R} \left(H - \frac{1}{2} (\tau_R H + \tau_{-R} H) \right) + C = -\frac{1}{R} (-\chi_{[-R,0)} + \chi_{[0,R)}) + C.$$

Per determinar la constant C , com que F_R és de quadrat integrable, també tindrem que \widehat{F}_R' és de quadrat integrable i, per tant, $C = 0$ (d'altra manera la integral seria infinita). És fàcil veure que $L(x) = x\chi_{x>0}$ satisfà que la seva derivada distribucional és $L' = H$. Per tant, tenim

$$\widehat{F}_R = \frac{-2}{R} \left(L - \frac{1}{2} (\tau_R L + \tau_{-R} L) \right) + C = -\frac{1}{R} ((-\xi - R)\chi_{[-R,0)} + (\xi - R)\chi_{[0,R)}) + C.$$

Com que la funció és de quadrat integrable, deduïm que $C = 0$. Per tant,

$$\widehat{F}_R = \frac{R - |\xi|}{R} \chi_{[-R,R]}.$$

Aplicant la fórmula del sumatori de Poisson pel cas $R = N \in \mathbb{Z}$, obtenim que el nucli perioditzat

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} N \left(\frac{\sin(\pi N(x+n))}{\pi N(x+n)} \right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{N - |n|}{N} \chi_{[-N,N]} e^{2\pi i n x} = \sum_{|n| < N} \frac{N - |n|}{N} e^{2\pi i n x}.$$

Així doncs, coincideix amb el nucli de Féjer a \mathbb{T} :

$$F_N(\theta) = \sum_{|n| < N} \frac{N - |n|}{N} e^{in\theta} = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right)^2,$$

amb $\theta = 2\pi x \in \mathbb{T}$. Notem en particular la coincidència

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sin(N(\theta/2 + n))}{N(\theta/2 + n)} \right)^2 = \left(\frac{\sin(N\theta/2)}{N \sin(\theta/2)} \right)^2.$$

Solució de l'exercici 8.54

Hem calculat en exercicis anteriors que si $f(x) = e^{-\pi tx^2}$, aleshores $\widehat{f}(x) = t^{-1/2} e^{-\pi x^2/t}$. Com que la campana de Gauss és una funció de la classe de Schwartz, podem aplicar la fórmula del sumatori de Poisson a l'origen (8.7) i tenim

$$\vartheta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{-1/2} e^{-\pi n^2/t} = t^{-1/2} \vartheta(1/t),$$

tal i com volíem veure.

Solució de l'exercici 8.55

Veiem que $e^{-2\pi|x|t}$ és de decaïment moderat per ser una exponencial d'exponent amb creixement lineal i signe negatiu, i la seva transformada és $\frac{t}{\pi(t^2 + \xi^2)}$, que és de decaïment moderat, com hem comprovat a l'exercici 8.53. Així, la fórmula del sumatori de Poisson a l'origen (8.7) i la fórmula de la sèrie geomètrica ens permeten calcular

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + t^2} &= \frac{\pi}{t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi|n|t} = \frac{\pi}{t} \left[(-1) + 2 \sum_{n \geq 0} e^{-2\pi n t} \right] \\ &= \frac{\pi}{t} \left(-1 + 2 \frac{1}{1 - e^{-2\pi t}} \right) = \frac{\pi}{t} \frac{1 + e^{-2\pi t}}{1 - e^{-2\pi t}}. \end{aligned}$$

Per fer el pas al límit quan $t \rightarrow 0$, notem que ambdós límits són infinits. Però si eliminem el terme problemàtic de la suma, que és $n = 0$, obtenim

$$2 \sum_{n > 0} \frac{1}{n^2 + t^2} = \frac{\pi}{t} \frac{1 + e^{-2\pi t}}{1 - e^{-2\pi t}} - \frac{1}{t^2} = \frac{\pi(t + t e^{-2\pi t}) - 1 + e^{-2\pi t}}{t^2(1 - e^{-2\pi t})}.$$

Calculant els termes significatius del polinomi de Taylor per calcular el límit, obtenim

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n > 0} \frac{1}{n^2 + t^2} &= \frac{\pi(t + t(1 - 2\pi t + (-2\pi t)^2/2) - 2\pi t + (-2\pi t)^2/2 + (-2\pi t)^3/6 + \mathcal{O}(t^4))}{t^2(1 - (1 - 2\pi t + \mathcal{O}(t^2)))} \\ &= \frac{2\pi^3 t^3 - (2\pi t)^3/6 + \mathcal{O}(t^4)}{2\pi t^3 + \mathcal{O}(t^4)}. \end{aligned}$$

Prenent límits,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n > 0} \frac{1}{n^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2/3\pi^3 t^3 + \mathcal{O}(t^4)}{4\pi t^3 + \mathcal{O}(t^4)} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solució de l'exercici 8.59

A la demostració del principi d'incertesa hem usat dues desigualtats. La igualtat, doncs, es donarà si i només si

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x \operatorname{Re}(\overline{\psi}(x) \psi'(x)) dx &= \int_{\mathbb{R}} |x| |\psi(x)| |\psi'(x)| dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La primera igualtat només s'obté si $-x\operatorname{Re}(\overline{\psi}(x)\psi'(x)) = |x||\psi(x)||\psi'(x)|$ gairebé per tot x , és a dir, si la contribució de la part imaginària és nul·la la part real contribueix en la direcció que toca, és a dir, si

$$\operatorname{Im}(\overline{\psi}(x)\psi'(x)) = 0 \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

i

$$\operatorname{Re}(\overline{\psi}(x)\psi'(x)) = -\operatorname{sign}(x)|\psi(x)||\psi'(x)|.$$

La primera condició ens diu que existeix $\lambda(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\psi(x) = \lambda(x)\psi'(x).$$

La segona condició ens diu que

$$\operatorname{sign}(\lambda(x)) = -\operatorname{sign}(x).$$

La continuïtat de ψ i ψ' fan que les igualtats s'assoleixin a tot arreu llevat, potser, de l'origen.

La segona igualtat s'assoleix quan la desigualtat de Cauchy-Schwarz és una igualtat, cosa que passa si i només si existeix un escalar $\alpha > 0$ tal que $|x||\psi(x)| = \alpha|\psi'(x)|$. En particular, per continuïtat, $\psi'(0) = 0$. Tenim doncs

$$|x||\lambda(x)||\psi'(x)| = \alpha|\psi'(x)|.$$

Allà on $\psi' \neq 0$, tindrem

$$\alpha = |x||\lambda(x)| = \operatorname{sign}(x)x\operatorname{sign}(\lambda(x))\lambda(x) = -x\lambda(x).$$

Per tant, $\lambda(x) = -\alpha/x$, i obtenim per tot x que

$$x\psi(x) = -\alpha\psi'(x).$$

Solucionant l'EDO trobem que

$$\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2\alpha} + C} = Ae^{-Bx^2}.$$

Per la unicitat de les solucions, sabem que no n'hi ha més. Com que la integral de ψ^2 val 1, normalitzant trobem la solució demanada.

Solució de l'exercici 8.60

Definim

$$\psi_{x_0, \xi_0}(x) = e^{2\pi i x \xi_0} \psi(x + x_0) = M_{-\xi_0} \tau_{-x_0} \psi(x).$$

Notem que la translació i la modulació no modifiquen la norma L^2 i, per tant, $\|\psi_{x_0, \xi_0}\|_2 = 1$. Utilitzant les propietats de la transformada de Fourier i fent canvis de variables adients, trobem que

$$\int |x|^2 \|\psi_{x_0, \xi_0}(x)\|^2 dx = \int |x|^2 |\tau_{-x_0} \psi(x)|^2 dx = \int |y - x_0|^2 \psi(y) dy,$$

i

$$\begin{aligned} \int |\xi|^2 |\widehat{\psi_{x_0, \xi_0}}(\xi)|^2 d\xi &= \int |\xi|^2 |\tau_{-\xi_0} M_{x_0} \widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = \int |\xi|^2 |\widehat{\psi}(\xi + \xi_0)|^2 d\xi \\ &= \int |\zeta - \xi_0|^2 |\widehat{\psi}(\zeta)|^2 d\zeta. \end{aligned}$$

Aplicant el principi d'incertesa, obtenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi^2} &\leq \left(\int |x|^2 |\psi_{x_0, \xi_0}(x)|^2 dx \right) \left(\int |\xi|^2 |\widehat{\psi_{x_0, \xi_0}}(\xi)|^2 d\xi \right) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (\xi - \xi_0)^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right). \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 8.61

Suposem que $\text{supp } \widehat{f} \subset [-M, M]$ i $\text{supp } f \subset [0, L/2]$. Calculant la perioditzada de f de període L , tenim

$$Pf(\theta) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\theta + nL),$$

que és una funció de període L amb $\|PF\|_{L^2([-L/2, L/2])} < +\infty$. Així, pel teorema de Carleson, sabem que gairebé per tot $\theta \in [-L/2, L/2]$ tenim, usant la notació de la secció 1.3.2 que

$$Pf(\theta) = S_L Pf(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{P}f^L(n) e^{2\pi i n \theta / L}.$$

Però

$$\widehat{P}f^L(n) = \int_{-L/2}^{L/2} Pf(\theta) e^{-2\pi i n \theta / L} d\theta = \int_{-L/2}^{L/2} f(\theta) e^{-2\pi i (n/L) \theta} d\theta = \widehat{f}(n/L).$$

Per tant,

$$Pf(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n/L) e^{2\pi i n \theta / L}.$$

I aquests sumands s'anul·len quan $N/L > M$, així que hem vist que

$$Pf(\theta) = \sum_{|n| \leq M} \widehat{f}(n/L) e^{2\pi i n \theta / L}$$

és un polinomi trigonomètric gairebé per tot arreu. I sabem que $Pf(\theta) = 0$ per tot $-L/2 < \theta < 0$. Per tant, es tracta del polinomi trigonomètric nul, i tenim $Pf \equiv 0$, és a dir que $f \equiv 0$.

Solució de l'exercici 8.62

Tenim que

$$\widehat{e}_h = \widetilde{e}_h \stackrel{\text{Ex. 8.28}}{=} \widetilde{\delta}_{-h} = \delta_h.$$