9 Solucions

Solució de l'exercici 1.1.1

a) $-2i$,

b) $8+i$,

c) $1+i$,

d) $33/25-19i/25$,

e) $(-253-204i)/4225$,

f) $6+5i$.

Solució de l'exercici 1.1.2

a) Cert

b) Fals

c) Fals

Solució de l'exercici 1.1.3

Si $z = x+iy$ amb $y>0$ com que $1/z = (x-yi)/|z|^2$ resulta que $\operatorname{Im}(1/z) < 0$.

Solució de l'exercici 1.1.4

a) x^2-y^2+2xyi

b) $x^2-y^2+x+(2xy+y)i$

c) $(x-3-iy)/((x-3)^2+y^2)$,

d) $\frac{x^2-y^2-i2xy}{(x^2+y^2)^2}$

e) $\frac{2x^2-5x+2x-5+2y^2-i7y}{(2x-5)^2+4y^2}$

f) $x^3-3xy^2+i(yx^2-y^3+2x^2y)$.

Solució de l'exercici 1.1.5

Notem per un cantó que

$$(a+ib)\cdot\overline{(a+ib)} = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2+b^2.$$

Per altra banda, com que $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$, tenim

$$\frac{x+iy}{x-iy}\frac{\overline{x+iy}}{\overline{x-iy}} = \frac{x+iy}{x-iy}\frac{x-iy}{x+iy} = 1.$$

Solució de l'exercici 1.1.6

a) $\{1 < \text{Re}(z) < 2\}$;

b) $z = at, t \in \mathbb{R}^*$;

c) Paràbola $x = (1/2)(y^2 - 1)$;

d) Mediatriu de 1 i $-i$: $y = -x$;

e) $\{\text{Re}\, z > 5/2\}$;

f) $(x/(7/2))^2 + (y/(3\sqrt{5}/2))^2 = 1$ que és una el·lipse, també podem escriure $180x^2 + 196y^2 = 2205$.

Solució de l'exercici 1.1.7

N'hi ha prou amb substituir: $(-1+i)^2 + 2(-1+i) + 2 = \cdots = 0$.

Solució de l'exercici 1.1.8

$x^3 - 3xy^2 + 5x^2 - 5y^2 - x = 0$, $3x^2y - y^3 + 10xy - y - 3 = 0$.

Solució de l'exercici 1.1.9

a) Si $z_k = x_k + iy_k$, tenim $y_1 + y_2 = 0, x_1 + x_2 < 0$ i $x_1x_2 - y_1y_2 < 0, x_1y_2 + x_2y_1 = 0$. Llavors $x_1x_2 + y_1^2 < 0$ i $y_1(x_2 - x_1) = 0$. Si $y_1 = 0$, llavors $y_2 = 0$ i z_1, z_2 són reals. Si $x_1 = x_2$ tenim que $x_1x_2 > 0$, llavors $\text{Re}\,(z_1z_2) > 0$ que no és possible per hipòtesi.

b) Volem provar que $z_1 \parallel z_2 \iff \text{Im}\,(z_1\bar{z}_2) = 0$.

($\Rightarrow$) Per ser paral·lels resulta que $z_2 = \lambda z_1$ (λ real), llavors $\text{Im}\,(z_1\bar{z}_2) = x_2y_1 - x_1y_2 = \lambda(x_1y_1 - x_1y_1) = 0$.

($\Leftarrow$) $\text{Im}\,(z_1\bar{z}_2) = x_2y_1 - x_1y_2 = 0$ tenim que $x_1/x_2 = y_1/y_2$ i $z_1 \parallel z_2$ (cal estudiar si s'anul·la el denominador).

Solució de l'exercici 1.1.10

Com que $\bar{z}$ és el simètric respecte l'eix OX de z els dos punts estan a la mateixa distància de qualsevol punt de OX, en particular de 1. També podem veure que

$$|z-1|^2 = (z-1)\overline{(z-1)} = |\bar{z}-1|^2.$$

Solució de l'exercici 1.1.11

Suposem $|a| = 1$, l'altre cas es demostra igual per simetria.

$$\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\frac{a}{a} = \frac{a(a-b)}{a-b} = a, \quad a \neq b.$$

Si tenen mòdul 1 cal evitar que siguin iguals ja que en aquest cas dividim per 0.

Suposem ara $|a|, |b| < 1$, tenim que

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|^2 < 1 \iff |a-b|^2 < |1-\bar{a}b|^2 \iff |a|^2 + |b|^2 < 1 + |a|^2|b|^2$$

i això equival a

$$(|a|^2 - 1)(|b|^2 - 1) > 0$$

que és cert per ser $|a|, |b| < 1$.

Solució de l'exercici 1.2.1

a) No; b) 1; c) 3i.

Solució de l'exercici 1.2.2

Cap convergeix absolutament. Però sense mòdul, la part real i la imaginària són sèries alternades amb terme general tendint a 0. Per tant les dues sèries són convergents.

Solució de l'exercici 1.3.2

Es pot calcular tot directament usant les propietats de la funció $x \mapsto e^x$ per $x \in \mathbb{R}$.

Solució de l'exercici 1.4.1

$$\cos 3t + i \sin 3t = (\cos t + i \sin t)^3 = \cos(t)^3 - 3\cos(t)\sin(t)^2 + i(3\cos(t)^2\sin(t) - \sin(t)^3)$$

i amb això acabem. De manera similar $\sin 4t = 4\cos^3 t \sin t - 4\cos t \sin^3 t$ i $\cos 4t = \sin^4 t - 6\cos^2 t \sin^2 t + \cos^4 t$.

Solució de l'exercici 1.4.2

Les arrels són $\alpha = e^{i\pi/4}, \bar{\alpha}, \beta = e^{i3\pi/4}, \bar{\beta}$. Com que $(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha+\bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha} = z^2 - \sqrt{2}z + 1$ i de manera similar per β, els polinomis $(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})$ i $(z-\beta)(z-\bar{\beta})$ són els que es citen a l'enunciat.

Solució de l'exercici 1.5.1

a) $6(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$;

b) $4(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6))$;

c) $2\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$;

d) $\sqrt{2}(cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4))$.

Solució de l'exercici 1.5.2

(a) $5 + 14i$; (b) $12 + 16i$; (c) $\frac{4-i}{17}$ (d) $1/5 + 2/5i$; (e) $-11 + 2i$; (f) $7/5 - 6/5i$; (g) -2^{51}; (h)$-2 - (3/2)i$.

Solució de l'exercici 1.5.3

Abans de fer l'exercici cal que fem algunes observacions.

- En primer lloc que la funció $\arctan(x)$ pren valors a $(-\pi/2, \pi/2)$.
- En segon lloc que la funció $\mathrm{Arg}(z)$ pren valors entre $(-\pi, \pi]$.
- A més a més la igualtat $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$ només te sentit mòdul 2π. Per exemple

  $$\mathrm{Arg}(i(-1+i)) = \mathrm{Arg}(-1-i) = -3\pi/4 \neq \mathrm{Arg}(i) + \mathrm{Arg}(-1+i) = \pi/2 + 3\pi/4 = 5\pi/4$$

  però difereixen en 2π.

Dit això observem que $\mathrm{Arg}(1+i) = \pi/4$ i està en el primer quadrant, $\mathrm{Arg}(5-i) = \arctan(-1/5) = -\arctan(1/5)$ i està en el quart quadrant, $\mathrm{Arg}((5-i)^4) = -4\arctan(1/5) = \mathrm{Arg}(476-480i)$ que també està en el quart quadrant. Resulta que $(1+i)(5-i)^4 = 4(239-i)$ que està en el quart quadrant i $\mathrm{Arg}((1+i)(5-i)^4) = \arctan(-1/239) = -\arctan(1/239)$. Llavors

$$\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239) + 2\pi n.$$

Però $\arctan(1/5) > \arctan(1/239)$ d'on $0 < 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239) < 4\arctan(1/5) < 4\arctan(1/\sqrt{3}) = 2\pi/3$ llavors ha de ser $n = 0$ i tenim la igualtat.

Solució de l'exercici 1.5.4

Donem per conegut que si $0 < r < 1$ llavors $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ i que si $r > 1$ llavors $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$. Aleshores si $|z_0| < 1$ el límit és 0 i si és més gran que 1 el límit és ∞. El cas més interessant es dona quan $|z_0| = 1$. Aleshores $z_0 = e^{2\pi\alpha i}$, si α és racional els $\{z_0^n\}$ formen un conjunt finit de punts de la circumferència. Si α és irracional és un conjunt infinit.

Solució de l'exercici 1.5.5

a) 0, b) $\pm i$ (alterna), c) π, d) $2+i$, e) 0, f) recorre les arrels cinquenes de la unitat.

Solució de l'exercici 1.6.1

(a) $z = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; (b) $z = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\; e^{i\frac{\pi}{4}}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $z = \pm\sqrt{2k\pi - \frac{\pi}{2}}\; e^{-i\frac{\pi}{4}}, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$; (c) $z = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$;

Solució de l'exercici 1.7.1

(a) $-1, (1 \pm i\sqrt{3})/2$; (b) $\pm\sqrt[4]{3}, \pm i\sqrt[4]{3}$; (c) $\cos\theta + i\sin\theta$ amb $\theta = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$; (d) $\pm\sqrt{2}/2(1 + i\sqrt{3})$; (e)$\pm(2+i)$.

Solució de l'exercici 1.7.2

$z = (a/|a|)^{1/n}$.

Solució de l'exercici 1.8.1

1) Si z és solució ha de passar que $|z+1| = |z|$ llavors z ha d'estar a la mateixa distància de -1 que de 0. Llavors z es troba a la recta $x = -1/2$, és a dir, és de la forma $-1/2 + it$. Substituïm i veiem que t ha der satisfer $5t^4 - 5t^2/2 + 1/16 = 0$. Aquesta equació és biquadràtica i es resol fàcilment. Obtenim

$$\pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+5}}{2\sqrt{5}}\right), \pm\left(\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}\right).$$

Numèricament $-1/2 \pm 0.688i$ i $-1/2 \pm 0.162i$.

2) Fem el canvi $z = 1/w$, llavors $(1/w+1)^5 = 1/w^5$. Si $w \neq 0$ resulta que z és solució si i només si $(1+w)^5 = 1$, això vol dir que $1+w$ és una arrel 5-èssima de la unitat diferent de 1. Aleshores

$$1 + w = \omega^k, \quad k = 1, \ldots, 4, \quad \omega = e^{i2\pi/5.}$$

Llavors

$$z = \frac{1}{\omega^k - 1} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\frac{\sin(2\pi k/5)}{1-\cos(2\pi k/5)}, \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Com abans tenim numèricament $-1/2 \pm 0.688i$ i $-1/2 \pm 0.162i$.

Observem que l'equació polinòmica original és de grau 4 i per tant té 4 solucions.

Solució de l'exercici 1.8.2

$(1-z)P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n$. Si z és zero de P amb $|z| > 1$ tenim que

$$|nz^n| = |1 + z + \cdots + z^{n-1}| \leqslant 1 + |z| + |z|^2 + \cdots + |z|^{n-1} < 1 + (n-1)|z|^n$$

ja que $|z|^r < |z|^n$ si $r < n$. Llavors $n|z|^n < 1 + (n-1)|z|^n$, això implica que $|z|^n < 1$. Contradicció amb $|z| > 1$. Llavors ha de ser $|z| \leqslant 1$.

Solució de l'exercici 2.1.1

a) $x/(x^2+y^2) - iy/(x^2+y^2))$.

b) $\dfrac{2\,x^2-2\,y^2+3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + i\dfrac{4\,xy}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$.

c) $2(\cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \cdot \sin y)$.

Solució de l'exercici 2.1.2

a) el semiplà superior,

b) $\{z : |z| \geqslant 1\}$,

c) $\{z : |z| < 2\}$ (suposant $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi/2$).

Solució de l'exercici 2.1.3

a) $\mathbb{C}\backslash\{2-3i\}$, b) $\mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$, c) $\mathbb{C}\backslash\{-1/2 \pm i\sqrt{15}/2\}$, d) $\mathbb{C}\backslash\{1, 1/2\}$.

Solució de l'exercici 2.1.4

a) Si $|z| = r$ llavors $|1/z| = 1/r$,

b) Si $z = re^{i\theta_0}$ amb $r > 0$ llavors $w = (1/r)e^{-i\theta_0}$ i l'afirmació és clara.

c) Si $|z-1| = 1$ llavors $z = 1 + e^{it} = 1 + \cos t + i \sin t$ i

$$w = 1/(1+z) = \frac{1 + \cos t - i \sin t}{(1+\cos t)^2 + \sin^2 t} = \frac{1+\cos t - i \sin t}{2 + 2\cos t}$$

té part real igual a 1/2.

Solució de l'exercici 2.1.5

Volem trobar $f(z) = az + b, a, b \in \mathbb{C}$ de manera que $f(0) = w_0$, $f(e^{it}) = w_0 + Re^{i(t+\alpha)}$. Llavors $b = w_0$ i $a = Re^{i\alpha}$ i

$$f(z) = Re^{i\alpha}z + w_0.$$

Solució de l'exercici 2.1.6

a) Domini és $\mathbb{C}$ i rang és $\mathbb{C}\backslash\{0\}$,

b) $f(-z) = e^{-z} = 1/e^z = 1/f(z)$.

c) $\{e^{1+iy} = e(\cos y + i \sin y), y \in \mathbb{R}\}$ és la circumferència de radi e centrada a l'orígen de coordenades.

d) $\{e^{x+i\pi/4} = e^x(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2), x \in \mathbb{R}\}$ que és el raig $y = x$ amb $x > 0$.

e) El sector circular amb angle entre 0 i $\pi/4$ al primer quadrant.

Solució de l'exercici 2.1.7

a) $J(1/z) = \frac{1}{2}(1/z + \frac{1}{1/(1/z)}) = J(z)$.

b) $J(e^{it}) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos(t) \in [-1, 1]$.

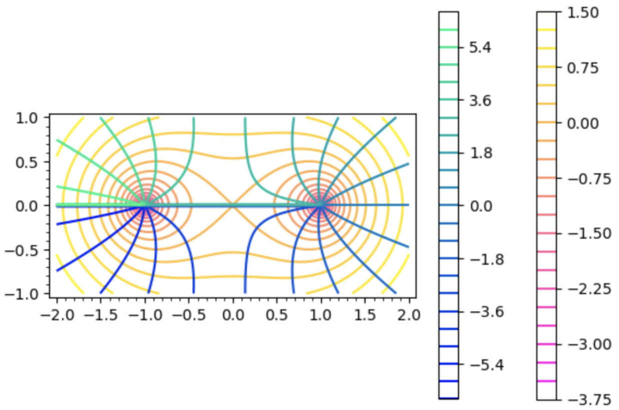
c) Si $J(re^{it}) = u(t) + iv(t)$ és clar que $u(t) = \frac{1}{2}(r + 1/r)\cos(t)$ i $v(t) = \frac{1}{2}(r - 1/r)\sin(t)$. D'aquí deduïm que (u, v) de la imatge de $|z| = r$ satisfan l'equació de l'el·lipse que es dona. Recordem que en una el·lipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ amb $a > b$ els focus estan a $(\pm c, 0)$ amb $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$. En el nostre cas $a = \frac{1}{2}(r + 1/r), b = \frac{1}{2}(r - 1/r)$ i $c = 1$.

Solució de l'exercici 2.1.8

Pel cas i) podem fer com es veu a la figura annexa

In [35]:
```
var('x,y',domain='real')
z=x+i*y
f=log(z+1)+log(z-1)
g(x,y)=f.imag_part()
h(x,y)=f.real_part()
v=contour_plot(lambda x,y: g(x,y), (x,-2,2), (y,-1,1), cmap='winter',contours=20, fill=False, colorbar=True)
u=contour_plot(lambda x,y: h(x,y), (x,-2,2), (y,-1,1), cmap='spring',contours=20, fill=False, colorbar=True)
u+v
```

Out[35]:



Els altres són ecara més senzills.

Solució de l'exercici 2.3.1

$\text{Log}\,(a) + \text{Log}\,(b) = 2\text{Log}\,(-1 - i) = 2(\ln(\sqrt{2}) - i3\pi/4)) = \ln 2 - i3\pi/2$ i $\text{Log}\,((-1 - i)(-1 - i)) = \text{Log}\,(2i) = \ln 2 + i\pi/2$ que són diferents.

Solució de l'exercici 2.3.2

Recordem que $\log(z) = \{\log r + i(\theta + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$ on $z = re^{i\theta}$. És a dir, $\log(z)$ és un conjunt de valors, és multivaluada. Recordem també que e^z és $2\pi i$ periòdica. Llavors

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow e^{2\log(-z)} = e^{2\log(z)} \Rightarrow 2\log(-z) - 2\log(z) = 2k\pi i \Rightarrow \log(-z) - \log(z) = k\pi i.$$

Els arguments de z i de $-z$ (que son oposats) difereixen en un múltiple no nul de π. Si considerem els arguments principals

$$|\mathrm{Arg}(-z) - \mathrm{Arg}(z)| = k\pi, \quad |\mathrm{Arg}(-z) - \mathrm{Arg}(z)| < 2\pi$$

llavors difereixen en π.

En general $\mathrm{Log}\,(zw) \neq \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w$. Si ho fos tindriem

$$0 = \mathrm{Log}\, 1 = \mathrm{Log}\,((-1)(-1)) = 2\mathrm{Log}\,(-1)$$

i $\mathrm{Log}\,(-1) = 0$ però $e^{\mathrm{Log}\,(-1)} = -1 \neq 1$. La igualtat $\log(zw) = \log z + \log w$ només és certa a nivell de conjunts.

Solució de l'exercici 2.3.3

(a) $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$; (b) $(2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$; (c) $\ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$; (d) $\exp(-(\pi/2 + 2k\pi)), k \in \mathbb{Z}$; (e) $\ln 2 + i(5\pi/3 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$; (f) $\exp\left(\ln 2 + \frac{\pi}{6} + 2k\pi + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi - \ln 2)\right), k \in \mathbb{Z}$; (g) $e^{2k\pi}e^{-i\ln 2}, k \in \mathbb{Z}$; (h) $(\pi/2 + 2k\pi)i, k \in \mathbb{Z}$.

Solució de l'exercici 2.3.4

a) $z = \log(2i)$ és a dir $z = \{\ln(2) + i\pi/2 + 2k\pi i\}$

b) Escrivim $w = z^2 - 1$. Trobem que $w = e^{i\pi/2} = i$. Per tant, $z^2 - 1 = i$, i $z = \pm\sqrt{1+i} = \pm\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$.

c) Posem $e^z = t$ llavors t és l'arrel tercera de la unitat que no és 1, és a dir $t = e^{\pm i2\pi/3}$. Llavors $z = \{i(2\pi/3 + 2k\pi), i(-2\pi/3 + 2k\pi)\}$

d) Posem $w = e^{iz}$, resolem l'equació de segon grau que obtenim i resulta $w = (2 \pm \sqrt{5})i$. Per tant, $z = \pi/2 + 2k\pi - i\ln(2+\sqrt{5})$, i $z = -\pi/2 + 2k\pi - i\ln(\sqrt{5} - 2)$. Tot plegat, queda

$$z = \pm(\pi/2 + 2k\pi + i\ln(\sqrt{5} - 2)).$$

e) Procedim com en el cas anterior i tenim $z = \{\pi/4 + 2k\pi, 3\pi/4 + 2k\pi\} = \{\pi/4 + k\pi\}$.

Solució de l'exercici 2.3.5

Fila 1: $\pi/2; \pi/2i \mid -3\pi/2; -3i\pi/2 \mid \pi/2; i\pi/2; -3i\pi/2 + \log 2$. Fila 2: restar a tot 2π. Fila 3: $-2\pi; -2\pi i \mid 0; 0 \mid -2\pi; -2\pi i; -7i\pi/2 + \log 2$.

Solució de l'exercici 2.3.6

Notem que $D+3 = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,(z) > 0\} \subset \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. Per tant, f és holomorfa. A més sabem que $\mathcal{L} = \mathrm{Log} + 2k\pi i$. Com que $0 = \mathrm{Log}\,(1) = \mathcal{L}(1) - 2k\pi i = 2\pi i - 2k\pi i$, trobem $k = 1$. I per tant,

$$f(3i) = \mathcal{L}(3i+3) = \mathrm{Log}\,(3i+3) + 2\pi i = \ln|3i+3| + (\mathrm{Arg}\,(3i+3) + 2\pi)i = \ln(3\sqrt{2}) + \frac{9\pi}{4}i.$$

Solució de l'exercici 2.3.7

a) Sí, $\Omega \subset \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, per tant $f_k(z) = \mathrm{Log}\,(z) + 2k\pi i$ és una determinació amb $f_k(\Omega) = \{x + iy : y + 2k\pi \in (-\pi/2, \pi/2)$ per algun $k \in \mathbb{Z}$ fixat.

b) Sí, $\Omega \subset \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, per tant $f_k(z) = \mathrm{Log}\,(z) + 2k\pi i$ és una determinació amb $f_k(\Omega) = \{x + iy : y + 2k\pi \in (-3\pi/4, \pi/4)$ per algun $k \in \mathbb{Z}$ fixat.

c) No.

Solució de l'exercici 2.3.8

Si $t = e^z$ cal resoldre l'equació $t^2 + 2t - w = 0$ d'on

$$e^z = -1 + \sqrt{1+w}.$$

Apliquem logaritmes i canviem el nom de les lletres i obtenim

$$q^{-1}(z) = \log(-1 + \sqrt{1+z}) = \mathrm{Log}\,(-1 \pm e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,(1+z)}) + 2k\pi i$$

que és una funció multivaluada.

- Per la branca positiva de l'arrel tenim
$$q^{-1}(3) = \log(-1+2) = \log(1) = \{2\pi n i,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$
- Per la branca negativa
$$q^{-1}(3) = \log(-1-2) = \log(-3) = \{\ln(3) + i(\pi + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Solució de l'exercici 2.3.9

Tenim $h_j(z)^n = z = e^{x+iy+2k\pi i}$ per tot $z \in \Omega$, on fixem $y = \mathrm{Arg}\,z$. Si escrivim les parts real i imaginària del logaritme tindrem

$$h_j(z) = e^{u+iv}$$

amb $nu = x$ i $nv = y + 2k\pi$. Per tant,

$$u = \frac{x}{n} \qquad v = \frac{y+2k\pi}{n}.$$

Traient-ne mòdul i argument tenim

$$|h_j(z)| = e^{\frac{x}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \qquad \mathrm{Arg}\,(h_j(z)) = \frac{y+2k\pi}{n} = \frac{\mathrm{Arg}\,(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Responem ara les preguntes:

i) Trobem imposant que $e^{2\pi j i/3} \in h_j(\Omega)$, que

$$h_0(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg}\,(z) \in (-\pi/3, \pi/3)\},$$

$$h_1(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg}\,(z) \in (\pi/3, \pi)\},$$

$$h_2(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg}\,(z) \in (-\pi, -\pi/3)\}.$$

ii) En tenir $n = 3$ trobem

$$\mathrm{Arg}\,(h_j(z)) = \frac{\mathrm{Arg}\,(z)}{3} + \frac{2k_j\pi}{3} \implies k_j = \frac{3\mathrm{Arg}\,(h_j(z))}{2\pi} - \frac{\mathrm{Arg}\,(z)}{2\pi}.$$

En el cas $z = 1$,

$$k_0 = \frac{3\mathrm{Arg}\,(1)}{2\pi} - \frac{\mathrm{Arg}\,(1)}{2\pi} = 0 - 0 = 0.$$

$$k_1 = \frac{3\mathrm{Arg}\,(e^{2\pi i/3})}{2\pi} - \frac{\mathrm{Arg}\,(1)}{2\pi} = 1 - 0 = 1.$$

$$k_2 = \frac{3\mathrm{Arg}\,(e^{-2\pi i/3})}{2\pi} - \frac{\mathrm{Arg}\,(1)}{2\pi} = -1 - 0 = -1.$$

Per tant,

$$h_j(z) = |h_j(z)|e^{i\mathrm{Arg}\,(h_j(z))} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\mathrm{Arg}\,(z)}{3} + i\frac{2k_j\pi}{3}} = e^{\frac{\mathrm{Log}\,(z)}{3} + i\frac{2k_j\pi}{3}}.$$

iii)

$$h_j(i) = |i|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\mathrm{Arg}\,(i)}{3} + i\frac{2k_j\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{2k_j\pi}{3}} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ si } j = 0, \\ e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ si } j = 1, \\ e^{i\frac{-\pi}{2}} = -i \text{ si } j = 2. \end{cases}.$$

Solució de l'exercici 2.4.1

Sabem que $\mathcal{S}_1(x) \neq 0$ per hipòtesi. Aleshores $\frac{\mathcal{S}_2(x)}{\mathcal{S}_1(x)}$ és contínua, i

$$\left(\frac{\mathcal{S}_2(x)}{\mathcal{S}_1(x)}\right)^n = 1.$$

Com que pren per valors en les arrels de la unitat

$$\left\{1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{4\pi i}{n}}, \cdots, e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}\right\},$$

que és un conjunt finit, necessàriament la funció $\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1$ és constant (la imatge contínua d'un connex és connexa).

Solució de l'exercici 2.4.2

- e^{z^2} és entera.
- $e^{1/z}$ té domini $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
- $1/e^z$ té domini $\mathbb{C}$, ja que el recorregut de l'exponencial és el domini de $1/z$.
- $1/(e^z - 1)$ té domini $\mathbb{C}\backslash 2\pi i\mathbb{Z}$.
- $\sqrt{1-z} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,(1-z)}$ té domini $\mathbb{C}\backslash[1, +\infty)$.
- $\sqrt{1+e^z} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,(1+e^z)}$ té domini

$$\mathbb{C}\backslash\{z : e^{\mathrm{Re}\,z} \geqslant 1, \,\mathrm{Im}\,z \in \pi + 2\pi k\} = \mathbb{C}\backslash\{x + i(2k+1)\pi : x \geqslant e\}.$$

  Per aquest cas, notem que cal $1 + e^z \notin (-\infty, 0]$, és a dir $e^z \notin (-\infty, -1]$.

Solució de l'exercici 2.4.3

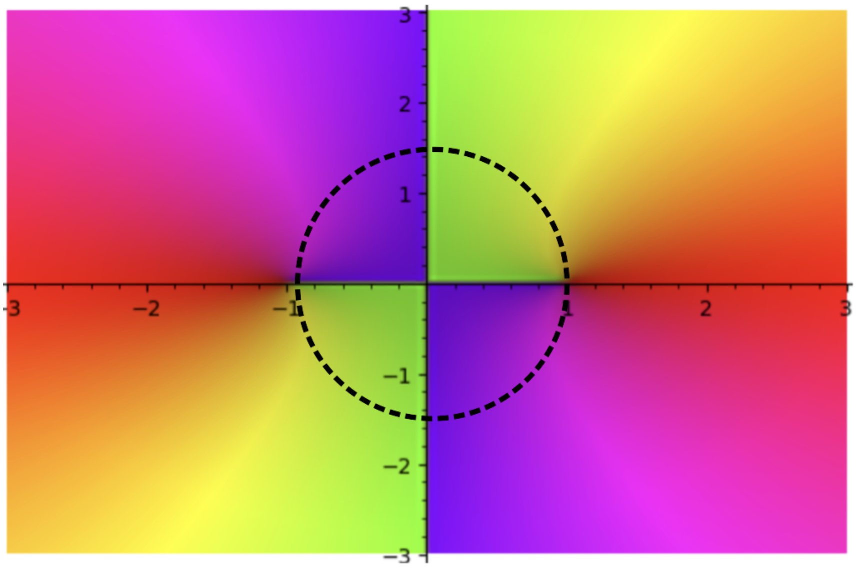
a) Observem que si considerem la branca principal tenim

$$(z^2-1)^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z^2-1)\right)$$

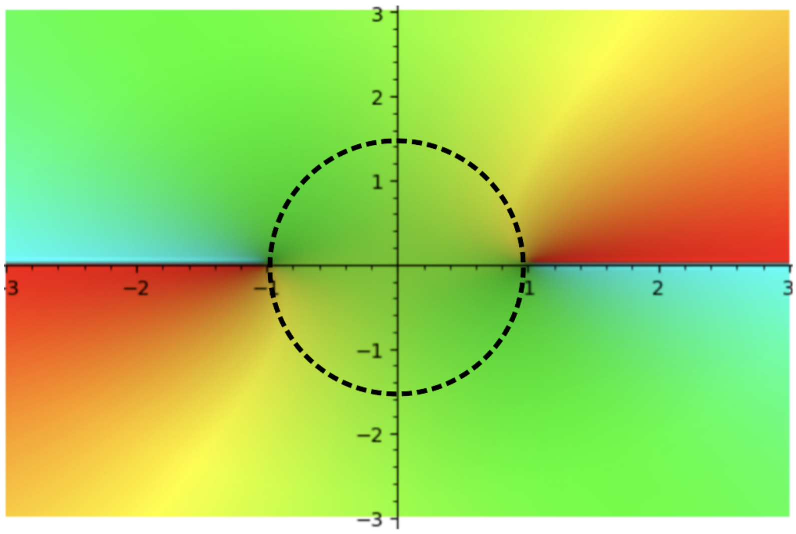
i Log té com a domini d'holomorfia tots els $z \in \mathbb{C}$ excepte els que $z^2 - 1 \leqslant 0$, és a dir cal treure els $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ tals que $a^2 - b^2 + 2abi \leqslant 1$. Això només pot passar per $ab = 0$. Cas $a = 0$, llavors per a tot bi es compleix. Cas $b = 0$, cal que $a^2 < 1$. No és la branca que volem ja que en aquest cas

$$D = \mathbb{C}\backslash\left(\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z = 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,z = 0, |\mathrm{Re}\,z| < 1\}\right).$$

Observem abans el que es veu si fem un `complex_plot()`:



Caldrà canviar la branca del logaritme. Podem buscar una branca de l'argument que ens vagi bé però és més fàcil considerar $\sqrt{z^2-1} = \sqrt{(-1)(1-z^2)} = i\sqrt{1-z^2} = i\exp(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(1-z^2))$. Aleshores, traient els z tal que $1-z^2<0$ resulta que el domini és $\mathbb{C}\backslash\{z=a : |a|>1\}$ i aquest domini inclou el disc. Veiem el `complex_plot()` corresponent:



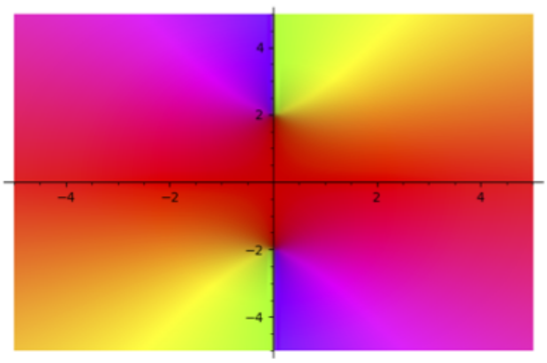
b) Com a funcions multivaluades (o multivalents) tenim que $\sqrt{z^2+4} = z\sqrt{1+4/z^2}$, això vol dir que els conjunts que determinen són iguals. Les branques principals de cada expressió són:

$$\sqrt{z^2+4} = \exp\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1}{2}(z^2+4)\right)\right), \quad D = \mathbb{C}\backslash\{z^2+4<0\} = \mathbb{C}\backslash\{iy, y\in\mathbb{R} : |y|>2\}$$

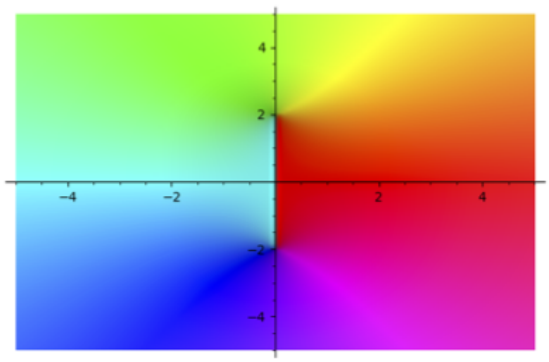
$$z\sqrt{1+4/z^2} = z\exp\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1}{2}(1+4/z^2)\right)\right), \quad D = \mathbb{C}\backslash\{1+4/z^2<0\} = \mathbb{C}\backslash\{iy, y\in\mathbb{R} : |y|<2\}$$

on Log denota la branca principal del logaritme.

La que ens va bé és la branca principal de la segona expressió. El domini de continuïtat és llavors $\mathbb{C}\backslash\{iy, y\in\mathbb{R} : |y|<2\}$.



complex_plot(sqrt(x^2+4),(-5,5),(-5,5))



complex_plot(x*sqrt(1+4/x^2),(-5,5),(-5,5))

c) Considerem $f_3(z) = z^2\sqrt{1-1/z^4} = z^2 f_1(1/z^2)$, d) Similarment podem definir $z\sqrt[3]{1-1/z^3}$.

Solució de l'exercici 3.1.1

Falsa. Certa. Falsa. Certa.

La darrera, per exemple, es pot justificar així: Si S és divergent en $z = 2i$, aleshores el radi de convergència $R \leqslant |2i - i| = 1$. En particular, la sèrie divergeix en tot z tal que $|z - i| > 1$, cosa que se satisfà a $z = 2 + i$. L'afirmació és, per tant, CERTA.

Solució de l'exercici 3.1.2

Prenem una suma parcial $f_N := \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$. Observem que

$$|f_N(re^{i\theta})|^2 = f_N(re^{i\theta})\overline{f_N(re^{i\theta})} = \mathrm{Re}\left(\Big(\sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{in\theta}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{N} \bar{a}_m r^m e^{-im\theta}\Big)\right)$$
$$= \sum_{n,m=0}^{N} r^{n+m}\mathrm{Re}\,(a_n\bar{a}_m e^{i(n-m)\theta}).$$

Integrant, i escrivint $\int u + iv = \int u + i\int v$, tenim

$$\int_0^{2\pi} |f_N(re^{i\theta})|^2 \,\frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n,m=0}^{N} r^{n+m}\mathrm{Re}\left(a_n\bar{a}_m \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}\right)$$

Però tenim,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m, \end{cases}$$

la qual cosa ja dóna el resultat si la sèrie és finita.

Per altra banda, com que f_N convergeix uniformement a f en el disc $\overline{\mathbb{D}(0,r)}$, tenim que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2 \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Solució de l'exercici 3.2.1

Els discs on hi ha convergència absoluta i uniforme en compactes són: (a) $D(0,1)$; (b) $D(0,e/4)$; (c) $D(-i,1)$; (d) $D(1,2e)$; (e) $\mathbb{C}$; (f) $D(0,1/2)$; (g) $D(2,1)$; (h) $D(0,2)$; (i) $D(2/3,1/3)$; (j) $D(0,1)$.

Per exemple, fem i) i j).

(i) Escrivim $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(3z-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n n^2 \left(z - \frac{2}{3}\right)^n$, així que definim $a_n := 3^n n^2$.

Calculem

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 3^{n+1}}{n^2 3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 3.$$

Per tant, pel criteri del quocient, el radi de convergència és $1/3$. Tenim doncs convergència al disc $D(2/3,1/3)$. En compactes la convergència serà uniforme.

(j) Tenim $\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)^n z^{2^n}$. Notem que el coeficient s'anul·la per $n = 2k+1$. És a dir que $a_j = 0$ si $j \neq 4^k$, i $a_j = 4^k = j$ si $j = 4^k$. Aleshores

$$\limsup_j \sqrt[j]{|a_j|} = \limsup_k \sqrt[4^k]{|a_{4^k}|} = \limsup_{j=4^k} \sqrt[j]{j}$$

Com que aquest límit existeix, podem substituir límit superior per límit:

$$\lim_j \sqrt[j]{j} = e^{\lim_j \frac{\log j}{j}} = 1.$$

Per tant, el radi de convergència és $R = 1/1 = 1$, i tenim convergència al disc $D(0,1)$.

Solució de l'exercici 3.3.1

(a) Conv. unif. en compactes de $\mathbb{D}$ i en tot arc tancat de $\{|z| = 1\}$ que no contingui $z = 1$.

(b) Conv. abs. i unif. a $\overline{\mathbb{D}}$ pel criteri M de Weierstrass.

(c) Conv unif. en tot compacte de $\mathbb{D}$ i en tot arc tancat de $|z| = 1$ que no contingui $1, e^{2\pi i/3}$ o $e^{4\pi i/3}$.

Si anomenem $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$, podem veure que el radi de convergència és 1. Quan el mòdul és $|z| \leqslant 1$ (la desigualtat estricta no cal, però surt "gratis"), mirem d'aplicar el criteri de Dirichlet:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} z^{3n+1}\right| = |z| \left|\frac{1-z^{3(M+1)}}{1-z^3}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z^3|}$$

Per tant, si $\operatorname{dist}(z^3, 1) > \varepsilon$, aleshores tenim una cota uniforme de les sumes parcials $\sum_{n=0}^{N} z^{3n+1}$ i podem aplicar el criteri de Dirichlet.

Concloem que per tot compacte de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1, e^{\pm 2\pi i/3}\}$ hi ha convergència uniforme. En particular, en aquests compactes S és el límit uniforme de polinomis, que són funcions contínues, i és, per tant, contínua a $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1, e^{\pm 2\pi i/3}\}$ i uniformement contínua en compactes.

(d) Conv. unif. en compactes de $\mathbb{D}$ i en tot arc tancat de $\{|z| = 1\}$ que no contingui $z = -1$:

Si anomenem $S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n$, aleshores $S(z) = -T(-z)$, on $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ és la sèrie estudiada a l'apartat (a). Així deduïm que S convergeix uniformement en compactes de $\mathbb{D}$ i en tot arc tancat de $\{|z| = 1\}$ que no contingui $z = -1$.

(e) Conv unif. en compactes de $D(i, 5)$. Divergeix per a tot punt de la frontera del disc:

Estudiem la sèrie $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$. Notem que el radi de convergència és 5 i que quan $|z - i| = 5$, aleshores el terme general de la sèrie té mòdul $\left|\frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}\right| = n$ que no convergeix a zero (condició necessària per la convergèncie d'una sèrie!). Per tant, la sèrie és divergent a tota la circumferència. La convergència és uniforme en compactes de $D(i, 5)$.

Solució de l'exercici 4.1.1

a)

$$\frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z)-f(z)g(z)}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z)-f(z+\Delta z)g(z)+f(z+\Delta z)g(z)-f(z)g(z)}{\Delta z,}$$

prenem factor comú, passem al límit i obtenim $f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$ que és la fórmula per la derivada.

b) Volem veure que $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ quan f és derivable en z_0. Tenim que

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)\neq\infty.$$

Com que el denominador tendeix a zero cal que el numerador també tendeixi a zero llavors queda provada la continuïtat.

c) Escrivim

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)+\left(\frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0}\right)=:f'(z_0)+\lambda(z).$$

És clar que $\lambda(z)\to 0$ si $z\to z_0$ i hem provat l'enunciat.

Solució de l'exercici 4.1.2

Totes són enteres excepte el cas c) quan $g(z)=0$ i e) quan $z=0$.

Solució de l'exercici 4.1.3

Si posem $x=1/2(z+\bar z)$ i $y=1/(2i)(z-\bar z)$ veiem que $f(z)=3z^2+2z-1$ que és un polinomi. Es pot fer més fàcilment amb la indicació del peu de pàgina:

$$f(z)=u(z,0)+iv(z,0)=3z^2+2z-3\cdot 0^2-1+i(6x\cdot 0+2\cdot 0)=3z^2+2z-1.$$

Solució de l'exercici 4.1.4

(a) No existeix; (b) Si, per exemple $f(z)=z^2$; (c) No existeix; (d) Si, per exemple $f(z)=1/(1+z)$.

Fem el primer amb detall, el tercer és semblant: Notem que, en cas d'existir una tal funció f holomorfa, aquesta serà en particular contínua a l'origen. Així, necessàriament haurem de tenir

$$f(0)=f(\lim_{n\to\infty}1/n)=\lim_{n\to\infty}f(1/n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0.$$

Si és holomorfa, haurà d'existir el límit

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}.$$

En particular tindrem que aquest límit s'assoleix si ens acostem a l'origen pels reals positius i pels reals negatius. Més concretament tindrem

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(1/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

i, a la vegada

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(-1/n)}{-1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

Com que $1/2 \neq -1/2$, hem arribat a una contradicció i f no pot existir.

Solució de l'exercici 4.1.5

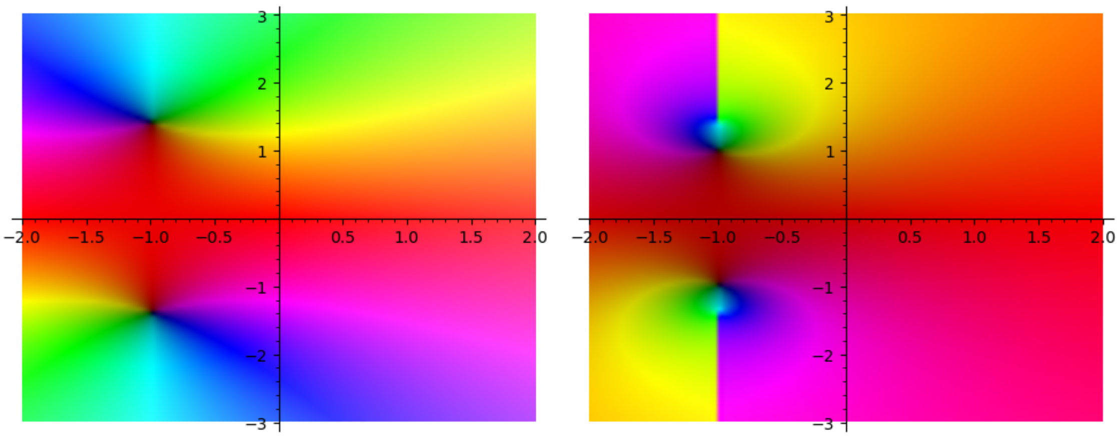
Veiem que el polinomi $z^2 + 2z + 3$ s'anul·la a $-1 \pm \sqrt{2}i$. A partir d'aquests punts es veurà el que hem de podar. Cal que $z^2 + 2z + 3$ no sigui menor o igual a 0. Tenim

$$z^2 + 2z + 3 = (x^2 - y^2 + 2\,x + 3) + i(2\,xy + 2\,y).$$

Això serà real si i només si $2y(x + 1) = 0$. Si $y = 0$ llavors $z^2 + 2z + 3$ sempre és positiu. Si $x = -1$ tenim $z = -1 + iy$ i

$$z^2 + 2z + 3 = 2 - y^2$$

que és negatiu o zero si i només si $|y| \geqslant \sqrt{2}$. Llavors el domini és $\mathbb{C}\backslash\{-1 + it, |t| \geqslant \sqrt{2}\}$. Podem veure el fenòmen fent `complex_plot()` (a l'esquerra $z^2 + 2z + 3$ a la dreta el seu logaritme).



Solució de l'exercici 4.1.6

Tenim que z_1 i z_2 són arrels terceres de la unitat llavors $f(z_2)-f(z_1) = z_2^3-z_1^3 = 1-1 = 0$. Volem saber si hi ha $w \in \overline{z_1 z_2}$ de manera que $0 = 3w^2(z_2 - z_1) = 3w^2(-\sqrt{3}i)$. Però això només passa si $w = 0$ que no pertany al segment entre z_1 i z_2. Llavors el teorema del valor mitjà tal com es coneix per les funcions reals no és cert en el cas complex.

Solució de l'exercici 4.2.1

Demanem que es compleixin les equacions de CR. Llavors a) $c = 1$ i $a = -b$ i $f(z) = (1 - ia)z$. b) Veiem que $a = b = -1$ per Cauchy-Riemann i $f(z) = \cos(z) + i\sin(z)$.

Solució de l'exercici 4.2.2

$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$, llavors $u_{xx} + u_{yy} = 0$ i u és harmònica. Amb v podem fer el mateix.

Solució de l'exercici 4.2.3

a) Comprovem que $u_{xx} + u_{yy} = 0$ és feixuc però elemental (podeu fer servir `Sage`). b) Resolem l'equació $v_y = u_x = e^{-x}(y\cos y - (x-1)\sin y)$ respecte y i trobem que $v = e^{-x}((x-1)\cos y + y\sin y + \cos y) + C(x)$. Fent servir l'altre equació de C-R veiem que $C = \text{ct.} \in \mathbb{R}$ i

$$v = e^{-x}((x-1)\cos y + y\sin y + \cos y) + C.$$

c) Fem servir que $f(z) = u(z,0) + iv(z,0)$ i obtenim $f(z) = ize^{-z} + iC$.

Solució de l'exercici 4.2.4

Si imposem la condició de ser harmònica (veure un exercici anterior) veiem que $c = -3a$ i $b = -3d$. Llavors per que el polinomi de l'enunciat sigui harmònic ha de ser $u = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3$. Ara volem trobar v de manera que $f = u + iv$ sigui holomorfa, cal que $v_x = -u_y$ i $v_y = u_x$. De la segona equació obtenim que $v = 3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + C(x)$. Imposant ara la primera equació veiem que $C(x) = dx^3 + K$ on K és una constant d'integració. Llavors ja tenim f (que no és única). Es veu fàcilment que $f(z) = (a + id)z^3 + iK, K \in \mathbb{R}$ (feu servir el peu de pàgina, per exemple.)

Solució de l'exercici 4.2.5

Demostrem el segon apartat. Suposem primer que $|f| \equiv 0$. Aleshores efectivament $f \equiv 0$ és constant.

Si, en canvi $|f| \equiv C > 0$, aleshores escrivint les parts real i imaginària de f com $f = u + iv$, tenim que

$$u^2 + v^2 \equiv C.$$

Derivant l'expressió respecte les parts real i imaginària, obtenim gràcies a les equacions de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = 0, \\ 2uu_y + 2vv_y = 0, \end{cases} \overset{\text{C.R.}}{\iff} \begin{cases} uu_x + vv_x = 0, \\ -uv_x + vu_x = 0, \end{cases}$$

Ara multiplicant la primera equació per u, la segona per v i restant, obtenim

$$\begin{cases} u^2u_x + uvv_x = 0, \\ -uvv_x + v^2u_x = 0, \end{cases} \implies Cu_x = (u^2+v^2)u_x = 0 \implies u_x = 0.$$

Ara multiplicant la primera equació per v, la segona per u i sumant, obtenim

$$\begin{cases} uvu_x + v^2v_x = 0, \\ -u^2v_x + uvu_x = 0, \end{cases} \implies Cu_x = (u^2+v^2)v_x = 0 \implies v_x = 0.$$

Hem vist que $u_x = v_x = 0$ a tot Ω. Per les equacions de Cauchy-Riemann, tenim que la diferencial és 0 a tot Ω. Com que aquest conjunt és connex, deduïm que f és constant.

Solució de l'exercici 4.2.6

Vegem que la solució és $f(z) = \alpha z + \beta$ amb $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\beta \in \mathbb{C}$.

Com que la part real de f depèn només de x, per les equacions de Cauchy-Riemann, tenim $0 = u_y = -v_x$. En particular, $v(x,y) = \widetilde{v}(y) + C$. Altra volta per les equacions de Cauchy-Riemann deduïm que $u_x = v_y$ i, per tant, $u_x = \widetilde{v}_y$.

Prenem x_0 fixat. Aleshores

$$\widetilde{v}_y(y) = v_y(x_0, y) = u_x(x_0),$$

és a dir que $\widetilde{v}_y$ és una funció constant d'una variable real. Per tant, $\widetilde{v}(y) = Cy + D$, amb $C = u_x(x_0)$ i $D \in \mathbb{R}$.

Prenem ara y_0 fixat. Aleshores

$$u_x(x) = v_y(x, y_0) = \widetilde{v}_y(y_0) = v_y(x_0, y_0) = u_x(x_0),$$

és a dir que u_x és una funció constant d'una variable real. Per tant, $u(x) = Ax + B$, amb $A = u_x(x_0)$ i $B \in \mathbb{R}$.

Tot plegat,

$$f(x,y) = Ax + B + i(Cy + D) = u_x(x_0)(x + iy) + B + iD.$$

Dit d'una altra manera,

$$f(x,y) = \alpha z + \beta, \qquad \text{on } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ i } \beta \in \mathbb{C}.$$

Solució de l'exercici 4.2.7

(a) $\lambda = 3$ i $f_3 = u_3 + iv_3$ amb $u_3(x,y) = -2\cos x \cosh y - 3x^2y + x + y3 + C$, on $C \in \mathbb{R}$; (b) g_λ és entera i $ig_\lambda(z) = f'_\lambda(z)$.

Solució de l'exercici 4.2.8

a) $\mathbb{C}\backslash\{2-3i\}$, b) $\mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$, c) $\mathbb{C}\backslash\{-1/2 \pm i\sqrt{15}/2\}$, d) $\mathbb{C}\backslash\{1, 1/2\}$.

Solució de l'exercici 4.2.9

Fora de zero no es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann però $\lim_{z\to 0}|z|^2/z = \lim_{z\to 0}\bar{z} = 0$ i és diferenciable al 0.

Alternativa: A la següent secció veurem que $f(z) = z\bar{z}$ implica que $\bar{\partial} f(z) = z$ i per tant $\bar{\partial} f(z) = 0$ si i només si $z = 0$.

Solució de l'exercici 4.2.10

Podem fer el càlcul i la comprovació de que es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann amb `Sage`. Fem-ho a mà i comprovem que $f_x + if_y = 0$, que equival a les equacions de CR. Tenim

$$f_x(z) = e^{-1/z^4}\left(\frac{-1}{z^4}\right)_x = e^{-1/z^4}\left(\frac{4z^3 z_x}{z^8}\right) = 4e^{-1/z^4}\frac{1}{z^5}.$$

Anàlogament $f_y(z) = 4e^{-1/z^4}\dfrac{i}{z^5}$. Llavors $f_x + if_y = 0$ i es compleixen les equacions. No obstant si ens acostem a 0 seguint l'eix de les x el límit és 0 i si ens acostem seguint el raig $\lambda(1+i), \lambda > 0$ el valor de f s'acosta a infinit. Llavors f no és contínua en 0 i no pot ser holomorfa.

Solució de l'exercici 4.2.11

Calculem la derivada de $f(z)$ en z_0 seguint dues direccions, la primera donada per la corba $z(t) = z_0 + te^{i\theta_0}$ (raig que seguint la direcció θ_0 arriba a z_0) i la segona seguint la corba $z(t) = re^{i(t+\theta_0)}$ (arc de circumferència de radi r que s'acosta a z_0) on $\theta_0 = \arg(z_0)$ i $r = |z_0|$. Llavors, en el primer cas

$$\frac{f(z(t)) - f(z_0)}{z(t) - z_0} = \frac{u(z(t)) - u(z_0) + i(v(z(t)) - v(z_0))}{te^{i\theta_0}} \to e^{-i\theta_0}(u_r + iv_r) = f'(z_0).$$

Seguint l'altra direcció tenim

$$\frac{f(z(t)) - f(z_0)}{z(t) - z_0} = \frac{f(z(t)) - f(z_0)}{re^{i(t+\theta_0)} - re^{i\theta_0}} = \frac{f(z(t)) - f(z_0)}{re^{i\theta_0}e^{it/2}(e^{it/2} - e^{-it/2})} \sim \frac{f(z(t)) - f(z_0)}{re^{i\theta_0}it}$$

ja que $e^{it/2} - e^{-it/2} = 2i\sin(t/2) \sim it$ quan $t \to 0$. Llavors

$$f'(z_0) = \frac{e^{-i\theta_0}}{r}(v_\theta - iu_\theta) = f'(z_0) = e^{-i\theta_0}(u_r + iv_r).$$

D'aquí deduïm les relacions $u_r = \frac{1}{r}v_\theta, v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$.

Solució de l'exercici 4.2.12

a) $|w'| = 2|z| < 1$ si i només si $|z| < 1/2$ és la zona on es contreu, si $|z| > 1/2$ s'expandeix. b) $|w'| = |2z+2| < 1$ si i només si la distància a -1 és menor que $1/2$, es contreu en el disc de radi $1/2$ al voltant de -1. c) Es dilata si $|z| > 1$. d) $|w'| = e^x$, si $x > 0$ expansió, si $x < 0$ contracció. e) $|w'| = |1/(z-1)| < 1$ fora del disc de radi 1 al voltant de 1, és on es contreu. La zona de dilatació és a l'interior d'aquest. Cal treure en els dos casos la branca que no és del domini de $\log(z-1)$, és la branca $\{x \leqslant 1, y = 0\}$.

Solució de l'exercici 4.3.1

Primer argument: Considerem les descomposicions en parts reals i imaginàries $f^* := u^* + iv^*$, i $f = u + iv$. Segons l'enunciat, tenim que $u^*(x+iy) = u(x-iy)$ i $v^*(x+iy) = -v(x-iy)$. Comprovem les equacions de Cauchy-Riemann de f^* usant les de f:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x}(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x-iy) \overset{\text{C.R.}}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x-iy) = -\frac{\partial v^*}{\partial y}(x+iy)(-1) = \frac{\partial v^*}{\partial y}(x+iy).$$

i

$$\frac{\partial u^*}{\partial y}(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial y}(x-iy)(-1) \overset{\text{C.R.}}{=} \frac{\partial v}{\partial x}(x-iy) = -\frac{\partial v^*}{\partial x}(x+iy).$$

Segon argument: apliquem la regla de la cadena complexa. Considerem la funció conjugar $g(z) = \overline{z}$. Notem que $\partial g = 0$ i $\overline{\partial} g = 1$. Aleshores tenim $f^* = g \circ f \circ g$ i aplicarem dues vegades la regla de la cadena complexa: en primer lloc

$$\overline{\partial} f^* = \partial g \overline{\partial}(f \circ g) + \overline{\partial} g \overline{\partial(f \circ g)} = 0\, \overline{\partial}(f \circ g) + 1\, \overline{\partial(f \circ g)},$$

així que només cal calcular el segon sumand. Continuant l'argument, obtenim

$$\overline{\partial} f^* = \overline{\partial(f \circ g)} = \overline{\partial f \partial g + \overline{\partial} f \overline{\overline{\partial} g}} = \overline{\partial f\, 0 + \overline{\partial} f \overline{1}} = \overline{\overline{\partial} f}.$$

Com que f és holomorfa, per les equacions de Cauchy-Riemann tenim $\overline{\partial} f = 0$, és a dir que f^* també és holomorfa.

Solució de l'exercici 4.3.2

(a) 0; (b) $\mathbb{C}$ i $f'(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$; (c) $\mathbb{C}\backslash\{0\}$; $f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$; (d) $\mathbb{C}\backslash\{1, \pm\sqrt{2}i\}$ i $f'(z) = \frac{-4z^2+2z-4}{(z-1)^3(z^2+2)^2}$; (e) $\varnothing$; (f) $\mathbb{C}$ i $f'(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$; (g) 0; (h) 0.

Il·lustrem com resoldre en els casos c, d i g. Notem que $f(z) = z + 1/z$ és la suma de dues funcions holomorfes a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Per tant, f és també holomorfa. Com que per funcions holomorfes tenim $f' = f_x$ (és a dir que podem derivar usant les regles habituals respecte la z), podem calcular

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = 1 - \frac{1}{z^2}.$$

En el cas $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$ també tenim un polinomi, que és una funció holomorfa, al denominador. Per tant, f és holomorfa allà on està definida, que és el pla complex llevat dels zeros del polinomi en qüestió. Així, el domini és $\{z \in \mathbb{C} : (z-1)^2(z^2+2) \neq 0\}$, és a dir $\mathbb{C}\backslash\{1, \pm\sqrt{2}i\}$. Aquí podem derivar també usant les regles de càlcul per trobar

$$f'(z) = \frac{-2(z-1)(z^2+2) - (z-1)^2 2z}{(z-1)^4(z^2+2)^2} = \frac{-4z^2+2z-4}{(z-1)^3(z^2+2)^2}.$$

En aquest cas tenim $f(z) = \cos|z|^2 = \cos(z\overline{z}) = F(z, \overline{z})$, on $F(z, w) := \cos(zw)$. Aquesta funció és la composició de la funció $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, que és holomorfa, amb el polinomi en dues variables zw, que és holomorf respecte z i respecte w. Per tant, F és holomorfa respecte les dues variables. Per tant, les derivades de Wirtinger de f es poden calcular usant que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial F}{\partial z}(z, \overline{z})$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(z, \overline{z}).$$

Les darreres derivades, en ser F holomorfa respecte les dues variables, es poden calcular per les regles habituals. Així

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z, w) = -\sin(zw)w$$

i

$$\frac{\partial F}{\partial w}(z, \overline{z}) = -\sin(zw)z.$$

Obtenim que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial F}{\partial z}(z, \overline{z}) = -\overline{z}\sin(|z|^2)$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(z, \overline{z}) = -z\sin(|z|^2).$$

Ens interessa només saber quan s'anul·la la darrera derivada. Serà doncs quan $z = 0$ (és a dir a l'origen) o bé quan $|z|^2 = k\pi$, és a dir si $x^2 + y^2 = k\pi$, amb $k \in \mathbb{N}$. En aquests punts, precisament

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = -\overline{z}\sin(|z|^2) = 0.$$

Solució de l'exercici 4.4.1

a) No, b) No, c) Sí, excepte a $z = 5$, d) Si, és z^2, e) No es compleixen C.R. enlloc, f) Si, excepte a $z = 0$: és $z + 1/z$, g) No, h) No.

Solució de l'exercici 4.4.2

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n = 1/(1-(1+i)/3) - 1 = (1+i)/(2-i)$, b) $e^{(3+i)} - 1$, c) $z/(1-z)^2$.

Solució de l'exercici 4.4.3

Com que f és holomorfa (és una sèrie de potències) també és continua. Aleshores

$$f(0) = f(\lim_{k\to\infty} z_k) = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

D'altra banda

$$0 = f(0) = c_0 + c_1 0 + c_2 0^2 + \ldots = c_0$$

i per tant $c_0 = 0$. Suposem ara que haguéssim demostrat que $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$ i anem a veure que $c_{n+1} = 0$ també. Escrivim

$$f(z) = c_{n+1}z^{n+1} + c_{n+2}z^{n+2} + \ldots = z^{n+1}(c_{n+1} + c_{n+2}z + \ldots) =: z^{n+1}g(z).$$

Per hipòtesi, per a tota $k \in \mathbb{N}$

$$0 = f(z_k) = z_k^{n+1}g(z_k).$$

la qual cosa, atès que $z_k \neq 0$, implica que $g(z_k) = 0$ per a tots els punts de la successió. La funció g és també continua al 0 i pel mateix raonament anterior veiem que

$$0 = g(0) = c_{n+1},$$

com volíem demostrar. Aquest raonament per inducció prova que $c_n = 0$ per a tota n i que per tant $f \equiv 0$.

Solució de l'exercici 4.4.4

Siguin $S(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ i $T(z) := \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$, i considerem $f(z) := S(z) - T(z) = \sum_{n\geqslant 0}(a_n - b_n)z^n$. Aleshores $f(z_k) = S(z_k) - T(z_k) = 0$ per hipòtesi. L'exercici anterior ens implica que $a_n - b_n = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ o, equivalentment, que $f(z) \equiv 0$ o que $S \equiv T$.

Solució de l'exercici 4.4.5

(a) $-\text{Log}\,(1 - z)$;

(b) La suma és $(1 - z)(\text{Log}\,(1 - z) - 1) + 1$, si $z \in \mathbb{D}\backslash\{1\}$ i és 1 si $z = 1$;

(c) La suma és $-1/3\text{Log}\,(1-z) - e^{i2\pi/3}/3\text{Log}\,(z - e^{i2\pi/3}) - e^{i4\pi/3}/3\text{Log}\,(z - e^{i4\pi/3}) - \pi\sqrt{3}/9$: Si anomenem $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$, a l'interior del conjunt, tenim $S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n}$. Calculem-ne la primitiva: sabem que

$$S'(z) = \frac{1}{1 - z^3} = \frac{A}{1 - z} + \frac{B}{e^{\frac{2\pi i}{3}} - z} + \frac{C}{e^{\frac{-2\pi i}{3}} - z}.$$

Sumant i igualant numeradors, obtenim

$$A(1 + z + z^2) + B(1 - z)(e^{\frac{-2\pi i}{3}} - z) + C(1 - z)(e^{\frac{2\pi i}{3}} - z) = 1.$$

Substituïnt $z = 1$ obtenim

$$3A = 1.$$

Substituïnt $z = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ obtenim

$$B(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}})(e^{\frac{4\pi i}{3}} - e^{\frac{2\pi i}{3}}) = 1,$$

és a dir

$$1 = Be^{\frac{4\pi i}{3}}(e^{\frac{4\pi i}{3}} - 1)(e^{\frac{2\pi i}{3}} - 1) = 3Be^{\frac{4\pi i}{3}},$$

i $3B = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Anàlogament $3C = e^{\frac{-2\pi i}{3}}$. Hem vist que

$$3S'(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{e^{\frac{2\pi i}{3}} - z} + \frac{e^{\frac{-2\pi i}{3}}}{e^{\frac{-2\pi i}{3}} - z}.$$

Per tant

$$3S(z) = -Log(1-z) - e^{\frac{2\pi i}{3}} \log(e^{\frac{2\pi i}{3}} - z) - e^{\frac{-2\pi i}{3}} \log(e^{\frac{-2\pi i}{3}} - z) + C.$$

Notem que la determinació del logaritme en els dos darrers casos es pot prendre qualsevol determinació a $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$, en particular podem agafar $\log(z) := \operatorname{Log}(-z) + \pi i$. Trobem doncs

$$3S(z) = -Log(1-z) - e^{\frac{2\pi i}{3}}(\operatorname{Log}(z - e^{\frac{2\pi i}{3}})) - e^{\frac{-2\pi i}{3}}(\operatorname{Log}(z - e^{\frac{-2\pi i}{3}})) + C.$$

Per tenir $S(0) = 0$, cal

$$0 = -Log(1) - e^{\frac{2\pi i}{3}}(\operatorname{Log}(e^{\frac{-\pi i}{3}})) - e^{\frac{-2\pi i}{3}}(\operatorname{Log}(e^{\frac{-\pi i}{3}})) + C = 0 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\frac{-\pi i}{3} - e^{\frac{-2\pi i}{3}}\frac{\pi i}{3} + C.$$

Obtenim

$$C = \frac{\pi i}{3}(e^{\frac{-2\pi i}{3}} - e^{\frac{2\pi i}{3}}) = \frac{\pi i}{3} 2i \operatorname{Im}(e^{\frac{-2\pi i}{3}}) = \frac{-\sqrt{3}\pi}{3}.$$

Per continuïtat, aquesta funció s'estén a tot el domini de convergència de S.

(d) $\operatorname{Log}(1+z)$:

Si anomenem $S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n$, aleshores $S(z) = -T(-z)$, on $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ és la sèrie estudiada a l'apartat (a). Així deduïm que S té suma $S(z) = -T(-z) = -(-\operatorname{Log}(1+z)) = \operatorname{Log}(1+z)$.

(e) $\frac{1}{5(1-\frac{z-i}{5})^2}$.

Estudiem la sèrie $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$. Definim $T(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{5^n}$. Aleshores T té el mateix radi de convergència que S, que és $R = 5$. A l'interior del disc tenim $T'(z) = S(z)$, i

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{5^n} = \frac{1}{1 - \frac{z-i}{5}} = \frac{5}{5+i-z}.$$

Per tant,

$$S(z) = T'(z) = \frac{5}{(5+i-z)^2}.$$

Solució de l'exercici 4.4.6

a) El radi de convergència és 1. En la circumferència unitat tenim una sèrie divergent quan $z = \pm 1$, ja que

$$S(\pm 1) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(\pm 1)^{2n-1}}{2n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{-1}{2n} = -\infty.$$

En canvi, si $z \neq \pm 1$, aleshores tenim que

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z^{2n-1}\right| = |z| \left|\frac{1-z^{2N}}{1-z^2}\right| \leqslant \frac{2|z|}{|1-z^2|}.$$

Tenim, pel criteri de Dirichlet, que $S(z)$ convergeix uniformement en qualsevol arc tancat de $\partial\mathbb{D}\backslash\{\pm 1\}$, ja que $\frac{1}{|1-z^2|}$ està uniformement acotat en aquests arcs. Pel teorema d'Abel, tenim doncs convergència uniforme en compactes de $\overline{D(0,1)}\backslash\{-1,1\}$;

b) Tal i com hem fet a l'exercici 3, podem justificar que $zS(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{2n}}{2n}$, amb radi de convergència $R = 1$. Aleshores, tenim en l'interior del disc

$$(zS(z))' = \sum_{n\geqslant 1} z^{2n-1} = \frac{z}{1-z^2}.$$

Per tant,

$$zS(z) = -\frac{\operatorname{Log}(1-z^2)}{2} + C,$$

és a dir

$$S(z) = -\frac{\operatorname{Log}(1-z^2) + C}{2z}.$$

Com que $S(0) = 0$ i $\operatorname{Log}(1-0^2) = 0$, inferim que cal $C = 0$ per garantir la continuïtat de S a l'origen. Per tant,

$$S(z) = -\frac{\operatorname{Log}(1-z^2)}{2z}.$$

c)

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n9^n} &= 2\sum_{n\geqslant 1} \frac{(i/3)^{2n}}{2n} = \frac{6}{i}\sum_{n\geqslant 1} \frac{(i/3)^{2n-1}}{2n} \\ &= -6iS(i/3) = 6i\frac{\operatorname{Log}(1-(i/3)^2)}{2(i/3)} = 9\operatorname{Log}(1+1/9) = 9\ln(10/9).\end{aligned}$$

Solució de l'exercici 4.4.7

a) Pel criteri del quocient, el radi de convergència és 1. A la frontera $\{|z| = 1\}$, tenim

$$S(z) = \sum_{n\geqslant 1} n(n+1)z^n$$

el terme general $|n(n+1)z^n| = n(n+1)$ no convergeix a zero i per tant, mai podrà ser convergent. Així, la sèrie convergeix absolutament a $\mathbb{D}$ i ho fa de manera uniforme als compactes continguts al disc, o el que és el mateix, convergeix absolutament en tot disc $D_r(0)$ amb $r < 1$.

b) Si prenem $T(z) = \sum_{k\geqslant 0} z^k = \frac{1}{1-z}$ per $z \in \mathbb{D}$, aleshores

$$\frac{2z}{(1-z)^3} = zT''(z) = z\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)z^{k-2} = \sum_{k\geqslant 2} k(k-1)z^{k-1} = \sum_{n\geqslant 1}(n+1)nz^n = S(z).$$

Tenim doncs que

$$S(z) = \frac{2z}{(1-z)^3}.$$

c) Trobem

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n} = S(-1/2) = \frac{-1}{(3/2)^3} = -8/27.$$

Solució de l'exercici 4.5.1

i) Són suma de funcions exponencials compostes amb funcions $\mathbb{C}$-lineals. Per tant són enteres. Vegem per exemple la derivada del sinus:

$$\sin'(z) = \frac{e^{iz}i - e^{-iz}(-i)}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos(z).$$

ii) $\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)}+e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} = \cos(z)$. El sinus es veu anàlogament.

iii)

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)^2}{-4} + \frac{\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^2}{4} = \frac{-e^{2iz}+2-e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4} = 1$$

iv) Raonant de la mateixa manera tenim

$$\cos z\cos w - \sin z\sin w = \frac{\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)}{4} - \frac{\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\left(e^{iw}-e^{-iw}\right)}{-4} = \cos(z+w)$$

i anàlogament pel sinus.

Solució de l'exercici 4.5.2

(a) $z = \pi/2 + 2k\pi \pm i\operatorname{arccosh} 4$, $k \in \mathbb{Z}$ (dos valors per cada k); vegeu l'apartat d) de l'exercici 2.3.4.

(b) $z = \pi/2 + 2k\pi - i\operatorname{arcsinh} 1$; $z = 3\pi/2 + 2k\pi + i\operatorname{arcsinh} 1$.

Solució de l'exercici 4.5.3

a) Es conseqüència directe del fet que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

b) Vegeu l'apartat d) de l'exercici 2.3.4. Per fer $\cos z = 0$, posem $w = e^{iz}$, resolem l'equació de segon grau que obtenim i resulta $w = \pm i = e^{\pm i\pi/2}$. Per tant, $z = \pm\pi/2 + 2k\pi - i\ln(1) = \pi/2 + k\pi$. De la mateixa manera, pel sinus obtenim $\sin z = 0 \iff z = k\pi$.

c) Expressem $z_1 = \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1-z_2}{2}$ i $z_2 = \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_2-z_1}{2}$. Aleshores, per l'exercici 4.5.2, tenim

$$\begin{aligned}\cos(z_1) &= \cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cos\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right) + \sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)\end{aligned}$$

i anàlogament,

$$\cos(z_2) = \cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)$$

Restant, tenim

$$\cos(z_1) - \cos(z_2) = 2\sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right) = 0 \iff \frac{z_1 \pm z_2}{2} = k\pi$$

Per tant, el sinus és $2k\pi$ periòdica en $\mathbb{C}$ i té simetria central respecte a $\pi/2 + k\pi$. El cosinus funciona de manera similar, i resulta ser també $2k\pi$ periòdica en $\mathbb{C}$ amb simetria central en $k\pi$ (vegeu la figura 4.1).

d) Es tracta d'un mer càlcul usant els resultats de 1.3.2 que deixem al lector.

Solució de l'exercici 4.5.4

a) Si $w = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})} = \frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}$. Aleshores, aïllant e^{2iz} trobem

$$e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw} = \frac{i-w}{i+w},$$

és a dir que

$$2iz = \log\left(\frac{i-w}{i+w}\right).$$

Per tant, podem definim la funció multivaluada

$$\arctan w := \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-w}{i+w}\right).$$

També es pot resoldre tenint en compte que $\tan(z) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$, on $f_1(z) = 2iz$ és una funció $\mathbb{C}$-lineal bijectiva, $f_2(\xi) = e^{\xi}$ és una funció $2\pi i$-periòdica i que pren imatge a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, de manera bijectiva en franges horitzontals semiobertes d'amplada 2π , i $f_3(\zeta) = -i\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$. D'aquí també recuperem l'expressió de l'arctangent, però a més a més podem argumentar per què $\pm i \notin \tan(\mathbb{C})$:

Notem que $f_3(\zeta) = w$ equival a $\zeta = \frac{i-w}{i+w} = f_3^{-1}(w)$, i que si $w = -i$ no existeix ζ tal que $f_3(\zeta) = -i$, ja que $\zeta - 1 \neq \zeta + 1$. Finalment, si $w = +i$, aleshores necessàriament tenim $\zeta = 0 \notin f_2(\mathbb{C}) = f_2 \circ f_1(\mathbb{C})$. En particular, $f_3 : \mathbb{C}\backslash\{0, -1\} \to \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$ és bijectiva, i

$$\tan z = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) = \pm i$$

no pot tenir solucions.

b) Si h_j són determinacions de l'arctangent amb $j \in \{1, 2\}$, volem veure que $h_1(w) - h_2(w) = k\pi$. Notem que $f_3 : \mathbb{C}\backslash\{0, -1\} \to \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$ és bijectiva, tal i com hem vist abans. Per tant,

$$\tan(h_1(w)) = \tan(h_2(w)) \iff f_2 \circ f_1(h_1(w)) = f_2 \circ f_1(h_2(w)) \iff e^{2ih_1(w)} = e^{2ih_2(w)}$$

Per acabar, usem la proposició 1.44: cal que

$$h_1(w) = h_2(w) + k\pi.$$

c) Suposem que $\tan(h(w)) = w$ per tot $w \in A_\pm = \{r < |w \pm i| < R\}$ amb $r < R$ i $2 < r$ o bé $R < 2$. Aleshores, com que f_3 és bijectiva en la preimatge de l'anell, trobem que per cada w existeix un únic ζ amb $f_3(\zeta) = w$ i per tant,

$$e^{f_1(h(f_3(\zeta)))} = f_2(f_1(h(f_3(\zeta)))) = f_3^{-1}(\tan(h(w))) = \zeta.$$

Per tant, $f_1 \circ h \circ f_3$ és una determinació contínua del logaritme en $f_3^{-1}(A)$. Notem que en l'eix imaginari tenim

$$f_3^{-1}(iy) = \frac{i - iy}{i + iy} = \frac{1 - y}{1 + y}.$$

Per tant, $f_3^{-1}(i(-1, 1)) = \mathbb{R}_+$, mentre que $f_3^{-1}(i\,[(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)]) = \mathbb{R}_-$.

Quan $r > 2$ tenim

$$A \cap i\mathbb{R} \subset i\,[(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)]$$

i per tant, $f_3^{-1}(A_\pm) \cap \mathbb{R}_+ = \varnothing$. En canvi, si $R < 2$, aleshores A_- talla $i(-1, 1)$ i també $i(-\infty, -1)$, i A_+ talla $i(-1, 1)$ i també $i(1, +\infty)$. Per tant, hi ha una corba en A que té per preimatge una corba que rodeja l'origen, on no hi pot haver una determinació de l'argument i, per tant, no n'hi pot haver del logaritme. Així, hem arribat a una contradicció i h no pot existir.

Solució de l'exercici 4.5.5

Vegeu el darrer apartat de l'exercici anterior:

$$f_3^{-1}\left(\mathbb{C}\backslash\{iy : |y| \geqslant 1\}\right) = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0],$$

i aquesta regió és precisament l'obert maximal on tenim definida la branca contínua del logaritme principal.

Solució de l'exercici 4.5.6

El primer apartat és molt similar a l'exercici 2.3.6, ara trobem $k = 2$. Per tant, $\mathcal{L}(z) = \mathrm{Log}\,(z) + 4\pi i$, i trobem $f(z) := -\mathrm{Log}\,(2-2z) - 4\pi i$. Per tant $f(0) = -\ln(2) - 4\pi i$ i $f(-i) = -\mathrm{Log}\,(2+2i) - 4\pi i = -\ln(2\sqrt{2}) - i\frac{17\pi}{4}$.

Pel segon apartat,

$$S(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n(z-1/2)^n}{n}.$$

és una sèrie centrada en el punt $1/2$ i amb radi de convergència $1/2$. Notem que

$$S'(z) = \sum_{n\geqslant 1} 2(2z-1)^{n-1} = 2\sum_{n\geqslant 0}(2z-1)^n = \frac{2}{1-(2z-1)} = \frac{2}{2-2z}$$

. Per tant, en el disc de convergència trobem

$$S(z) = C - \mathrm{Log}\,(2-2z).$$

Per expressar S com a funció contínua, ens cal observar que el centre del disc és $1/2$ i el radi de convergència és també $R = 1/2$. Així, $2-2z = 1+2(1/2-z)$ té part real positiva:

$$\mathrm{Re}\,(2-2z) = 1 + 2\mathrm{Re}\,(1/2-z) \geqslant 1 - 2|1/2-z| \geqslant 1 - 2\cdot 1/2 = 0.$$

Per tant, té sentit prendre la branca principal del logaritme, ja que hi és contínua. Per determinar la constant, notem que

$$S(1/2) = 0$$

i

$$\mathrm{Log}\,(2-2(1/2)) = \mathrm{Log}\,(1) = 0.$$

Trobem $C = 0$ i

$$S(z) = -\mathrm{Log}\,(2-2z),$$

tal i com volíem veure.

Del primer apartat sabem que $\mathcal{L} = \mathrm{Log}\, + 4\pi i$. Tenim doncs

$$f(z) = S(z) - 4\pi i.$$

Solució de l'exercici 4.5.7

1. Observem que $3z+2 \in \mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ si i només si $z \in \mathbb{C}\backslash[-2/3,\infty)$. Per tant, el domini de f és $\mathbb{C}\backslash[-2/3,\infty)$.

Per a determinar la imatge, observem que donat que $\sqrt{-1} = i$, s' ha de complir que $i = e^{\frac{1}{2}((2k+1)\pi i)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Per tant, cal que k sigui un múltiple de 2 i podem triar $\arg z$ que sigui la determinació de l'argument en $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ complint que $\arg z \in (0,2\pi)$ (observeu que si triem una altre determinació de la forma $\arg z + 4\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, llavors les corresponents arrels quadrades coincideixen).

2. El domini ja l'hem comentat. Com que $\arg z \in (0,2\pi)$, $\frac{1}{2}\arg z \in (0,\pi)$ i per tant la imatge de f és el semipla superior. En particular, no hi ha cap z tal que $f(z) = -i$.

3. $f(\frac{i-2}{3}) = \sqrt{i-2+2} = \sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Solució de l'exercici 4.5.8

Anomenem $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Escrivim $z = 1+w$ i desenvoluparem la funció $g(w) = \sqrt[3]{1+w} = (1+w)^{1/3}$ en $a = 0$, que serà vàlida per $|w| < 1$.

Aleshores

$$g(w) = g(0) + \frac{g'(0)}{w} + \frac{g''(0)}{2}w^2 + \cdots .$$

Utilitzant la determinació que ens indiquen, tenim que

$$\begin{aligned}
g(0) &= (1+0)^{1/3} = \sqrt[3]{1} = \zeta;\\
g'(w) &= \frac{1}{3}(1+w)^{-2/3}; \quad g'(0) = \frac{1}{3}(1)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\zeta;\\
g''(w) &= \frac{-2}{3^2}(1+w)^{-5/3} \quad g''(0) = \frac{-2}{3^2}(\sqrt[3]{1})^{\frac{1}{3}-2} = \frac{-2}{3^2}\zeta;\\
&\ \ \dots\\
g^{(n)}(w) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n\right)(1+w)^{\frac{1}{3}-n};\\
g^{(n)}(0) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n\right)(1)^{\frac{1}{3}}(1)^{-n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n\right)\zeta.
\end{aligned}$$

En conseqüència

$$g(w) = \zeta + \sum_{n\geqslant 1}\binom{\frac{1}{3}}{n}\zeta w^n,$$

on definim

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n|}.$$

Desfent el canvi

$$f(z) = \zeta\left(1 + \sum_{n\geqslant 1}\binom{\frac{1}{3}}{n}(z-1)^n\right), \quad \text{per } |z-1| < 1.$$

Observem que $f(z) = \zeta(\tilde{f}(z))$ on $\tilde{f}(z)$ és la determinació de l'arrel cúbica tal que $\tilde{f}(1) = 1$.

Solució de l'exercici 4.5.9

$$\begin{aligned}
(1-2\zeta z+z^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}z^n(z-2\zeta)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}z^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^{n-k}z^k\zeta^{n-k} =\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n}(-2)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{-1/2}{n}z^{n+k}\zeta^{n-k} = \sum_{j=0}^{\infty}P_j(\zeta)z^j.
\end{aligned}$$

Si $n+k = j$ amb $k \leqslant n$, el valor més gran de $n-k$ és j que s'assoleix quan $n = j$ i $k = 0$ llavors $P_j(\zeta)$ pot tenir grau com a molt j. De fet

$$P_j(\zeta) = (-2)^j\binom{-1/2}{j}\zeta^j + \cdots .$$

Els polinomis que es demanen són

$$1, \quad \zeta, \quad \frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{2}\zeta^3 - \frac{3}{2}\zeta.$$

Els polinomis de Legendre es fan servir en moltes disciplines, en particular en l'estudi de xarxes neuronals.

Solució de l'exercici 5.1.1

Parametritzem $z(t) = a\cos t + ib\sin t$ amb $t \in [0, 2\pi]$. Llavors $z'(t) \neq 0$.

Solució de l'exercici 5.1.2

En general si volem $z : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ tal que $z(a) = p$ i $z(b) = q$ fem

$$z(t) = \frac{1}{b-a}((b-t)p + (t-a)q)).$$

En el nostre cas fem que el paràmetre variï als intervals $[0, 1), [1, 2), [2, 3), [3, 4)$. La longitud és clarament 8.

Solució de l'exercici 5.2.1

Parametritzant $z = \gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ tenim $|z| = 1$, $dz = ie^{it}dt$, $|dz| = dt$, i per tant

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^m} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{imt}}\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{i(1-m)t}dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 1 \\ 2\pi i & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{z^m} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{imt}} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{|z^m|} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{1}\,dt = 0,$$

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{|z^m|} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1} = 2\pi.$$

Solució de l'exercici 5.2.2

Llavors si $n \geqslant 0$, $\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ és una primitiva holomorfa a $\mathbb{C}$. Per tant, $\displaystyle\int_\gamma z^n\,dz = 0$.

Si $n < -1$, $\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ és una primitiva holomorfa a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Per tant, $\displaystyle\int_\gamma z^n\,dz = 0$.

Finalment, si $n = -1$, parametritzem γ com $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in 0, 2\pi]$. Obtenim

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt = 2\pi i.$$

Solució de l'exercici 5.2.3

(a) $(\cos(2+2i) - \cos(2i))/2$; (b) 0; (c) 0.

Es poden obtenir totes mitjançant el teorema fonamental del càlcul. Per exemple, la primitiva de $\sin(2z)$ és $-\cos(2z)/2$, així que

$$\int_\gamma \sin(2z)\,dz = [-\cos(2z)/2]_{i+1}^{-i} = -\cos(-2i)/2 + \cos(2(i+1))/2.$$

Alternativa: també podem usar la definició d'integral de línia: $\gamma(t) = (1-t)(1+i)+t(-i)$, $\gamma'(t) = -1-2i$. Així

$$\int_\gamma \sin(2z)\,dz = \int_0^1 \sin(2[(1-t)(1+i)+t(-i)])(-1-2i)\,dt.$$

Usant la regla de la cadena complexa, veiem que $-\cos(2[(1-t)(1+i)+t(-i)])/2$ és la primitiva de l'integrand, així que podem fer servir el teorema fonamental del càlcul en variable real per acabar el càlcul

$$\int_\gamma \sin(2z)\,dz = [-\cos(2[(1-t)(1+i)+t(-i)])/2]_0^1 = -\cos(-2i)/2 + \cos(2(i+1))/2.$$

Solució de l'exercici 5.2.4

a) $1/(z-i)^2$ i $(z-i)^2$ tenen antiderivada en un entorn obert de C llavors les integrals corresponent són zero, en canvi $1/(z-i)$ no i cal integrar amb una parametrització. Posem $z = i + 4e^{it}$ amb $t \in [0, 2\pi)$. Finalment la integral val $4\pi i$.

b) La funció no és holomorfa, no te antiderivada, cal substituir. Val $13/10 + i/6$.

c) Sobre la corba la integral és la de $(1-z)$ fem la primitiva i obtenim $-2i$.

d) No satisfà les equacions de C-R, no pot ser holomorfa i per tant tampoc analítica. Considerem $z = \cos t + i \sin t$, substituïm $x = \cos t, y = \sin t$ calculem i obtenim $-\pi i$.

Solució de l'exercici 5.2.5

a) Pel costat on $x > 0$ no tenim problema ja que $1/z$ te per primitiva la branca principal del logaritme, llavors la integral val $[\mathrm{Log}(z)]_{-3i}^{3i} = \mathrm{Log}(3i) - \mathrm{Log}(-3i) = \pi i/2 - (-\pi i/2) = \pi i$. Per l'altra banda cal fer la integral directament o jugar amb el teorema integral de Cauchy. Sigui C la circumferència de radi 3 centrada en el origen recorreguda en sentit antihorari tenim que $\int_C 1/z = 2\pi i$. Si γ_1 és un camí de $-3i$ a $3i$ pel costat dret i γ_2 pel costat esquerre amb $C = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ llavors $2\pi i = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} + \pi i$. Llavors la integral de $-3i$ a $3i$ pel costat esquerre és $-\pi i$. No hi ha independència del camí.

b) La funció és entera, una primitiva és $\frac{1}{2}(\cos(z) + \sin(z))e^z$, llavors la integral val $-\frac{1}{2}e^\pi - \frac{1}{2}\cosh(1)\,e^i - \frac{1}{2}i\,e^i \sinh(1)$ (encara podem simplificar més).

c) El camí està en el domini de la branca principal de l'arrel quadrada. Tenim primitiva. La integral val

$$2/3(e^{\frac{3}{2}\mathrm{Log}\,\pi} - e^{\frac{3}{2}\mathrm{Log}\,i}) = 2/3(\pi^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3}{2}i\mathrm{Arg}\,i}) = 2/3(\pi^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3\pi}{4}i}) = 2/3(\pi^{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}(-1+i)).$$

Solució de l'exercici 5.2.6

Observem que les expressions

$$\sqrt{z^2-1} = e^{\frac{1}{2}(\log(z-1)+\log(z+1))},$$

on $\log w$ és alguna determinació del logaritme, són arrels de z^2-1 en alguna regió del pla. Si triem el logaritme principal tenim directament que

$$\sqrt{z^2-1} = e^{\frac{1}{2}(\mathrm{Log}\,(z-1)+\mathrm{Log}\,(z+1))}$$

és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash(-\infty,1]$ i positiva a $(1,+\infty)$.

Comprovem en primer lloc que efectivament aquesta és la funció de la que ens parla l'enunciat.

Mètode 1: Si ens hi fixem, veiem que també ho és als punts reals $x<-1$. Escrivint $\mathrm{Log}\,w = \ln|w| + i\mathrm{Arg}\,w$ veiem que per a comprovar això només cal veure que

$$F(z) := e^{\frac{i}{2}(\mathrm{Arg}\,(z-1)+\mathrm{Arg}\,(z+1))}$$

és contínua a aquests punts $x<-1$. Si ens acostem a x pel semipla de dalt tenim

$$F(x+i0^+) = e^{\frac{i}{2}(\pi+\pi)} = e^{i\pi} = -1,$$

i si ens hi acostem pel semipla de baix tnim anàlogament

$$F(x+i0^-) = e^{\frac{i}{2}(-\pi-\pi)} = e^{-i\pi} = -1.$$

Per tant hi ha continuïtat de F aquests punts. Un cop hem vist que la funció és contínua, l'holomorfia de l'arrel $\sqrt{z^2-1}$ definida a dalt a tot $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ se segueix: per $z_0\in\mathbb{C}\backslash[-1,1]$, podem trobar $\delta>0$ tal que si $z\in B(z_0,\delta)$, aleshores $|z^2-z_0^2|<|z_0^2-1|$ per continuïtat i, en particular, $0\neq z^2-1$. Així, com que $F(z)$ té només dues alternatives que són nombres complexos oposats, l'elecció està unívocament determinada quan $z\in B(z_0,\delta)$ i, donada una determinació del logaritme log a $B(z_0^2-1,|z_0^2-1|)$, F ha de coincidir amb $e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$ o bé amb el seu oposat, és a dir, $F(z) = e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$. En qualsevol cas, la seva derivada és $F'(z) = \pm e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}\frac{z}{z^2-1} = \frac{zF(z)}{F(z)^2} = \frac{z}{F(z)}$.

Mètode 2: Prenent una determinació del logaritme a $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$, tenim que per $z\notin[-1,\infty)$ la funció

$$e^{\frac{1}{2}(\log(z-1)+\log(z+1))}$$

està ben definida i, si $z\notin\mathbb{R}$ tenim $\log(z-1) = \mathrm{Log}\,(z-1)+2k\pi i$ i $\log(z+1) = \mathrm{Log}\,(z+1)+2k\pi i$, amb k constant en els semiplans de part imaginària positiva i negativa. Aleshores tenim

$$e^{\frac{1}{2}(\log(z-1)+\log(z+1))} = e^{\frac{1}{2}(\mathrm{Log}\,(z-1)+\mathrm{Log}\,(z+1))+2k\pi i} = F(z).$$

Però aquesta segona definició és contínua i holomorfa a $z\notin[-1,\infty)$, mentre que la definició amb logaritmes principals és contínua i holomorfa a $z\notin(\infty,1]$. Així doncs F és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$. A més

$$F'(z) = e^{\frac{1}{2}(\log(z-1)+\log(z+1))}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}\right) = F(z)\frac{z}{F(z)^2} = \frac{z}{F(z)},$$

i el mateix podem fer amb els logaritmes principals de manera que la derivada de F és $\frac{z}{F(z)}$ a tot arreu on la tenim definida.

(a) Mirem per a quins punts $z \in \mathbb{C}$ tenim $z + \sqrt{z^2 - 1} \in (-\infty, 0]$, i veurem que cap d'aquests punts no és a Ω. L'equació

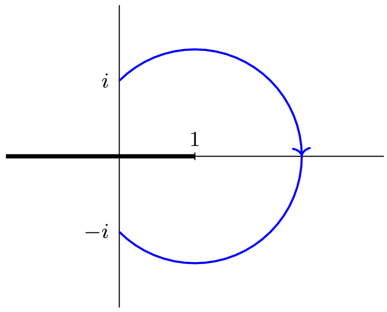
$$z + \sqrt{z^2 - 1} = -x, \quad x > 0,$$

dóna per solució $z = -\dfrac{1+x^2}{2x}$. Observem que tots aquests punts són reals negatius, i per tant queden fora de Ω.

(b) Ara sabem que aquesta funció és holomorfa, ja que és composició de funcions holomorfes (tant l'arrel com el logaritme són holomorfs allà on no tenen discontinuïtats). Per tant, per la regla de la cadena,

$$\left(\operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})\right)' = \frac{1}{z + F(z)}(1 + F'(z)) = \frac{1}{z + F(z)}\left(1 + \frac{z}{F(z)}\right) = \frac{1}{F(z)}.$$

(c) L'arc d'integració (en blau) és dins del domini on la primitiva de la funció a integrar és holomorfa.



Utilitzant el Teorema Fonamental de les integrals de línia, i dient $G(z) = \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ tenim:

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = G(-i) - G(i) = \operatorname{Log}(-i + \sqrt{(-i)^2 - 1}) - \operatorname{Log}(i + \sqrt{i^2 - 1}).$$

Notem que la notació $\sqrt{(-i)^2 - 1}$ es refereix a una funció avaluada en $z = -i$, que no coincideix en principi (de fet, no coincideix) amb $\sqrt{i^2 - 1}$! En realitat, per ser rigorosos, hauríem de parlar de $F(i)$ i $F(-i)$. Aquí

$$\begin{aligned}\sqrt{i^2 - 1} &= e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log}(i-1) + \operatorname{Log}(i+1))} = e^{\frac{1}{2}(\ln\sqrt{2} + i\operatorname{Arg}(i-1)) + \ln\sqrt{2} + i\operatorname{Arg}(i-1))} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\ln 2 + i\frac{3\pi}{4} + i\frac{\pi}{4})} = i\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Anàlogament, es comprova que,

$$\sqrt{(-i)^2 - 1} = -i\sqrt{2}.$$

Llavors

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \operatorname{Log}(-i - i\sqrt{2}) - \operatorname{Log}(i + i\sqrt{2}).$$

Tenim

$$\mathrm{Log}\,(-i-i\sqrt{2})=\ln|-i-i\sqrt{2}|+i\mathrm{Arg}\,(-i-i\sqrt{2})=\ln(1+\sqrt{2})-i\frac{\pi}{2},$$

i anàlogament

$$\mathrm{Log}\,(i+i\sqrt{2})=\ln(1+\sqrt{2})+i\frac{\pi}{2}.$$

Finalment

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=\ln(\sqrt{2}-1)-i\frac{\pi}{2}-\ln(\sqrt{2}-1)-i\frac{\pi}{2}=-i\pi.$$

Solució de l'exercici 5.2.7

Afitem com a exemple la integral

$$\left|\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^2}\,dz\right|\leqslant\int_{|z|=1}\left|\frac{\sin z}{z^2}\right|\,|dz|\leqslant ML(\gamma)=2\pi M$$

on γ és la circumferència unitat i

$$M=\max_{|z|=1}\frac{|\sin z|}{|z|^2}=\max_{|z|=1}|\sin(z)|.$$

Sabem que si $z=x+iy$ aleshores

$$|sin(z)|^2=\sin^2(x)+\sinh^2(y).$$

El primer terme té 1 com a valor màxim, mentre que el segon terme és una funció creixent per $y\geqslant 0$ i parell. Donat que $|z|=1$ tenim que $y\leqslant 1$ i per tant

$$|\sin(z)|=\sqrt{\sin^2(x)+\sinh^2 y}\leqslant\sqrt{1+\sinh^2 1}=\sqrt{(2+e+e^{-1})/2}\leqslant\sqrt{e},$$

ja que $e^{-1}<0.5$ i $2.5<e$. Concloem doncs que $M\leqslant e$ i per tant l'afitació queda provada.

Solució de l'exercici 5.2.8

Escrivim $f=u+iv$ i $\gamma=r+is$ per les parts reals i imaginàries. Aleshores tenim $\overline{\gamma}=r-is$, i

$$\begin{aligned}\overline{\int_\gamma f(z)\,dz}&=\int_a^b\overline{f\circ\gamma(t)\gamma'(t)}\,dt=\int_a^b(u(\gamma(t))-iv(\gamma(t)))(r'(t)-is'(t))\,dt\\&=\int_a^b(u(\overline{\gamma(t)})-iv(\overline{\gamma(t)}))(\overline{\gamma}'(t))\,dt=\int_{\overline{\gamma}}\overline{f(\overline{z})}\,dz.\end{aligned}$$

Per l'apartat b), si considerem $\gamma = e^{it}$ la circumferència unitat resseguida en sentit antihorari, aleshores $\overline{\gamma} = e^{-it}$ és el mateix camí resseguit en sentit horari, i

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})}\,(-ie^{-it})\,dt$$

és a dir que

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = -\int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})}\,(ie^{it})\,\frac{dt}{e^{2it}} = -\int_\gamma \overline{f(z)}\,\frac{dz}{z^2}.$$

Solució de l'exercici 5.3.1

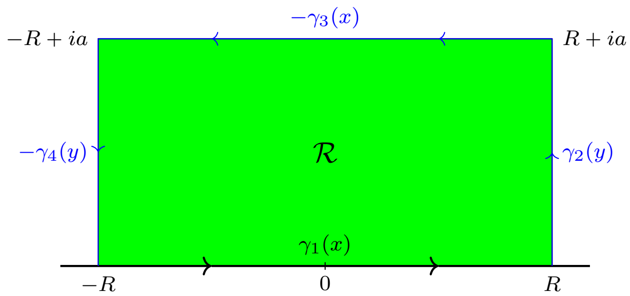
(a) Considerem la funció entera $f(z) = e^{-z^2}$ i apliquem el teorema de Cauchy a la vora del rectangle $\mathcal{R}$ que donen a la indicació:

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)\,dz = 0.$$

Parametritzem cadascun dels quatre costats del rectangle:

1) $\gamma_1(x) = x$, amb $x \in [-R, R]$. Aquí $dz = dx$.
2) $\gamma_2(y) = R + iy$, amb $y \in [0, a]$. Aquí $dz = i\,dy$.
3) $\gamma_3(x) = x + ia$, amb $x \in [-R, R]$. Ara $dz = dx$.
4) $\gamma_4(y) = -R + iy$, amb $y \in [0, a]$. Aquí $dz = i\,dy$.

Amb aquestes parametritzacions tenim, tenint en compte l'orientació, $\partial\mathcal{R} = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$.



Aleshores

$$0 = \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx + \int_0^a e^{-(R+iy)^2} i\,dy - \int_{-R}^{R} e^{-(x+ia)^2} dx - \int_0^a e^{-(-R+iy)^2} i\,dy$$

Observem que les dues integrals en y, corresponents als costats del rectangle, tendeixen a 0 quan R tendeix a $+\infty$: $(\pm R + iy)^2 = R^2 - y^2 \pm 2iyR$, de manera que

$$\left|e^{-(\pm R+iy)^2}\right| = e^{-R^2+y^2} \leqslant e^{-R^2} e^{a^2}.$$

Aleshores

$$\left|\int_0^a e^{-(\pm R+iy)^2} i\,dy\right| \leqslant \int_0^a e^{-R^2} e^{a^2} dy = a e^{a^2} e^{-R^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Per tant, passant al límit la igualtat anterior obtenim

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx,$$

i per tant

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx.$$

(b) Utilitzem l'apartat anterior, reescalant x per a tenir $x^2/2$. És a dir, fem primer el canvi $x = t/\sqrt{2}$; $dt = \sqrt{2}\, dx$. Aleshores, de l'apartat (a) en tenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{t}{\sqrt{2}}+ia)^2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Prenem ara $a = n/\sqrt{2}$, amb $n \geqslant 1$ (per a tenir $a > 0$). Llavors

$$(\frac{t}{\sqrt{2}} + ia)^2 = (\frac{t}{\sqrt{2}} + i\frac{n}{\sqrt{2}})^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{n^2}{2} + i\,tn$$

i per tant

$$e^{n^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-itn}\, dt = \sqrt{2\pi}.$$

Prenent les parts reals d'aquesta igualtat obtenim el resultat demanat, per a $n \geqslant 1$. Per a $n \leqslant -1$, observem que $\cos(nx) = \cos(-nx)$, i per tant el valor de la integral que obtenim per a aquest n és el mateix que prenent $-n = |n|$. Per a $n = 0$ el resultat és la indicació que ens donen a l'apartat (a).

Solució de l'exercici 5.3.2

a) És holomorfa allà on el denominador és diferents de zero, és a dir a $\mathbb{C}$ excepte $z = 3 \pm i$. El circuit d'integració no envolta la singularitat llavors pel Teorema de Cauchy la integral és zero.

b) El domini d'holomorfia de la funció és $D = \mathbb{C} \backslash \{x \leqslant -3, y = 0\}$ llavors $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 2\} \subset D$ i la integral és zero pel Teorema de Cauchy.

Solució de l'exercici 5.4.1

(a) Com que $1 \in D(0, 2)$, la fórmula de Cauchy per a $f(z) = z^2$ dóna

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz = 2\pi i\, 1^2 = 2\pi i.$$

(b) Essent $0 \in D(0, 1)$, podem aplicar la fórmula de Cauchy a $f(z) = \sin(e^z)$:

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(e^z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \sin 1.$$

(c) Descomponem en fraccions simples

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1}$$

tenim

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z+1} = \pi i - \pi i = 0.$$

Observem que

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i\, n(\gamma, 1),$$

on γ és la circumferència de radi 2. Anàlogament, l'altra integral dóna $2\pi i\, n(\gamma, 1)$. És clar, tal i com acabem de veure, que la diferència d'índexs és 0.

(d) Les arrels de $z^2+z+1=0$ són $\alpha = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ i $\beta = \bar{\alpha}$, totes dues dins el disc $D(0,2)$. Escrivint

$$\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{\beta-\alpha}(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta})$$

tenim

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+z+1} &= \frac{1}{\beta-\alpha}(\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-\alpha} - \int_{|z|=2} \frac{dz}{z-\beta}) \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha}(2\pi i - 2\pi i) = 0.\end{aligned}$$

Observem que, llevat del factor $2\pi i$, aquesta integral equival a la diferència de dos índexs de punts de l'interior del disc $D(0,2)$, i per tant val 0.

(e) Tenim $z^2+2z-3 = (z-1)(z+3)$. L'arrel 1 és dins $D(0,2)$, però l'arrel -3 és fora, de manera que la funció $1/(z+3)$ és holomorfa en aquest disc. Aplicant la fórmula de Cauchy a aquesta funció tenim:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2z-3} = \int_{|z|=2} \frac{1/(z+3)}{z-1}\, dz = 2\pi i \frac{1}{1+3} = i\frac{\pi}{2}.$$

g) Descomponem en fraccions simples

$$\frac{3z-2}{z^2-z} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z}.$$

Llavors tenim que

$$\int_{|z|=3} \frac{3z-2}{z^2-z} dz = \int_{|z|=3} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z}\right) dz = \int_{|z|=3} \frac{1}{z-1} dz + \int_{|z|=3} \frac{2}{z} dz = 6\pi i.$$

h)

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1} dz = \int_{|z+1|=1} \left(-\frac{1}{2\,(z+1)} + \frac{1}{2\,(z-1)}\right) dz = 2\pi i(-1/2) + 0 = -\pi i.$$

Solució de l'exercici 5.4.2

Convé expressar el polinomi com a producte de monomis. Tenim $p(z) = C\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)$. Aleshores calculant la derivada del producte tenim

$$p'(z) = C\sum_{k=1}^{n}\prod_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus k}(z-\alpha_i),$$

i obtenim

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-\alpha_k}.$$

Aplicant la fórmula integral de Cauchy a cada sumand obtenim el resultat demanat:

$$\int_{|z|=R}\frac{p'(z)}{p(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{|z|=R}\frac{1}{z-\alpha_k}\,dz = \sum_{k=1}^{n}2\pi i = 2\pi i n.$$

Solució de l'exercici 5.4.3

Aplicant la fórmula integral de Cauchy tenim

$$\int_{|z|=1}\left(\frac{2}{z-a}-\frac{1}{z}\right)dz = \int_{|z|=1}\frac{2\,dz}{z-a} - \int_{|z|=1}\frac{dz}{z} = 2(2\pi i) - 2\pi i = 2\pi i.$$

Per altra part, sumant dins la integral i parametritzant $z = e^{it}$, tenim

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\left(\frac{2}{z-a}-\frac{1}{z}\right)dz &= \int_{|z|=1}\frac{z+a}{z(z-a)}\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+a}{e^{it}(e^{it}-a)}\,ie^{it}\,dt\\ &= i\int_0^{2\pi}\frac{1-|a|^2+ae^{-it}-\bar{a}e^{it}}{|e^{it}-a|^2}\,dt\end{aligned}$$

Observem que $ae^{-it}-\bar{a}e^{it} = 2i\mathrm{Im}\,(ae^{-it})$. Per tant, prenent les parts imaginàries a la igualtat anterior i utilitzant la igualtat que hem vist al principi obtenim,

$$2\pi = \int_0^{2\pi}\frac{1-|a|^2}{|e^{it}-a|^2}\,dt.$$

Escrivint $a = re^{i\theta}$, $r < 1$, obtenim el resultat, ja que

$$|e^{it}-a|^2 = 1+|a|^2-ae^{-it}-\bar{a}e^{it} = 1+|a|^2-2\mathrm{Re}\,(ae^{-it}).$$

Solució de l'exercici 5.4.4

Separem dos casos:
(i) $|a| < 1$. Per la fórmula de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{f(w)}{w-a}\,dw = f(a).$$

Per altra part, com que $1/|a| > 1$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{ag(w)}{aw-1}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{g(w)}{w-1/a}\,dw = 0.$$

(ii) $|a| > 1$. Aquí els papers d'a i $1/a$ es giren; com que $1/a \in \mathbb{D}$,:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(w)}{w-a}\,dw = 0$$

i

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{ag(w)}{aw-1}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{g(w)}{w-1/a}\,dw = g(\frac{1}{a}).$$

Tot plegat

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{ag(w)}{aw-1}\right)dw = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in \mathbb{D} \\ -g(1/a) & \text{si } a \notin \mathbb{D}. \end{cases}$$

Solució de l'exercici 5.4.5

a)

$$\frac{z^2}{z^4-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right).$$

Obtenim

$$\oint_{|z=3|} \frac{z^2}{z^4-1}dz = \frac{1}{4}\left(\oint_{|z=3|} \frac{i\,dz}{z-i} - \oint_{|z=3|} \frac{i\,dz}{z+i} + \oint_{|z=3|} \frac{dz}{z-1} - \oint_{|z=3|} \frac{dz}{z+1}\right) = 0.$$

b) Si C no envolta el 0 és cert. Si C envolta el zero la integral val $2\pi i e^0 = 2\pi i$.

Solució de l'exercici 5.4.6

Observem que si $|z_0| < R$ i $f = \phi + i\psi$ holomorfa, llavors la funció

$$g(z) = \frac{f(z)\overline{z_0}}{R^2 - \overline{z_0}z}$$

és holomorfa a $\overline{D_R}$ (el denominador no es por anul·lar). Aleshores, pel teorema de Cauchy i per la formula integral de Cauchy tenim

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\left(g(z) + \frac{f(z)}{z-z_0}\right)dz.$$

Simplificant arribem a

$$f(z_0) = \frac{R^2 - |z_0|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{|Re^{it} - z_0|^2}dt.$$

Posant $f = \phi + i\psi$ i $z_0 = re^{i\theta}$ arribem al resultat.

Solució de l'exercici 5.5.1

(a) Si $f(z) = 1/z$, aleshores si $n \geqslant 1$ tenim $f^{(n)}(z) = \frac{n!(-1)^n}{z^{n+1}}$, com podem veure per inducció sobre n. Aleshores $f^{(n)}(1) = n!(-1)^n$ per $n \geqslant 0$, i obtenim

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n(z-1)^n.$$

El radi de convergència és $R = 1$ pel criteri del quocient.

(b) Si $f(z) = z^2e^z$, aleshores $f'(z) = (z^2+2z)e^z$, i si $n \geqslant 2$ tenim $f^{(n)}(z) = (z^2 + 2nz + n(n-1))e^z$, com podem veure per inducció sobre n. Aleshores $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ i $f^{(n)}(0) = n(n-1)$ per $n \geqslant 2$, i obtenim

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-2)!}z^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}z^{n+2}.$$

El radi de convergència és infinit pel criteri del quocient.

Aquesta sèrie també es pot calcular directament sabent que $e^z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$.

(c) Ara tenim $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$. Per tant,

$$f^{(n)}(z) = n!(-1)^n\left(\frac{1}{(z-2)^{n+1}} - \frac{1}{(z-1)^{n+1}}\right),$$

i se segueix que

$$f^{(n)}(0) = n!\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}.$$

Així obtenim que

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2^{n+1}-1)z^n}{2^{n+1}},$$

i $R = 1$.

(d) Ara tenim $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$. Per tant,

$$f^{(n)}(z) = \frac{(n+2)!}{2}\frac{1}{(1-z)^{n+3}},$$

i se segueix que

$$f^{(n)}(0) = \frac{(n+2)!}{2}.$$

Així obtenim que

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)(n+2)}{2}z^n,$$

i $R = 1$.

(e) Ara tenim

$$f(z) = \frac{1}{1+e^z},$$

$$f'(z) = \frac{-e^z}{(1+e^z)^2},$$
$$f''(z) = \frac{e^{3z}-e^z}{(1+e^z)^4},$$

i

$$f'''(z) = \frac{(3e^{3z}-e^z)(1+e^z)-(e^{3z}-e^z)4e^z}{(1+e^z)^5}.$$

Obtenim que

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^3}{48} + O(z^4).$$

D'entrada no podem calcular R en no conèixer els coeficients. A la demostració del teorema 1 del capítol Fórmula integral de Cauchy i conseqüències, que dona el desenvolupament local en sèrie de potències, es demostra que si $D(0,r) \subset \Omega$, aleshores $R \geqslant r$. Per tant, com que la funció és holomorfa a tot arreu llevat dels pols $z = i\pi + 2k\pi i$ per tot $k \in \mathbb{Z}$, deduïm que $R \geqslant \pi$. A la vegada, precisament entorn del pol $i\pi$ la funció pren valors arbitràriament grans. Per tant la sèrie no pot ser uniformement convergent entorn del pol i, en particular $R \leqslant \pi$. Així, tenim $R = \pi$.

Solució de l'exercici 5.5.2

Podem provar per inducció que $((1+z)^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))(1+z)^{(\alpha-n)}$. D'aquí el resultat. Escrivim

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)}{n!}$$

si $n > 0$ i $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Solució de l'exercici 5.5.3

(a) Mètode estàndard: Tenim $f(z) = \frac{\cos(2z)+1}{2}$. Per tant,

$$f'(z) = -\sin(2z)$$

i per inducció veiem que si $n \geqslant 1$ tenim

$$f^{(2n)}(z) = (-1)^n 2^{2n-1}\cos(2z)$$
$$f^{(2n+1)}(z) = (-1)^{n+1} 2^{2n}\sin(2z)$$

Avaluant en $a = 0$ tenim

$$f(0) = 1,$$
$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n 2^{2n-1},$$

i

$$f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

Per tant,

$$f(z) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}.$$

Mètode intel·ligent: Podem fer el càlcul directament notant que

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2z)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!}.$$

(b) Prenem $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2} = z^2 g(z)$, on $g(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$. Calculem per inducció

$$g^{(n)}(z) = \frac{(n+1)!(-1)^n}{(z+1)^{n+2}}.$$

Per fer aquests càlculs, normalment usem intuïció + inducció. La intuïció prové de calcular un parell o tres de derivades i detectar els patrons: $g'(z) = -2/(z+1)^3 = -2!/(z+1)^{(2+1)}$, $g''(z) = 6/(z+1)^4 = 3!/(z+1)^{(2+2)}$, ... Per la inducció notem en primer lloc que és cert per $n = 1$ tal com hem vist. Per altra banda, si per un $n \in \mathbb{N}$ efectivament tenim $g^{(n)}(z) = \frac{(n+1)!(-1)^n}{(z+1)^{n+2}}$, aleshores pel següent nombre natural podem derivar un cop més i obtenim $g^{(n+1)}(z) = \frac{-(n+2)(n+1)!(-1)^n}{(z+1)^{n+3}} = \frac{((n+1)+1)!(-1)^{n+1}}{(z+1)^{(n+1)+2}}$, i es compleix el pas inductiu.

Un cop establerta la derivada n-èsima, és moment de calcular els valors que pren en $a = 1$:

$$g(1) = 1/4 \qquad g^{(n)}(1) = \frac{(n+1)!(-1)^n}{2^{n+2}}.$$

Notem que per $n = 0$ les dues expressions coincideixen.

Escrivim ara la sèrie de potències:

$$g(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)!(-1)^n}{n! 2^{n+2}} (z-1)^n$$

Simplificant els factorials i multiplicant per $z^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1$ obtenim

$$f(z) = ((z-1)^2 + 2(z-1) + 1) \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)(-1)^n}{2^{n+2}} (z-1)^n.$$

Multiplicant terme a terme i reindexant, obtenim

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{(n-1)(-1)^n}{2^n} (z-1)^n + \sum_{n\geqslant 1} \frac{2n(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-1)^n + \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)(-1)^n}{2^{n+2}} (z-1)^n.$$

Ajuntant termes,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)(z-1) + \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{2^n} \left((n-1) - \frac{2n}{2} + \frac{n+1}{4}\right)(z-1)^n \\ &= \frac{1}{4} + \frac{z-1}{4} + \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n (n-3)}{2^{n+2}} (z-1)^n. \end{aligned}$$

(c) A l'exercici 7 de la llista 3 vam veure que si $f(z) = \sqrt[3]{z}$, aleshores tenim

$$f^{(n)}(z) = \binom{1/3}{n} \frac{1}{f(z)^{3n-1}} = \binom{1/3}{n} \frac{f(z)}{z^n},$$

on $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}$. Avaluant a $z = 1$ tenim

$$f^{(n)}(1) = \binom{1/3}{n} \frac{f(1)}{1^n} = \binom{1/3}{n} \zeta,$$

on $\zeta = f(1) = (-1 + i\sqrt{3})/2$ per hipòtesi.

La sèrie de potències serà doncs

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\binom{1/3}{n}}{n!} \zeta (z-1)^n.$$

Pel criteri del quocient el radi de convergència és 1. També ho podem argumentar notant que el domini d'holomorfia exclou necessàriament l'origen.

Solució de l'exercici 5.5.4

(a) Sabem que f és holomorfa a tot arreu llevat dels zeros del denominador, que són 0, $-i$ i 1. El més proper a -1 és l'origen, que està a distància 1. Així doncs, com que la funció és holomorfa a $D(-1, 1)$ obtenim que $R \geqslant 1$ i com que té un pol a l'origen no és uniformement convergent a $D(-1, 1+\varepsilon)$ de manera que $R \leqslant 1$. Tenim doncs $R = 1$.

(b) Escrivim $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+i)z} = (z+1)g(z)$, on $g(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z}$. Per trobar les constants A, B i C, resolem

$$A(z+i)z + B(z-1)z + C(z-1)(z+i) = 1.$$

Avaluant a $z = 0$ obtenim $C = i$, a $z = -i$ obtenim $B = \frac{-i-1}{2}$ i a $z = 1$ trobem $A = \frac{1-i}{2}$. Tenim

$$g^{(n)}(z) = (-1)^n n! \left(\frac{A}{(z-1)^{n+1}} + \frac{B}{(z+i)^{n+1}} + \frac{C}{z^{n+1}} \right),$$

i a $z = -1$ trobem

$$g^{(n)}(-1) = (-1)^n n! \left(\frac{A}{(-2)^{n+1}} + \frac{B}{(-1+i)^{n+1}} + \frac{C}{(-1)^{n+1}} \right),$$

és a dir

$$g^{(n)}(-1) = -n! \left(\frac{(i-1)/2}{2^{n+1}} + \frac{(-i-1)/2}{(1-i)^{n+1}} + i \right).$$

Les sèries de potències resultants seran

$$g(z) = \sum_{n \geqslant 0} - \left(\frac{i-1}{2^{n+2}} + \frac{-i-1}{2(1-i)^{n+1}} + i \right) (z+1)^n$$

i

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} -\left(\frac{i-1}{2^{n+2}} + \frac{-i-1}{2(1-i)^{n+1}} + i\right)(z+1)^{n+1}.$$

Solució de l'exercici 5.5.5

a) No hi ha cap disc al voltant de 0 on la funció sigui holomorfa, no ho podem fer. b) El disc més gran d'holomorfia al voltant de 0 és el disc de radi 1. c)

$$\frac{1}{2-z} + \frac{z}{3-z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} - 1 - \frac{1}{1-z/3}.$$

Cal que $|z/2| < 1$ i $|z/3| < 1$. Llavors el radi de convergència al voltant de 0 és 2.

Solució de l'exercici 5.5.6

Ho podem fer amb `Sage`, amb la comanda `taylor.` Fem-ho a ma.

$$\frac{1}{1+z+z^4} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z+z^4)^n = 1 - z + z^2 - z^3 + z^5 + \cdots$$

i obtenim els coeficients demanats. Per controlar el radi de convergència cal que trobem el zero ω de z^4+z+1 més proper a l'origen. Llavors el radi de convergència serà $|\omega|$. Veiem si pot haver un zero a distància menor que 2/3. Si $|z| < 2/3$ llavors $|z+z^4| < 2/3+16/81 < 1$ llavors no pot ser que $z^4+z+1 = 0$. Aleshores el radi de convergència és major que 2/3. (de fet l'arrel més propera és aproximadament $-0.727+0.43i$ i la seva distància a l'origen és $0.8447 > 2/3$.)

Solució de l'exercici 5.6.1

Per la fórmula integral de Cauchy per derivades, si $f(z) = e^{2z}$ tenim

$$\int_{|z-a|=r} \frac{e^{2z}}{(z-a)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f^{(2)}(a) = \pi i 4e^{2a}.$$

Solució de l'exercici 5.6.2

Sigui $f(z) = (1+z)^n$. Aleshores

$$f^{(m)}(z) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)(1+z)^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!}(1+z)^{n-m}.$$

Així

$$f^{(m)}(0) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

i per la fórmula integral de Cauchy per derivades tenim

$$\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{m+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{m!}f^{(m)}(0) = 2\pi i\frac{n!}{(n-m)!m!} = 2\pi i\binom{n}{m}.$$

Solució de l'exercici 5.6.3

a) La funció $f(z)=1/(z+i)^2$ és holomorfa a l'interior de la corba C llavors

$$\int_C \frac{1}{(1+z^2)^2}dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-i)^2}dz = 2\pi i f'(i) = \pi/2.$$

b)

$$\left|\int_{C_2} \frac{1}{(1+z^2)^2}dz\right| \leqslant \int_{C_2} \frac{1}{|1+z^2|^2}|dz| \leqslant \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \to 0 \quad \text{si } R\to\infty$$

ja que $|1+R^2e^{i2t}| \geqslant R^2-1$ (R gran).

c) Llavors

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2}dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2.}$$

Solució de l'exercici 5.6.4

Sigui $0<r<1$. Llavors $\sup_{|z|=r}|f(z)| \leqslant \frac{c}{(1-r)^\alpha}$. Aplicant les desigualtats de Cauchy, obtenim que

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!c}{r^n(1-r)^\alpha} := \varphi(r).$$

Calculem el mínim de φ. Derivant,

$$\varphi'(r) = \frac{-n!c\big(nr^{n-1}(1-r)^\alpha - \alpha r^n(1-r)^{\alpha-1}\big)}{(r^n(1-r)^\alpha)^2} = \frac{-n!c\big(n(1-r)-\alpha r\big)}{r^{n+1}(1-r)^{\alpha+1}}.$$

Per tant, $\varphi'(r)=0$ en $(0,1)$ si i només si, $r=\frac{n}{n+\alpha}$ i es verifica que

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!c}{(\frac{n}{n+\alpha})^n(\frac{\alpha}{n+\alpha})^\alpha} = cn!((1+\frac{\alpha}{n})^{n/\alpha})^\alpha \frac{(n+\alpha)^\alpha}{\alpha^\alpha} \leqslant cn!\left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha (n+\alpha)^\alpha.$$

Solució de l'exercici 5.6.5

(a) Escrivim f en sèrie de potències al voltant del 0: $f(z)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m$. Per les desigualtats de Cauchy:

$$|a_m| = \frac{|f^{(m)}(0)|}{m!} \leqslant \frac{\max_{|z|=r}|f(z)|}{r^m}, \qquad \forall r>0.$$

Prenem $r\geqslant R$, de manera que valgui l'acotació que dóna l'enunciat; aleshores,

$$|a_m| \leqslant \frac{Cr^n}{r^m}.$$

Veiem per tant que si $m > n$, fent $r \to +\infty$, obtenim $a_m = 0$. Tornant a la sèrie inicial, queda

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

(b) Per hipòtesi existeix $R > 0$ tal que $|f(z)| \geqslant 1$ si $|z| \geqslant R$. Mirem ara f a $\overline{D(0,R)}$. Com que la funció no s'anul·la la frontera del disc, el nombre de zeros que té f a $D(0,R)$ és necessàriament finit (recordem que el principi de prolongació analítica diu que els zeros són aïllats i per tant només es podrien acumular a la frontera).

Diem doncs $a_1, \ldots, a_n$ als zeros de f, comptats tantes vegades com la seva multiplicitat. Aquests punts són tots a $D(0,R)$. Aleshores la funció

$$F(z) = \frac{(z-a_1)\cdots(z-a_n)}{f(z)}$$

és holomorfa als punts a_j, $j = 1, \ldots, n$, i per tant a tot arreu.

Amb la intenció d'aplicar l'apartat (a), diem $M = \max_j |a_j|$ i acotem,

$$|F(z)| \leqslant \frac{(|z|+|a_1|)\cdots(|z|+|a_n|)}{|f(z)|} \leqslant \frac{(|z|+M)^n}{|f(z)|}.$$

Prenem $R \geqslant M$ tal que $|f(z)| \geqslant 1$ si $|z| \geqslant R$. Aleshores, per a $|z| \geqslant R$ tenim

$$|F(z)| \leqslant \frac{(2|z|)^n}{1} = C|z|^n, \qquad C = 2^n,$$

de manera que podem aplicar l'apartat (a) i concloure que F és un polinomi.

Solució de l'exercici 5.6.6

Per la desigualtat de Cauchy tenim per tot $r > 0$

$$|f'(z)| \leqslant \frac{\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(z+re^{i\theta})|}{r} \leqslant \frac{M}{r} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} e^{C|z+re^{i\theta}|} \leqslant \frac{M}{r} e^{C|z|+Cr}.$$

Per tant,

$$|f'(z)|e^{-C|z|} \leqslant \frac{M}{r} e^{Cr},$$

com proposa la indicació.

Un cop vist això, prenem $r = 1/C$ i trobem

$$|f'(z)|e^{-C|z|} \leqslant CMe.$$

Notem que $\frac{e^{Cr}}{r}$ té un mínim en $r = 1/C$, així que la cota no pot millorar, almenys seguint aquest mètode!

Solució de l'exercici 5.6.7

(a) Per les desigualtats de Cauchy tenim que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \leqslant \frac{M}{R^j},$$

(b) Com abans tenim que

$$c_k \leqslant \frac{M_r}{r^k},$$

on $M_r = \sup_{|z|=r} |P(z)| \leqslant 1$. Prenent $r = 1$ obtenim la cota desitjada.

Solució de l'exercici 5.6.8

Per les desigualtats de Cauchy tenim que

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n! \frac{\sup_{\mathbb{D}} e^{|z|}}{r^n} \xrightarrow{r \to 1} n!e,$$

Solució de l'exercici 5.7.1

$f^{(4)}(z)$ fitada vol dir que el seu mòdul és fitat, pel teorema de Liouville $f^{(4)}(z) = c \in \mathbb{C}$. Integrem i obtenim un polinomi de quart grau com a màxim.

Solució de l'exercici 5.7.2

No el contradiu ja que $1/z^2$ no és entera, el 0 no és del seu domini.

Solució de l'exercici 5.7.3

Si $a = b$, $I = 2\pi i f'(a)$ per la fórmula integral de Cauchy per derivades. Si $a \neq b$,

$$I = \frac{1}{a-b} \int_{|z|=R} \frac{(a-b)f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\int_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{z-a} - \int_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{z-b} \right),$$

i concloem per la fórmula integral de Cauchy que $I = \frac{2\pi i}{a-b}(f(a) - f(b))$.

Solució de l'exercici 5.7.4

És clar que $f(z) = \alpha z^2 + \beta$ amb $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i $2|\alpha| \leqslant 1$ satisfà les hipòtesis. Veiem que no hi ha més solucions.

Si $|f'(z)| \leqslant |z|$, prenem $g(z) = f(z) - f(0)$ també satisfà les hipòtesis i $g(0) = 0$. Tenim

$$|g'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{g'(w)}{w}\, dw \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=R} \frac{|w|}{|w-z|}\, dw \xrightarrow{R \to \infty} 1.$$

Així que $g' = f'$ és una funció entera i acotada. Pel teorema de Liouville, es tracta d'una funció constant.

Solució de l'exercici 5.7.5

(a) Amb aquesta condició f no té zeros, i per tant $1/f$ és entera. La mateixa condició diu que $|1/f| \leqslant 1$, de manera que, pel Teorema de Liouville, $1/f$ (i per tant f) és constant.

(b) Considerem $F(z) = e^{-f(z)}$. Tenim $|F(z)| = e^{-\operatorname{Re} f(z)} \leqslant 1$, i per tant F és constant.

(b) Anàlogament al cas anterior, considerem $F(z) = e^{-if(z)}$. Tenim $|F(z)| = e^{\operatorname{Im} f(z)} \leqslant e$, de manera que F (i per tant f) és constant.

(d) Com que $\operatorname{Re} f$ és contínua (de fet, fins i tot analítica), tenim $\operatorname{Re} f > 0$ o bé $\operatorname{Re} f < 0$. Al primer cas apliquem (b), i al segon considerem $F(z) = e^{f(z)}$ i fem com al cas (b).

Solució de l'exercici 5.7.6

Notem que $e^{\operatorname{Re} z} = |e^z|$. La funció e^{-z} és entera i per tant, $e^{-z} f(z)$ és una funció entera i acotada per C. Per tant, és constant. Així doncs, $f(z) = ae^z$, amb $|a| \leqslant C$.

Solució de l'exercici 5.7.7

La condició no permet que f s'anul·li a cap punt, de manera que $f'(z)/f(z)$ és una funció entera, i

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Per tant, és constant: existeix $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$f'(z) = cf(z).$$

Localment existeix una tal determinació del logaritme de f, és a dir que per tot a existeix un radi r_a tal que $z = e^{g \circ f(z)}$ per $z \in D_{r_a}(a)$. N'hi ha prou amb prendre el radi de manera que $|f(z) - f(a)| < |f(a)|/2$ per $z \in D_r(a)$, cosa possible per continuïtat, i prendre $g = \mathcal{L}$ per alguna determinació del logaritme $\mathcal{L}(z) : \mathbb{C} \setminus -f(a)[0, \infty)$.

Aleshores, derivant $F(z) = g \circ f(z)$, trobem

$$F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = c,$$

i $\log f(z) = F(z) = cz + D_a$, $c, D_a \in \mathbb{C}$. Amb això

$$f(z) = e^{cz + D_a} = E_a e^{Cz}, \quad c, E_a \in \mathbb{C}.$$

Per a aquesta mena de funcions $f'(z) = E_a c e^{cz}$, i la condició $|f'(z)| < |f(z)|$ equival a $|c| < 1$. De moment, E_a és una constant en cada disc de centre a i radi r_a.

Finalment, donats dos punts a_1 i a_2, els valors de E_{a_j} han de coincidir, ja que podem unir a_1 i a_2 mitjançant un segment, i aquest es pot recobrir amb un nombre finit de boles obertes $D_{r_a}(a)$ per compacitat, de manera que els valors de E_a han de coincidir en les interseccions de les boles. Per tant,

$$f(z) = Ee^{cz}, \quad |c| < 1, \; E \in \mathbb{C}.$$

Nota: com que $\mathbb{C}$ és simplement connex i f no s'hi anul·la, existeix una determinació $F(z)$ de $\log f(z)$, com veurem a la proposició 6.29. Usant això se simplifica la prova i estalviem l'argument de compacitat.

Solució de l'exercici 5.8.1

Definim $F(z) = \frac{-1}{z}$. F és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ i la seva derivada és $F'(z) = f(z)$. Per tant, si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ és un camí tancat, aleshores

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(b)) = 0.$$

Com que f no és contínua a l'origen, tampoc pot ser analítica.

El teorema de Morera diu que si una funció és holomorfa en un obert llevat d'un punt però que la funció és contínua en aquest punt, aleshores la funció és holomorfa en tot l'obert. En aquest cas falla la hipòtesi de la continuïtat i falla també la conclusió, ja que f no és analítica a l'origen i, per tant, no és holomorfa.

Solució de l'exercici 5.8.2

(a) En primer lloc comprovem que la integral és finita per a tot $z \in \mathbb{C}$. Sigui $A > 0$ tal que $supp(h) \subset [-A, A]$. Passant el mòdul dins la integral tenim

$$|H(z)| \leqslant \int_{-A}^{A} |h(t)||e^{-itz}|dt.$$

Essent h contínua i de suport compacte, existeix $M = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |h(t)| < +\infty$. Per altra part

$$|e^{-itz}| = |e^{-it(\mathrm{Re}\,(z)+i\mathrm{Im}\,(z))}| = e^{t\,\mathrm{Im}\,(z)}.$$

Amb tot això tenim

$$|H(z)| \leqslant \int_{-A}^{A} Me^{t\,\mathrm{Im}\,(z)}dt \leqslant M\int_{-A}^{A} e^{A\,|\mathrm{Im}\,(z)|}dt = M(2A)e^{A\,|\mathrm{Im}\,(z)|}.$$

Per a veure que H és holomorfa utilitzarem el Teorema de Morera. Haurem de veure per tant que H és contínua i que la integral al llarg de la vora de qualsevol triangle dóna 0.

Que H és contínua és immediat, ja que la funció que integrem és contínua i ho fem a un conjunt compacte:

$$\lim_{z\to z_0} H(z) = \lim_{z\to z_0} \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-itz}dt = \int_{\mathbb{R}} h(t)(\lim_{z\to z_0} e^{-itz})dt = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-itz_0}dt = H(z_0).$$

Sigui ara T un triangle qualsevol de $\mathbb{C}$. Tenim, per Fubini i pel Teorema de Cauchy aplicat a les funcions enteres $f_t(z) = e^{-itz}$,

$$\int_{\partial T} H(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}} h(t)\Big(\int_{\partial T} e^{-itz}dz\Big)dt = \int_{\mathbb{R}} h(t)\,0\,dt = 0.$$

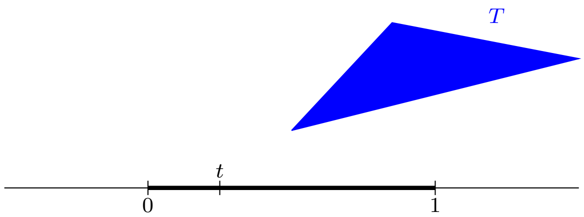
(b) Fem anàlogament a l'apartat anterior. Diem $d(z)$ a la distància de $z \notin [0,1]$ a aquest interval. Passant el mòdul dins la integral i utilitzant que h és una funció contínua al compacte $[0,1]$, veiem de seguida que la integral és finita:

$$|H(z)| \leqslant \int_0^1 \frac{|h(t)|}{|t-z|}\,dt \leqslant \frac{1}{d(z)} \int_0^1 |h(t)|\,dt.$$

Per veure que és holomorfa apliquem de nou el teorema de Morera. Si $z_0 \notin [0,1]$ existeix $\epsilon > 0$ tal que $D(z_0,\epsilon) \cap [0,1] = \varnothing$. Aleshores, prenent $z \in D(z_0,\varepsilon)$ tenim

$$\lim_{z\to z_0} H(z) = \lim_{z\to z_0} \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z}dt = \int_0^1 \lim_{z\to z_0} \frac{h(t)}{t-z}dt = \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z_0}dt = H(z_0).$$

Sigui ara T un triangle completament contingut a $\mathbb{C}\backslash[0,1]$. Observem que per als punts $t \in [0,1]$ l'índex de ∂T a t és 0: $n(\partial T, t) = 0$.



Aleshores,

$$\int_{\partial T} H(z)\,dz = \int_0^1 \Big(\int_{\partial T} \frac{dz}{t-z}\Big)\,h(t)\,dt = \int_0^1 \big(-2\pi i\, n(\partial T, t)\big)\,h(t)\,dt = 0.$$

Solució de l'exercici 5.10.2

15.

Solució de l'exercici 5.10.3

(a) Tenim $e^{z^2} - 1 = 0$ si i només si $z^2 = \log 1 = 2\pi i\, k$, $k \in \mathbb{Z}$, és a dir, $z_k^{\pm} = \pm\sqrt{2\pi i k}$.

Considerem primer l'arrel que correspon a $k = 0$, és a dir $z_0 = 0$. Prenent la sèrie de l'exponencial a l'entorn del 0 tenim $e^{z^2} - 1 = z^2 + \cdots$, i per tant $z^2(e^{z^2} - 1) = z^4 + \cdots$. Així doncs, $z_0 = 0$ és una arrel de multiplicitat 4.

Per a $k \neq 0$ les arrels són de multiplicitat 1. Sigui z_k alguna de les arrels de dalt amb $k \neq 0$. Tenim $e^{z_k^2} = 1$. Desenvolupem $g(z) = e^{z^2} - 1$ a l'entorn de z_k. Tenim $g'(z) = e^{z^2}2z$, i per tant $g'(z_k) = 2z_k \neq 0$. El desenvolupament dóna doncs

$$g(z) = g(z_k) + g'(z_k)(z - z_k) = 2z_k(z - z_k) + \cdots$$

Per altra part, a l'entorn de z_k tenim $z = z_k + (z - z_k)$, i tot plegat

$$f(z) = [z_k + (z - z_k)]^2[2z_k(z - z_k) + \cdots] = 2z_k^2(z - z_k) + \cdots$$

la qual cosa mostra que la multiplicitat de z_k és efectivament 1.

(b) La funció $\sin z$ s'anul·la als punts $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, i el factor $z^2 - \pi^2 = (z-\pi)(z+\pi)$ s'anul·la $z_{\pm 1} = \pm\pi$. Considerem doncs diferents $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $k = 0$. Tenim $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$ i per tant $\dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \cdots$. Amb això

$$(z^2 - \pi^2)\frac{\sin z}{z} = -\pi^2 + \big(1 + \frac{\pi^2}{3!}\big)z^2 + \cdots$$

i per tant $z_0 = 0$ no és de fet un zero de la funció donada.

(ii) $k = \pm 1$. Suposem $k = 1$; el cas $k = -1$ es fa anàlogament. Tenim, fent Taylor a l'entorn de $z_1 = \pi$,

$$\sin z = -(z-\pi) + \frac{1}{3!}(z-\pi)^3 + \cdots = (z-\pi)h(z),$$

amb h holomorfa i $h(\pi) \neq 0$. Per tant

$$f(z) = (z-\pi)(z+\pi)\frac{(z-\pi)h(z)}{z} = (z-\pi)^2\frac{(z+\pi)h(z)}{z}.$$

El segon factor en aquest producte és una funció holomorfa no nul·la l'entorn de π, i per tant $z_1 = \pi$ és un zero de multiplicitat 2.

(iii) $z_k = k\pi$, $k \neq 0, \pm 1$. Desenvolupant per Taylor a l'entorn de z_k tenim, com al cas anterior,

$$\sin z = (-1)^k(z-k\pi) + \frac{(-1)^{k+1}}{3!}(z-k\pi)^3 + \cdots = (z-k\pi)h(z),$$

amb h holomorfa i $h(k\pi) \neq 0$. Aleshores

$$f(z) = (z-k\pi)\frac{(z^2-\pi^2)h(z)}{z},$$

i el segon factor en aquest producte és una funció holomorfa i no nul·la un entorn de $z_k = k\pi$. Per tant, z_k és un zero de multiplicitat 1.

(c) En primer lloc mirem a quina determinació de l'argument $\arg(z)$ correspon l'arrel donada. Essent el semieix de discontinuïtats $(-\infty, 0]$ tenim

$$\arg(z) = \mathrm{Arg}\,(z) + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

on $\mathrm{Arg}\,(z)$ denota l'argument principal (amb angle a $(-\pi,\pi)$). Aleshores

$$\sqrt{1} = e^{\frac{1}{2}(\ln|1| + i\mathrm{Arg}\,(1) + 2i\pi k)} = e^{i\pi k}.$$

Ens diuen que $\sqrt{1} = -1$, d'on deduïm que $k = 1$ (o qualsevol altre k senar que vulguem; hi ha dues arrels, la que que correspon als k parells, i aquesta, que correspon als k senars). Amb això, l'argument triat és tal que

$$\arg(z) \in (\pi, 3\pi).$$

Aleshores
$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z|+i\arg(z))} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg(z)}{2}}$$
és un nombre complex amb arguments a $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. En particular, veiem que $\sqrt{z}$ no pot ésser 2 (és l'altra arrel que pot valdre 2, però no aquesta), i per tant la funció $f(z)$ no té cap zero.

Solució de l'exercici 5.10.4

En efecte, suposem que existeix $z : 0 \in \Omega$ i $f(z_0) \neq 0$. Llavors, per continuïtat, existeix $r > 0$ complint que $f(z) \neq 0$ si $z \in D(z_0, r) \subset \Omega$. Per hipòtesi, $f \cdot g \equiv 0$ i, per tant, $g \equiv 0$ en $D(z_0, r)$. Aplicant el Principi de Prolongació analítica, com que Ω és una regió, es compleix que $g \equiv 0$ en Ω.

Com a alternativa, raonem per contradicció. Si f i g no són idènticament nul·les, els seus conjunts de zeros $Z(f)$ i $Z(g)$ són successions de punts aïllats i, en particular, conjunts com a molt numerables. Aleshores $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$ també seria numerable, en contra de la hipòtesi.

Solució de l'exercici 5.10.5

(a) Observem en primer lloc que la funció $h(z) := \overline{f(\bar{z})}$ és holomorfa a $\mathbb{D}$. Amb la intenció de veure que $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$, considerem primer $g(z) = f(\bar{z})$. Com que f és holomorfa tenim $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, i per tant $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$. Aleshores
$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial g}{\partial z}} = \bar{0} = 0.$$
Per tant la funció $F(z) = \overline{f(\bar{z})} - f(z)$ és holomorfa a $\mathbb{D}$. Per a veure que $F \equiv 0$ utilitzarem el principi de prolongació analítica, és a dir que el conjunt de zeros d'aquesta funció no pot tenir punts d'acumulació a $\mathbb{D}$, llevat que sigui 0. Observem però que, per hipòtesi,
$$F(a_n) = f(a_n) - f(a_n) = 0.$$
Com que $\{a_n\}_n$ s'acumula a 0, deduïm que necessàriament $F \equiv 0$, com volíem.

(b) De l'apartat (a) en tenim que si $x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{D}$ aleshores $f(x) \in \mathbb{R}$. Per tant, mirant la funció només a la recta real i aplicant el teorema de Rolle tenim que existeixen punts $\beta_n \in (a_{2n+1}, a_{2n})$ tals que $f'(\beta_n) = 0$. Com que $\lim_n a_n = 0$, necessàriament també $\lim_n \beta_n = 0$. Ara el principi de prolongació analítica, aplicat a la funció $f' \in H(\mathbb{D})$, implica que $f' \equiv 0$, i per tant f és constant.

Solució de l'exercici 5.10.6

a) És clar que $f(0) = 0$ per contuinuïtat. Vegem que, de fet, $f \equiv 0$. Ho farem raonant per l'absurd, factoritzant el zero de l'origen: sabem que existeix n_0 i $a_{n_0} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ amb
$$f(z) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n z^n = a_{n_0} z^{n_0} + \mathcal{O}(|z|^{n_0+1}).$$

Així, per z prou petit (podem prendre $|z| < \frac{|a_{n_0}|}{2C}$, amb C determinat a la següent línia), tenim

$$|f(z)| = \left|a_{n_0} z^{n_0} + \mathcal{O}(|z|^{n_0+1})\right| \geqslant |a_{n_0} z^{n_0}| - C|z|^{n_0+1} \geqslant \frac{|a_{n_0}|}{2}|z|^{n_0}.$$

Combinant-ho amb la hipòtesi, obtenim

$$\frac{1}{2^n} \geqslant \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \geqslant \frac{|a_{n_0}|}{2}(1/n)^{n_0},$$

és a dir que

$$\frac{n^{n_0}}{2^n} \geqslant \frac{|a_{n_0}|}{2},$$

la qual cosa contradiu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n_0}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{n_0(\log_2 n)-n} = 0.$$

b) $f(z) = z^2/(1+z^2)$ i PPA.

Solució de l'exercici 5.10.7

Tenim $f(z) = z^2$ per a tots els $|z| = 1$. Pel principi de prolongació analítica, això obliga a que $f(z) = z^2$ a tot el disc (ja que $f(z)$ i z^2 coincideixen en un conjunt no numerable i amb punts d'acumulació a l'interior de $D(0,2)$). A més, $f(0) = 0$.

Solució de l'exercici 5.11.1

(a) Pel principi del mòdul màxim, el màxim de $f(z) = |\cos z|$ a $\bar{\Omega} = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ s'assoleix a la frontera. Estudiem doncs el comportament d'aquesta funció als quatre costats del quadrat donat.

(i) $y = 0$; $x \in [0,2\pi]$. Aquí tenim $f(x) = |\cos x|$, i el màxim s'assoleix als punt $x = 0, \pi, 2\pi$. En aquests punts el valor de la funció és 1.

(ii) $x = 0, 2\pi$, $y \in [0,2\pi]$. Aquí, per la periodicitat de $\cos z$, tenim $f(2\pi + iy) = f(iy) = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$. Aquesta funció és creixent, i per tant té el màxim a 2π. Per tant el valor màxim en aquest segments correspon a $f(2\pi\, i) = f(2\pi + 2\pi i) = \dfrac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{2}$.

(iii) $y = 2\pi$, $x \in [0,2\pi]$. Aquí $f(x + 2\pi i) = \dfrac{e^{ix}e^{-2\pi} + e^{-ix}e^{2\pi}}{2}$. Amb això

$$|\cos(x+2\pi i)|^2 = \frac{1}{4}\big(e^{-4\pi} + e^{-2ix} + e^{2ix} + e^{4\pi}\big) = \frac{1}{4}\big(e^{4\pi} + e^{-4\pi} + 2\cos(2x)\big).$$

Això és màxim quan $\cos(2x) = 1$, és a dir, als punts $x = 0, \pi, 2\pi$. El valor màxim és aleshores $|\cos(2\pi i)| = \frac{1}{2}\big(e^{2\pi} + e^{-2\pi}\big)$.

Com que $\frac{1}{2}\big(e^{2\pi} + e^{-2\pi}\big) > 1$, el valor màxim és $\frac{1}{2}\big(e^{2\pi} + e^{-2\pi}\big)$ i s'assoleix als punts $2\pi i$, $2\pi + 2\pi i$ i $\pi + 2\pi i$.

El cas $|\sin z|$ es fa anàlogament.

(b) Pel principi del màxim

$$\max_{|z|\leqslant 1} |e^z| = \max_{|z|=1} |e^z| = \max_{|z|=1} e^{\operatorname{Re} z}.$$

Com que la funció exponencial (real) és creixent, és clar que el màxim s'assolirà al punt del cercle on $\operatorname{Re} z$ sigui màxim, és a dir, al punt $z = 1$.

Anàlogament, si posem $z = x + iy$, tenim

$$\max_{|z|\leqslant 1} |e^{z^2}| = \max_{|z|=1} |e^{z^2}| = \max_{|z|=1} e^{\operatorname{Re} z^2} = \max_{|z|=1} e^{x^2-y^2}.$$

Aquí és clar que el màxim s'assoleix quan x^2 és màxim i y^2 mínim, és a dir, als punts $z = \pm 1$.

Solució de l'exercici 5.11.2

Només pot ser $f(z) = 3$ per a tot $z \in \mathbb{D}$ pel principi del mòdul màxim.

Solució de l'exercici 5.11.3

La funció és holomorfa al disc donat ja que és producte d'holomorfes, llavors, pel principi del mòdul màxim, el màxim de $|f(z)|$ s'assoleix a la frontera. Com que la funció $f(z)$ només és zero quan $z = 0$ i 0 no és del disc, la funció $f(z)$ no s'anul·la mai en aquest disc, llavors la funció $g(z)$ és holomorfa en ell i el seu mòdul assoleix el màxim a la frontera. Com que el màxim de $|g| = 1/|f|$ és el mínim de $|f|$ hem acabat.

Solució de l'exercici 5.11.4

Aplicació del principi del mòdul màxim.

Solució de l'exercici 5.11.5

Suposem que f no té cap zero a D i veurem que necessàriament ha de ser constant. En aquest supòsit tenim $1/f \in H(D)$, i pel principi del mòdul màxim

$$\max_{\overline{D}} \left|\frac{1}{f(z)}\right| = \max_{\partial D} \left|\frac{1}{f(z)}\right| = \frac{1}{c}.$$

Amb això tenim $|f(z)| \geqslant c$ per a tot $z \in D$. Però per hipòtesi (i pel principi del mòdul màxim), per a aquests z:

$$|f(z)| \leqslant \max_{\partial D} |f(z)| = c.$$

Tot plegat $|f(z)| = c$ per a tot $z \in D$. Com ja vam veure, tota f holomorfa de mòdul constant és constant (conseqüència de les equacions de Cauchy-Riemann). Per tant f és constant a D. Però el principi de prolongació analítica obliga a que aleshores f sigui constant a tot Ω (la component connexa del domini de definició de f que conté D).

Solució de l'exercici 5.11.6

Suposem que $f(a) \neq 0$. Aleshores $1/f$ seria holomorfa ja que no hi hauria cap zero de f en Ω. Per tant, pel principi del mòdul màxim, al tenir $1/f$ un extrem a l'interior ha de ser constant, en contradicció amb la hipòtesi de l'enunciat.

Solució de l'exercici 5.11.7

Feu servir el Teorema de l'aplicació oberta

La inclusió $\overline{\{z;\, |f(z)| < c\}} \subset \{z;\, |f(z)| \leqslant c\}$ és conseqüència de la continuïtat de f.

Per veure la inclusió contrària, suposem que $z \in \mathbb{C}$ tal que $|f(z)| = c$. Aleshores, com que f no és constant, el teorema de l'aplicació oberta diu que $f(D(z, 1/n))$ és un obert. Com que conté c, contindrà una bola centrada en c i en particular conté $(1-\varepsilon)c$ per un cert ε prou petit, és a dir que existeix $z_n \in D(z, 1)$ tal que

$$|f(z_n)| = (1-\varepsilon)|c| < |f(z)|.$$

Per construcció tenim que $z_n \to z$, i hem vist que $z_n \in \{z;\, |f(z)| < c\}$. Per tant, $z \in \overline{\{z;\, |f(z)| < c\}}$, tal i com volíem veure.

Solució de l'exercici 6.1.1

Per definició,

$$\operatorname{Ind}(\gamma, 3) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-3}.$$

Com que la primitiva és un logaritme, per poder fer el càlcul cal trencar la integral en trossos cada vegada que $z-3$ talli la semirecta dels reals positius, per exemple, en aquest cas per poder usar alguna determinació del logaritme log en $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$. Busquem doncs solucions de

$$4e^{it}\cos\frac{2}{3}t - 3 = x$$

amb $x > 0$. En particular, tindrem que $4e^{it}\cos\frac{2}{3}t \in \mathbb{R}$ amb $4e^{it}\cos\frac{2}{3}t > 3$. Això passa quan $e^{it} = \pm 1$ i el cosinus contribueix favorablement, ja que quan $\cos\frac{2}{3}t = 0$ la segona condició no pot ocórrer. Vegem primer els valors de t tals que $\gamma(t)$ és un nombre real no nul:

- $t = 0$: $\gamma(t) = 4\cos 0 = 4$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) = \operatorname{Im}(4ie^{i0}\cos 0 - 4e^0\sin 0) = 4$. Creua doncs del semipla de part imaginària negativa cap al de part imaginària positiva.
- $t = \pi$: $\gamma(t) = -4\cos\frac{2\pi}{3} = -4(-1/2) = 2$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) = 4e^{i\pi}\cos\frac{2}{3}\pi > 0$. Ara també creua de baix a dalt. Notem que no hi ha cap contradicció, entremig ha creuat l'origen perquè s'ha anul·lat el cosinus!
- $t = 2\pi$: $\gamma(t) = -4\cos\frac{4\pi}{3} = 4(-1/2) = -2$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) < 0$.
- $t = 3\pi$: $\gamma(t) = -4\cos\frac{6\pi}{3} = -4$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) < 0$.
- $t = 4\pi$: $\gamma(t) = -4\cos\frac{8\pi}{3} = 4(-1/2) = -2$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) < 0$.
- $t = 5\pi$: $\gamma(t) = -4\cos\frac{10\pi}{3} = -4(-1/2) = 2$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) > 0$.
- $t = 6\pi$: $\gamma(t) = -4\cos\frac{12\pi}{3} = 4$, $\operatorname{Im}(\gamma'(t)) > 0$.

Veiem que en estudiar l'índex de γ respecte a 3, no cal fer res, ja que la determinació del logaritme només falla als extrems d'integració:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}(\gamma, 3) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-3} = \frac{1}{2\pi i}\left[\log(\gamma(t)-3)\right]_0^{6\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\lim_{t\nearrow 6\pi}\log(\gamma(t)-3) - \lim_{t\searrow 0}\log(\gamma(t)-3)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[1 + i(2\pi + 2\pi k_0) - 1 - i(2\pi k_0)\right] = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1.
\end{aligned}$$

Per calcular els límits laterals, hem usat que la corba creua els dos cops de baix cap a dalt, i això determina l'argument en els valors propers.

Per calcular l'índex al voltant de 1, ara creuarem tres vegades la semirecta $[1,\infty)$, però el primer camí no fa cap volta,ja que roman a la part imaginària positiva i el darrer camí roman a la part real negativa, i cada vegada haurem acumulat un argument de 2π, ja que en tots els casos, el camí creua de la part imaginària negativa cap a la positiva. Així

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(\gamma, 1) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-1} = \frac{1}{2\pi i}\Big(\left[\log(\gamma(t)-1)\right]_0^{\pi} + \left[\log(\gamma(t)-1)\right]_{\pi}^{5\pi} + \left[\log(\gamma(t)-1)\right]_{5\pi}^{6\pi}\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left([i2k\pi] + [i2k\pi] + [i2k\pi]\right) = \frac{6\pi i}{2\pi i} = 3.\end{aligned}$$

Solució de l'exercici 7.1.1

$$\frac{z-1}{z(z-4)^3} = \frac{1}{(z-4)^3}\left(1-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{(z-4)^3}\left(1-\frac{1}{4+(z-4)}\right) =$$
$$\frac{1}{(z-4)^3}\left(1-\frac{1}{4}\frac{1}{1+(z-4)/4}\right) = \frac{1}{(z-4)^3}\left(1-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-4)^n}{4^n}\right) =$$
$$\frac{3}{4}\frac{1}{(z-4)^3} + \frac{1}{16}\frac{1}{(z-4)^2} - \frac{1}{64}\frac{1}{z-4} + \sum_{n\geqslant 3}(-1)^{n+1}\frac{(z-4)^{n-3}}{4^{n+1}}.$$

Nota: amb `Sage` podem fer servir `taylor`.

b) Està centrada al zero,

$$\frac{1}{e^{(1-z)}} = e^{z-1} = e^{-1}\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}.$$

Solució de l'exercici 7.1.2

a) Si fem servir la identitat $2\cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$ podem escriure $\sin z \cos 3z = \frac{1}{2}(\sin(4z) - \sin(2z))$ llavors

$$\sin z \cos 3z = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(4z)^{2n-1}}{(2n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2z)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{4^{2n-1}-2^{2n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}.$$

Llavors

$$f(z) = \frac{1}{2z^4}\left(2z - \frac{4^3-2^3}{3!}z^3 + \sum_{n\geqslant 3}(-1)^{n-1}\frac{4^{2n-1}-2^{2n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{z^3} - \frac{14}{3}\frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 3}(-1)^{n-1}\frac{4^{2n-1}-2^{2n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-5}.$$

b) La integral és $2\pi i(-14/3)$.

Solució de l'exercici 7.1.3

a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, el centre és $z = 0$

$$-\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}(1+z+z^2+\cdots) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \cdots$$

b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$, el centre és $z = 1$

$$\frac{1}{z-1}\frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{z-1}(1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}(z-1)^n.$$

c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, sigui $w = 1/z$, desenvolupem al voltant de $w = 0$ (z amb centre a ∞)

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{w^2}{1-w} = w^2(\sum_{n\geqslant 0} w^n) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \cdots$$

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$. Aquí posem $z - 1 = 1/w$ i

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{w^2}{1+w} = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} - \cdots$$

Solució de l'exercici 7.1.4

Primer veiem que $\dfrac{1}{(z-1)(z-3)} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z-3}$. Tenim casos

- Si $|z| < 1$, $\dfrac{1}{z-1} = -\sum_{n\geqslant 0} z^n$.
- Si $|z| > 1$, $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z(1-1/z)} = \dfrac{1}{z}\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{z^n}$.
- Si $|z| < 3$, $\dfrac{1}{z-3} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-z/3} = -\dfrac{1}{3}\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{z^n}{3^n}$.
- Si Si $|z| > 3$, $\dfrac{1}{z-3} = \dfrac{1}{z(1-3/z)} = \dfrac{1}{z}\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{3^n}{z^n}$.

Combinem aquestes expressions i obtenim

a) Si $|z| < 1$

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0} z^n - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$$

b) Si $1 < |z| < 3$

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{6}\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{3^n}.$$

c) Si $|z| > 3$,

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{-1+3^{n-1}}{z^n}.$$

Solució de l'exercici 7.1.5

a) La singularitat es dona quan $z = 0$, fem el canvi $z = 1/w$, llavors

$$f(z) = f(1/w) = \frac{1}{w^2}\cos(w/3) = \frac{1}{w^2}\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{w^{2n}}{3^{2n}2n!} = z^2 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{3^{2n}(2n)!}\frac{1}{z^{2(n-1)}}.$$

b) Veiem que les singularitats es donen quan $e^z = 1$. Això passa si $e^{x+iy} = 1$ que equival a $x = 0$, $y = 2k\pi$. Com que el terme no nul més proper al zero i que anul·la el denominador és $\pm 2\pi i$ tenim que $R = 2\pi$ i la sèrie de Laurent la tenim per $0 < |z| < 2\pi$.

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots} = \frac{1}{z}\frac{1}{1 + z/2 + z^2/3! + \cdots} =$$
$$= \frac{1}{z}\left(1 - (z/2 + z^2/3! + \cdots) + (z/2 + z^2/3! + \cdots)^2 - (z/2 + z^2/3! + \cdots)^3 + \cdots\right) =$$
$$= \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{720}z^4 + \cdots\right).$$

Nota: els coeficients (multiplicats per $n!$) de la sèrie de $z/(e^z - 1)$ són els famosos nombres de Bernoulli, molt importants en teoria de nombres.

Solució de l'exercici 7.1.6

Estudiem la part regular i la part singular.

- Regular. $1 + z/2 + z^2/2^2 + z^3/2^3 + \ldots$
- Singular $1/2z + 1/2^2z^2 + 1/2^3z^3 + \ldots$

Fem servir el criteri del quocient per trobar el radi de convergència:

- Per la part regular volem que z sigui tal que $\lim |c_{n+1}/c_n| < 1$. Tenim
$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(z^{n+1}/2^{n+1})}{(z^n/2^n)}\right| = |z/2| < 1.$$
Hi ha convergència si $|z| < 2$.
- Per la part singular fem el mateix
$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(1/2^{n+1}z^{n+1})}{(1/2^n z^n)}\right| = |1/(2z)| < 1.$$
Hi ha convergència si $|z| > 1/2$.
L'anell de convergència és $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}$.

Solució de l'exercici 7.2.1

a) Per exemple
$$f(z) = \frac{1}{(z - 1 - i)^2} + e^{1/z} + e^{1/(z-1)}.$$

b) Per exemple
$$g(z) = \frac{z^2 + 2z}{\sin(z)} + \frac{1}{(z-1)^6} + e^{1/(z-i)}.$$

Solució de l'exercici 7.2.2

Per hipòtesi $f(z) = a_n(z-z_0)^n + \cdots$ i $g(z) = c_m(z-z_0)^m + \cdots$ amb $a_n, b_m \neq 0$. Aleshores

$$h(z) = \frac{a_n(z-z_0)^n}{c_m(z-z_0)^m}\lambda(z) = \frac{a_n(z-z_0)^n}{c_m(z-z_0)^m}(d_0 + d_1(z-z_0) + \cdots)$$

amb $\lambda(z)$ holomorfa a z_0 amb $\lambda(z_0) = d_0 \neq 0$. D'aquí es dedueix a) b) i c).)

Solució de l'exercici 7.2.3

(a) L'única possible singularitat és a $z = 0$, ja que la funció $\cos z$ és entera. Utilitzem la sèrie del cosinus: $\cos w = \sum_{n\geqslant 0} \frac{w^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{w^2}{2} + \cdots$ Prenent $w = 1/z$ obtenim

$$f(z) = z\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n+1}}.$$

Per tant, el punt $z = 0$ és una singularitat essencial.

(b) Tenim una funció racional, i per tant les úniques singularitats són els zeros del denominador: $z = 0$ i $z = 1$.

$z = 0$. La funció $g(z) := \frac{1+z^2}{(z-1)^2}$ és holomorfa a un entorn de 0 i té $g(0) = -1 \neq 0$. Per tant, tenim

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\,g(z),$$

i deduïm que f té un pol de multiplicitat 3 a $z = 0$. Trobem la part singular del desenvolupament a partir del desnvolupament de g a l'entorn de 0: si $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ aleshores

$$f(z) = \frac{1}{z^3}[a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots] = \frac{a_0}{z^3} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + \cdots$$

Cal doncs trobar $a_0 = g(0)$, $a_1 = g'(0)$ i $a_2 = g''(0)/2$. Utilitzant l'expressió de g i derivant, veiem que aquests valors són $a_o = 1$, $a_1 = 2$ i $a_2 = 4$, de manera que la part singular de la sèrie de Laurent al pol $z = 0$ és

$$\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z}\ .$$

$z = 1$. Procedim com al cas $z = 0$. La funció $h(z) := \frac{1+z^2}{z^3}$ és holomorfa a l'entorn de 1, amb valor $h(1) = 2$. Tenim doncs que $z = 1$ és un pol de multiplicitat 2:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\,h(z),$$

i la part singular de la sèrie de Laurent a aquest punt sortirà de mirar el desenvolupament de h a l'entorn del punt 1. Derivant h i avaluant al punt -1 tenim

$$h(z) = 2 - 4(z-1) + \cdots,$$

i per tant la part singular de la sèrie de Laurent a aquest punt és

$$\frac{2}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1} \,.$$

(c) La funció $1 - e^z$ és entera; per tant les singularitats de f es troben només allà on $e^z - 1 = 0$, és a dir, als punts $z_k = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Mirem quin tipus de singularitat tenim a cada punt z_k.Desenvolupant e^z al punt z_k tenim

$$e^z = e^{z_k} + e^{z_k}(z-z_k) + \frac{e^{z_k}}{2}(z-z_k)^2 + \cdots = 1 + 1(z-z_k) + \frac{1}{2}(z-z_k)^2 + \cdots$$

i per tant

$$e^z - 1 = (z-z_k)\,[1 + \frac{1}{2}(z-z_k) + \cdots] = (z-z_k)\,g(z),$$

amb g holomorfa a l'entorn de z_k i amb $g(z_k) = 1 \neq 0$. Amb això veiem que

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_k)^2}\frac{1}{g^2(z)},$$

i $1/g^2$ és una funció holomorfa a l'entorn del punt z_k, amb $1/g^2(z_k) = 1 \neq 0$.

Per tant z_k és un pol de multiplicitat 2. La part singular la trobem mirant el desenvolupament a l'entorn de z_k de la funció $h = 1/g^2$. Tenim $h(z_k) = 1$. Derivant,

$$h'(z_k) = -\frac{2}{g^3(z_k)}g'(z_k) = -1,$$

ja que, pel que veiem al desenvolupament de g, tenim $g(z_k) = 1$ i $g'(z_k) = 1/2$.

Per tant

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_k)^2}\,[1 - (z-z_k) + \cdots]\,,$$

i la part singular de la sèrie de Laurent a aquests punts és

$$\frac{1}{(z-z_k)^2} - \frac{1}{z-z_k} \,.$$

Solució de l'exercici 7.2.4

Determinem el tipus de singularitat mirant el comportament de f al voltant del punt a.

La primera condició diu que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} f(z_n) = -\infty$, i per tant la singularitat no és evitable.

Per altra part, els punts $z_n + 1/n$ tendeixen a a, i en aquest punts la funció té un mòdul proper a 1; això exclou que a pugui ser un pol. Si ho fos tindríem $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$, i per tant, per a tot $M > 0$ existiria $\epsilon > 0$ tal que

$$|f(z)| \geqslant M, \quad \text{per a tot } z \text{ amb} \quad 0 < |z-a| < \epsilon.$$

Això donaria, per a n prou avançat,

$$|f(z_n + \frac{1}{n})| \geqslant M,$$

en contra de la hipòtesi.

Per tant, a és una singularitat essencial.

Solució de l'exercici 7.2.5

a) $\tan(1/z) = \sin(1/z)/\cos(1/z)$, tenim singularitat a $z = 0$, les altres singularitats són quan $\cos(1/z) = 0$, és a dir, quan $1/z = \pi/2 + n\pi$, llavors les tenim quan $z = 1/(\pi/2 + n\pi) =: z_n$). AixÚ és una successió de singularitats que tendeixen a 0. Llavors la singularitat $z = 0$ no és aïllada. Els pols a z_n són simples. En efecte

$$\lim_{z\to z_n} \frac{(z - z_n)\sin(1/z)}{\cos(1/z)} = (-1)^n \lim_{z\to z_n} \frac{(z - z_n)}{\cos(1/z)} = (-1)^n \lim_{z\to z_n} \frac{z^2}{\sin(1/z)} = z_n^2 \neq 0$$

i si $n > 1$

$$\lim_{z\to z_n} \frac{(z - z_n)^n \sin(1/z)}{\cos(1/z)} = (-1)^n \lim_{z\to z_n} \frac{(z - z_n)^n}{\cos(1/z)} = (-1)^n \lim_{z\to z_n} \frac{z^2 n(z - z_n)^{n-1}}{\sin(1/z)} = 0$$

i els pols són simples als z_n. La singularitat a $z = 0$ és essencial. Si no fos essencial hi ha un enter $k > 0$ tal que $f(z) = b_k/z^k + b_{k-1}/z^{k-1} + \cdots$ amb $b_k \neq 0$, llavors $g(z) = z^k f(z) = b_k + b_{k-1}z + \cdots$ és holomorfa i no nula en un cert disc $|z| < r$. Llavors $f(z) = g(z)/z^k$ és holomorfa a $0 < |z| < r$ i contradiu que 0 sigui punt d'acumulació de punts singulars.

b) Volem veure si $b_n = 0$ per a qualsevol n. Recordem que

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f(w) w^{n-1} dw.$$

Però

$$\begin{aligned} \left| \oint_{C_r} f(w) w^{n-1} dw \right| &\leqslant \oint_{C_r} |f(w)||w^{n-1}||dw| \\ &\leqslant \oint_{C_r} |w|^{-\alpha} |w^{n-1}||dw| = \int_0^{2\pi} |re^{it}|^{-\alpha} |re^{it}|^{n-1} |d(re^{it})| = 2\pi r^{n-\alpha} \end{aligned}$$

que tendeix a zero si $r \to 0$ ja que $n \geqslant 1$ i $0 < \alpha < 1$. Llavors $b_n = 0$.

Solució de l'exercici 7.3.1

a) Si f te pol simple a z_0 llavors la part $b_1/(z - z_0)$ de la seva sèrie de Laurent és no nul·la, llavors $b_1 \neq 0$ i $b_1 = \operatorname{Res}(f, z_0) \neq 0$. b) Si que pot passar, per exemple $f(z) = 1/z^2$ té residu 0 a $z = 0$.

Solució de l'exercici 7.3.2

a) Falsa, exemple $f(z) = 1/z, g(z) = -1/z$.
b) Falsa, exemple $f(z) = 1/z = g(z)$.
c) Per ser la singularitat de f essencial resulta

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{b_n}{z^n} + \text{Part regular}$$

amb infinits b_n no nuls. I per ser la de g d'ordre finit k

$$g(z) = \sum_{n=1}^{k} \frac{c_n}{z^n} + \text{Part regular.}$$

Llavors

$$(f+g)(z) = \sum_{n>k} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_n + c_n}{z^n} + \text{Part regular}$$

i $f + g$ te singularitat essencial a 0.
d) L'enunciat diu que $f(z) = h(z)/z^m$ amb h holomorfa tal que $h(z) \neq 0$. Llavors

$$f(z^2) = h(z^2)/z^{2m}$$

i l'ordre del pol de $f(z^2)$ a 0 és $2m$.

Solució de l'exercici 7.3.3

Si f té zero d'ordre m a z_0 resulta que existeix h amb $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ amb $h(z_0) \neq 0$ i holomorfa. Llavors

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-z_0)^{m-1}h(z) + (z-z_0)^m h'(z)}{(z-z_0)^m h(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Com que $h(z_0) \neq 0$ el quocient h'/h és analític a z_0 i $\text{Res}(f'/f, z_0) = m$.

Solució de l'exercici 7.3.4

a) Per tenir zero simple a z_0 resulta $g(z) = \sum_{n\geqslant 1} a_n(z-z_0)^n$ amb $a_1 \neq 0$. Llavors

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{a_1(z-z_0)(1+\frac{a_2}{a_1}(z-z_0)+\dots)} = \frac{1/a_1}{z-z_0}(1-(\frac{a_2}{a_1}(z-z_0)+\dots)+(\frac{a_2}{a_1}(z-z_0)+\dots))^2+\dots)$$

i el pol de $1/g(z)$ a z_0 és simple.
b) El residu és $1/a_1$ i $a_1 = g'(z_0)$.
c) Mirem els zeros de $\sin z$, són a $z = n\pi$ per $n \in \mathbb{Z}$. Llavors, per l'apartat anterior $\text{Res}(1/\sin z, n\pi) = 1/\cos(n\pi) = (-1)^n$.

Solució de l'exercici 7.3.5

a) La funció f te singularitats a $z = 0, -1$. Quan $z = -1$ la singularitat és evitable ja que $\lim_{z\to -1} f(z) = 3 \neq \infty$, llavors $\mathrm{Res}(f, -1) = 0$. Com que f té un pol d'ordre 2 a l'origen, $\mathrm{Res}(f, 0) = g'(0)$, amb $g(z) = z^2 f(z)$. Derivem

$$g'(z) = \left(\frac{z^3+1}{z+1}\right)'_{z=0} = -1$$

i $\mathrm{Res}(f, 0) = -1$.

b) Els pols són a $z = 2\pi ni$. Estudiem $\lim_{z\to 2\pi ni}(z - 2\pi ni)g(z)$. Resulta

$$\lim_{z\to 2\pi ni}(z - 2\pi ni)g(z) = \frac{0}{0} = \lim_{z\to 2\pi ni} \frac{1}{e^z} = 1$$

on hem fet servir la regla de l'Hôpital. Llavors $\mathrm{Res}(g(z), 2\pi ni) = 1$.

c) El pol és a $z = 0$. Tenim

$$\begin{aligned} &\cos(1 - 1/z) = \cos(1)\cos(1/z) + \sin(1)\sin(1/z) = \\ &\qquad = \cos(1)(1 - 1/(2z^2) + \cdots) + \sin(1)(1/z - 1/(3z^3) + \cdots) = \cdots + \sin(1)/z + \cdots \end{aligned}$$

i el residu que volíem calcular és $\sin(1)$.

Solució de l'exercici 7.3.6

L'interior de la corba d'integració conté els pols simples $z = 1, 2, 3, 4, 5$. Calculem els residus en aquests punts fent servir que per un pol simple $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$. Llavors

$$\mathrm{Res}(f, 1) = \frac{1}{48}, \quad \mathrm{Res}(f, 2) = \frac{-1}{18}, \quad \mathrm{Res}(f, 3) = \frac{1}{16}, \quad \mathrm{Res}(f, 4) = \frac{-1}{30}, \quad \mathrm{Res}(f, 5) = \frac{1}{144},$$

i la integral val $\pi i/360$.

Solució de l'exercici 7.3.7

a) Te pols simples a $z = \pm 2$, calculem els residus i valen els dos $\sin(2)/4$, aplicant la formula del residus veiem que la integral és $\pi i \sin(2)$.

b) Els pols són simples i són les arrels cúbiques de l'unitat diferents de 1, és a dir $\omega_1 = e^{i2\pi/3}$ i $\omega_2 = e^{-2\pi i/3}$. Els residus són $\pm 1/(\omega_1 - \omega_2)$ respectivament. Llavors la integral és 0.

c) Els pols a l'interior de la corba $|z| = 3$ són $z = 2$ i $z = 0$. El primer és un pol simple amb residu $e^{2i}(2 - 5i)/116$. A $z = 0$ tenim un pol d'ordre 2 llavors per calcular el residu hem d'anar més en compte.

$$\mathrm{Res}(f, 0) = (z^2 f(z))'_{z=0} = \cdots = \frac{12 - 5i}{-100}.$$

Finalment tenim que la integral és

$$\pi i \left(\frac{e^{2i}(2 - 5i)}{58} - \frac{12 - 5i}{50}\right).$$

Nota: Amb `Sage` podem fer `f.maxima_methods().residue(z,a)`

Solució de l'exercici 7.3.8

Segons el teorema dels residus

$$\int_{\partial D(0,7)} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_a \operatorname{Res}(f,a) \ ,$$

o a recorre els pols de f dins el disc $D(0,7)$.

Els pols de f són els punts on $1+\sin z = 0$, és a dir, els punts de la forma $z = -\pi/2+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. D'aquesta família, nomes $a_1 = -\pi/2$ i $a_2 = 3\pi/2$ són dins els disc $D(0,7)$. Per tant

$$\int_{\partial D(0,7)} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,a_1) + \operatorname{Res}(f,a_2)\right) \ .$$

Per trobar els valors d'aquests residus mirem quin és el desenvolupament de Laurent a cadascun dels punts.

Punt a_1. Desenvolupant la funció $\sin z$ a l'entorn d'aquest punt tenim

$$\sin z = -1 + \frac{1}{2}(z-a_1)^2 - \frac{1}{4!}(z-a_1)^4 + \cdots \ ,$$

i per tant

$$1+\sin z = \frac{1}{2}(z-a_1)^2 - \frac{1}{4!}(z-a_1)^4 + \cdots = (z-a_1)^2 h(z) \ ,$$

on $h(z)$ és holomorfa a l'entorn de a_1 i a més $h(a_1) = 1/2$, $h'(a_1) = 0$.

Amb això tenim, a l'entorn de a_1:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a_1)^2}\frac{1+z}{h(z)} \ .$$

Aquest segon factor és holomorf a l'entorn de a_1, de manera que té un desenvolupament en sèrie de la forma

$$F(z) := \frac{1+z}{h(z)} = b_0 + b_1(z-a_1) + b_2(z-a_1)^2 + \cdots$$

Així doncs, localment a l'entorn de a_1

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-a_1)^2} + \frac{b_1}{z-a_1} + b_2 + \cdots$$

i per tant $\operatorname{Res}(f,a_1) = b_1 = F'(a_1)$. Derivant tenim

$$F'(z) = \frac{h(z) - (1+z)h'(z)}{(h(z))^2} \ ,$$

i avaluant a a_1

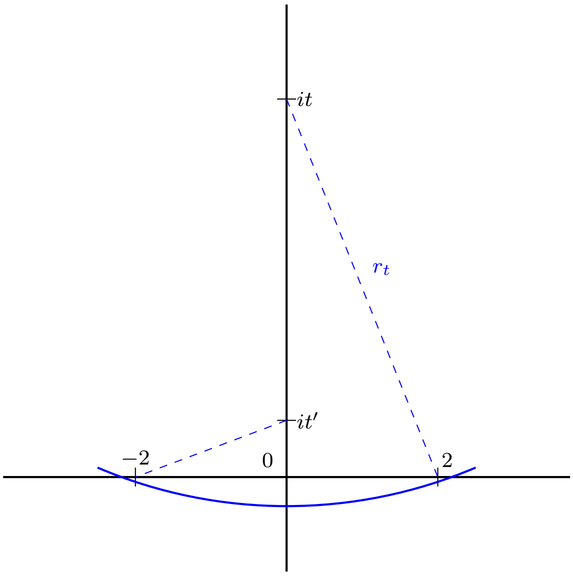
$$\operatorname{Res}(f,a_1) = F'(a_1) = \frac{1}{h(a_1)} = 2 \ .$$

Punt a_2. Procedint de manera anàloga es veu que $\text{Res}(f, a_1) = 2$.
Tot plegat

$$\int_{\partial D(0,7)} f(z)\, dz = 2\pi i(2+2) = 8\pi i\ .$$

Solució de l'exercici 7.3.9

La circumferència de centre it que passa per ± 2 té radi $r_t = |it - 2| = \sqrt{4+t^2}$.



Els pols de f són $z_0 = 0$ i $z_1 = t$, i els residus respectius

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{e^{i\pi 0}+1}{(0-t)} = -\frac{2}{t},$$
$$\text{Res}(f, t) = \frac{e^{i\pi t}+1}{t}.$$

Observem que $z_0 = 0$ sempre és dins el disc $D(it, r_t)$:

$$|0 - it| = t < r_t = \sqrt{4+t^2}.$$

Per altra part $z_1 \in D(it, r_t)$ si i només si

$$|t - it| = t\sqrt{2} < r_t = \sqrt{4+t^2},$$

és a dir, si i només si $t > 2$

Separem per tant dos casos:

(i) $t < 2$. Aquí

$$f(t) = 2\pi i\big[\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, t)\big] = 2\pi i\big[-\frac{2}{t} + \frac{e^{i\pi t}+1}{t}\big) = \frac{2\pi i}{t}(e^{i\pi t} - 1).$$

(ii) $t > 2$. Ara

$$f(t) = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{4\pi i}{t}.$$

Solució de l'exercici 7.4.1

La funció f que integrem té dos singularitats aïllades, a $z = 0, 1$. Llavors la integral és $2\pi i(\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1)) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$. Fem el canvi $z = 1/w$ llavors

$$\frac{1}{w^2} \frac{5(1/w) - 1}{(1/w)((1/w) - 1)} = \frac{5 - w}{w(1 - w)}$$

i

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{5 - w}{w(1 - w)}, 0\right) = -5.$$

La integral és llavors igual a $10\pi i$.

Solució de l'exercici 7.4.2

Sabem que $I = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = 2\pi i \operatorname{Res}(f(1/w)/w^2, 0)$. Tenim

$$\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{aw^2 - 1}{(a^2 w^2 + 1)w}.$$

Llavors $\operatorname{Res}(f(1/w)/w^2, 0) = -1$ i $I = -2\pi i$.

Solució de l'exercici 7.4.1

$$\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2} e^w \sin(w) \sim \frac{1}{w}$$

i el residu a l'infinit és -1. Llavors la integral és $2\pi i$.

Solució de l'exercici 7.5.1

(a) La funció $f(z)$ és racional i té com a úniques singularitats les arrels del denominador. Factoritzant $z^2 + 9 = (z + 3i)(z - 3i)$ i $z^2 + 4 = (z + 2i)(z - 2i)$ veiem que aquestes són $z = \pm 3i$, $z = \pm 2i$.

(b) Tenim

$$f(z) = \frac{z^2}{(z + 3i)(z - 3i)(z + 2i)^2(z - 2i)^2} = \frac{1}{(z - 2i)^2} h(z),$$

on

$$h(z) = \frac{z^2}{(z + 3i)(z - 3i)(z + 2i)^2} = \frac{z^2}{(z^2 + 9)(z + 2i)^2}$$

és holomorfa a un entorn de $z = 2i$ i amb $h(2i) \neq 0$. Desenvolupant en sèrie aquesta funció a l'entorn d'aquest punt tindrem doncs

$$h(z) = h(2i) + h'(2i)(z-2i) + \frac{h''(2i)}{2}(z-2i)^2 + \cdots,$$

i per tant

$$f(z) = \frac{h(2i)}{(z-2i)^2} + \frac{h'(2i)}{z-2i} + \frac{h''(2i)}{2} + \cdots$$

Aleshores, la part principal del desenvolupament de Laurent de f al voltant de $z = 2i$ serà

$$\frac{h(2i)}{(z-2i)^2} + \frac{h'(2i)}{z-2i}.$$

Directament de la definició de h tenim que

$$h(2i) = \frac{4i^2}{(4i^2+9)(4i)^2} = \frac{1}{20}.$$

Derivant tenim també

$$h'(z) = \frac{2z}{(z^2+9)(z+2i)^2}\Big[1 - \frac{z^2}{z^2+9} - \frac{z}{z+2i}\Big],$$

d'on veiem que

$$h'(2i) = \frac{4i}{5\,(4i)^2}\Big[1 + \frac{4}{5} - \frac{2i}{4i}\Big] = \frac{13}{200i}.$$

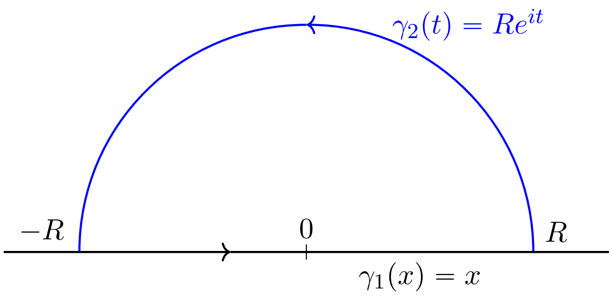
Tot plegat, la part principal buscada és

$$P_{2i}(z) = \frac{\frac{1}{20}}{(z-2i)^2} - \frac{\frac{13i}{200}}{z-2i}.$$

(c) La funció $f(x)$ és acotada a $[0, +\infty)$, i per tant només cal estudiar-ne la convergència a ∞. Pel criteri de comparació per pas al límit veiem que la integral demanada té el mateix caràcter que $\int^{\infty} \frac{dx}{x^4}$, és a dir, és convergent:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1/x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^6}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = 1.$$

Per calcular la integral utilitzarem el teorema dels residus a la funció $f(z)$ i el camí tancat $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, on $\gamma_1(x) = x$, $x \in [-R, R]$ és el segment $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ i $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ és la semicircumferència que va de R a $-R$ passant pel semipla superior.



Les singularitats de f tancades per γ, si R és prou gran, són $z = 2i, 3i$, i per tant, pel teorema dels residus,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,2i) + \mathrm{Res}(f,3i)\big).$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

i

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^\pi f(Re^{it})\,iRe^{it}dt.$$

Com que

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \lim_{R\to\infty} \frac{|f(Re^{it})|}{1/R^4} \leqslant 1,$$

veiem que la integral a γ_2 tendeix a 0 quan $R \to \infty$:

$$\left|\int_0^\pi f(Re^{it})\,iRe^{it}dt\right| \leqslant \int_0^\pi |f(Re^{it})|Rdt \leqslant C\pi R\frac{1}{R^4}$$

Tornant a la igualtat de dalt i passant al límit quan $R \to \infty$ tenim doncs

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,2i) + \mathrm{Res}(f,3i)\big).$$

A l'apartat (b) hem vist que

$$\mathrm{Res}(f,2i) = \frac{13}{200i}.$$

De manera anàloga, factoritzant el denominador de f com hem fet anteriorment, veiem que

$$\mathrm{Res}(f,3i) = \frac{(3i)^2}{(3i+3i)((3i)^2+4)^2} = -\frac{3}{50i}.$$

Per tant,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\Big(\frac{13}{200i} - \frac{3}{50i}\Big) = \frac{\pi}{100}.$$

Com que la funció f és parell,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} f(x)\,dx,$$

i per tant, finalment

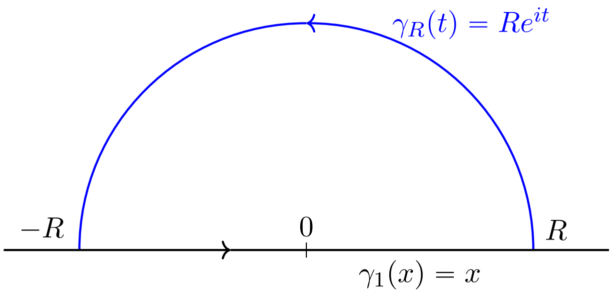
$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{200}.$$

Solució de l'exercici 7.5.2

Considerem la funció $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ que és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ excepte en les arrels quartes de -1, que són pols simples de f. Aquestes singularitats són

$$a_k = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Si $R > 1$, sigui $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R$ el semicercle



Com que només a_0 i a_1 es troben a l'interior del semicercle, pel teorema dels residus, tenim

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(f, a_0) + \operatorname{Res}(f, a_1)\big).$$

Calculem aquests residus. Com que són pols simples,

$$\operatorname{Res}(f, a_0) = \lim_{z\to a_0}(z-a_0)f(z) = a_0^2 \lim_{z\to a_0}\frac{(z-a_0)}{1+z^4} = \frac{1}{4\,a_0}.$$

De manera semblant, tenim

$$\operatorname{Res}(f, a_1) = \lim_{z\to a_1}(z-a_1)f(z) = \frac{1}{4\,a_1}.$$

Aleshores

$$\operatorname{Res}(f, a_0) + \operatorname{Res}(f, a_1) = \frac{1}{4}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) = -i\,\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Per tant

$$\int_\gamma f(z)dz = \pi\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Per altra banda, posant $I_R = \int_{\gamma_R} f$, tenim

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \int_\gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx + I_R.$$

Si veiem que $I_R \to 0$ quan $R \to \infty$, llavors fent $R \to \infty$ en la identitat anterior, obtindrem el resultat desitjat (donat que és una integral impròpia convergent)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Tenim

$$I_R = \int_0^\pi \frac{R^2 e^{2it}}{1 + R^4 e^{2it}} \, iRe^{it} dt.$$

Per tant

$$|I_R| \leqslant R^3 \int_0^\pi \frac{dt}{|1 + R^4 e^{2it}|} \leqslant \frac{\pi R^3}{R^4 - 1} \to 0.$$

Solució de l'exercici 7.5.3

Considerem la funció $f(z) = \frac{1}{1+z^5}$, i integrem aquesta funció en el recinte γ amb $n = 5$. Obtenim

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{5}}) = 2\pi i \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{5}}} (z - e^{i\frac{\pi}{5}}) f(z) = \frac{2\pi i}{5} e^{-\frac{4\pi i}{5}}.$$

Posant $\gamma_R = Re^{it}$ per $t \in [0, \frac{2\pi}{5}]$, tenim

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{[0,R]} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz - \int_{[0,Re^{\frac{2\pi i}{5}}]} f(z)dz.$$

Tenim

$$\int_{[0,R]} f(z)dz = \int_0^R \frac{dx}{1 + x^5} \longrightarrow I \qquad \text{quan} \quad R \to \infty.$$

Ara, el segment $[0, Re^{\frac{2\pi i}{5}}]$ ve parametritzat per $\sigma(t) = te^{\frac{2\pi i}{5}}$ per $t \in [0, R]$. Llavors

$$\int_{[0,Re^{\frac{2\pi i}{5}}]} f(z)dz = \int_0^R \frac{1}{1 + (te^{\frac{2\pi i}{5}})^5} e^{\frac{2\pi i}{5}} dt = e^{\frac{2\pi i}{5}} \int_0^R \frac{dt}{1 + t^5} \longrightarrow e^{\frac{2\pi i}{5}} I \qquad \text{quan} \quad R \to \infty.$$

Si veiem que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0,$$

llavors obtindrem

$$\frac{2\pi i}{5} e^{-\frac{4\pi i}{5}} = (1 - e^{\frac{2\pi i}{5}}) I.$$

Per tant

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^5} = \frac{2\pi i}{5e^{\frac{4\pi i}{5}}(1 - e^{\frac{2\pi i}{5}})} = \frac{2\pi i e^{\frac{\pi i}{5}}}{5(e^{\frac{2\pi i}{5}} - 1)} = \frac{\pi}{5\sin(\pi/5)}.$$

Finalment, com que

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^{\frac{2\pi}{5}} \frac{iRe^{it}\, dt}{1 + R^5 e^{5it}},$$

tenim

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| \leqslant \frac{2\pi}{5} \frac{R}{R^5 - 1} \longrightarrow 0 \qquad \text{quan} \quad R \to \infty.$$

Solució de l'exercici 7.5.4

Aplicant el criteri de comparació per pas al límit amb la funció $1/x^{2-a}$ veiem que aquesta integral impròpia és convergent.

Considerem la funció $f(z) = \frac{z^a}{1+z^2} = \frac{e^{a \log z}}{1+z^2}$, on el logaritme és l'associat a l'argument $\arg z \in (0, 2\pi)$. Donats $\epsilon, R > 0$ considerem també la corba $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ diferenciable a trossos i tancada formada pels trossos:

- $\gamma_1(x) = x + i\epsilon$, amb $x \in [0, R]$.
- $\gamma_2(\theta) = Re^{i\theta}$, amb $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$, on δ és l'argument del punt $z = x + i\epsilon$ ($\delta = \arctan(R/\epsilon)$.
- $\gamma_3(x) = x - i\epsilon$, amb $x \in [0, R]$.
- $\gamma_4(\theta) = \epsilon e^{i\theta}$, amb $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

Com que la funció f té els dos pols $a_1 = i$, $a_2 = -i$ dins la regió tancada per γ, el teorema dels residus dóna:

$$\int_0^R \frac{e^{a\log(x+i\epsilon)}}{1+(x+i\epsilon)^2}dx + \int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{e^{a\log(Re^{i\theta})}}{1+(Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta}d\theta - \int_0^R \frac{e^{a\log(x-i\epsilon)}}{1+(x-i\epsilon)^2}dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{e^{a\log(\epsilon e^{i\theta})}}{1+(\epsilon e^{i\theta})^2} i\epsilon e^{i\theta}d\theta = 2\pi i\big[\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i)\big]$$

Essent $f(z) = \frac{e^{a \log z}}{(z-i)(z+i)}$ veiem que

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{e^{a\log i}}{i+i} = \frac{e^{ai\pi/2}}{2i}$$
$$\mathrm{Res}(f,-i) = \frac{e^{a\log(-i)}}{-i-i} = \frac{e^{ai3\pi/2}}{-2i} ,$$

de manera que

$$2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i)\big) = \pi\big(e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2}\big) .$$

Per altra part és clar que les integrals dels trossos γ_2 i γ_4 tendeixen a 0 quan $\epsilon \to 0$ i $R \to +\infty$, ja que passant els mòduls a dins de la integral tenim:

$$\left|\int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{e^{a\log(Re^{i\theta})}}{1+(Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{e^{a\log R}}{R^2-1} Rd\theta = \frac{2\pi R^{1+a}}{R^2-1}$$

i

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{e^{a\log(\epsilon e^{i\theta})}}{1+(\epsilon e^{i\theta})^2} i\epsilon e^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{e^{a\log\epsilon}}{1-\epsilon^2} \epsilon d\theta = \frac{\pi\epsilon^a}{1-\epsilon^2} .$$

Pel que fa al tros corresponent a γ_3 tenim

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^R \frac{e^{a\log(x-i\epsilon)}}{1+(x-i\epsilon)^2}dx = \int_0^\infty \frac{e^{a(\log x + i2\pi)}}{1+x^2}dx = e^{2\pi i a}\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx .$$

Tot plegat tenim doncs

$$(1 - e^{2\pi ia}) \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\, dx = \pi\big(e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2}\big) \ ,$$

d'on deduïm que

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\, dx = \pi \frac{e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2}}{1 - e^{2\pi ia}} \ .$$

Podem comprovar que aquest és un nombre real positiu efectuant la divisió:

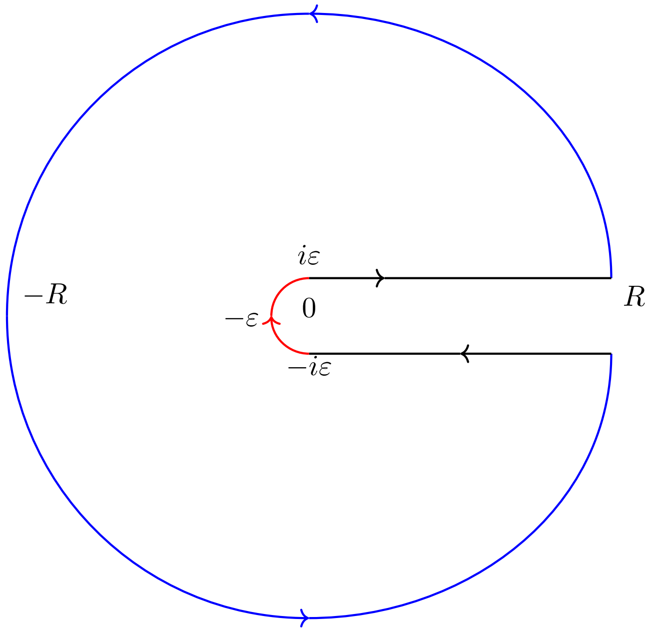
$$\begin{aligned} \frac{e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2}}{1 - e^{2\pi ia}} &= \frac{(e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2})(1 - e^{-2\pi ia})}{2} = \frac{e^{ai\pi/2} + e^{-ai\pi/2}}{2} - \frac{e^{ai3\pi/2} + e^{-ai3\pi/2}}{2} \\ &= \cos(a\pi/2) - \cos(3a\pi/2) \ . \end{aligned}$$

Solució de l'exercici 7.5.5

Considerem la funció

$$f(z) = \frac{d1}{\sqrt{z}\,(1+z^2)}, \qquad \sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z},$$

amb $\log z = \ln|z| + i \arg z$, amb $\arg z \in (0, 2\pi)$. Llavors aquesta branca de $\sqrt{z}$ és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash[0, +\infty)$. En aquest cas, prenem $R > 1$ prou gran, i $0 < \varepsilon < 1/2$ prou petit, i integrem f en el recinte "comecocos" γ de la figura



Tenim $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$, amb

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x + i\varepsilon; & x &\in [0, R^*]; \\ \gamma_2(t) &= Re^{it}; & t &\in [\varepsilon^*, 2\pi - \varepsilon^*] \\ \gamma_3(x) &= x - i\varepsilon; & x &\in [0, R^*]; \\ \gamma_4(t) &= \varepsilon e^{it}; & t &\in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]. \end{aligned}$$

amb $R^* \to \infty$ quan $R \to \infty$, i també $\varepsilon^* \to 0$ quan $\varepsilon \to 0$.

Les singularitats de f a l'interior del recinte γ són $z = i$ i $z = -i$, que són pols de f d'ordre 1. Pel teorema dels residus, tenim

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}\,(1+z^2)} = 2\pi i \Big(\mathrm{Res}\,(f, i) + \mathrm{Res}\,(f, -i)\Big).$$

Com que $z = i$ és un pol d'ordre 1, tenim

$$\mathrm{Res}\,(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{\sqrt{z}(z+i)} = \frac{1}{\sqrt{i}\,2i},$$

amb

$$\sqrt{i} = e^{\frac{1}{2}\log i} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

De manera semblant, tenim

$$\mathrm{Res}\,(f, -i) = \lim_{z \to -i} (z + i) f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{1}{\sqrt{z}(z-i)} = -\frac{1}{\sqrt{-i}\ 2i},$$

amb

$$\sqrt{-i} = e^{\frac{1}{2}\log(-i)} = e^{\frac{i}{2}\arg(-i)} = e^{\frac{3\pi\, i}{4}}.$$

Llavors

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\,(f, i) + \mathrm{Res}\,(f, -i) &= \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{-i}}\Big) = \frac{1}{2i}\big(e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{3\pi\, i}{4}}\big) \\ &= \frac{1}{2i}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}\big(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\big) = e^{-i\frac{\pi}{2}}\sin(\pi/4) = -i\,\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}\,(1+z^2)} = \pi\sqrt{2}.$$

Per altra banda, tenim

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + I_R - \int_{\gamma_3} f(z)dz - I_\varepsilon,$$

amb

$$I_R = \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\varepsilon^*}^{2\pi - \varepsilon^*} \frac{iRe^{it}\, dt}{\sqrt{Re^{it}}(1 + R^2 e^{2it})}$$

i

$$I_\varepsilon = \int_{\gamma_4} f(z)dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{i\varepsilon e^{it}\, dt}{\sqrt{\varepsilon e^{it}}(1+\varepsilon^2 e^{2it})}$$

Tenim

$$|I_R| \leqslant \frac{R}{\sqrt{R}} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1+R^2e^{2it}|} \leqslant 2\pi \frac{\sqrt{R}}{R^2-1} \longrightarrow 0$$

quan $R \to \infty$. També

$$|I_\varepsilon| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dt}{|1+\varepsilon^2 e^{2it}|} \leqslant \pi \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{quan } \varepsilon \to 0.$$

Per tant,

$$\lim_{R\to\infty;\varepsilon\to 0} \left(\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz \right) = \pi\sqrt{2}.$$

Ara, tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^{R^*} \frac{dx}{\sqrt{x+i\varepsilon}\,(1+(x+i\varepsilon)^2)} \longrightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)},$$

quan $R \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$, ja que, per $x > 0$, tenim que $\arg(x+i\varepsilon) \to 0$ quan $\varepsilon \to 0$, i per tant

$$\sqrt{x+i\varepsilon} = e^{\frac{1}{2}\log(x+i\varepsilon)} = e^{\frac{1}{2}(\ln|x+i\varepsilon| + i\arg(x+i\varepsilon))} \longrightarrow e^{\frac{1}{2}\,\ln x} = \sqrt{x} \qquad \text{quan } \varepsilon \to 0.$$

També, com que per $x > 0$, tenim que $\arg(x - i\varepsilon) \to 2\pi$ quan $\varepsilon \to 0$, tenim

$$\sqrt{x-i\varepsilon} = e^{\frac{1}{2}\log(x-i\varepsilon)} = e^{\frac{1}{2}(\ln|x-i\varepsilon| + i\arg(x-i\varepsilon))} \longrightarrow e^{\frac{1}{2}\,(\ln x + 2\pi i)} = \sqrt{x}\, e^{\pi i} = -\sqrt{x} \qquad \text{quan } \varepsilon \to 0.$$

Per tant

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_0^{R^*} \frac{dx}{\sqrt{x-i\varepsilon}\,(1+(x-i\varepsilon)^2)} \longrightarrow -\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)},$$

quan $\varepsilon \to 0$ i $R \to \infty$. Tot plegat, tenim

$$\lim_{R\to\infty;\varepsilon\to 0} \left(\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz \right) = 2\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)},$$

d'on obtenim

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Solució de l'exercici 7.5.6

Posem $f(z) = \frac{(\log z)^2}{1+z^2}$, on $\log z = \ln|z| + i \arg z$ amb $\arg z \in (0, 2\pi)$, i integrem la funció f en la regió "comecocos"del cas anterior.

Pel teorema dels residus, tenim

$$\int_\gamma \frac{(\log z)^2 dz}{(1+z^2)} = 2\pi i \Big(\mathrm{Res}\,(f,i) + \mathrm{Res}\,(f,-i)\Big).$$

Com que $z = i$ és un pol d'ordre 1, tenim

$$\mathrm{Res}\,(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{(\log z)^2}{(z+i)} = \frac{(\log i)^2}{2i},$$

amb $\log i = i\frac{\pi}{2}$. De manera semblant, tenim

$$\mathrm{Res}\,(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{(\log z)^2}{(z-i)} = -\frac{(\log -i)^2}{2i},$$

amb $\log -i = \frac{3\pi\, i}{2}$. Llavors

$$\mathrm{Res}\,(f,i) + \mathrm{Res}\,(f,-i) = \frac{1}{i}\Big(\frac{-\pi^2}{8} + \frac{9\pi^2}{8}\Big) = \frac{\pi^2}{i},$$

i per tant,

$$\int_\gamma \frac{(\log z)^2 dz}{(1+z^2)} = 2\pi^3.$$

Es compleix que si $z \in \gamma_1^*$, $z = x + i\varepsilon$, amb el que $\log z \to \log x$ si $\varepsilon \to 0$ i si $z \in \gamma_3^*$, $z = x - i\varepsilon$, amb el que $\log z \to \log x + 2\pi i$ si $\varepsilon \to 0$.

A més,

$$I_R = \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\varepsilon^*}^{2\pi-\varepsilon^*} \frac{(\log(Re^{it}))^2\, dt}{(1+R^2e^{2it})}.$$

Per tant, tenim

$$|I_R| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{R(|\ln R + it|)^2 dt}{|1+R^2e^{2it}|} \leqslant 2\pi \frac{R(\ln R + 2\pi)^2}{R^2-1} \longrightarrow 0$$

quan $R \to \infty$.

Per altra banda,

$$|I_\varepsilon| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\varepsilon(|\ln\varepsilon + it|)^2 dt}{|1+\varepsilon^2e^{2it}|} \leqslant \pi\frac{\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 2\pi)^2}{1-\varepsilon^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{quan } \varepsilon \to 0.$$

Per tant

$$2\pi^3 = \lim_{R\to\infty;\varepsilon\to 0}\int_\gamma \frac{(\log z)^2}{1+z^2}dz = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\left(\ln^2 x - (\ln x + 2\pi i)^2\right)dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}(4\pi^2\ln x - 4\pi i)dx.$$

Prenent part imaginària, deduïm que

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0.$$

Solució de l'exercici 7.5.7

(a) 1; (b) 1/6

Solució de l'exercici 7.5.8

Si $a=0$, $I=2\pi i$; si $|a|>1$, $I=2\pi i(1-e^{1/a})$; si $0<|a|<1$, $I=2\pi i$.

Solució de l'exercici 7.5.9

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\,dt}$$

Utilitzem que

$$\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}, \quad \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}.$$

Parametritzant la circumferència unitat de la manera habitual, $z=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, tenim

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\,dt &= \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{e^{it}-1/e^{it}}{2i}\right)^2}{5+2(e^{it}+1/e^{it})}\,dt = \int_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z-1/z}{2i}\right)^2}{5+2(z+1/z)}\,\frac{dz}{iz} \\ &= -\frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(5z+2z^2+2)} = -\frac{1}{8i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(z+1/2)(z+2)}.\end{aligned}$$

Diem $f(z)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+1/2)(z+2)}$. Aquesta funció té dues singularitats dins el disc unitat (0 i $-1/2$); per tant, pel teorema dels Residus,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\,dt = -\frac{\pi}{4}\big[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,-1/2)\big]$$

Escrivint

$$f(z) = \frac{1}{z+1/2}\,\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+2)}$$

veiem que

$$\mathrm{Res}(f,-1/2) = \frac{((-1/2)^2-1)^2}{(-1/2)^2(-1/2+2)} = \frac{3}{2}.$$

Per altra part, escrivint

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\,g(z), \quad g(z) = \frac{(z^2-1)^2}{(z+1/2)(z+2)}$$

veiem que
$$\mathrm{Res}(f,0) = g'(0).$$
Derivant g tenim
$$g'(z) = \frac{4z(z^2-1)}{(z+1/2)(z+2)} - \frac{(z^2-1)^2}{(z+1/2)^2(z+2)} - \frac{(z^2-1)^2}{(z+1/2)(z+2)^2},$$
i avaluant a 0,
$$g'(0) = 0 - 2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$$
Tornant a l'expressió de dalt, obtenim finalment
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\, dt = -\frac{\pi}{4}\Big[\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\Big] = \frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx}$$

Solució: $\pi/2$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2+\cos t}\, dt}$$

Observem que $\mathrm{Re}(e^{int}) = \cos(nt)$ i per tant serà suficient calcular
$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2+\cos t} dt \ .$$
Expressant $\cos t = 1/2(e^{it}+e^{-it})$ i parametritzant la vora del disc unitat amb $\zeta = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ tenim
$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2+\cos t} dt = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{(2+\frac{e^{it}+e^{-it}}{2})e^{it}}\, ie^{it} dt = \frac{2}{i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^n}{(4+\zeta+1/\zeta)\zeta} d\zeta \ .$$
Factoritzant $\zeta^2 + 4\zeta + 1 = (\zeta + 2 - \sqrt{3})(\zeta + 2 + \sqrt{3})$ obtenim finalment
$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2+\cos t} dt = \frac{2}{i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^n}{(\zeta+2-\sqrt{3})(\zeta+2+\sqrt{3})} d\zeta \ .$$
La funció $f(\zeta) = \frac{\zeta^n}{(\zeta+2-\sqrt{3})(\zeta+2+\sqrt{3})}$ té una única singularitat a $\mathbb{D}$, al punt $a = -2+\sqrt{3}$. Per tant, segons el teorema dels residus,
$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2+\cos t} dt = \frac{2}{i} 2\pi i \mathrm{Res}(f,a) = 4\pi \mathrm{Res}(f,a) \ .$$

La funció $g(\zeta) = \frac{\zeta^n}{\zeta+2+\sqrt{3}}$ és holomorfa a un entorn de $a = -2+\sqrt{3}$, i per tant s'expressa com una sèrie de potències a l'entorn d'aquest punt. Aleshores, a l'entorn de a,

$$\begin{aligned} f(\zeta) =& \frac{1}{\zeta-a} g(\zeta) = \frac{1}{\zeta-a}\big[g(a) + g'(a)(\zeta-a) + \frac{g''(a)}{2}(\zeta-a)^2 + \cdots\big] \\ =& \frac{g(a)}{\zeta-a)} + g'(a) + \frac{g''(a)}{2}(\zeta-a) + \cdots \end{aligned}$$

i per tant $\mathrm{Res}(f,a) = g(a) = \frac{(-2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} = (-1)^n \frac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$. Amb això tenim finalment

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2+\cos t} dt = 4\pi(-1)^n \frac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(-1)^n(2-\sqrt{3})^n \ .$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\, dx}$$

Solució: $5\pi/12$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2-x+1}\, dx}$$

Solució: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sin(1/2) e^{-\sqrt{3}/2}$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx}$$

Considerem la funció

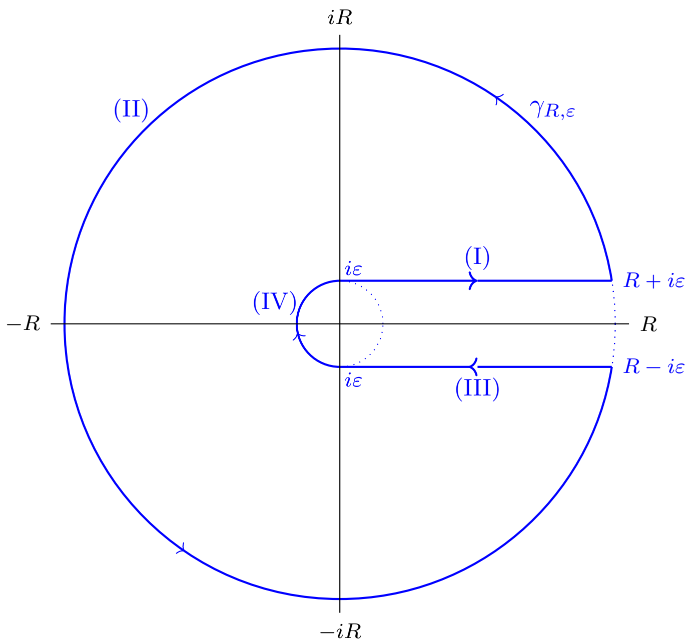
$$f(z) = \frac{(\log z)^2}{1+z^2} = \frac{(\log z)^2}{(z-i)(z+i)} \ ,$$

on el logaritme és l'associat a l'argument $\arg z \in (0, 2\pi)$.

Considerem també la corba $\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$ com al dibuix. Tenim, per a $R >> \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x + i\epsilon, \quad x \in [0, R], \\ \gamma_2(t) &= Re^{it}, \quad t \in [\alpha(\epsilon), 2\pi - \alpha(\epsilon)], \\ -\gamma_3(x) &= x - i\epsilon, \quad x \in [0, R], \\ -\gamma_4(t) &= \epsilon e^{it}, \quad t \in [\pi/2, 3\pi/2], \end{aligned}$$

on $\alpha(\epsilon) = \arcsin(\epsilon/R)$.



Com que la funció f té els dos pols $a_1 = i$, $a_2 = -i$ dins la regió tancada per γ, el teorema dels residus dóna:

$$\int_0^R \frac{(\log(x+i\epsilon))^2}{1+(x+i\epsilon)^2}dx + \int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{(\log(Re^{i\theta}))^2}{1+(Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta}d\theta - \int_0^R \frac{(\log(x-i\epsilon))^2}{1+(x-i\epsilon)^2}dx -$$
$$- \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{(\log(\epsilon e^{i\theta}))^2}{1+(\epsilon e^{i\theta})^2} i\epsilon e^{i\theta}d\theta = 2\pi i\big[\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i)\big] .$$

Directament de l'expressió de f tenim

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{(\log i)^2}{i+i} = \frac{(i\pi/2)^2}{2i} = -\frac{\pi^2}{8i}$$
$$\mathrm{Res}(f,-i) = \frac{(\log(-i))^2}{-i-i} = \frac{(i3\pi/2)^2}{-2i} = \frac{9\pi^2}{8i} ,$$

de manera que

$$2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i)\big) = 2\pi i\frac{\pi^2}{i} = 2\pi^3 .$$

Per altra part és clar que les integrals dels trossos γ_2 i γ_4 tendeixen a 0 quan $\epsilon \to 0$ i $R \to +\infty$, ja que passant els mòduls a dins de la integral tenim:

$$\left|\int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{(\log(Re^{i\theta}))^2}{1+(Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{(\log R)^2 + \theta^2}{R^2-1} Rd\theta \leqslant \frac{2\pi R(\log^2 R + 4\pi^2)}{R^2-1}$$

i

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{(\log(\epsilon e^{i\theta}))^2}{1+(\epsilon e^{i\theta})^2} i\epsilon e^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{\log^2\epsilon + \theta^2}{1-\epsilon^2}\epsilon d\theta \leqslant \frac{\pi\epsilon(\log^2\epsilon + 4\pi^2)}{1-\epsilon^2} .$$

Per tant, passant al límit quan $R \to \infty$ i $\epsilon \to 0$ la igualtat donada pel teorema dels residus obtenim

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{1+x^2}dx - \int_0^\infty \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{1+x^2}dx = 2\pi^3$$

Desenvolupant el quadrat de la segona integral i utilitzant que $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2$, queda

$$-4\pi i \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx + 2\pi^3 = 2\pi^3 \ ,$$

d'on finalment deduïm que

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx = 0 \ .$$

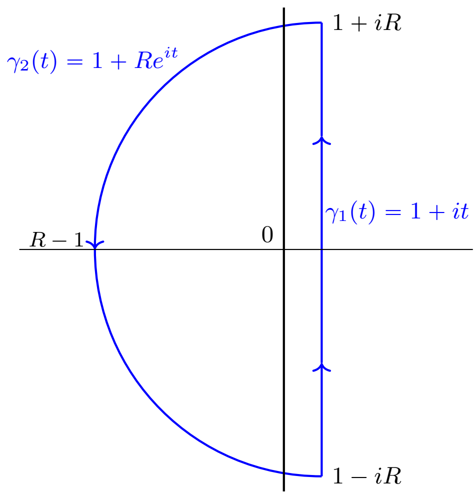
Solució de l'exercici 7.5.10

$\pi/\sqrt[4]{12}$.

Solució de l'exercici 7.5.11

(a) Per a cada $R > 0$ considerem la corba tancada $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, on

$$\gamma_1(t) = 1 + it, \qquad t \in [-R, R],$$
$$\gamma_2(t) = 1 + Re^{it}, \qquad t \in [\pi/2, 3\pi/2].$$



Com que f té una única singularitat, al punt $a = 0$, el teorema dels residus ens dóna

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \ \mathrm{Res}(f, 0).$$

Desenvolupat $e^z = 1 + z + z^2/2 + \cdots$ a l'entorn de 0 veiem queda $\mathrm{Res}(f, 0) = 1$.

Per altra part, la integral a γ_2 tendeix a 0 a mesura que R es fa gran: si $z = 1 + Re^{it}$ aleshores

$$|e^z| = \left|ee^{R\cos t}e^{iR\sin t}\right| \leqslant e,$$

ja que $\cos t \leqslant 0$. Per tant

$$\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(1+Re^{it})\, iRe^{it}\,dt\right| \leqslant \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e}{(R-1)^2} R\,dt = \frac{\pi e R}{(R-1)^2}$$

efectivament tendeix a 0 quan $R \to +\infty$.

Per tant, passant al límit també la integral

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{1+it}}{(1+it)^2}\, i\,dt$$

obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{1+it}}{(1+it)^2}\, i\,dt = 2\pi i.$$

(b) Com que

$$\frac{1}{1+it} = \frac{1-it}{|1+it|^2} = \frac{1-it}{1+t^2},$$

obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{1+it}(1-it)^2}{(1+t^2)^2}\,dt = 2\pi.$$

Utilitzant que

$$\operatorname{Re}\left[e^{1+it}(1-it)^2\right] = e\big(\cos t(1-t^2) + 2t\sin t\big)$$

i igualant parts reals obtenim finalment

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e\big(\cos t(1-t^2) + 2t\sin t\big)}{(1+t^2)^2}\,dt = 2\pi.$$

Solució de l'exercici 7.5.12

(a) $\frac{1/24}{(z-2i)^2} + \frac{5i/48}{z-2i}$; (b) $-\pi/24$.

Solució de l'exercici 7.5.14

$\frac{2\pi}{\sqrt{3}\cos(\alpha\frac{pi}{2})} e^{-i\alpha\frac{\pi}{6}}$.

Solució de l'exercici 7.6.1

a) La funció és entera, llavors meromorfa sense pols. b) No, hi ha una semi-recta de singularitats si prenem, per exemple, l'arrel quadrada principal. c) No, a 0 hi ha una singularitat essencial d) Si, totes les seves singularitats (a $z = n\pi$) són pols simples.

Solució de l'exercici 7.6.2

Considerem un semidisc tancat D, delimitat per la corba $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ on

$$\gamma_1(t) = it,\ t \in [R, -R]; \qquad \gamma_2(t) = Re^{it},\ t \in [-\pi/2, \pi/2],$$

amb R és prou gran per a que tots els zeros de P a $\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ estiguin dins de D.

Si mirem la imatge dels extrems de γ_1 veiem que

$$P(iR) \simeq -R^6 - 2iR; \qquad P(-iR) \simeq -R^6 + 2iR,$$

d'on obtenim que

$$\arg(P(iR)) = \pi - \epsilon; \qquad \arg(P(-iR)) = \pi + \epsilon,$$

per un cert $\epsilon \gtrsim 0$.

D'altra banda, si calculem la imatge sencera de γ_1 tenim

$$P(\gamma_1(t)) = P(it) = -t^6 - t^4 - 6 + 2it.$$

Veiem que la part real no s'anul.la mai mentre que la part imaginària ho fa només per $t = 0$. Deduïm que $P(\gamma_1)$ no talla mai l'eix imaginari i només talla l'eix real una vegada, en el punt $P(\gamma(0)) = -6$.

Concluïm per tant que l'increment de l'argument degut a γ_1 és

$$\Delta(\gamma_1) = \pi + \epsilon - (\pi - \epsilon) = 2\epsilon,$$

com es mostra a la Figura 1.

La corba γ_2 és un semicercle i per tant recorre un argument de π. Donat que $|\gamma_2(t)| = R$ i R és molt gran, domina el terme de grau superior i per tant

$$P(\gamma_2(t)) \simeq \gamma_2(t)^6 = R^6 e^{6it},$$

on $6t \in [-3\pi, 3\pi]$, ja que $t \in [\pi/2, \pi/2]$. Tenim doncs que

$$\Delta(\gamma_1) = 6 \times \pi - 2\epsilon = 6\pi - 2\epsilon,$$

on 2ϵ ve donat pel fet que $P(\gamma_2)$ ha de connectar $P(iR)$ i $P(-iR)$, com es mostra a la Figura 1 (PENDENT).

Concloem doncs que

$$\Delta(\gamma) = 2\epsilon + 6\pi - 2\epsilon = 6\pi,$$

i que per tant,
$$\mathrm{Ind}(P(\gamma), 0) = \frac{6\pi}{2\pi} = 3.$$
El Principi de l'Argument ens diu aleshores que $P(z)$ té exactament 3 arrels dins de D comptades amb multiplicitat. Donat que R és arbitràriament gran, $P(z)$ té 3 arrels al semiplà de la dreta.

Si el polinomi fos $Q(z) = z^6 - z^4 - 2z^3 + 6$, actuaria sobre $\gamma_1(t)$ com
$$Q(\gamma_1(t)) = Q(it) = -t^6 - t^4 + 6 + 2it,$$
i per tant seguiria tallant l'eix real només per $t = 0$; però aquesta vegada ho faria en el punt $Q(0) = 6$. Independentment de quantes vegades pogués tallar l'eix imaginari, la corba imatge seria homotopa a la de la figura 2 en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. La diferència en el càlcul resideix en la variació de l'argument de la corba $Q(\gamma_1)$ que, al rodejar el zero, provoca un augment de l'argument en gairebé 2π. En efecte,
$$\Delta(\gamma_1) = 2\pi - 2\epsilon; \quad \Delta(\gamma_2) = 6\pi + 2\epsilon,$$
i per tant
$$\Delta(\gamma) = 2\pi - 2\epsilon + 6\pi + 2\epsilon = 8\pi.$$
En conseqüència $\mathrm{Ind}(Q(\gamma, 0)) = 4$ i el polinomi Q té 4 zeros al semiplà de la dreta.

Solució de l'exercici 7.6.3

Considerem un cercle $\gamma(t) = Re^{it}$ amb $t \in [0, 2\pi]$ de radi arbitrari $R > 0$. Aquest cercle talla l'eix real en dos punts $\gamma(0) = R$, i $\gamma(\pi) = -R$. Per $t \neq 0, \pi$, $\gamma(t) \notin \mathbb{R}$.

Per hipòtesi, només els punts reals tenen imatge real. Així doncs, la corba $f(\gamma(t))$ talla l'eix real exactament en $t = 0$ i $t = \pi$, en dos punts $f(\pm R)$ que podrien ser iguals o diferents.

Aleshores, la corba parametritzada $f(\gamma(t))$ només pot donar com a molt una volta al punt $z = 0$, és a dir
$$\mathrm{Ind}(f(\gamma(t), 0)) \leqslant 1. \tag{7.3}$$
Pel Principi de l'Argument, tenim doncs que f pot tenir com a molt un zero a $\{|z| \leqslant R\}$. Però com R és arbitrari, això demostra que f té com a molt un zero a $\mathbb{C}$.

Nota: Per a demostrar aquesta fita (7.3) formalment, podem calcular l'índex amb la definció:
$$\mathrm{Ind}(f(\gamma(t)), 0) = \frac{1}{2\pi}(a(2\pi) - a(0)),$$
on $a(t)$ és una determinació qualsevol de $\arg(f(\gamma(t)))$. Combinat amb el Teorema de Bolzano, és fàcil veure que si la diferència entre els arguments és més gran de 2π, aleshores l'argument ha de prendre tots els valors al menys dues vegades, inclosos els valors 0 i π, que corresponen a punts de la recta real.

Solució de l'exercici 7.7.1

Apliquem el teorema de Rouché al disc unitat i les funcions $f(z) = e^z - 2z + 1$ i $g(z) = -2z$. Per a $|z| = 1$, aplicant la indicació, tindrem,

$$|f(z) - g(z)| = |e^z - 1| < e - 1 < 2 = |g(z)|,$$

i per tant

$$\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 1.$$

La indicació es pot provar directament amb la sèrie de l'exponencial: si $|z| = 1$

$$|e^z - 1| = \Big|\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n!}\Big| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1 = e - 1.$$

Solució de l'exercici 7.7.2

Apliquem el teorema de Rouché a $F(z) = f(z) - z$ i $g(z) = -z$: per a $|z| = 1$

$$|F(z) - g(z)| = |f(z)| < 1 = |g(z)|.$$

Per tant

$$\#Z(F) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 1.$$

D'aquí veiem que f té un únic punt fix.

Solució de l'exercici 7.7.3

(a) Apliquem el teorema de Rouché a $f(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$ i $g(z) = 8z$ (el terme de f amb coeficient més gran). Tenim, per a $|z| = 1$,

$$|f(z) - g(z)| = |z^9 - 2z^6 + z^2 - 2| \leqslant 1 + 2 + 1 + 2 = 6 < 8 = |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 1$.

(b) Apliquem el teorema de Rouché a $f(z) = 2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$ i $g(z) = 8$: per a $|z| = 1$,

$$|f(z) - g(z)| = |2z^5 - z^3 + 3z^2 - z| \leqslant 2 + 1 + 3 + 1 = 8 < 8 = |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 0$.

(c) Apliquem el teorema de Rouché a $f(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ i $g(z) = -5z^4$: per a $|z| = 1$,

$$|f(z) - g(z)| = |z^7 + z^2 - 2| \leqslant 1 + 1 + 2 = 4 < 5 = |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 4$.

Solució de l'exercici 7.7.4

a) Aplicarem el teorema de Rouché dues vegades: al disc unitat $\mathbb{D}$ i al disc $D(0,2)$. Notem que P és un polinomi de grau 6, per tant té exactament 6 zeros comptats amb multiplicitat. Comencem pel disc $D(0,2)$. Definim $g(z) = z^6 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Hem de buscar els zeros de la funció $P \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a $D(0,2)$. Aplicarem el teorema de Rouché. Considerem $\gamma = \partial D(0,2)$ (corba simple). Notem que

$$|P(z) - g(z)| \leqslant 63 < 64 = |g(z)|, \quad \forall z \in \gamma.$$

Podem aplicar el teorema de Rouché que ens assegura que el nombre de zeros de g a $D(0,2)$ coincideix amb el nombre de zeros de P a $D(0,2)$ (comptant multiplicitats). Ara bé, g té 6 zeros a $D(0,2)$. Per tant, P té 6 zeros a $D(0,2)$.
D'una altra banda, considerem $f(z) = 9 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ i $\rho = \partial\mathbb{D}$ (corba simple). Notem que

$$|P(z) - f(z)| \leqslant 6 < 9 = |f(z)|, \quad \forall z \in \rho.$$

Podem aplicar el teorema de Rouché que ens assegura que el nombre de zeros de f a $\mathbb{D}$ coincideix amb el nombre de zeros de P a $\mathbb{D}$ (comptant multiplicitats). Ara bé, f no té zeros a $\mathbb{D}$. Per tant, P no té zeros a $\mathbb{D}$. Observem que la desigualtat estricte anterior sobre els punts de ρ ens assegura que P i f no s'anul·len en ρ. En resum, hem provat que P té 6 zeros al $D(0,2)$, P no té zeros al $\mathbb{D}$ (i tampoc a $|z| = 1$) i P té exactament 6 zeros al pla complex. Així, P té tots els seus zeros (és a dir, 6 zeros) a l'anell $1 < |z| < 2$.

b) Anem a utilitzar el principi de l'argument per calcular el nombre de zeros de P al primer quadrant. Sigui $R > 0$ i Ω_R la regió que és intersecció del $D(0,R)$ amb el primer quadrant, és a dir,

$$\Omega_R = \left\{re^{it},\ 0 < r < R,\ 0 < t < \pi/2\right\}.$$

Per a $R > 0$ prou gran (de fet $R \geqslant 2$), tots els zeros de P pertanyen al disc $D(0,R)$, i per tant tots els zeros de P en el primer quadrant pertanyen a Ω_R. Sigui $\gamma = \partial\Omega_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_R$, on $\gamma_1(t) = i(R-t)$, $t \in [0,R]$, $\gamma_2(t) = t$, $t \in [0,R]$ i $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi/2]$. Notem que P no té zeros sobre $\mathbb{R}_+$ i $i\mathbb{R}_+$ ja que $P(t) = t^6 + 3t^4 + t^2 + t + 9 \geqslant 9 > 0$ i $P(it) = -t^6 + 3t^4 - t^2 + 9 + it$. Per tant, $\operatorname{Im}(P(it)) \neq 0$ per tot $t > 0$ i per a $t = 0$, $P(0) = 9 \neq 0$. Així, si R és prou gran (la corba γ_R no passarà per cap zero de P), P no té zeros sobre la corba γ. Pel principi de l'argument tenim que el nombre de zeros de P en el primer quadrant (comptats amb multiplicitat) és l'increment de l'argument de P sobre γ dividit per 2π (quan $R > 0$ és prou gran), és a dir, hem de mirar les voltes que dóna la corba $\Gamma := P(\gamma)$ al voltant de 0 (que no és res més que $\operatorname{Ind}(\Gamma, 0)$) quan $R \to \infty$. Anem a calcular aquesta quantitat:

$$\begin{aligned}\#(Z(P) \cap \{\text{Primer quadrant}\}) &= \lim_{R\to\infty} Ind(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \Delta_\gamma P \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} (\Delta_{\gamma_1} P + \Delta_{\gamma_2} P + \Delta_{\gamma_R} P).\end{aligned}$$

Anem a calcular cada tros. Sobre la corba γ_R, si R és prou gran, $P(z) \approx z^6$ i per tant, $\Delta_{\gamma_R} P \to 6\frac{\pi}{2} = 3\pi$ (és a dir, la corba $P(\gamma_R)$ dóna una volta i mitja al voltant del 0 amb punt inicial $P(R)$ i punt final $P(iR)$). Sobre la corba γ_2, tenim que $P(\gamma_2) \in \mathbb{R}$ i $P(\gamma_2(t)) \geqslant 9 = P(0)$ per tot $t \in [0, R]$. Així, qualsevol determinació de l'argument de $P(\gamma_2)$ és constant i per tant, $\Delta_{\gamma_2} P = 0$. Anem a treballar ara amb la corba γ_1. Sigui $t \in [0, R]$, aleshores $\operatorname{Im}(P(it)) > 0$ per tot $t > 0$ i val 0 si $t = 0$. Per tant, la corba $P(\gamma_1)$ viu en $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ i només toca la recta real en $t = 0$ i val $P(0) = 9$. A més a més, si $R \to \infty$, $P(iR) \approx -R^6 + iR$. Així, veiem que $\Delta_{\gamma_1} P \to -\pi$ quan $R \to \infty$ (veieu el dibuix PENDENT). Així, tenim que

$$Ind(\Gamma, 0) \to \frac{1}{2\pi}(0 - \pi + 3\pi) = 1, \quad R \to \infty.$$

Per tant, P té un zero al primer quadrant.

Solució de l'exercici 7.7.5

(a)
Apliquem el T. de Rouché a les funcions $g(z) = e^z - 4z - 1$ i $h(z) = -4z - 1$.
Tenim que, per $|z| = 1$:

$$|g(z) - h(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \leqslant e^1 = e.$$

D'altra banda,

$$|-4z - 1| = |4z + 1| \geqslant 4|z| - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Per tant, sobre la corba —z—=1,

$$|g - h| \leqslant e < 3 \leqslant |h|.$$

En conseqüència, g i h tenen el mateix nombre d'arrels dins del disc unitat. Com que $-4z - 1 = 0$ té una solució al disc ($z = -1/4$) doncs $e^z = 4z + 1$ té exactament una solució al disc unitat.

(b) Apliquem el teorema de Rouché a $f(z) = e^z - 3z^n$ i $g(z) = 3z^n$. Tenim, per a $|z| = 1$,

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| = e^{\mathrm{Re} z} \leqslant 1 < 3 = |g(z)|.$$

Per tant $\# Z(f) \cap \mathbb{D} = \# Z(g) \cap \mathbb{D} = n$.

Que les arrels són diferents es veu immediatament, comprovant que $f(z)$ i $f'(z) = e^z - 3nz^{n-1}$ no tenen arrels comuns.

Solució de l'exercici 7.7.6

(a) Apliquem el teorema de Rouché al disc $D(1, 1)$ i les funcions

$$f(z) = (z - 1)^n e^z - a$$

i

$$g(z) = (z - 1)^n e^z.$$

Tenim, per a $|z - 1| = 1$,

$$|f(z) - g(z)| = |a| < 1 < e^{\operatorname{Re} z} \leqslant |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f)\cap D(1,1) = \#Z(g)\cap D(1,1) = n$. Com que $D(1,1)$ és contingut al semiplà $\operatorname{Re} z > 0$, ja tenim el que demana l'enunciat.

Que les arrels són diferents es veu immediatament, comprovant que $f(z)$ i $f'(z) = (z-1)^{n-1}e^z(n+z-1)$ no tenen arrels comuns.

(b) En cas que $|a| \leqslant 1/2^n$, apliquem el teorema de Rouché a $D(1,1/2)$ i les mateixes funcions d'abans:

$$|f(z) - g(z)| = |a| \leqslant \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n}e^{1/2} \leqslant \frac{1}{2^n}e^{\operatorname{Re} z} \leqslant |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap D(1,1/2) = \#Z(g) \cap D(1,1/2) = n$.

Solució de l'exercici 7.7.7

Apliquem el teorema de Rouché al disc unitat a $F(z) = f(z) - z^n$ i $g(z) = -z^n$:

$$|F(z) - g(z)| = |f(z)| < 1 = |g(z)|.$$

Per tant

$$\#Z(F) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = n.$$

Solució de l'exercici 7.7.8

Observem que $P_n(z) \to e^z$ uniformement en compactes del pla quan $n \to \infty$. Per tant, $|P_n(z) - e^z|$ és arbitràriament petit en el compacte $\{|z| \leqslant R\}$, si n és prou gran.

Aplicarem el Teorema de Rouché, comparant P_n i $f(z) = e^z$. Veiem que si $|z| = R$ llavors $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} > e^{-R}$. Doncs sigui $n(R)$ tal que

$$|P_n(z) - e^z| < e^{-R} \text{ per a tot } n \geqslant n(R).$$

Aleshores, si $|z| = R$,

$$|P_n(z) - e^z| < e^{-R} < |e^z|,$$

i pel Teorema de Rouché, e^z i $P_n(z)$ tenen el mateix nombre de zeros dins del disc de radi R, sempre que $n > n(R)$.

Solució de l'exercici 7.7.9

Comencem observant que f és holomorfa en Ω pel Teorema de Weierstrass.

1. Suposem que f no és idènticament 0, però $f(a) = 0$ per un cert $a \in \Omega$. Aleshores, com els zeros de f han de ser aïllats (al ser f no indènticament nul.la), tenim que $f(z) \neq 0$ en un cert disc puntejat $\overline{D(a,r)}\backslash\{a\} \subset \Omega$. Sigui $0 < m = \min_{|z|=r} |f(z)|$ que existeix perquè f és continua i el cercle és un compacte i sigui n prou gran per a que

$$|f_n(z) - f(z)| < m$$

per a tot z en $\{|z| = r\}$, fet que es dona per la convergència uniforme. Aleshores, sobre la corba $\{|z| = r\}$,

$$|f_n(z) - f(z)| < m \leqslant |f(z)|,$$

i pel Teorema de Rouché, f_n i f tenen el mateix nombre de zeros dins $\{|z| = r\}$. Però això és una contradicció ja que f en té un, i f_n no en té cap per hipòtesi.

2. Immediat considerant $g_n(z) = f_n(z) - a$ i $g(z) = f(z) - a$ i aplicant l'apartat anterior.

3. Suposem que $f(z_1) = f(z_2) = a$ tot i que $z_1 \neq z_2$. Considerem D_1 i D_2 dos discs tancats a Ω que continguin z_1 i z_2 respectivament. Aleshores, si f no és constant igual a a, per l'apartat anterior $f_n(z) = a$ ha de tenir almenys una solució en D_1 i una altra en D_2 si n és prou gran (si no en tingues cap, $f(z) = a$ tampoc en tindria). Però això contradiu que f_n sigui injectiva per a tot n.

Solució de l'exercici 8.1.1

Per ser flux potencial tenim $\mathbf{V} = (V_1, V_2) = \nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$ llavors si apliquem el teorema de Green a $C = \partial\Omega$ tenim

$$\oint_C V_1 dx + V_2 dy = \oint_C \varphi_x dx + \varphi_y dy = \int_\Omega (\varphi_{yx} - \varphi_{xy}) dx dy = 0.$$

Solució de l'exercici 8.1.2

Estem suposant $\Gamma = Q = 0$ és a dir que $\mathbf{V} = \nabla\varphi$ i que $(V_1)_x + (V_2)_y = 0$. Llavors

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = (V_1)_x + (V_2)_y = 0$$

i φ és harmònica.

Solució de l'exercici 8.1.3

$$\overline{\Phi'(z)} = \overline{(\varphi + i\psi)'} = \overline{\varphi_x + i\psi_x} = \overline{\varphi_x - i\varphi_y} = \varphi_x + i\varphi_y = V_1 + iV_2.$$

Solució de l'exercici 8.2.1

$\Phi(z) = k(\log\left|\frac{z+a}{z-a}\right| + i\arg\left(\frac{z+a}{z-a}\right)) = \varphi + i\psi$. La condició $\psi = c$ equival a que $\mathrm{Im}(\frac{z+a}{z-a})/\mathrm{Re}(\frac{z+a}{z-a})$ és constant. Però

$$\frac{z+a}{z-a} = \frac{(z+a)(\bar z - a)}{|z-a|^2} = \frac{|z|^2 - a^2 + a(\bar z - z)}{|z-a|^2} = \frac{|z|^2 - a^2 - 2iay}{|z-a|^2}$$

i les corbes de flux venen donades per equacions de la forma $|z|^2 - a^2 = Cy$. O bé

$$x^2 + (y - C/2)^2 = a^2 + C^2/4$$

que són circumferències que passen pels punts $-a$ i a. Pel flux resulta

$$\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = k\left(\frac{1}{\bar{z}+a} - \frac{1}{\bar{z}-a}\right) = \frac{-2ka}{(\bar{z}-a)(\bar{z}+a)} = -2ka\frac{z^2-a^2}{|z-a|^2|z+a|^2}.$$

i

$$\mathbf{V} = -\frac{2ka}{|z-a|^2|z+a|^2}(x^2-y^2-a^2+2xyi).$$

Tenim

$$V = \frac{2|ka|}{|z-a||z+a|}.$$

Solució de l'exercici 8.2.2

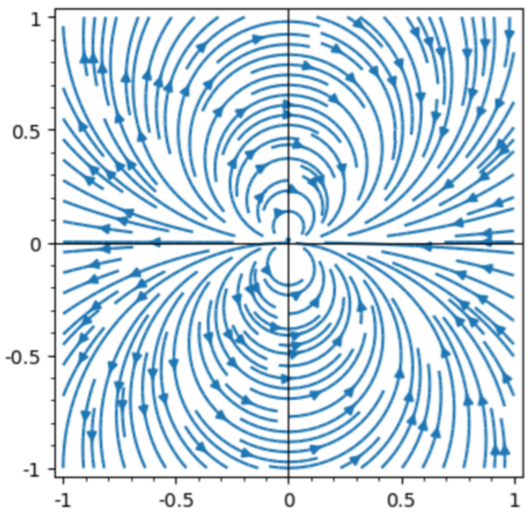
Fem el límit quan a tendeix a zero i $k = \mu/2a$. Tenim

$$\lim_{a\to 0}\frac{\mu}{2a}\log\left(\frac{z+a}{z-a}\right) = \frac{0}{0} = \lim_{a\to 0}\frac{\mu(\log\left(\frac{z+a}{z-a}\right))'}{2} = \lim_{a\to 0}\frac{\mu}{2}\frac{z-a}{z+a}\frac{(z-a)-(-1)(z+a)}{(z+a)^2} = \frac{\mu}{z}.$$

Com que $\Phi(z) = \mu\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$ resulta que $\varphi(x,y) = \mu x/(x^2+y^2)$ i $\psi(x,y) = -\mu y/(x^2+y^2)$.m Les línies de flux ($\psi = c$) són les corbes de nivell de $y/(x^2+y^2)$, és a dir les donades per equacions $x^2+y^2+Cy = 0$ que podem escriure com $x^2+(y+C/2)^2 = C^2/4$. Es tracta de circumferències amb centre a l'eix OY que passen per l'origen.

$$\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = \overline{-\frac{\mu}{z^2}} = -\mu\frac{z^2}{|z|^4} = -\frac{\mu}{|z|^4}(x^2-y^2+2ixy), \quad V = \frac{\mu}{|z|^2}.$$

El dibuix del flux és:



Solució de l'exercici 8.2.3

Per simplificar l'estructura sigui $\lambda = \alpha + i\beta = \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i}$. Llavors

$$\Phi(z) = (\alpha \log|z-a| - \beta \arg(z-a)) + i(\beta \log|z-a| + \alpha \arg(z-a))$$

i

$$\varphi = \alpha \log|z-a| - \beta \arg(z-a), \;\; \psi = \beta \log|z-a| + \alpha \arg(z-a).$$

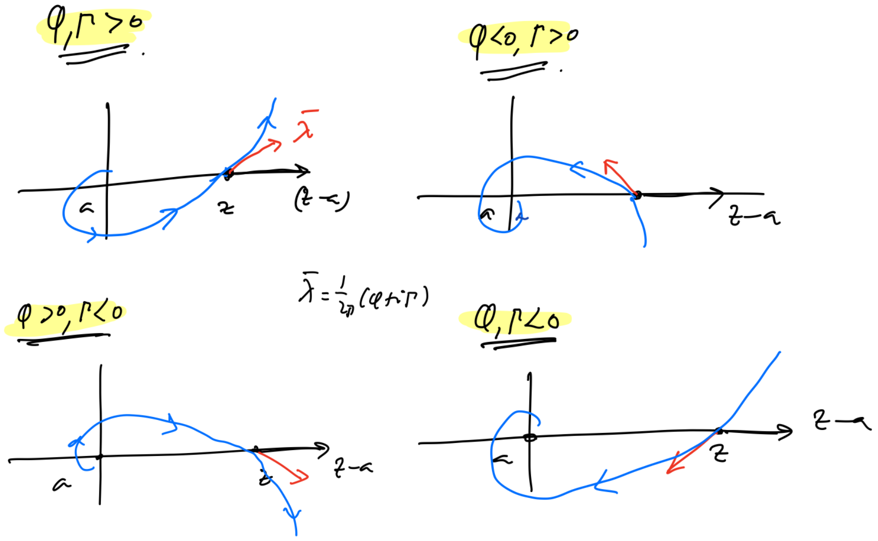
Com que $\Phi'(z) = \dfrac{\lambda}{z-a}$ resulta que

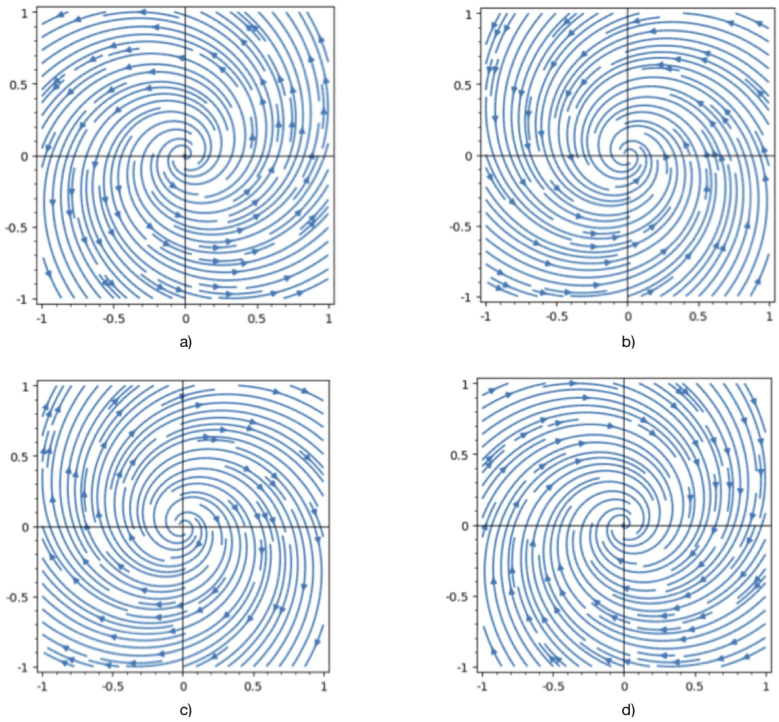
$$\oint_C \Phi'(z)dz = \Gamma + iQ$$

on C és un circuit al voltant de a recorregut en sentit antihorari. Pel camp tenim

$$\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = \frac{\bar{\lambda}}{|z-a|^2}(z-a), \;\; V = \frac{|\lambda|}{|z-a|^2}.$$

Veiem que la direcció de $\mathbf{V}$ en cada punt z s'obté girant i dilatant la direcció radial $z-a$ segons el que diu la constant $\bar{\lambda} = re^{-i\delta} = (Q + i\Gamma)/2\pi$. Veure les figures **??** i **??**.





Solució de l'exercici 8.3.1

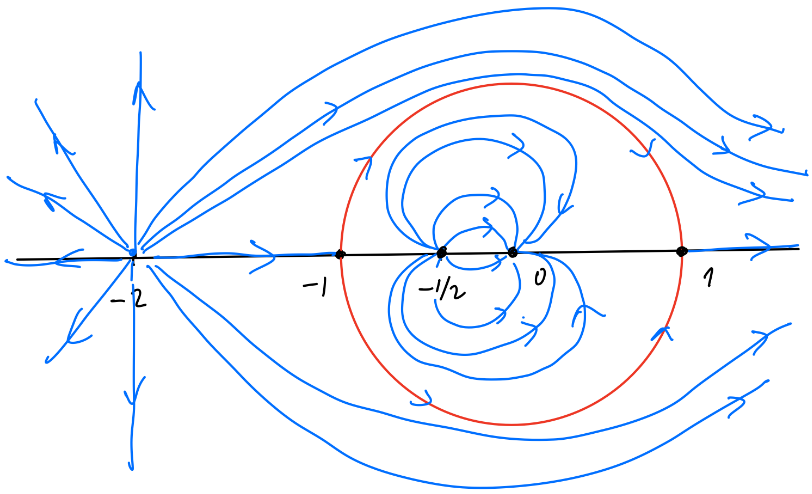
a) Abans de res observem que si $z = re^{i\theta}$ llavors $\overline{\log(z)} = \log r - i\theta = \log r + i(-\theta) = \log(\bar{z})$. Llavors $\overline{\log(1/\bar{z} + 2)} = \cdots = \log(2) - \log z + \log(z + 1/2)$ i

$$\Phi(z) = \log(z + 2) + \log(z + 1/2) - \log(z) + \log(2).$$

Analitzem els quatre sumands

- $\log(z + 2)$ és la font sortint original al punt -2.
- $\log(z + 1/2)$ és una font sortint al punt $-1/2$ dins de la circumferència invariant.
- $-\log(z)$ és una font entrant a l'origen.
- $\log(2)$ és un terme constant que no afecta a les trajectòries (les corbes de nivell no canviem de forma, només de nivell d'energia').

Podem fer un esquema gràfic com es veu a la figura:

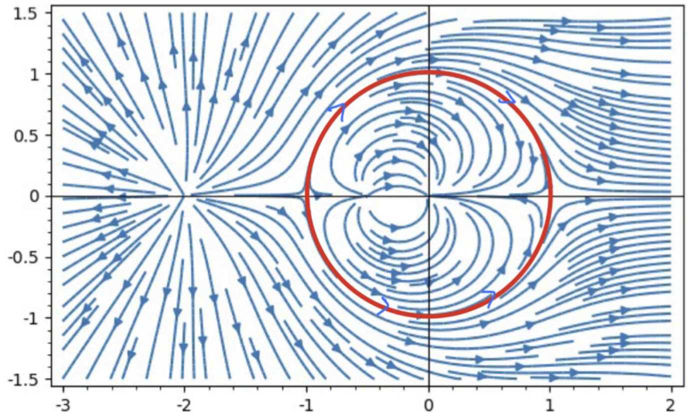


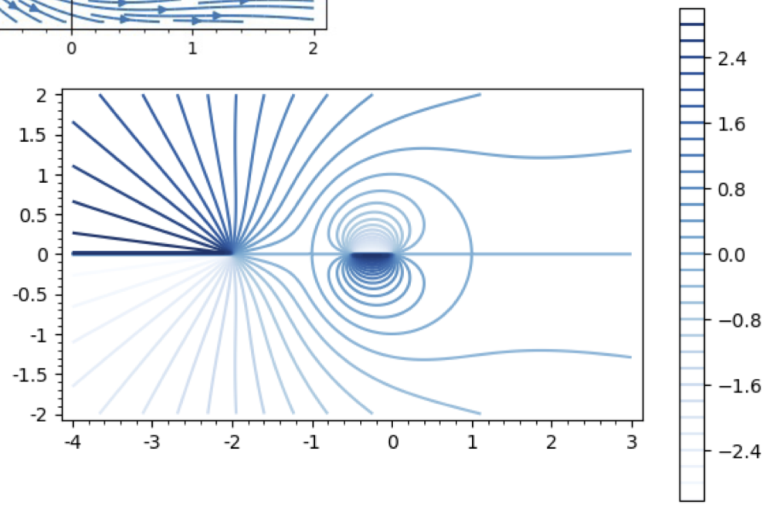
Font: −2, −1/2 Punts estacionaris: −1, 1
Pou: 0

b) $\Phi'(z) = \dfrac{1}{z+2} + \dfrac{1}{z+1/2} - \dfrac{1}{z}$ que correspon al que s'ha dit abans.

c) Quan $|z| \to \infty$ resulta que $\Phi(z) \approx \log(z+2)$ i la seva derivada s'acosta a $\frac{1}{z+2}$. Des de molt lluny el flux es veu com una font lineal des del punt $z = -2$.

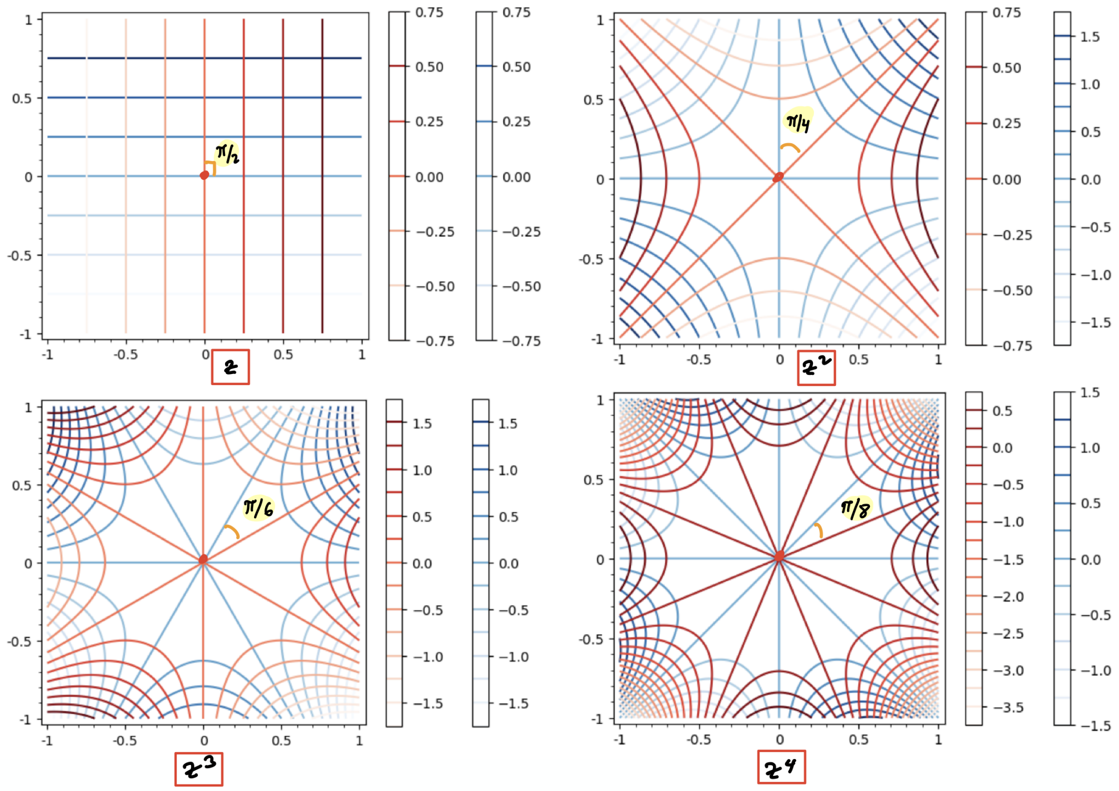
d) El gràfics de **??** amb `streamline_plot` i amb `contour_plot` mostren clarament el comportament.





Solució de l'exercici 8.4.1

a) Fem els gràfics de les corbes de nivell per φ (equipotencials, vermell) i per ψ (corrent, blau) per $z^n, n = 1, 2, 3, 4.$:



b) Mirant els gràfics es dedueix que ha de ser $\pi/2n$.

c) Fem el cas $\Phi(z) = z^n$. Si $z = re^{i\theta}$ llavors $\Phi(z) = r^n e^{i\theta} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$. Aleshores

$$\varphi(r,\theta) = r^n \cos n\theta, \qquad \psi(r,\theta) = r^n \sin n\theta.$$

Les línies de corrent i les línies equipotencials que passen 0 són aquelles que $\varphi = 0 = \psi$ respectivament. És a dir, les equipotencials per 0 són aquelles que $\cos n\theta = 0$ que equival a $n\theta = \pi/2 + k\pi$ i les línies de corrent les corbes donades per $n\theta = r\pi$.

- Equipotencials, $\varphi = 0$: $\theta = \pi/2n + k\pi/n$, $k = 0, \ldots, 2n-1$.
- Línies de corrent, $\psi = 0$: $\theta = r\pi/n$, $k = 0, \ldots, 2n-1$.

És clar que els angles entre línies de corrent i línies equipotencials consecutives és $\pi/2n$.

El cas general es pot fer amb arguments de continuïtat (no és simple).

En un punt no estacionari l'angle que formen les linies de flux i les equipotencials és $\pi/2$ (són ortogonals).

Solució de l'exercici 8.4.2

a) Tenim pols a a i b on hi ha fonts-remolins. En efecte si $C = (\Gamma + iQ)/2\pi i$ llavors $\Phi' = C\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$ i si γ_a i γ_b són petits circuits al voltant de a, b respectivament

$$\oint_{\gamma_2} \Phi'(z)dz = \Gamma + iQ, \quad \oint_{\gamma_2} \Phi'(z)dz = -\Gamma - iQ.$$

Tenim fonts-remolins (a, Γ, Q) i $(b, -\Gamma, -Q)$. Per exemple, si $\Gamma, Q > 0$ de a surt girant en sentit antihorari i a b arriba girant en sentit horari. Si $\Phi = \varphi + i\psi$ i $C = \alpha + i\beta$ llavors

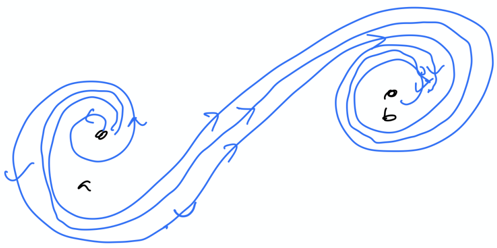
$$\varphi = \alpha \log \left| \frac{z-a}{z-b} \right| - \beta \arg \left(\frac{z-a}{z-b} \right), \quad \psi = \alpha \arg \left(\frac{z-a}{z-b} \right) + \beta \log \left| \frac{z-a}{z-b} \right|.$$

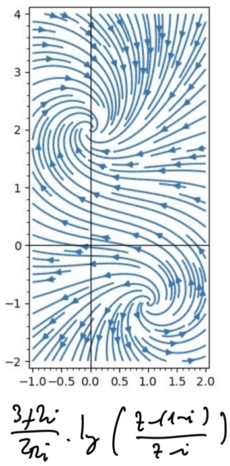
Si denotem $\dfrac{z-a}{z-b} = \rho e^{i\theta}$ les corbes de corrent $\psi = k$ venen donades per

$$\log \rho = \frac{Q}{\Gamma} \rho + k$$

que són espirals logarítmiques entre a i b. També tenim

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma - iQ}{-2\pi i} \frac{\bar{a} - \bar{b}}{(\bar{z} - \bar{a})(\bar{z} - \bar{b})}, \quad V = \frac{|\Gamma + iQ|}{2\pi} \frac{|a-b|}{|z-a||z-b|}.$$

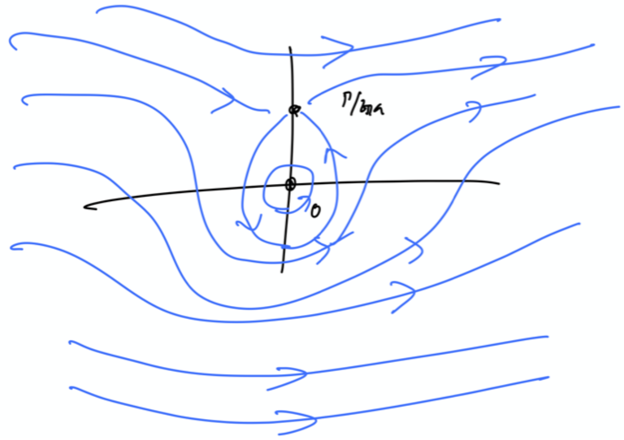
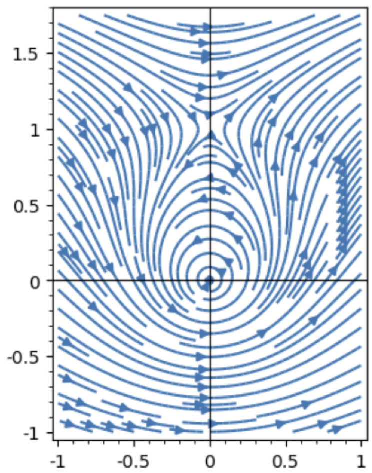
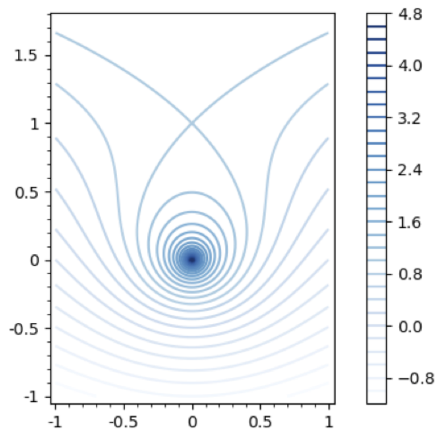
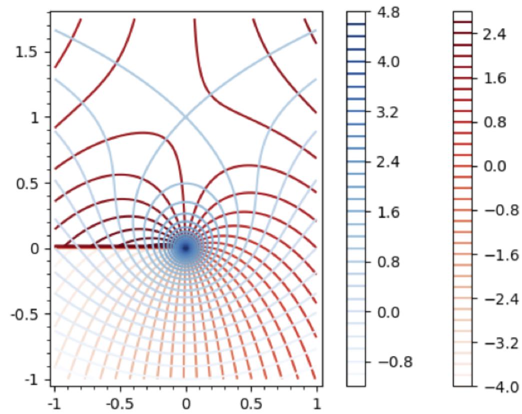




b) Aquí a $z = 0$ hi ha un remolí i quan $z \to \infty$ el flux potencial és com az, flux constant. De fet

$$\Phi'(z) = a + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}, \quad \mathbf{V} = a + \frac{\Gamma}{2\pi r} e^{i(\theta + \pi/2)}, \quad \mathbf{V}_\infty = a.$$

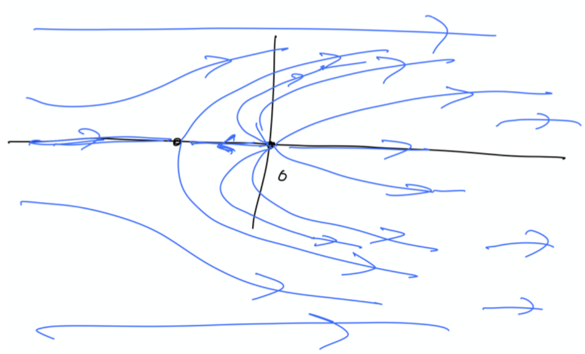
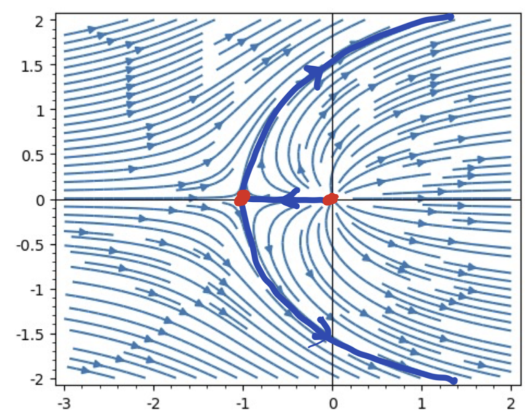
Veiem que a $z = \Gamma i / 2\pi a$ tenim un punt estacionari (on la velocitat es fa zero). Amb això podem fer un esboç del flux, veure la figura següent.

c) En aquest cas sumen un flux lineal (az) i una font/pica ($Q/2\pi\ \log(z)$). Tenim

$$\Phi'(z) = a + \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{z}, \quad \mathbf{V} = a + \frac{Q}{2\pi r}e^{i\theta}, \quad \mathbf{V}_\infty = a.$$

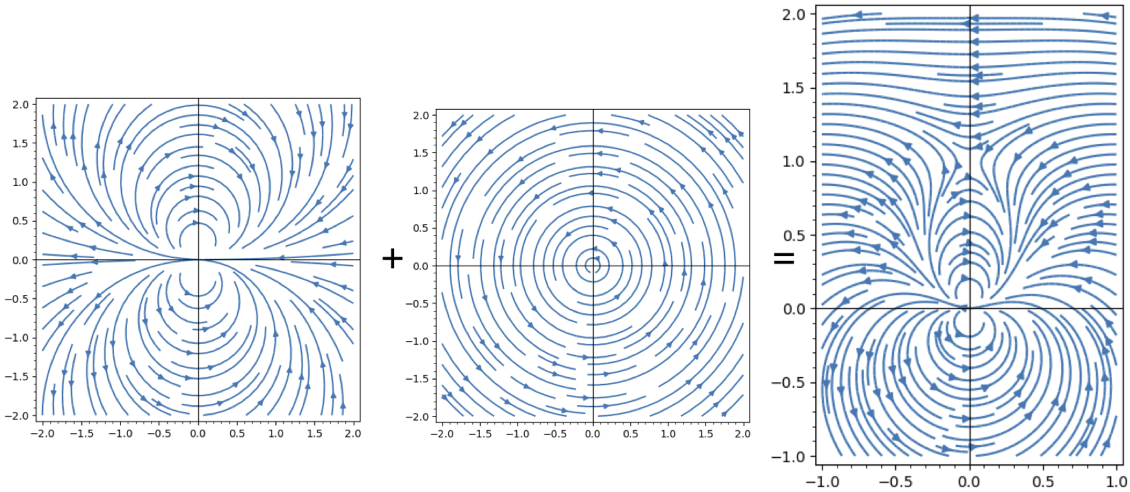
Veure figura següent:

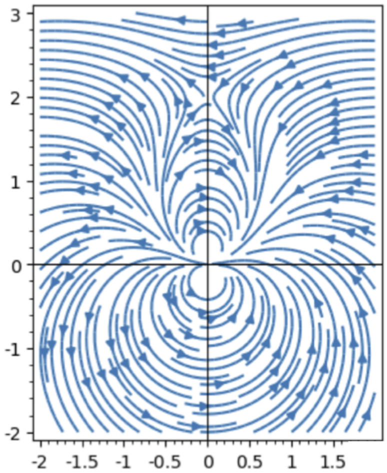
d) És la superposició d'un dipol i un remolí. Hi ha un pol a $z = 0$. Observem que

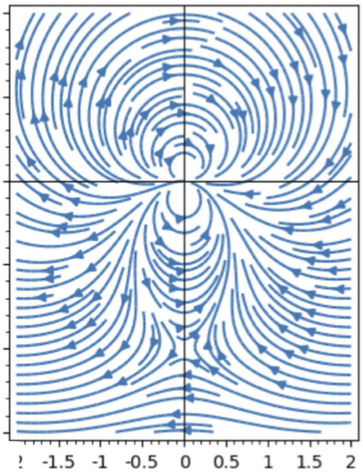
$\Phi'(z) = -\dfrac{p}{2\pi}\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{\Gamma}{2\pi i}\dfrac{1}{z}$. Llavors $\Phi'(z) = 0$ per $z = ip/\Gamma$. Veure les figures següents:

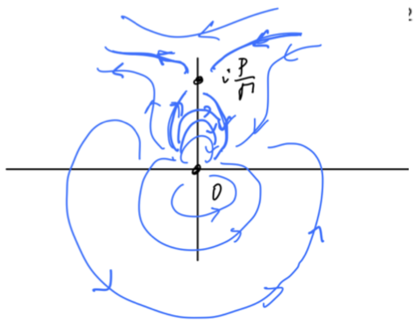
Suma d'un doblet i un remolí. Punt estacionari a ip/Γ:



Suma d'un doblet i un remolí. Punt estacionari a ip/Γ. A dalt o a baix segons els signes







de p i Γ:

Solució de l'exercici 8.4.3

És la superposició d'un flux lineal a l'infinit que 'supera' la circumferència $|z| = R$ i un remolí al zero. És un flux molt interessant ja que cobreix tots els possibles fluxos que tenen a $|z| = R$ com a línia de flux i a l'infinit tenen potencial complex que s'acosta a $V_0 z$ (veure Markushevich II, p. 193). Tenim

$$\Phi(z) = V_0\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + i\left(V_0\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\log r\right).$$

Llavors

$$\varphi(x,y) = V_0\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$
$$\psi(x,y) = V_0\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\log r$$

i les línies de flux venen donades per $V_0\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\log r = \beta$.

Quan $|z| = R$ resulta que $\psi = -\Gamma\log R/2\pi$ que és constant, llavors $|z| = R$ és una línia de corrent i el flux es pot pensar com un flux que circula al voltant de l'obstacle cilíndric donat per $|z| = R$. Ja em dit que a l'infinit és el flux amb velocitat constant V_0.

Els punts estacionaris o d'estancament es donen quan $\Phi'(z) = 0$ i això passa quan $\Phi'(z) = V_0\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z} = 0$. Com que $z \neq 0$ aixó passa quan

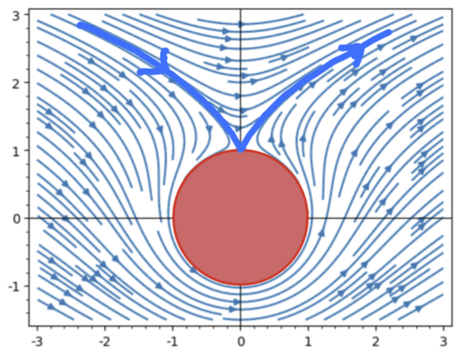
$$z = \frac{1}{4\pi V_0}\left(\pm\sqrt{16\pi^2 V_0^2 R^2 - \Gamma^2} + i\Gamma\right).$$

Tenim tres casos interessants

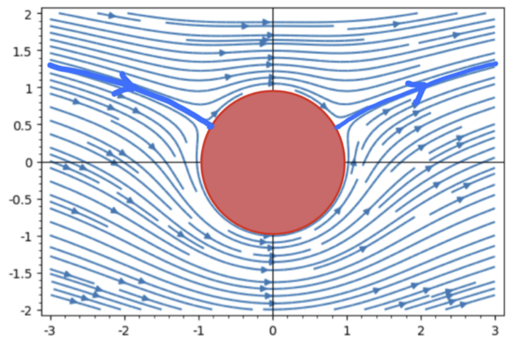
- $\Gamma = 4\pi V_0 R$. En aquest cas hi ha un únic punt estacionari a $z = i\Gamma/(4\pi V_0) = iR$ que està a la circumferència $|z| = R$.
- $\Gamma < 4\pi V_0 R$. Ara tenim com a punts estacionaris z_1, z_2 que són també a $|z| = R$, la seva part imaginària és $\Gamma/4\pi V_0$ i les parts reals són simètriques respecte l'eix OY.
- $\Gamma > 4\pi V_0 R$. Ara tenim un punt estacionari dins de $|z| = R$ i un altre fora, són

$$z_1, z_2 = \frac{1}{4\pi V_0}\left(\pm\sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2 V_0^2 R^2} + \Gamma\right) i.$$

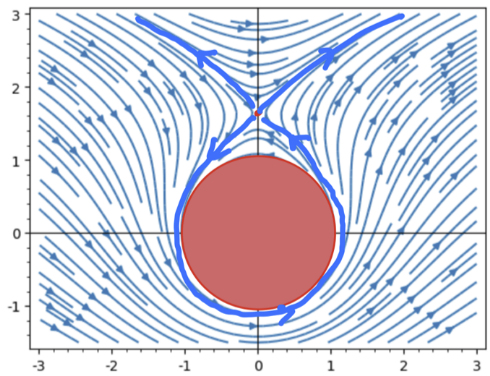
Podem veure els gràfics per cada cas a la figura següent:



$\Gamma = 4\pi V_0, \quad \Gamma > 0$



$\Gamma < 4\pi V_0, \quad \Gamma > 0$



$\Gamma > 4\pi V_0, \quad \Gamma > 0$

Solució de l'exercici 8.4.4

$$\Phi(z) = Ve^{-i\alpha}z + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k + iQ_k}{2\pi i} \log(z - a_k).$$