

Introducció a l'anàlisi complexa

v26.9

Carme Cascante*, Núria Fagella, Eduardo Gallego†
Jordi Pau, Martí Prats

24 de juliol de 2026

*CC: cascante@ub.edu, NF: nfagella@ub.edu, JP: jordi.pau@ub.edu:
Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Catalonia
†EG: Eduardo.Gallego@uab.cat MP: marti.prats@uab.cat:
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Catalonia

Índex

Introducció	iii
1. El cos dels nombres complexos	1
1.1. El cos dels nombres complexos	3
1.2. Els nombres complexos com a espai vectorial	9
1.3. Repàs de trigonometria	14
1.4. L'exponencial complexa	17
1.5. Representació polar d'un nombre complex	20
1.6. Equacions amb exponencials	24
1.7. Arrels n -èsimes	25
1.8. Polinomis: enunciat del teorema fonamental de l'àlgebra	27
2. Funcions de variable complexa	29
2.1. Funcions	29
2.2. Funcions multivaluades: logaritmes i arguments	35
2.3. Potències complexes	40
2.4. Determinacions de logaritmes i arrels de funcions	42
2.5. Sèries de potències de nombres complexos	44
2.6. Càlcul del radi de convergència	47
2.7. Comportament a la frontera del disc de convergència	50
3. Derivació complexa i holomorfia	55
3.1. Funcions holomorfes	55
3.2. Les equacions de Cauchy-Riemann	60
3.3. Càlcul de les derivades	67
3.4. Funcions analítiques	71
3.5. Algunes funcions holomorfes importants	75
4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy	81
4.1. Corbes	82
4.2. Integració sobre corbes	84
4.3. Teorema de Cauchy	88
4.4. Fórmula integral de Cauchy	95
4.5. Sèries de potències	99
4.6. Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades i desigualtats de Cauchy	102
4.7. Teorema de Liouville i teorema fonamental de l'àlgebra	104
4.8. Teorema de Morera	105
4.9. Derivació sota el signe integral i fórmula integral de Cauchy per derivades .	108

Índex

4.10. Zeros de funcions holomorfes i principi de prolongació analítica	112
4.11. El principi del mòdul màxim	117
5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy	121
5.1. Índex d'una corba tancada respecte d'un punt	121
5.2. El teorema global de Cauchy	126
5.3. Homotopia i teorema de Cauchy	132
5.4. Dominis simplement connexos	135
5.5. Funcions harmòniques	138
5.6. El problema de Dirichlet	143
6. Sèries de Laurent	149
6.1. Sèries de Laurent i singularitats	149
6.2. Singularitats aïllades de funcions holomorfes	152
6.3. Teorema dels Residus	157
6.4. Residu a l'infinit	162
6.5. Aplicació al càlcul d'integrals	163
6.6. Principi de l'argument	173
6.7. Teorema de Rouché	176
7. Representació Conforme	181
7.1. El teorema de l'aplicació de Riemann	181
7.2. Projectió estereogràfica i circumferències generalitzades	184
7.3. Transformacions de Möbius	187
7.4. Raó doble i simetria	193
7.5. Automorfismes	194
7.6. Altres transformacions conformes	196
8. Fluids	201
8.1. Qüestions generals. Escenari i notació.	201
8.2. Fluxos bàsics.	204
8.3. Obstacles	206
8.4. Expressió general (recapitulació).	208
A. El teorema de l'aplicació de Riemann	211
Índex	215

Introducció

Aquests apunts beuen de diverses fonts, però per sobre de tot són el resultat d'anys d'evolució de les assignatures d'anàlisi complexa dels graus en Matemàtiques de la UB i la UAB. Per tant, devem part dels continguts i exercicis aquí presentats a en Joaquim Bruna, en Josep Maria Burgués, en Juan Carlos Cantero, en Joan Josep Carmona, en Julià Cufí, en Juan Jesús Donaire, en Xavier Massaneda, en Joan Eugeni Mateu, en Joan Oorbitg, en Quim Ortega i tants d'altres. A tots ells el nostre agraïment per la seva generositat.

L'objectiu d'aquest llibre és poder servir de material pels cursos d'anàlisi complexa dels graus en Matemàtiques de les universitats catalanes, així com d'algun altre grau on el contingut de la matèria superi el d'un receptari. Ens centrem, doncs, en fer un text amb un enfocament didàctic –però sempre rigorós–, mirant d'incloure el corpus bàsic de l'anàlisi complexa, i també amb pinzellades d'alguna aplicació pràctica i de teoremes avançats rellevants. La lectura inclou nombrosos exemples per il·lustrar els continguts i també exercicis per practicar, amb les solucions disponibles per mitjà electrònic.

Bibliografia complementària

A [\[BC08\]](#) hi trobareu un manual d'anàlisi complexa completíssim i en català, i la seva traducció a l'anglès a [\[BC13\]](#).

Als llibres [\[Ahl79\]](#), [\[BG12\]](#), [\[Con78\]](#), [\[D'A10\]](#), [\[Bur12\]](#), [\[Gam03\]](#), [\[R⁺79\]](#), [\[SS10\]](#) i [\[VLA72\]](#) podreu trobar aproximacions alternatives i llistes d'exercicis per complementar la vostra formació. El llibre [\[MH99\]](#) és una referència molt didàctica.

Agraïments

Volem agrair la col·laboració dels alumnes de l'assignatura d'Anàlisi Complexa i de Fourier del grau en Matemàtica Computacional i Analítica de Dades (2023-25) i del grau en Matemàtiques (2024-25) de la UAB per la seva paciència amb les actualitzacions permanents dels apunts, i per la seva contribució en millorar-los, especialment als alumnes Pol Abadia Conejos, Rok Aladrovic Molina, Sergi Almendros Montoya, Guim Casadellà Cors, Marc Herrero Lázaro, Aiman Himi Ben Alilou, Lluís Panal Majó, Helena Pisa Escribano, Laia Querol Alturo, Adrià Rodríguez Estrada, Marc Roig Oliva, David Ruiz Caceres, Laia Alexandra Sjöberg Cerezo i Ariadna Solà Lara (MatCAD 24), Albert Caire Rodriguez, Lluís Gay Torné, Oriol Jiménez Asensi, Catalina Mascaró Català, Sergi Prats Molino, Alex Vega Tomas i Ferran Villarta Burés (MatCAD 25), Ainara Almendáriz Martínez, Carlos Baca Garcia, Sònia Blanes Molina, Roger Brusau Maimó, Marcel Duran Puig, Axel Espuela Alvarez, Nidia Esteve Gómez, Joel Fernández Laparra, Gina Gardeñes Farré, Bernat

Introducció

Graugés Bellver, Pep Güell Rigall, Gabriel Guerra De Quadras, Adrià Jimeno Ruiz, Judith Lara Piqueras, Ana López Bruballa, Ada López Del Castillo Avilés, Marta Merino Sánchez, Judith More Bataller, Clara Mulet Ballesta, Katia Moreno Aspiroz, Marta Noguera Segura, Arnau Nuñez Martínez, Lara Angélica Olarte Bayani, Tomàs Planelles Alonso, Miguel Puelma Martínez, Martí Puig Sampera, Eric Recio Chorro, Álvaro Resa Asensio, Albert Ricart Quilez, Marina Rúbies Bedós, Adrià Saz Guerra, Drus Sentís Cahué, Héctor Serrano Asensio, Babaldeep Singh, Ainhoa Trillo Rodríguez, Clara Valls Moreso, Arnau Viladevall Ferré, Marta Vílchez García, Lluís Vivó Pons i David Xifré Palacios (Matemàtiques 25), Eric Benavente Carreira, Sara Chillón Domínguez, Daniel Genov Draganova, Emma Llado Viñals, Pau Lorenzo Pareja, Joan Serra Ortega i Daniel Solana Carretero (MatCAD 26), Abel Alvarez Rodriguez, Oriol Antoja Vandellós, Ana Aragón Lopo, Dex Balada Peña, Joan Doria Ribera, Carla Dux-Santoy Escorza, Miquel Ferrándiz Alvarez, Adrián Franco Morales, Jan Lopez Bocache, Edgar Luque Fernández, Mireia Marcos Cañal, Leyre Martínez De Albéniz Merino, Martina Miquel Folch, Martí Mota Llobet, Abel Portas Puigdemont, Blanca Ramos Baiget, Mireia Rizo Rovira, Rubén Rodríguez López, Martí Roé Castillo, Víctor Ruiz Aguilera, Pablo Ruiz De Angulo Ortega, Luis Ruiz Lopatey, Martí Ruiz Sabater, Cai Santamaria Brunet, Joan Villalba Rull, Maximilian Evert Wind Del Olmo i Laia Xifra Casas (Matemàtiques 26) per la seva excellent labor en la detecció d'errors matemàtics, tipogràfics, ortogràfics i gramaticals.

1. El cos dels nombres complexos

El naixement dels nombres complexos està intrínsecament lligat a una sèrie d'enfrontaments entre matemàtics italians del segle XVI, principalment Scipione del Ferro¹, Niccolò Fontana Tartaglia², Girolamo Cardano³, Lodovico Ferrari⁴ i Rafael Bombelli⁵. Cardano fou el primer en publicar en el seu *Ars Magna* (1545) una solució de l'equació de tercer grau. Aquesta havia estat prèviament descoberta per Scipione del Ferro i redescoberta per Tartaglia, però, en mantenir-les secretes per usar-les en duels matemàtics, la seva publicació es va retardar uns quants anys fins que Cardano va fer el pas. En la resolució es fan servir nombres imaginaris (és a dir, arrels de nombres negatius) que Bombelli va descriure i sistematitzar al cap de poc en el seu tractat *Algebra* (1572). Finalment, Leonhard Euler⁶ va estandarditzar-ne la notació que coneixem avui dia i va popularitzar-ne l'ús. D'aquesta forma es va donar per fi sortida a un coneixement que havia quedat aparcat fins aleshores.

El mètode de Cardano per resoldre una cúbica, emprant el llenguatge modern, diu que, donada una equació de tercer grau $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, la podem reescriure amb el canvi de variable $y = x - a/3$ com l'equació de Cardano (o equació de del Ferro-Tartaglia):

$$x^3 + px + q = 0. \quad (1.1)$$

Aleshores creem dues noves variables u, v tals que

$$\begin{cases} x = u + v, \\ 3uv = -p. \end{cases} \quad (1.2)$$

Aquestes satisfan que

$$0 \stackrel{(1.1)}{=} u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + pu + pv + q = u^3 + v^3 + q,$$

de manera que ens queda el sistema

$$\begin{cases} u^3v^3 = \frac{-p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q. \end{cases}$$

Per tant, u^3 i v^3 són les solucions de l'equació de segon grau

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0,$$

¹Bolonya, 1465 – 1526, https://ca.wikipedia.org/wiki/Scipione_del_Ferro

²Brescia, 1499 – Venècia, 1557, https://ca.wikipedia.org/wiki/Niccolo_Fontana_Tartaglia

³Pavia, 1501 – Roma, 1576, https://ca.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano

⁴Bolonya, 1522 – 1565, https://ca.wikipedia.org/wiki/Lodovico_Ferrari

⁵Bolonya, 1526 – 1572, https://ca.wikipedia.org/wiki/Rafael_Bombelli

⁶Basilea, 1707 – 1783, https://ca.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

1. El cos dels nombres complexos

és a dir,

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right\}. \quad (1.3)$$

Usant (1.2) trobem que

$$x = u + v = \sqrt[3]{u^3} + \frac{-p}{3\sqrt[3]{u^3}}. \quad (1.4)$$

Si anomenem

$$C = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

aleshores

$$x = C - \frac{p}{3C}$$

és una solució de l'equació de Cardano (1.1).

Notem que els nombres u^3 i v^3 que apareixen a (1.3) poden no estar definits en els reals quan p és negatiu i de mòdul gran (respecte de q), concretament si

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

Notem també que a (1.4) l'arrel cúbica d'un nombre real està unívocament determinada (a $\mathbb{R}$, és clar).

Si ens restringim als nombres reals i $p, q \in \mathbb{R}$, amb aquest mètode podem trobar una solució de la cúbica, sempre i quan $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$. Sabem que sempre hi ha una solució (pel teorema de Bolzano⁷). Sabem que hi ha equacions amb tres solucions reals, i totes tres es poden intentar descompondre usant (1.2), però el mètode com a molt en dona una. Què està passant? Doncs que ens cal sortir de la recta real per tornar-hi a entrar!

Sigui $\mathbb{R}$ el cos dels nombres reals. L'equació $x^2 + 1 = 0$ no té solucions reals. Construïrem un cos més gran que $\mathbb{R}$, que anomenarem $\mathbb{C}$, on en tindrem les solucions. Per fer-ho, ens cal definir un element i tal que $i^2 + 1 = 0$ per fer les combinacions $\mathbb{R}$ -lineals de 1 i i (és a dir, $a + bi$ amb $a, b \in \mathbb{R}$). Aquest cos ens permetrà resoldre la cúbica en general.

Construïm, per exemple, una solució de $x^3 - 7x + 6 = 0$ usant el mètode de Cardano. Estem en el cas $p = -7$ i $q = 6$, així que (1.3) queda

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ -3 \pm \sqrt{9 - \frac{7^3}{27}} \right\} = \left\{ -3 \pm \frac{\sqrt{-100}}{3\sqrt{3}} \right\}.$$

Usant que $i^2 = -1$, i suposant que el producte és commutatiu, trobem que $(10i)^2 = -100$, així que ens atrevim a escriure l'expressió anterior com

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ -3 \pm \frac{10}{3\sqrt{3}}i \right\}.$$

⁷Bernard Bolzano, Praga, 1781 – 1848, https://ca.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano

1. El cos dels nombres complexos

Si trobem un nombre $u = a + bi$ tal que $a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = u^3 = -3 + \frac{10}{3\sqrt{3}}i$ (ara hem suposat que $\mathbb{C}$ és un anell), aleshores podem prendre de (1.2) l'altra solució $v = 7/(3u)$, i trobarem x . Ens cal resoldre, doncs,

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -3, \\ 3a^2b - b^3 = \frac{10}{3\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Més endavant veurem una manera ràpida de trobar aquestes arrels cúbiques. De moment conformem-nos amb observar que una possible solució és $u = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}i$, com es pot comprovar directament. Aleshores, $v = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}i$ i trobem

$$x = u + v = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}i + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}i = 2.$$

Efectivament, $x = 2$ soluciona $x^3 - 7x + 6 = 0$, com també ho fan $x = 1$ i $x = -3$.

De fet, tot polinomi de coeficients reals (i de coeficients complexos!) tindrà almenys una arrel, la qual cosa es coneix com a teorema fonamental de l'àlgebra. Diem que $\mathbb{C}$ és un cos algebraicament tancat. Amb aquesta ampliació, seguiran havent-hi dues arrels quadrades per tot element del cos llevat del zero, i tres arrels cúbiques! Notem també que a (1.4) l'elecció de l'arrel quadrada no té importància (per conjugació...), però poden aparèixer tres solucions diferents, amb la precaució que cal prendre la mateixa arrel cúbica en les dues aparicions.

En aquest capítol introduïm el cos $\mathbb{C}$ i veiem les seves propietats bàsiques. Explicarem la forma polar i com usar-la per fer operacions, però abans ens caldrà introduir l'exponencial complexa per donar rigor a aquest càlcul. Finalment, veurem com les equacions amb potències tenen múltiples solucions, ja siguin polinomials o exponencials, per acabar exposant el teorema fonamental de l'àlgebra, que demostrarem al capítol 4.

1.1. El cos dels nombres complexos

Si som capaços de definir $i = \sqrt{-1}$, aleshores i serà solució de $x^2 + 1 = 0$: efectivament, $(\pm i)^2 + 1 = 0$. Per tant, de la mateixa manera que si un polinomi té una arrel real a , aleshores es pot dividir per $(x - a)$, esperem poder escriure

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Però de moment la identitat anterior no té cap sentit. Necessitem definir el cos dels nombres complexos.

De moment tenim l'element i ideat: volem que sigui un nombre tal que $i \cdot i = -1$.

Definició 1.1 (Nombre complex). Donats $a, b \in \mathbb{R}$, definim

$$a + bi$$

com un *nombre complex*. Diem, doncs, que, com a conjunt, tenim que

$$\mathbb{C} := \{a + bi : (a, b) \in \mathbb{R}^2\},$$

1. El cos dels nombres complexos

i anomenem nombres complexos els elements de $\mathbb{C}$. Anomenem respectivament part real i part imaginària els nombres

$$\operatorname{Re}(a + bi) = a \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}(a + bi) = b.$$

•

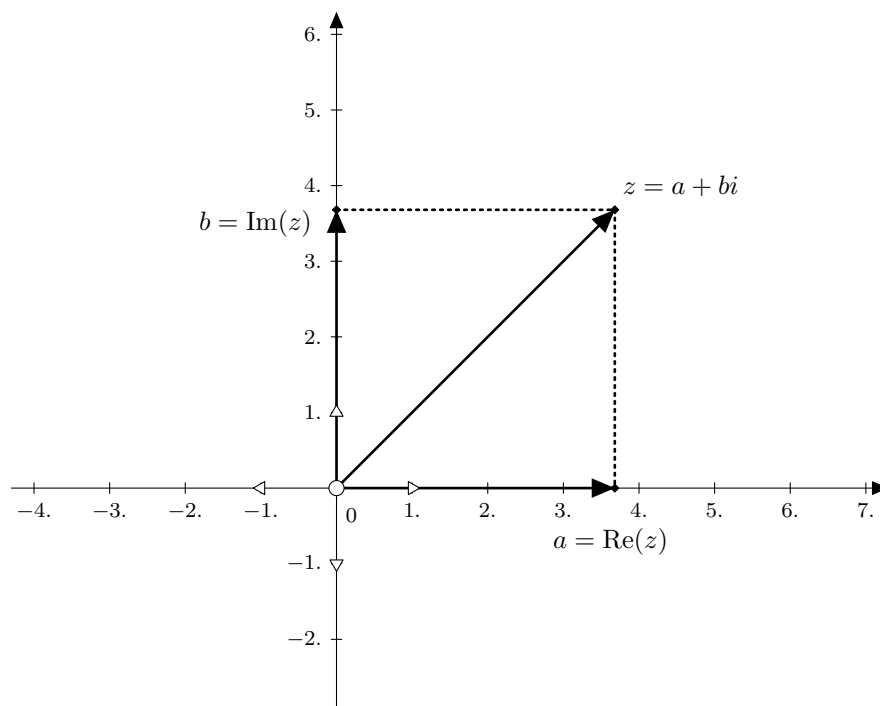


Figura 1.1.: Part real i imaginària d'un nombre complex. Marcarem els punts 0, 1, i , -1 , $-i$ amb un cercle i quatre triangles respectivament en les figures del text.

Ara ens falta definir les operacions del conjunt per tal de tenir una estructura de cos. Notem de moment que $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, on identifiquem $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ amb el nombre complex $a + bi$. La suma, doncs, serà heretada de l'estructura d'espai vectorial subjacent, però el producte és una operació nova que creem *ad hoc* per tal d'aconseguir el nostre propòsit:

Definició 1.2 (Operacions de $\mathbb{C}$). Si $z = a + bi$ i $w = c + di$ són dos nombres complexos, llavors definim la seva *suma* com

$$z + w = a + c + (b + d)i;$$

i el seu *producte* com

$$z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Sovint escriurem zw en lloc de $z \cdot w$.

•

Notem que amb aquesta definició, si $a, c \in \mathbb{R}$, aleshores, en identificar-los amb els nombres complexos $a + 0i$ i $c + 0i$ respectivament, trobem que la seva suma i el seu producte

1. El cos dels nombres complexos

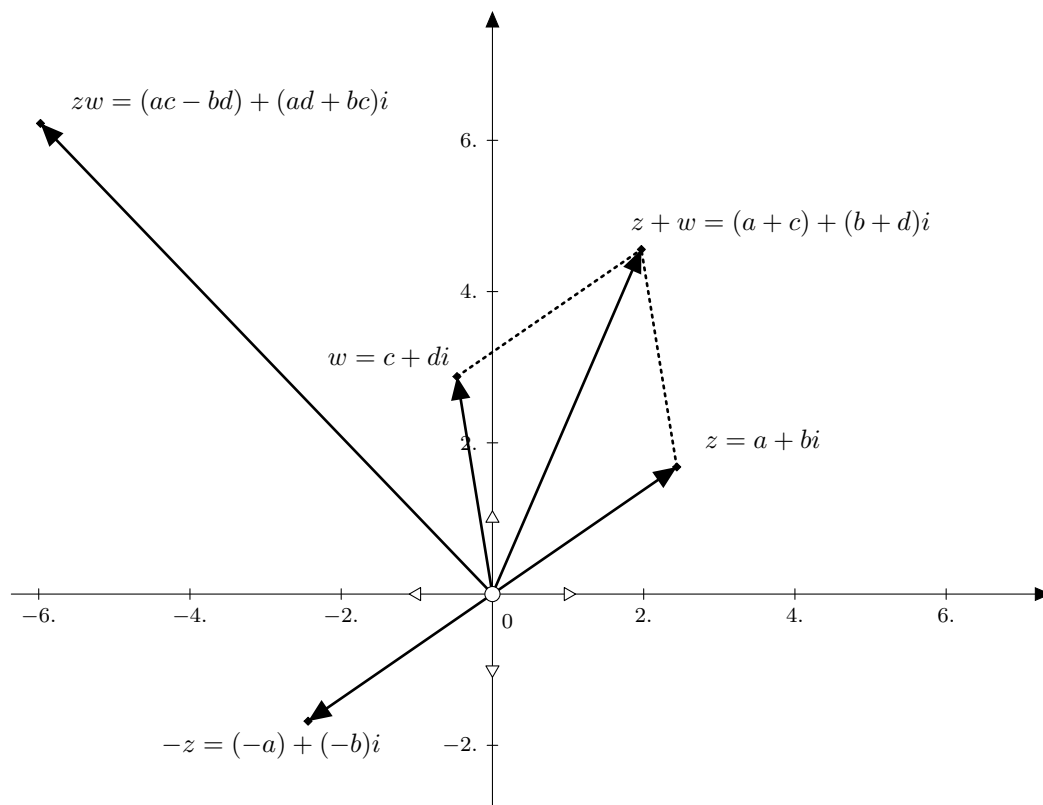


Figura 1.2.: Producte i suma de complexos, i oposat d'un nombre complex.

coincideixen amb els habituals:

$$(a + 0i) + (c + 0i) = a + c + 0i \equiv a + c,$$

$$(a + 0i) \cdot (c + 0i) = ac + 0i \equiv ac.$$

A més, efectivament, tenim que

$$i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1 + 0i = -1.$$

Per tant, amb aquesta definició hem creat un conjunt amb dues operacions (suma i producte) que *estén* els nombres reals amb les seves operacions habituals, i on el polinomi $x^2 + 1$ té (almenys) dues arrels. Notem que la suma és compatible amb l'estructura d'*espai vectorial* de $\mathbb{R}^2$, però el producte de nombres complexos no coincideix amb el producte vectorial ni amb el producte escalar: és una operació que no existeix a l'espai vectorial tal com el definim habitualment.

Exemple 1.3 (Càlcul del producte). Podem pensar l'operació producte en termes de la propietat distributiva com

$$(1 + 2i)(-3 + 2i) = -3 + 2i - 6i + 4i^2 = -3 - 4i - 4 = -7 - 4i.$$

Notem que el resultat coincideix amb la definició, i el procediment és més intuïtiu. $\diamond$

1. El cos dels nombres complexos

Podem veure fàcilment que el conjunt $\mathbb{C}$ equipat amb aquestes dues operacions satisfà les següents propietats, que es poden resumir amb la següent afirmació: els complexos tenen estructura d'anell commutatiu.

Lema 1.4 (Els complexos com a anell). *Siguin $z, w, v \in \mathbb{C}$. Aleshores se satisfan les propietats respecte a la suma:*

S1 Associativa de la suma: $(z + w) + v = z + (w + v)$.

S2 Element neutre per la suma: si escrivim $0_{\mathbb{C}} := 0 + 0i$, aleshores $z + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z = z$. Amb la identificació dels reals amb la inclusió dels reals en els complexos, escrivim $0_{\mathbb{C}} = 0$.

S3 Element oposat (de la suma): existeix un nombre complex $u \in \mathbb{C}$ tal que $u + z = z + u = 0$, que anomenem nombre oposat a z , i que escrivim com $(-z) := u$.

S4 Commutativa de la suma: $z + w = w + z$.

També se satisfan les següents propietats respecte al producte:

P1 Associativa del producte: $(zw)v = z(wv)$.

P2 Element neutre pel producte: si escrivim $1_{\mathbb{C}} := 1 + 0i$, aleshores $z \cdot 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} \cdot z = z$. Amb la identificació dels reals amb la inclusió dels reals en els complexos, escrivim $1_{\mathbb{C}} = 1$.

P3 Commutativa del producte: $zw = wz$.

P4 Distributiva del producte respecte a la suma: $z(w + v) = zw + zv$.

De fet, $\mathbb{C}$ és un cos (és a dir, tot element diferent de zero té invers respecte del producte). Per veure-ho, primer introduïm el concepte de conjugat.

Definició 1.5 (Conjugat i mòdul d'un nombre complex). Si $z = x + iy$, el conjugat de z és

$$\bar{z} = x - iy.$$

i el seu mòdul és

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad \bullet$$

Exemple 1.6. De les definicions podem deduir que

$$\bullet \quad \overline{2 - 3i} = 2 + 3i.$$

$$\bullet \quad \bar{i} = -i.$$

$$\bullet \quad \overline{13} = 13. \quad \diamond$$

Observació 1.7. Clarament tenim que

$$\bullet \quad z = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.$$

1. El cos dels nombres complexos

- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|; \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \text{i} \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2.$

Les primeres són evidents, la darrera és també un simple càlcul:

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad \bullet$$

Amb aquesta relació ja podem veure que $\mathbb{C}$ és efectivament un cos:

Lema 1.8 (Els complexos com a cos). *Si sigui $z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Aleshores se satisfà la següent propietat respecte del producte:*

P5 Element invers (del producte): existeix un nombre complex $u \in \mathbb{C}$ tal que $uz = zu = 1$, que anomenem nombre invers de z , i que escrivim com $z^{-1} := 1/z := u$.

Aquest nombre és

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{|z|^2} - \frac{y}{|z|^2}i = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}.$$

Demostració. Efectivament, $(x + yi) \cdot \left(\frac{x}{|z|^2} - \frac{y}{|z|^2}i\right) = \frac{x^2+y^2}{|z|^2} + \frac{xy-xy}{|z|^2}i = 1. \quad \square$

Ara ja podem definir la *divisió* o *fracció* de dos nombres complexos $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\frac{z}{w} := z \cdot \frac{1}{w}.$$

Així, tenim que

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}.$$

És a dir, per calcular l'invers d'un nombre complex, només hem de multiplicar numerador i denominador pel seu conjugat.

Exemple 1.9 (Més càlculs). Tenim

- $\frac{1}{3+10i} = \frac{3-10i}{(3+10i)(3-10i)} = \frac{3-10i}{9+100} = \frac{3}{109} - \frac{10}{109}i.$
- $\frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = -i. \quad \diamond$

Lema 1.10 (Relació entre x, y i $z, \overline{z}$). *Si $z = x + iy$ i $\overline{z} = x - iy$, aleshores*

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{i} \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Demostració. Es tracta de sumar i restar z amb $\overline{z}$, vegeu la figura 1.3. $\square$

1. El cos dels nombres complexos

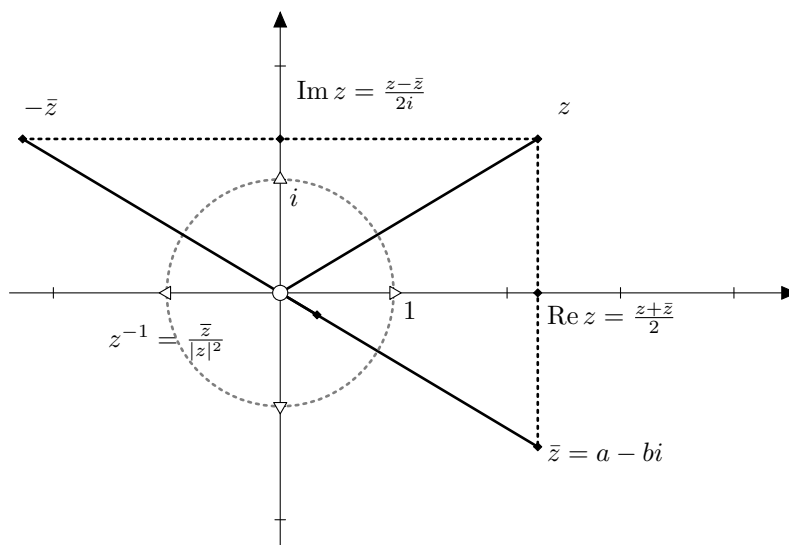


Figura 1.3.: Conjugat i invers d'un nombre complex.

Observació 1.11 (Reinterpretació dels polinomis). Un polinomi en x, y és un polinomi en $z, \bar{z}$ (amb coeficients complexos). Per exemple

$$\begin{aligned} x + y + xy + 1 &= \frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{(z - \bar{z})}{2i} + \frac{(z + \bar{z})}{2} \cdot \frac{(z - \bar{z})}{2i} + 1 \\ &= z \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i} \right) + \bar{z} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2i} \right) + 1 + z^2 \left(\frac{1}{4i} \right) - \bar{z}^2 \left(\frac{1}{4i} \right). \quad \square \end{aligned}$$

Exercicis

1.1.1. Doneu en forma $a + bi$:

$$\begin{array}{lll} a) (-1 + i)^2, & c) \frac{-1+5i}{2+3i}, & e) \left(\frac{2+i}{6i-(1-2i)} \right)^2, \\ b) \frac{8i-1}{i}, & d) \frac{(8+2i)-(1-i)}{(2+i)^2}, & f) ((3-i)^2 - 3)i. \end{array}$$

1.1.2. Demostreu o doneu un contraexemple:

$$a) \operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w, \quad b) \operatorname{Re}(zw) = (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Re} w), \quad c) \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Re} w}. \quad \triangleleft$$

1.1.3. Sigui $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im}(z) > 0$. Proveu que $\operatorname{Im}(1/z) < 0$. $\triangleleft$

1.1.4. Si $z = x + iy$ on $x, y \in \mathbb{R}$, trobeu les parts real i imaginària de:

1. El cos dels nombres complexos

- a) z^2 , c) $\frac{1}{z-3}$, e) $\frac{z+1}{2z-5}$,
 b) $z(z+1)$, d) $\frac{1}{z^2}$, f) z^3 . ◁

1.1.5. Sigui $\frac{x+iy}{x-iy} = a+ib$ amb $(x,y) \neq (0,0)$ i $x,y,a,b \in \mathbb{R}$. Proveu que $a^2+b^2=1$. ◁

1.1.6. Proveu que $-1+i$ satisfà $z^2+2z+2=0$. ◁

1.1.7. Escriviu l'equació complexa $z^3+5z^2=z+3i$ com dues equacions reals. ◁

1.1.8. a) Si z_1, z_2 són complexos amb z_1+z_2 i z_1z_2 reals negatius proveu que z_1, z_2 són reals.

b) Proveu que el vector $z_1 \neq 0$ és paral·lel al vector $z_2 \neq 0$ si i només si $\text{Im}(z_1\bar{z}_2)=0$. ◁

1.1.9. Proveu analíticament i gràfica que $|z-1|=|\bar{z}-1|$. ◁

1.1.10. Demostreu que $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$ si $|a|=1$ o bé $|b|=1$. Quina excepció cal fer si $|a|=|b|=1$?

Demostreu també que $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$ si $|a| < 1$ i $|b| < 1$.

Per acabar, si per $a \in \mathbb{D}$ definim $\varphi_a(z) := \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, demostreu que $\varphi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, que és bijectiva en $\mathbb{D}$ i en $\partial\mathbb{D}$ i doneu-ne la inversa. ◁

1.2. Els nombres complexos com a espai vectorial

A més de la seva estructura algebraica, el cos $\mathbb{C}$ hereta, a través de la identificació amb $\mathbb{R}^2$, l'estructura geomètrica i topològica del pla.

Per tot nombre real $\lambda \in \mathbb{R}$ i $z = a+ib \in \mathbb{C}$, definim $\lambda z := (\lambda a) + (\lambda b)i$, és a dir, identifiquem λ amb el nombre complex $\lambda+0i$ i fem el producte de dos nombres complexos, tal com hem descrit a la secció anterior.

Aquesta multiplicació per un escalar real compleix les propietats:

E1. Compatibilitat del producte per escalar: $(\lambda\mu)z = \lambda(\mu z)$.

E2. El producte per l'element neutre és la identitat: $1z = z$.

E3. Distributiva respecte a la suma real: $(\lambda + \mu)z = \lambda z + \mu z$.

E4. Distributiva respecte a la suma complexa: $\lambda(z+w) = \lambda z + \lambda w$.

1. El cos dels nombres complexos

Aquí estem suposant que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $z, w \in \mathbb{C}$.

Com que el pla complex també satisfà les propietats $S1$ – $S4$ descrites més amunt, diem que té estructura de $\mathbb{R}$ -espai vectorial. Com a $\mathbb{R}$ -espai vectorial, $\mathbb{C}$ coincideix amb $\mathbb{R}^2$. L'eix de les x s'anomena *eix real*, i l'eix de les y s'anomena *eix imaginari*. El pla format per $\mathbb{R}^2$ en identificar-se amb els complexos (i incorporar, per tant, l'operació producte de complexos) s'anomena *pla complex* o *pla d'Argand*⁸.

Per tant, $\mathbb{C}$ hereta l'estructura de $\mathbb{R}^2$, i és un *espai normat* amb $\|z\|_{\mathbb{C}} = |z|$, és a dir,

$$N1. \|z\|_{\mathbb{C}} = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$N2. \|az\|_{\mathbb{C}} = |a| \|z\|_{\mathbb{C}}, \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ (de fet, } \forall a \in \mathbb{C});$$

$$N3. \|z + w\|_{\mathbb{C}} \leq \|z\|_{\mathbb{C}} + \|w\|_{\mathbb{C}} \text{ (desigualtat triangular).}$$

Donats $z, w \in \mathbb{C}$, definim

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Amb aquesta distància, $\mathbb{C}$ és un *espai mètric*⁹, de manera que té una topologia.

Definició 1.12 (Topologia de $\mathbb{C}$). El pla complex hereta la topologia del pla. Per tant, el *disc obert* (o *bola oberta*) centrat en a i de radi r és el conjunt

$$D_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

El *disc unitat* normalment es denota $\mathbb{D} := D_1(0)$. El *disc tancat* és

$$\overline{D_r}(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}.$$

Diem que un conjunt $A \subset \mathbb{C}$ és *obert* si per tot $a \in A$ existeix $r > 0$ tal que $D_r(a) \subset A$.

Diem que A és *tancat* si $A^c = \mathbb{C} \setminus A$ és obert.

Diem que és *fitat* si existeix un $r > 0$ tal que $A \subset D_r(0)$.

Diem que A és *connex* si no es pot obtenir com a unió de dos oberts relatius disjunts i no buits. Diem que és *arc-connex* si donats dos punts $a, b \in A$ existeix un camí en A que els uneix, i.e., existeix una aplicació contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ de manera que $\gamma(0) = a$ i $\gamma(1) = b$.

Diem que A és un *domini* si és obert i connex. •

Observació 1.13. Notem que $\emptyset$ i $\mathbb{C}$ són oberts i tancats, però no hi ha cap més conjunt que sigui obert i tancat alhora. •

⁸Jean-Robert Argand, Ginebra, 1768 – 1822, https://ca.wikipedia.org/wiki/Jean-Robert_Argand

⁹És a dir, que satisfà:

$$D1. d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w;$$

$$D2. d(z, w) = d(w, z) \text{ (simetria);}$$

$$D3. d(z, w) \leq d(z, v) + d(v, w) \text{ (desigualtat triangular).}$$

1. El cos dels nombres complexos

Exemple 1.14 (Conjunt connex no arc-connex). Recordem que tot conjunt arc-connex és connex, i que tot obert connex és arc-connex. Però hi ha conjunts connexos que no són arc-connexos. Un cas paradigmàtic és la *pinta*: donada una successió $\{x_n\} \subset (0, 1)$ tal que $x_n \rightarrow 0$, el conjunt $A = [0, 1] \cup \bigcup_n x_n + (0, 1)i$ (podem anomenar-lo *pinta* per la seva forma) és arc-connex i, per tant, connex. Si afegim un punt límit no accessible, per exemple $B = A \cup \{i\}$, aleshores B no és arc-connex, ja que el punt afegit no pot ser connectat amb cap punt d' A , però segueix sent connex, ja que aquest punt no pot ser separat de la resta per un obert. $\diamond$

Com que tenim una mètrica (en aquest cas derivada d'una norma), podem parlar de convergència de successions:

Definició 1.15 (Convergència de successions). Diem que una successió de nombres complexos $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ és *convergent* si existeix $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$|z_n - z| \rightarrow 0.$$

Diem que z_n tendeix a z , o que z és el límit de la successió, i ho escrivim com

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \quad \text{o bé} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

Sovint ometrem la notació $n \rightarrow \infty$ en les expressions anteriors quan sigui clar pel context. $\bullet$

A més, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ és complet: tota successió de Cauchy¹⁰ de nombres complexos és convergent.

També tenim que

$$z_n \rightarrow z \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z. \end{cases} \quad (1.5)$$

Exemple 1.16. La successió $\frac{1}{n} + \frac{(n-1)}{n}i$ tendeix a i , ja que $1/n \rightarrow 0$ i $\frac{(n-1)}{n} \rightarrow 1$. $\diamond$

Advertència 1.17. No sempre és convenient passar a part real i part imaginària. Quan ja es té pràctica amb les relacions anteriors, la majoria de vegades és millor fer servir notació complexa, vegeu l'exercici 1.2.2 i el teorema següent. $\bullet$

Teorema 1.18 (Límits i funcions contínues). *Sigui $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, una funció contínua en $a \in \mathbb{C}$. Si $a_n \rightarrow a$, aleshores $f(a_n) \rightarrow f(a)$.*

Demostració. Es deriva del resultat a $\mathbb{R}^2$ i la identificació de $\mathbb{R}^2$ amb $\mathbb{C}$. $\square$

Tot seguit discutim la convergència de sèries:

¹⁰Augustin Louis Cauchy, París, 1789 – 1857, https://ca.wikipedia.org/wiki/Augustin_Louis_Cauchy

1. El cos dels nombres complexos

Definició 1.19 (Convergència de sèries). Sigui $\{z_k\} \subset \mathbb{C}$ una successió de nombres complexos. Aleshores, diem que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ és *convergent* si $\left\{ \sum_{k=1}^n z_k \right\}_n$ és una successió convergent. En tal cas, si el límit de la successió és z , escrivim

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z.$$

Diem que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ és *absolutament convergent* si $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$. •

Observació 1.20 (Condicció necessària de convergència). Notem que si una sèrie de nombres complexos $\sum_n c_n$ és convergent, aleshores $|c_n| \rightarrow 0$. •

Observació 1.21 (Convergència absoluta implica convergència). Tota sèrie absolutament convergent de nombres reals és convergent. En el pla complex passa el mateix. En efecte, si $\sum |z_k| < \infty$, llavors $\sum |\operatorname{Re} z_k| < \infty$ i també $\sum |\operatorname{Im} z_k| < \infty$, ja que $|\operatorname{Re} z_k| \leq |z_k|$ i $|\operatorname{Im} z_k| \leq |z_k|$ i, per tant,

$$\begin{cases} \sum \operatorname{Re} z_k & \text{és convergent, i} \\ \sum \operatorname{Im} z_k & \text{és convergent,} \end{cases}$$

de manera que $\sum z_k$ és convergent per (1.5). •

Teorema 1.22 (Teorema de Mertens¹¹). Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ dues sèries de nombres complexos absolutament convergents. Llavors la sèrie producte de Cauchy de les sèries anteriors, $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$, on $\gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k}$, és absolutament convergent i

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \right).$$

Demostració. Vegeu l'exercici 1.2.5. □

Definició 1.23 (Límit superior). Donada una successió $\{a_n\}$ de nombres reals, definim el seu *límit superior* com

$$\overline{\lim} a_n = \limsup a_n := \inf_k \left(\sup_{n \geq k} a_n \right).$$

També es compleix

$$\limsup a_n = \sup \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} : a_{n_k} \text{ és una subsuccessió de } a_n \right\}.$$

•

¹¹Franz Mertens, Środa Wielkopolska, 1840 – 1927, https://ca.wikipedia.org/wiki/Franz_Mertens

1. El cos dels nombres complexos

Exemple 1.24. Fem un exemple de càlcul: si tenim la successió $\{a_n\} = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$, aleshores $\liminf a_n = 0$ i $\limsup a_n = 1$. Si $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$, aleshores $\liminf b_n = -1$, i $\limsup b_n = 1$. $\diamond$

Tot seguit recordem el criteri de l'arrel, que hauria d'haver estat introduït en cursos anteriors.

Lema 1.25 (Criteri de l'arrel). *Considerem una successió de nombres reals $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, i sigui $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Aleshores,*

(i) *si $\alpha < 1$, la sèrie $\sum_n a_n$ és convergent;*

(ii) *si $\alpha > 1$, la sèrie $\sum_n a_n$ no convergeix.*

Observació 1.26 (Criteri del quocient). Recordem que si existeix

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in [0, +\infty],$$

aleshores $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$ existeix i també val ℓ . Recordeu també que el recíproc no és cert: si $a_n = r^{n+(-1)^n\sqrt{n}}$, aleshores $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = r$, però $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \cdot r^{(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$, que no té límit. De fet, si $0 < r < 1$, tenim que $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ i $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, de manera que el *criteri del quocient* no és concloent respecte a la convergència, mentre que el criteri de l'arrel sí que ho és. $\bullet$

Exercicis

1.2.1. *Describeu els conjunts de punts del pla que satisfan:*

- a) $1 < \operatorname{Im}(iz) < 2$, c) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$, e) $|z - 2| > |z - 3|$,
b) $\operatorname{Im} \frac{z-a}{z} = 0, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, d) $|z - 1| = |z + i|$, f) $|z - 1| + |z + 1| = 7$. $\triangleleft$

1.2.2. *Suposem que $a_n \rightarrow a$ i $b_n \rightarrow b$. Demostreu que $a_n + b_n \rightarrow a + b$ i $a_n b_n \rightarrow ab$, sabent que ambdues propietats són certes a la recta real.* $\triangleleft$

1.2.3. *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

- a) $i^n + \frac{1}{n+i}$, b) $\frac{n+i}{n-i}$, c) $\frac{3in^2}{n^2-2i}$. $\triangleleft$

1.2.4. *Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:*

1. El cos dels nombres complexos

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}. \quad \triangleleft$$

1.2.5. Demostreu el teorema de Mertens. $\triangleleft$

1.2.6. Tota successió convergent $\{z_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ satisfà que $|z_{n+1} - z_n| \rightarrow 0$. $\triangleleft$

1.3. Repàs de trigonometria

En estudiar Càlcul en Diverses Variables, vam aprendre que podem calcular la *longitud* d'una corba diferenciable $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$L(\gamma) = \int_I |\gamma'(t)| dt.$$

Així, la corba

$$t \mapsto \gamma(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$$

envia l'interval $[-1, 1]$ al semicercle unitat superior. Definim π com la longitud d'aquesta corba. Com que $\gamma'(t) = (-1, -t/\sqrt{1-t^2})$, la definició és equivalent a

$$\pi := \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

que és una integral impròpia convergent.

Notem que γ és injectiva i la longitud de $\gamma([-1, t])$ és una funció creixent en t i contínua (de fet, derivable) en $(0, \pi)$ pel teorema fonamental del càlcul; per tant, és exhaustiva en $[0, \pi]$. Així, associem a un nombre (que anomenem *angle*) $\alpha \in [0, \pi]$ la semirecta oberta del pla amb extrem a l'origen de coordenades que passa pel punt $\gamma(t)$ tal que $\alpha = \text{longitud}(\gamma([-1, t])) = \int_{-1}^t \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$. Per exemple, per $\alpha = \pi$ prenem $t = 1$ ja que π és la longitud del semicercle. L'angle $\alpha = \pi/2$ (anomenat també *angle recte*) correspon a la meitat del semicercle per simetria, que correspon a $t = 0$, és a dir, que té associada la semirecta vertical $\{(0, y) : y > 0\}$.

Si $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, aleshores associem α a la semirecta oposada a l'associada a $\alpha - \pi$.

Si $\alpha \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)$ amb $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; aleshores associem α a la semirecta associada a $\alpha - 2k\pi$

Definició 1.27 (Funcions trigonomètriques reals). Donat un angle $\alpha \in \mathbb{R}$, definim el seu *sinus* com el quocient de la coordenada vertical entre el mòdul de qualsevol dels punts de la seva semirecta associada, (ben definit pel teorema de Tales¹²). Definim el *cosinus* com el quocient de la coordenada horitzontal entre el mòdul de qualsevol dels punts de la seva semirecta associada. I definim la *tangent* com el quocient entre sinus i cosinus. $\bullet$

¹²Tales de Milet, Milet, 625 a.C. – ~545 a.C., https://ca.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Milet

1. El cos dels nombres complexos

Observació 1.28 (Angle nul, recte i pla). Tenim

$$\sin(\pi) = \cos(\pi/2) = \sin(0) = 0,$$

$$\sin(\pi/2) = \cos(0) = 1,$$

i

$$\cos(\pi) = -1.$$

Notem que, per definició, el sinus i el cosinus són funcions 2π -periòdiques, mentre que la tangent és π -periòdica.

Lema 1.29 (Paritat de les funcions trigonomètriques). Si $x \in \mathbb{R}$, aleshores

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x), \quad \tan(-x) = -\tan(x).$$

Demostració. És conseqüència directa de la definició. □

Lema 1.30 (Teorema de Pitàgores¹³). Si $x \in \mathbb{R}$, aleshores

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Demostració. Això es deriva del fet que $t^2 + \sqrt{1-t^2}^2 = 1$. □

Lema 1.31 (Suma d'angles). Donats $x, y \in \mathbb{R}$, tenim que

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{cases}$$

Idea. Aquest lema es pot demostrar usant geometria elemental, vegeu la figura 1.4. □

Lema 1.32 (Angles complementaris, suplementaris i periodicitat). Donat $x \in \mathbb{R}$, es compleixen les identitats (entenen la tangent com a funció a la recta projectiva real, de manera que $+\infty = -\infty$):

$$\begin{aligned} \sin(\pi/2 - x) &= \cos(x), & \cos(\pi/2 - x) &= \sin(x), & \tan(\pi/2 - x) &= 1/\tan(x); \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x); \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x), & \cos(x + 2\pi) &= \cos(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x). \end{aligned}$$

Demostració. Cal combinar la suma d'angles amb les simetries de les funcions trigonomètriques del lema 1.29 i els valors donats a l'observació 1.28. □

Lema 1.33 (Infinitèsims). Tenim

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad i \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

¹³Pitàgores, Samos, 586 a.C. – ~490 a.C., <https://ca.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A0gores>

1. El cos dels nombres complexos

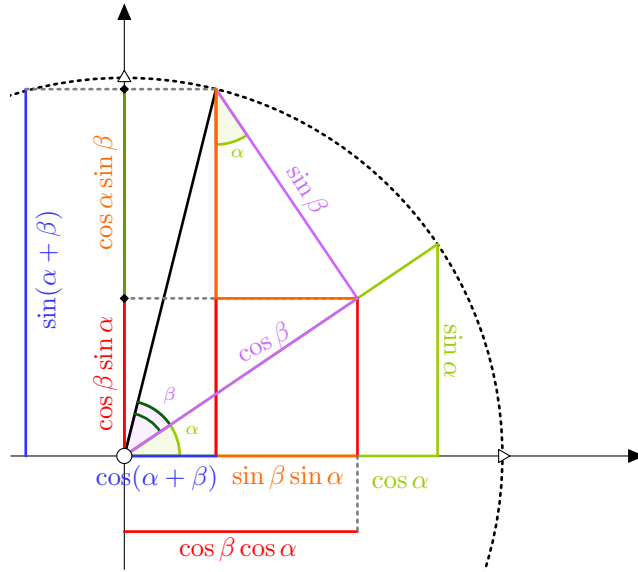


Figura 1.4.: Demostració visual de les fórmules trigonomètriques per la suma d'angles.

Idea. Notem que el segon és conseqüència del primer ja que

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{\text{L.1.30}}{=} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}.$$

Per veure el primer, n'hi ha prou amb justificar geomètricament que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, aleshores

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

i després fer pas al límit. □

Teorema 1.34 (Propietats de derivabilitat). *Les funcions $\sin(x)$ i $\cos(x)$ són 2π -periòdiques, infinitament derivables i*

$$(\sin(x))' = \cos(x) \quad i \quad (\cos(x))' = -\sin(x).$$

A més, les seves sèries de Taylor són convergents a tot $\mathbb{R}$ i trobem que

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad i \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Idea. Per veure la derivabilitat n'hi ha prou amb comprovar les dues derivades, que surten de

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \stackrel{\text{L.1.33}}{=} \cos(x).$$

L'altra es fa anàlogament. La convergència s'obté usant estimacions del residu de Taylor. □

1. El cos dels nombres complexos

Definició 1.35 (Funcions trigonomètriques inverses). Es pot demostrar que la tangent és injectiva en $(-\pi/2, \pi/2)$ i la seva imatge és $\mathbb{R}$. Per tant, podem definir l'*arctangent* d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ ($\arctan x$), com l'únic nombre real $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\tan \alpha = x$. També pel sinus tenim injectivitat en $[-\pi/2, \pi/2]$ i definim l'*arcsinus* d'un nombre $x \in [-1, 1]$ ($\arcsin x$), com l'únic nombre real $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\sin \alpha = x$. Finalment, el cosinus és injectiu a $[0, \pi]$, i definim l'*arccosinus* d'un nombre $x \in [-1, 1]$ ($\arccos x$), com l'únic nombre real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos \alpha = x$. Pel teorema de la funció inversa per funcions de variable real, sabem que les tres funcions són C^∞ a l'interior del seu domini. •

Exercicis

1.3.1. Demostreu tots els resultats de la secció. ◁

1.3.2. Definim el sinus i el cosinus hiperbòlics de $x \in \mathbb{R}$ com

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Demostra que se satisfan les següents identitats:

a) $\sinh(0) = 0 \quad i \quad \cosh(0) = 1.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty \quad i \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty.$

c) $\sinh(-x) = -\sinh(x) \quad i \quad \cosh(-x) = \cosh(x).$

d) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$

e) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$

f) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$

g) $(\sinh x)' = \cosh x \quad i \quad (\cosh(x))' = \sinh(x).$ ◁

1.4. L'exponencial complexa

Per la fórmula de Taylor, tenim que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podem fer servir aquesta mateixa expressió per tal de definir e^z per $z \in \mathbb{C}$.

Definició 1.36 (L'exponencial complexa). Per $z \in \mathbb{C}$, definim

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Aquesta sèrie de nombres complexos és absolutament convergent (ja que $\sum \frac{|z|^n}{n!} < \infty$) i, per tant, convergent. Així doncs, e^z està ben definit per a tot $z \in \mathbb{C}$. •

1. El cos dels nombres complexos

Per $x \in \mathbb{R}$, tenim del teorema 1.34 que

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}); \quad \sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}).$$

Així doncs, tenim la *identitat d'Euler*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

i, usant el lema 1.10, deduïm la fórmula inversa d'Euler:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{i} \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notem que la corba $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $\gamma(x) = e^{ix}$ retorna valors de mòdul 1 pel teorema de Pitàgores:

$$|e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

Per tant, la corba γ “enrotlla” la recta real sobre la circumferència unitat, amb velocitat constant i periodicitat 2π .

Podem definir els sinus i cosinus de nombres complexos anàlogament usant el teorema 1.34, però en aquest capítol només apareixen les funcions sinus i cosinus amb variable real.

Proposició 1.37 (Conjugació de l'exponencial). *Per a tot $z \in \mathbb{C}$, es compleix que*

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$$

Demostració. Per definició, tenim que

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{z^n}{n!}}.$$

Com que l'aplicació conjugada és contínua, podem treure el límit a fora del conjugat (teorema 1.18) per obtenir

$$\overline{e^z} = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\sum_{n=0}^k \frac{z^n}{n!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{\bar{z}^n}{n!} = e^{\bar{z}}.$$

□

Com a propietat fonamental de l'exponencial real, tenim que

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

L'exponencial complexa e^z manté aquesta propietat.

Proposició 1.38 (Productes i potències d'exponencials). *Donats $z, w \in \mathbb{C}$, tenim que*

$$e^z e^w = e^{z+w}.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, trobem per tant

$$(e^z)^n = e^{nz}, \quad \text{i} \quad (e^z)^{-1} = e^{-z}. \quad (1.6)$$

1. El cos dels nombres complexos

En particular, tenim que

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

que generalitza la identitat d'Euler.

Demostració de la proposició. Per la definició de l'exponencial complexa, tenim que

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k w^{n-k}}{n!},$$

on hem aplicat la fórmula de la potència d'un binomi en la darrera identitat. Recordem també que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pel criteri del quocient (vegeu l'observació 1.26), tenim que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ és absolutament convergent. Podem doncs aplicar el teorema de Mertens, i trobem que

$$e^z e^w = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} z^k w^{(n-k)} \right),$$

que coincideix amb l'expressió anterior.

Per veure 1.6, notem que és cert per $n \in \{0, 1\}$. Per $n > 1$, suposant que és cert per $n-1$ com a hipòtesi inductiva, trobem que

$$e^{nz} = e^{(n-1)z+z} = e^{(n-1)z} e^z = (e^z)^{n-1} e^z = (e^z)^n.$$

Finalment,

$$1 = e^0 = e^z e^{-z} \implies e^{-z} = (e^z)^{-1}.$$

□

Observació 1.39. Una demostració alternativa de $|e^{ix}| = 1$ per a tot $x \in \mathbb{R}$: Tenim

$$|e^{ix}|^2 = (e^{ix}) \overline{(e^{ix})} = e^{ix} e^{-ix} = e^0 = 1.$$

Definint les potències negatives de la manera habitual (és a dir, $z^{-k} = (z^k)^{-1}$), aleshores 1.6 s'estén a tots els enters $n \in \mathbb{Z}$. •

Observem (vegeu l'observació 1.28 i el lema 1.32) que

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i; \quad e^{i\pi} = -1; \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

Lema 1.40 (Fórmula de De Moivre¹⁴). Per tot $n \in \mathbb{N}$ i $\theta \in \mathbb{R}$, tenim que

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re} \left((e^{i\theta})^n \right) \quad i \quad \sin(n\theta) = \operatorname{Im} \left((e^{i\theta})^n \right).$$

¹⁴Abraham de Moivre, Vitry-le-François, 1667–1754, https://ca.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre

1. El cos dels nombres complexos

Demostració. Això és una reescriptura de $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, vegeu (1.6). □

Usant la identitat anterior, podem expressar $\cos(n\theta)$ i $\sin(n\theta)$ en termes de $\sin \theta$ i $\cos \theta$. Vegem un exemple:

Exemple 1.41 (Fórmula de De Moivre per $n = 3$). Com que

$$(e^{i\theta})^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta,$$

i

$$e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i \sin 3\theta,$$

obtenim la identitat $\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$. ◇

Exercicis

1.4.1. Fent servir la fórmula de De Moivre, trobeu expressions de $\sin 3\theta$ i $\sin 4\theta$ en termes de $\sin \theta$ i $\cos \theta$. ◁

1.4.2. Trobeu les arrels de $z^4 + 1 = 0$ i feu-les servir per veure que $z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$. ◁

1.5. Representació polar d'un nombre complex

Tot nombre complex $z \neq 0$, el podem expressar en termes del seu mòdul r (on $r = |z|$) i l'angle θ que forma amb l'eix real. És a dir, podem fer un canvi de coordenades

$$z = x + iy \quad \rightarrow \quad r_\theta.$$

Aquest angle θ quedarà completament determinat si imposem que es trobi en un interval de longitud 2π fixat.

Definició 1.42 (Coordenades polars). Donat $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, s'anomena l'*argument principal*¹⁵ de z i es denota per

$$\text{Arg } z$$

l'únic angle θ que pren valors $-\pi < \theta \leq \pi$ de manera que

$$\begin{cases} \text{Re } z = |z| \cos \theta, \\ \text{Im } z = |z| \sin \theta. \end{cases}$$

Aleshores tenim que

$$z = x + iy = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}.$$

Anomenem *coordenades polars* de z el parell (r, θ) amb $r = |z|$. •

1. El cos dels nombres complexos

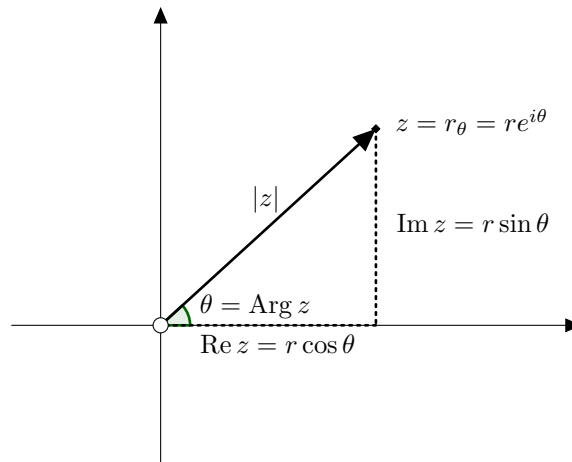


Figura 1.5.: Coordenades polars d'un nombre complex.

Observació 1.43 (Càlcul de l'argument principal mitjançant l'arctangent). Per trobar l'argument principal de $z = x + iy$, podem calcular l'arctangent, vegeu la figura 1.6: $\hat{\theta} := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Aleshores,

- si $x > 0$ (primer i quart quadrants del pla complex), calculem $\theta = \hat{\theta}$;
- si $x < 0$ i $y \geq 0$ (segon quadrant), tenim que $-\pi/2 < \hat{\theta} \leq 0$, així que per calcular-lo podem prendre $\theta = \hat{\theta} + \pi$;
- si $x < 0$ i $y < 0$ (tercer quadrant), tenim que $0 < \hat{\theta} < \pi/2$, així que $\theta = \hat{\theta} - \pi$;
- si $x = 0$ i $y > 0$ (semieix imaginari superior), prenem $\theta = \pi/2$ i
- si $x = 0$ i $y < 0$ (semieix imaginari inferior), prenem $\theta = -\pi/2$.

D'aquesta manera, per tot $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tenim que

$$\text{Arg } z = \theta \in (-\pi, \pi].$$

Exemple 1.44. 1. La representació polar de i és

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

2. Calculem la representació polar de $z = \sqrt{3} + i$:

Tenim $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, de manera que

$$\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

¹⁵Vegeu-ne la gràfica interactiva a <https://www.geogebra.org/3d/jg4nznfcw>.

1. El cos dels nombres complexos

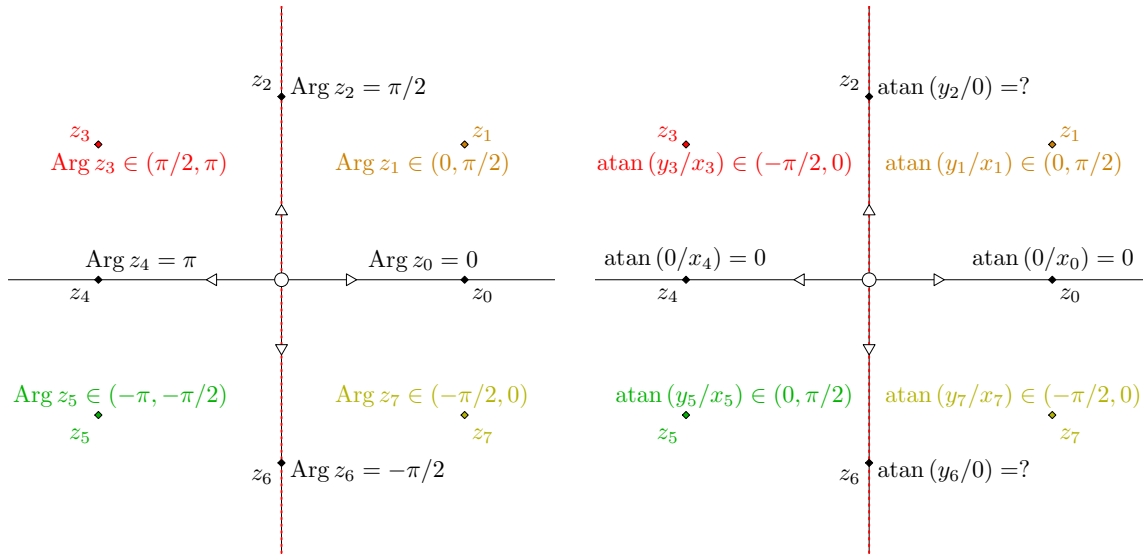


Figura 1.6.: Relació entre l'argument principal i l'arctangent de la part imaginària entre la real.

Com que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, per la identitat d'Euler obtenim

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

de manera que $\theta = \pi/6$. Per tant, la representació polar és

$$\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}. \quad \diamond$$

Proposició 1.45 (Periodicitat de l'exponencial). *Siguin $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Es compleix que $e^{z_1} = e^{z_2}$ si i només si $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$.*

En altres paraules, la funció exponencial complexa és una funció periòdica amb conjunt de períodes $2\pi i\mathbb{Z}$ i és injectiva en franges horitzontals semiobertes d'amplada 2π .

Demostració. Suposem que per a un $k \in \mathbb{Z}$, $z_1 = z_2 + 2\pi ik$. Llavors

$$e^{z_1} = e^{z_2 + 2\pi ik} = e^{z_2} e^{2\pi ik} = e^{z_2}.$$

Recíprocament, si $e^{z_1} = e^{z_2}$, es compleix que $e^{z_1 - z_2} = 1$, de manera que $e^{\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2} = |e^{z_1 - z_2}| = 1$ i $e^{i\operatorname{Im}(z_1 - z_2)} = 1$, és a dir,

$$\cos \operatorname{Im}(z_1 - z_2) \stackrel{\text{Euler}}{=} 1.$$

Per tant, $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ i $\operatorname{Im}(z_1 - z_2) = 2k\pi$, o, equivalentment, $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$. □

1. El cos dels nombres complexos

Tornant a la definició 1.42, és clar que, fixant un altre interval de longitud 2π , hi ha altres possibilitats amb l'angle θ que ens dona la representació polar. De fet, aquí n'hem fixat una de concreta per fer de referència. Així doncs, hi ha infinits nombres reals θ (s'anomenen arguments de z) que compleixen la identitat

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Són

$$\text{Arg } z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 1.46.

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{-i\frac{3\pi}{2}}. \quad \diamond$$

Definició 1.47 (Arguments de z). Un *argument* de $z \neq 0$ és un nombre real θ de manera que $z = |z|e^{i\theta}$.

$\arg z$ denota **tots** els possibles arguments de z . •

Exemple 1.48 (Càlcul dels arguments). Sigui $z = 1 - \sqrt{3}i$. Llavors $|z| = 2$, de manera que

$$\frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\pi < \theta \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}.$$

Per tant,

$$\text{Arg } z = -\frac{\pi}{3}; \quad \arg z = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \diamond$$

El producte, el quocient i la potència solen ser més fàcils de calcular en forma polar, tal com veurem al següent exemple.

Exemple 1.49 (Càlcul de productes i potències en forma polar).

$$\begin{aligned} 2e^{3i} \cdot \sqrt{3}e^{i\pi} &= 2\sqrt{3}e^{i(3+\pi)}. \\ \frac{2e^{3i}}{\sqrt{3}e^{i\pi}} &= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i(3-\pi)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i(3-\pi)}. \\ \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{25} &= 2^{25}e^{i\frac{25\pi}{4}} = 2^{25}e^{i\frac{24\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{25}e^{i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Notem que en multiplicar un nombre $z \in \mathbb{C}$ per $re^{i\theta}$ el mòdul es multiplica per r i l'argument augmenta en θ . És a dir, que en multiplicar dos nombres complexos trobem un nombre que té per mòdul el producte de mòduls i per argument, la suma d'arguments (per tenir l'argument principal podem sumar o restar 2π). ♦

Exercicis

1.5.1. Trobeu la forma polar dels nombres següents i dibuixeu-los.

1. El cos dels nombres complexos

a) $3(1 + \sqrt{3}i)$, b) $2\sqrt{3} - 2i$, c) $-2 + 2i$, d) $-1 - i$. ◁

1.5.2. *Expresseu en forma cartesiana $(a + ib)$ els següents nombres:*

a) $(2 + 3i)(4 + i)$, c) $\frac{1}{4+i}$, e) $(1 - 2i)^3$, g) $(1 + i)^{100} + (1 - i)^{100}$,
b) $(4 + 2i)^2$, d) $\frac{i}{2+i}$, f) $\frac{1}{2+i} + \frac{4-2i}{3+i}$, h) $\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2$. ◁

1.5.3. *Fent servir el producte $(1 + i)(5 - i)^4$, deduiu la fórmula de Machin¹⁶: $\pi/4 = 4 \arctan(1/5) - \arctan(1/239)$.* ◁

1.5.4. *Estudiar la convergència de $\{z_0^n\}$ si $|z_0| < 1$ o si $|z_0| > 1$.* ◁

1.5.5. *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

a) $z_n = \frac{i}{n}$, c) $z_n = \text{Arg}(-1 + i/n)$, e) $z_n = \left(\frac{1-i}{4}\right)^n$,
b) $z_n = i(-1)^n$, d) $z_n = \frac{n(2+i)}{n+1}$, f) $z_n = \exp\left(\frac{2n\pi i}{5}\right)$.

Aquí hem escrit $\exp(z) = e^z$.

1.6. Equacions amb exponencials

Exemple 1.50. Solucionem l'equació

$$e^z = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tenim

$$1 = e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Com que $|e^{iy}| = 1$, igualant mòduls i arguments obtenim

$$1 = |e^z| = e^x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos y = 1 \\ \sin y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per tant,

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

◇

¹⁶John Machin (1706), podeu trobar més informació a https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula.

1. El cos dels nombres complexos

Moltes de les equacions “exponencials” es redueixen a l’anterior. Per exemple

$$e^z = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad e^{z-i\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Exemple 1.51. Recordem que, donats $z, w \in \mathbb{C}$, per la proposició 1.45 tenim l’equivalència

$$e^z = e^w \iff z = w + 2k\pi i \text{ per algun } k \in \mathbb{Z}.$$

Sabent que $1 = e^0$, podem dir directament que

$$e^z = e^0 \iff z = 0 + 2k\pi i,$$

tal com hem vist pas a pas en l’exemple anterior. $\diamond$

Exercicis

1.6.1. Resoleu les següents equacions:

a) $e^z = 1 + i,$

b) $e^{z^2} = i,$

c) $e^{iz} = -1.$

$\triangleleft$

1.7. Arrels n -èsimes

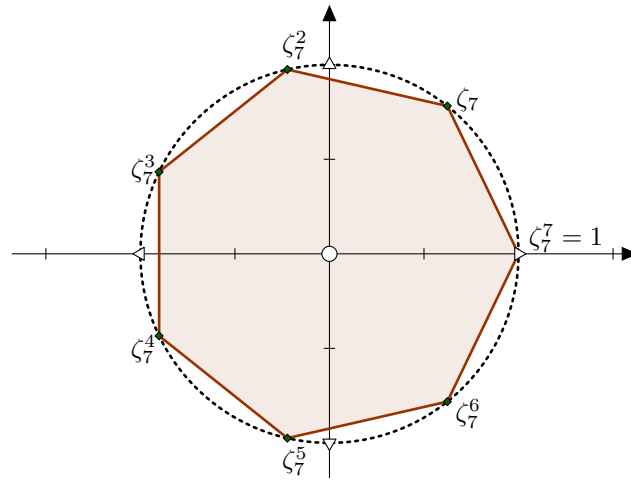


Figura 1.7.: Arrels setenes de la unitat.

Donat $n \in \mathbb{N}$, si definim $\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$, aleshores

$$\left(\zeta_n^k\right)^n = e^{2k\pi i} = 1.$$

Diem que $\{\zeta_n^k\}_{k=0}^{n-1}$ són les n arrels n -èsimes de la unitat.

1. El cos dels nombres complexos

Sigui $a \in \mathbb{C}$ amb $a \neq 0$. Per $n \in \mathbb{N}$, calculem els nombres complexos $z \in \mathbb{C}$ de manera que

$$z^n = a.$$

(Aquí no és convenient passar a notació real i fer $(x + iy)^n = a$.) Posem $z = re^{i\theta}$ amb $-\pi < \theta \leq \pi$. Llavors

$$r^n e^{in\theta} = |a| e^{i \operatorname{Arg} a}.$$

Igualant mòduls obtenim $r^n = |a| \Rightarrow r = \sqrt[n]{|a|}$. També

$$e^{in\theta} = e^{i \operatorname{Arg} a} \Leftrightarrow e^{i(n\theta - \operatorname{Arg} a)} = 1 \Rightarrow n\theta - \operatorname{Arg} a = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per tant, les solucions de $z^n = a$ són

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{i\theta_k}, \quad \text{amb} \quad \theta_k = \frac{\operatorname{Arg} a}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Tenim n solucions (amb $k \geq n$ dona solucions repetides). Notem que

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\operatorname{Arg} a}{n}} e^{i \frac{2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\operatorname{Arg} a}{n}} \zeta_n^k,$$

i, com que $z_0 = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\operatorname{Arg} a}{n}}$, podem escriure les arrels n -èsimes de a com

$$z_k = \zeta_n^k z_0,$$

vegeu la figura 1.8.

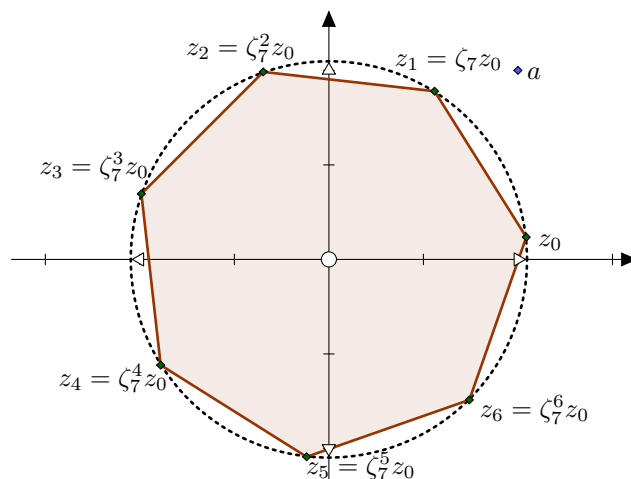


Figura 1.8.: Arrels setenes de $a = 1 + i$.

Exemple 1.52. $\sqrt[4]{i} \rightarrow e^{i\pi/8}, e^{i5\pi/8}, e^{i9\pi/8}, e^{i13\pi/8}$. Els quatre resultats satisfan que

$$z^4 = i. \quad \diamond$$

Exercicis

1.7.1. Calculeu:

1. El cos dels nombres complexos

$$a) \sqrt[3]{-1}, \quad b) 3^{1/4}, \quad c) \sqrt[4]{-i}, \quad d) (-1 + \sqrt{3}i)^{1/2}, \quad e) (3 + 4i)^{\frac{1}{2}}. \quad \triangleleft$$

1.7.2. Donat $a \in \mathbb{C}$, quin és el màxim de $|z^n + a|$ per a $|z| \leq 1$? $\triangleleft$

1.8. Polinomis: enunciat del teorema fonamental de l'àlgebra

Per acabar aquest capítol, comentem un dels principals motius que fa dels complexos una eina imprescindible: tot polinomi de coeficients reals o complexos té sempre almenys una arrel complexa i, per tant, el grau del polinomi coincideix amb el seu nombre d'arrels comptant multiplicitats.

Acabem de comprovar que hi ha nombres complexos que són solució de certs polinomis. Per exemple, si $0 \leq k < n$, aleshores els nombres

$$e^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

són tots diferents i satisfan que

$$z^n = 1.$$

Hem trobat, doncs, n arrels diferents del polinomi $z^n - 1$, que anomenem *arrels n -èsimes de la unitat*.

En general, tot polinomi de grau n amb coeficients complexos $p \in \mathbb{C}[x]$, és a dir,

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k,$$

on $a_k \in \mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$, té exactament n arrels *comptant multiplicitats*. Dit d'una altra manera, existeixen n nombres $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n-1} \subset \mathbb{C}$ (possiblement coincidents) de manera que

$$p(z) = a_n \prod_{k=0}^{n-1} (z - \alpha_k).$$

Diem que α és una arrel de multiplicitat j si existeixen exactament j subíndexs $k_1, \dots, k_j$ tals que $\alpha = \alpha_{k_i}$. Per exemple,

$$z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2 = (z + i)^2(z - i)^2$$

té dues arrels dobles, que són $\pm i$. Aquest resultat es coneix com a *teorema fonamental de l'àlgebra*, vegeu el teorema 4.32.

Notem també que el resultat es pot aplicar a polinomis de coeficients reals, $p \in \mathbb{R}[x]$: tot polinomi de grau n amb coeficients reals té n arrels complexes comptant multiplicitats. A més, com que $\overline{a_k} = a_k$, trobem que

$$p(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^n a_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \overline{p(z)}.$$

1. El cos dels nombres complexos

Per tant, si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ és una arrel de p , el seu conjugat també ho és:

$$p(\bar{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0.$$

Treballant una mica es pot deduir que la multiplicitat de α i la del seu conjugat coincideixen. Per tant, tot polinomi de grau n amb coeficients reals té j arrels de part imaginària positiva α_k , en té j amb part imaginària negativa $\bar{\alpha}_k$ i $n - 2j$ arrels reals β_k , de manera que

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^j (z - \alpha_k)(z - \bar{\alpha}_k) \prod_{k=1}^{n-2j} (z - \beta_k) = a_n \prod_{k=1}^j (z^2 - (\alpha_k + \bar{\alpha}_k)z + \alpha_k \bar{\alpha}_k) \prod_{k=1}^{n-2j} (z - \beta_k),$$

és a dir,

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^j (z^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k)z + |\alpha_k|^2) \prod_{k=1}^{n-2j} (z - \beta_k).$$

En la darrera expressió, hem trobat una factorització amb coeficients reals on tots els factors són de grau 1 o 2.

Exercicis

1.8.1. Resoleu $(z + 1)^5 = z^5$. ◁

1.8.2. Sigui $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$. Considerant el polinomi $(1 - z)P(z)$, demostreu que tots els zeros de $P(z)$ estan dins del disc unitat. ◁

2. Funcions de variable complexa

En aquest capítol introduïm els conceptes de funció de variable complexa (i parlarem de com representar aquestes funcions) i de funció multivaluada. Treballarem les determinacions contínues d'aquestes funcions multivaluades, centrant-nos en arguments, logaritmes i arrels. Finalment, treballarem amb les sèries de potències de nombres complexos. Veurem què és el radi de convergència i com calcular-lo i treballarem diferents tipus de convergència a l'interior del disc de convergència i a la frontera, concloent amb els criteris de Dirichlet¹ i d'Abel².

2.1. Funcions

Recordem diversos conceptes:

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ és obert si $\forall a \in \Omega$ hi ha $r > 0$ amb $D_r(a) \subset \Omega$, on $D_r(a)$ denota el disc obert

$$D_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

- F és tancat $\Leftrightarrow \mathbb{C} \setminus F$ és obert $\Leftrightarrow F$ és tancat per successions (és a dir, si $z_n \in F$ amb $z_n \rightarrow z$, aleshores $z \in F$).

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Una *funció de variable complexa* és

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}.$$

Podem posar $f(z) = u(z) + iv(z)$, on denotem

$$u = \operatorname{Re} f; \quad v = \operatorname{Im} f.$$

Donat $z \in \Omega$ i $w \in \mathbb{C}$ tals que $w = f(z)$, aleshores diem que w és la imatge de z per f . El conjunt Ω és el *domini de definició* de f . Si $B \subset \Omega$, $f(B) \subset \mathbb{C}$ és la seva imatge, és a dir

$$f(B) = \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in B \text{ tal que } f(z) = w\}.$$

Si prenem $B = \Omega$, diem que $f(\Omega)$ és el *rang* o *recorregut* de f .

Exemple 2.1. Si $f(z) = iz$ amb domini $\mathbb{C}$, la imatge de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ és $f(\mathbb{R}) = i\mathbb{R} = \{iy : y \in \mathbb{R}\}$. En general, f actua com una rotació de 90° al voltant de l'origen en sentit antihorari. $\diamond$

¹Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Düren, 1805–1859, https://ca.wikipedia.org/wiki/Johann_Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet

²Niels Henrik Abel, Finnøy, 1802–1829, https://ca.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel

2. Funcions de variable complexa

Definició 2.2 (Límit d'una funció en un punt). Diem que $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \ell$ si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ (que pot dependre d' a) de manera que per a tot $z \in \Omega$,

$$0 < |z - a| < \delta \implies |f(z) - \ell| < \varepsilon. \quad \bullet$$

Definició 2.3 (Continuïtat). Una funció $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és *contínua* en Ω si és contínua en tot punt $a \in \Omega$.

$$f \text{ és contínua en } a \iff \lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a).$$

Es compleix que f és contínua en a si i només si $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ són contínues en a , i també si i només si, per a tota successió $\{z_n\}$ amb $z_n \rightarrow a$ se satisfà que $f(z_n) \rightarrow f(a)$. •

Exemple 2.4. Els polinomis en z i $\bar{z}$ són continus. També e^z és contínua en tot punt de $\mathbb{C}$. ◊

Advertència 2.5. $\operatorname{Arg} z$ és contínua en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ i NO és contínua en $(-\infty, 0]$.

En efecte, si ens acostem a la semirecta $(-\infty, 0)$ per dalt, llavors $\operatorname{Arg} z \rightarrow \pi$. En canvi, si ens hi acostem per baix, tendeix a $-\pi$, de manera que si $a \in (-\infty, 0]$, llavors

$$\text{no existeix } \lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Arg} z. \quad \bullet$$

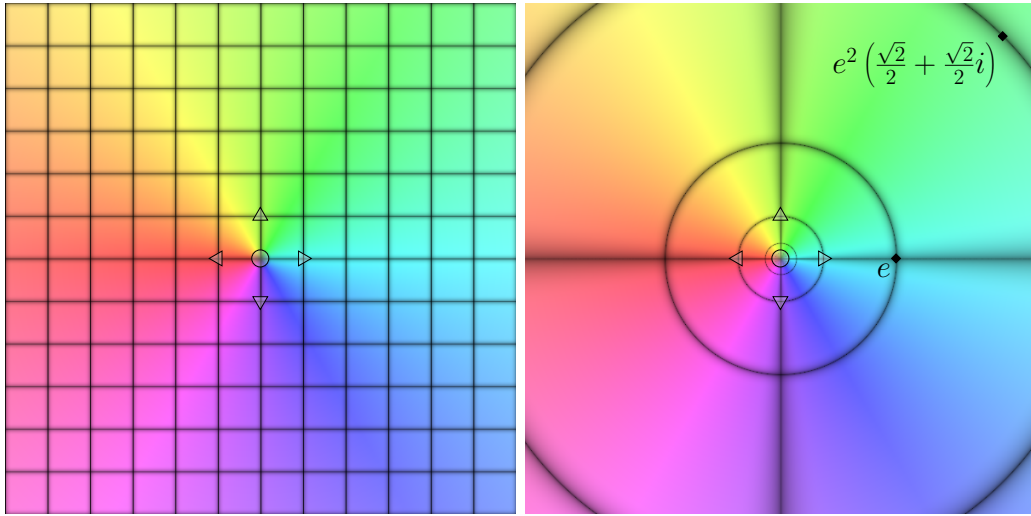


Figura 2.1.: A l'esquerra, una *coloració del pla complex* amb la graella de *coordenades cartesianes enteres*, mentre que a la dreta, la graella marca els cercles de mòdul e^k , $k \in \mathbb{Z}$, i els eixos real i imaginari. Per la coloració, s'escull el color en funció de l'angle i la saturació en funció del logaritme del mòdul (empal·lideix amb mòduls grans). Dibuixem des de $-6 - 6i$ fins a $6 + 6i$. Aquí, i al llarg dels apunts, quan dibuixem en aquest domini, direm que dibuixem en $6\mathcal{Q}$, i quan dibuixem en $-2 - 2i$ fins a $2 + 2i$ direm que és en $2\mathcal{Q}$.

2. Funcions de variable complexa

Comentari 2.6 (Dibuixar una funció complexa). Recordem que per dibuixar una funció, entenem representar el conjunt

$$\text{graf } f := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z) = w\}.$$

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es pot fer en el pla, però per una funció complexa necessitem quatre dimensions reals per fer aquesta representació. Dificilment podem arreglar-ho amb una bona perspectiva com solem fer amb les funcions de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Coses que podem fer:

- Estudiar la *imatge de conjunts especials* $\{x = c\}$, $\{y = c\}$, $\{r = c\}$ o $\{\theta = c\}$, vegeu la figura 2.2.

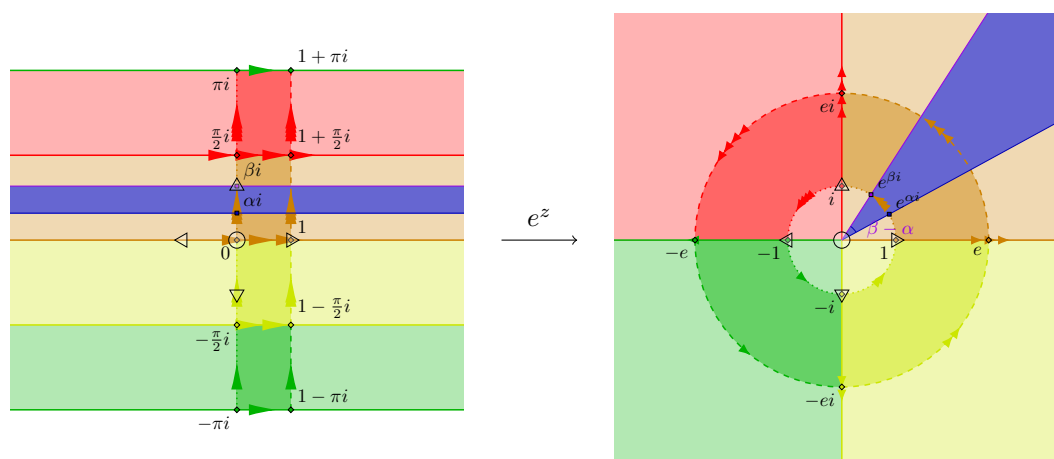


Figura 2.2.: Representació de la funció exponencial. Representem l'acció en bandes horitzontals i verticals i en rectangles paral·lels als eixos. Notem que té període $2k\pi i$, i que bandes horitzontals d'amplada γ van a sectors d'obertura γ .

- Dibuixar $(x, y) \mapsto |f(x, y)|$ i $(x, y) \mapsto \text{Arg}(f(x, y))$, o bé $(x, y) \mapsto \text{Re } f(x, y)$ i $(x, y) \mapsto \text{Im } f(x, y)$.
- Fer un *gràfic de colors* (`complex_plot`). Es tracta d'assignar un color a cada píxel w (figura 2.1) i aleshores pintem el punt z en funció del color de $w = f(z)$, vegeu les figures 2.3, 2.4 i 2.5. •

Exemple 2.7 (La funció exponencial). Comencem amb les imatges de rectes verticals: sabem que a $\mathbb{C}$, la funció exponencial complexa és $2\pi i$ -periòdica. Per tant, el que passi en una banda horitzontal d'amplada 2π , passa en qualsevol altra.

Donat que per la fórmula d'Euler, $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, es compleix que si y varia de 0 a 2π , e^{iy} dona una volta al cercle unitat $\mathbb{T}$. Per tant, la imatge de tot segment vertical de longitud 2π i part real x_0 es transforma en un cercle al voltant del zero de radi e^{x_0} .

Anem a veure en què es transformen les rectes horitzontals. Recordem que l'exponencial real envia homeomòrficament $\mathbb{R}$ en la semirecta $(0, \infty)$. Per tant, si fixem $y_0 \in \mathbb{R}$ i

2. Funcions de variable complexa

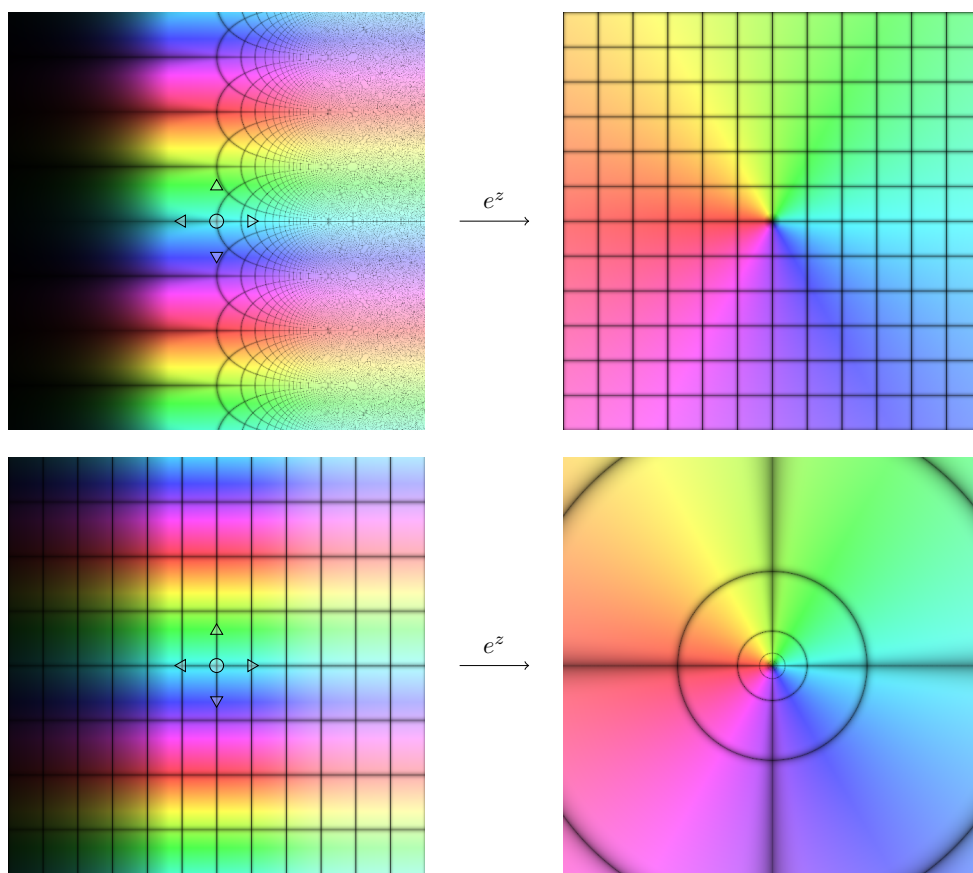


Figura 2.3.: Gràfic de colors de la funció exponencial en coordenades cartesianes i polars en $6\mathbb{Q}$, vegeu la figura 2.1. A la imatge superior esquerra, la graella correspon als punts d'imatge amb una coordenada entera (vegeu la figura superior dreta), és a dir, són corbes de nivell de les parts real i imaginària. A la imatge inferior esquerra, correspon als d'imatge en els eixos o bé en els cercles de radi e^k (corbes de nivell del mòdul i dels arguments múltiples de $\pi/2$). Es tracta doncs de la preimatge de les graelles representades a la figura 2.1 per la funció exponencial. Observem, per exemple, que cada rectangle petit de la figura inferior esquerra és enviat a un quadrant d'un anell centrat a l'origen que té per radi interior i exterior dues potències consecutives de e . En properes imatges obviarem la figura de la dreta.

considerem els punts de la forma $z = x + iy_0$, amb $x \in \mathbb{R}$, es compleix que els punts $e^z = e^x e^{iy_0}$ cobreixen la semirecta $\{e^x e^{iy_0} : x \in \mathbb{R}\}$. Vegeu les figures 2.2 i 2.3. $\diamond$

Comentari 2.8 (Potències). Les potències d'exponent natural són funcions n a 1, és a dir, que cada imatge té n preimatges (llevat de l'origen). La funció z^3 , per exemple, fa que els mòduls menors que 1 decreixin, els majors a 1 creixin i la imatge d'una circumferència

2. Funcions de variable complexa

centrada a l'origen doni tres voltes entorn de l'origen, vegeu la figura 2.4.

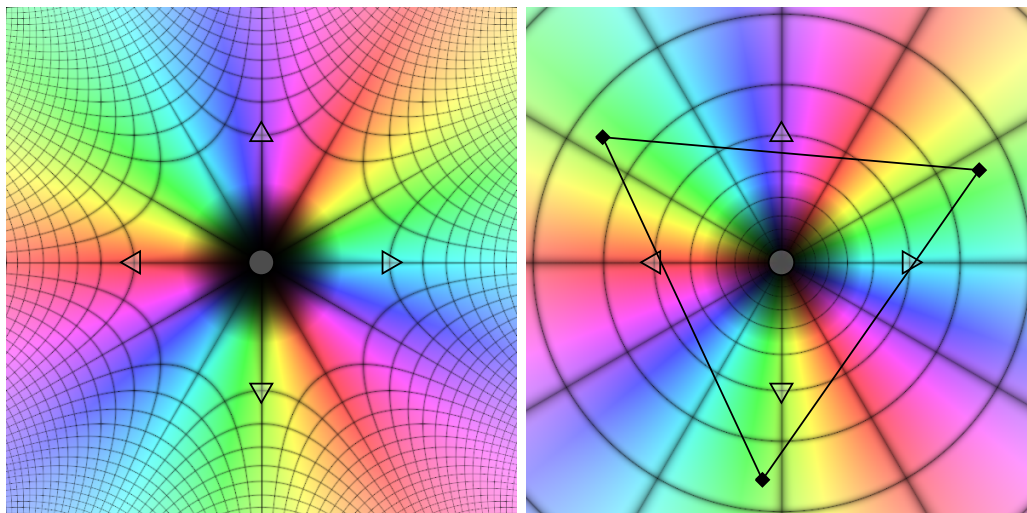


Figura 2.4.: Representem el polinomi z^3 en $2\mathcal{Q}$ en cartesianes i polars. Notem que si $w \neq 0$, aleshores té tres arrels cúbiques, que són els vèrtexs d'un triangle equilàter centrat a l'origen. A la imatge, arrels cúbiques de $w = 5e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

Exercicis

2.1.1. *Escriure les següents funcions de la forma $u(x, y) + iv(x, y)$.*

a) $f(z) = 1/z$, b) $g(z) = \frac{2z^2 + 3}{|z - 1|}$, c) $h(z) = e^z + e^{-z}$. ◁

2.1.2. *Trobeu el rang de*

a) $f(z) = z^2$ si z està en el primer quadrant,
 b) $g(z) = 1/z$ per $0 < |z| \leq 1$,
 c) $h(z) = -2z^3$ per z tal que $0 < |z| < 1$ i $\text{Arg} z < \pi/2$. ◁

2.1.3. *Digueu on són contínues les següents funcions*

a) $\frac{1}{z - 2 + 3i}$, c) $\frac{3z - 1}{z^2 + z + 4}$,
 b) $\frac{iz^3 + 2z}{z^2 + 1}$, d) $z^2(2z^2 - 3z + 1)^{-2}$. ◁

2.1.4. *Proveu que la inversió $w = f(z) = 1/z$ transforma*

2. Funcions de variable complexa

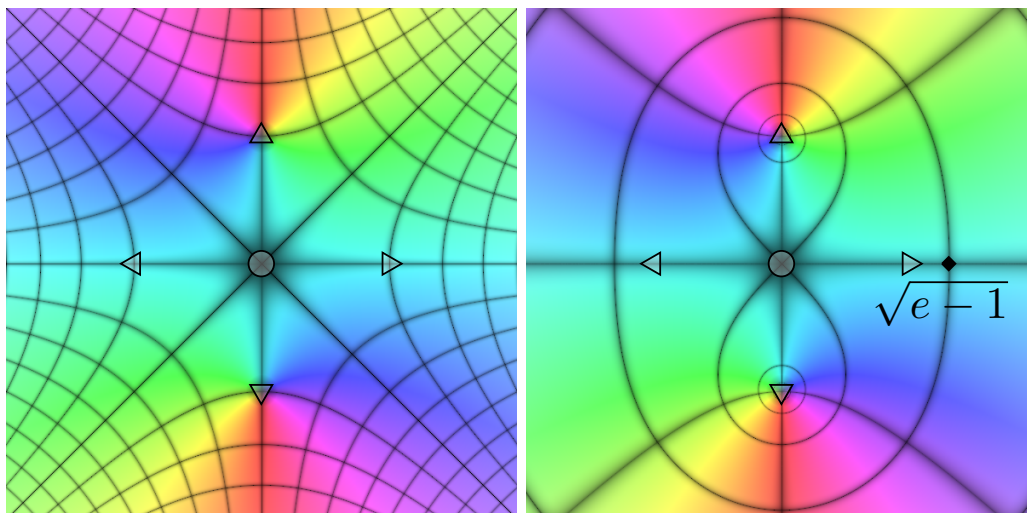


Figura 2.5.: Dibuixem la funció $f(z) = z^2 + 1$ en el mateix domini que abans (des de $-2 - 2i$ fins a $2 + 2i$). Notem que a $\pm i$, la funció val zero.

- a) el cercle $|z| = r$ en el cercle $|w| = 1/r$,
- b) el raig $\text{Arg} z = \theta_0$, $-\pi < \theta_0 < \pi$, en el raig $\text{Arg} w = -\theta_0$,
- c) el cercle $|z - 1| = 1$ a la línia vertical $x = 1/2$.

◁

2.1.5. Trobeu una funció afí que transformi el cercle $|z| < 1$ en el cercle $|w - w_0| < R$ de manera que els centres es corresponguin i el diàmetre horitzontal es transformi en el diàmetre que forma un angle α amb l'eix real.

◁

2.1.6. Per l'exponencial $f(z) = e^z$:

- a) Descriviu-ne el domini i el rang.
- b) Proveu que $f(-z) = 1/f(z)$.
- c) Descriviu la imatge de $\text{Re } z = 1$.
- d) Descriviu la imatge de $\text{Im } z = \pi/4$.
- e) Descriviu la imatge de la banda $0 \leq \text{Im } z \leq \pi/4$.

◁

2.1.7. La funció de Jukovski³ és $w = J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, vegeu la figura 3.7. Proveu que

- a) $J(z) = J(1/z)$,
- b) J porta el cercle unitat $|z| = 1$ a l'interval real $[-1, 1]$,

³Nikolai Jukovski, Orekhovo, 1847–1921, https://ca.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Jukovski

2. Funcions de variable complexa

c) J porta el cercle $|z| = r$ ($r > 0, \neq 1$) a l'el·lipse $\frac{u^2}{[\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})]^2} + \frac{v^2}{[\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})]^2} = 1$ que té els focus a ± 1 . $\triangleleft$

2.1.8. Fent servir la comanda `contour_plot` de Sage dibuixeu les corbes de nivell de u i v si $f = u + iv$ és

- | | | |
|----------------|----------------|--|
| a) z , | d) $\sin(z)$, | g) e^z , |
| b) z^2 , | e) $1/z$, | h) $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$, |
| c) $\log(z)$, | f) $1/z^2$, | i) $\log(z-1) + \log(z+1)$. $\triangleleft$ |

2.2. Funcions multivaluades: logaritmes i arguments

Ja hem vist que hi ha funcions com ara l'argument que prenen múltiples valors:

$$\arg(i) = \left\{ \dots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \right\} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

També és el cas de les arrels n -èsimes:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ |z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg z}{n}} \right\} = \left\{ |z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg z}{n}} e^{i \frac{2k\pi}{n}} : k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

Definició 2.9. Donada una funció multivaluada en A , diem que una funció $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ n'és una *branca contínua* (o *determinació*) en $B \subset A$ si $f(z)$ és una elecció d'entre les diferents opcions de manera que aquesta elecció sigui contínua en B .

Comentari 2.10. En la definició anterior, suposem implícitament que hi ha una distància en A , o bé, de manera més general, una topologia. Així podem parlar de continuïtat de funcions.

Per exemple, si $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, aleshores la funció *argument principal* $\operatorname{Arg} z$ és una branca contínua de l'argument en A . Qualsevol altra branca de l'argument $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ que escollim consistirà en fixar un $k \in \mathbb{Z}$ i tindrem $f(z) = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$.

En canvi, si prenem $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, aleshores l'argument principal no és una branca contínua, ja que tindrem una discontinuïtat al llarg de la semirecta $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.

Si $x \in \mathbb{R}$ i $y > 0$, sabem que $e^x = y$ si i només si $x = \ln y$. Volem estudiar aquesta equació en $\mathbb{C}$. Ja sabem que l'exponencial complexa és periòdica i, per tant, no injectiva, ja que $e^{z+2k\pi i} = e^z$, per a tot $k \in \mathbb{Z}$, vegeu la proposició 1.45.

Recordem que per a cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existeix un únic $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que

$$e^{i\theta} = \frac{z}{|z|},$$

que s'anomena argument principal, i es denota $\operatorname{Arg}(z)$. Aleshores

$$e^{\ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)} = e^{\ln|z|} e^{i\operatorname{Arg}(z)} = |z| \frac{z}{|z|} = z.$$

2. Funcions de variable complexa

Definició 2.11. El *logaritme principal* de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es defineix com

$$\text{Log}(z) = \ln |z| + i \text{Arg}(z).$$

Per tant $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im } w \leq \pi\}$. En general, un *logaritme* de z és un nombre $w \in \mathbb{C}$ amb $e^w = z$. Escrivim $\log z$ per anomenar el conjunt de tots els logaritmes de z .

Donat $n \in \mathbb{N}$, definim l'*arrel n -èsima* com la funció multivaluada $\sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n} \log z}$. •

Com hem vist a la proposició 1.45, el logaritme és doncs

$$w = \log z = \text{Log } z + 2k\pi i = \ln |z| + i \text{Arg } z + 2k\pi i = \ln |z| + i \arg z; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En particular, a diferència del que passa a $\mathbb{R}$, hi ha infinits logaritmes. Per distingir-los, escriurem “ln” pel logaritme neperià definit a la recta real, i “log” per la funció multivaluada del pla complex. Per altra banda, notem que l’arrel n -èsima pren n valors diferents.

Exemples 2.12. 1. $\log 1 = \ln |1| + i0 + 2\pi ki = 2\pi ki; \quad k \in \mathbb{Z}.$

2. $\log(-1) = \ln 1 + i\pi + 2\pi ki; \quad k \in \mathbb{Z}.$ ◇

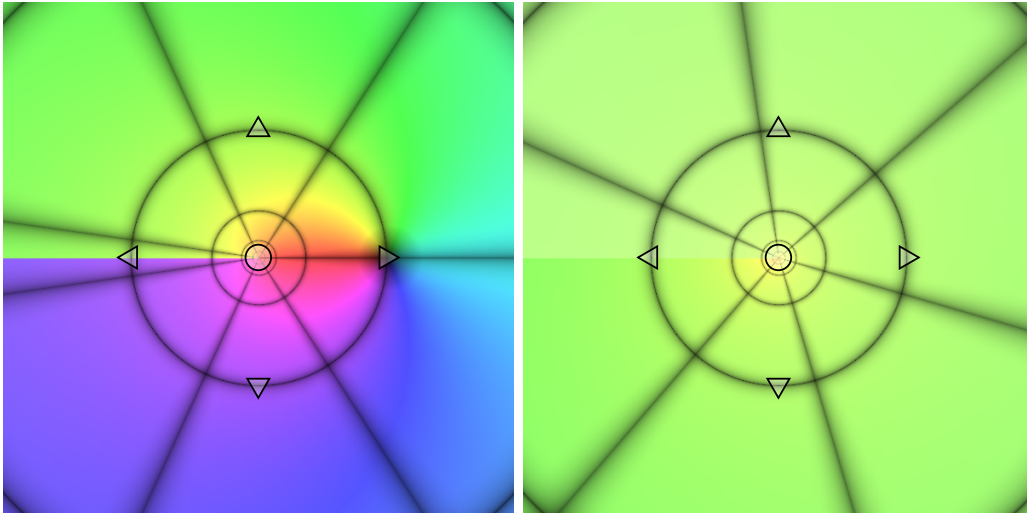


Figura 2.6.: A l’esquerra, la funció logaritme principal Log en el domini $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. A la dreta, la branca $\log = \text{Log} + 2\pi i$ en el mateix domini. Totes dues representacions amb la graella cartesiana de la imatge. Observem com les circumferències centrades a l’origen es transformen en rectes verticals. Veiem també com, en el logaritme principal, en arribar als reals negatius des del segon quadrant, trobem una discontinuïtat que es podria evitar prenent la determinació del logaritme representada a la dreta (pagant el preu de trobar la discontinuïtat més endavant).

2. Funcions de variable complexa

Exemple 2.13. $\text{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\text{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$.

Els altres logaritmes serien $\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$. $\diamond$

Observació 2.14. Si considerem $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ i fixem una branca de l'argument $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, llavors

$$\mathcal{L}(z) := \ln|z| + i\mathcal{A}(z)$$

també ens dona una branca del logaritme $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Si la primera és contínua, la segona també, ja que $\ln|z|$ és contínua a $\mathbb{C}^*$. En particular, com que l'argument principal $\text{Arg } z$ és continu en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, deduïm que $\text{Log } z$ és contínua en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

A la inversa, si $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és una branca contínua del logaritme en Ω , aleshores $\mathcal{A} = \text{Im } \mathcal{L}$ ens dona una determinació de l'argument.

A més, en ambós casos podem definir la branca contínua de l'arrel n -èsima $\mathcal{S}(z) := e^{\frac{1}{n}\mathcal{L}(z)}$. $\bullet$

De fet, tenim el següent resultat:

Proposició 2.15. *Existeix una branca contínua de l'argument de z en $\mathbb{C} \setminus r$, on r és qualsevol semirecta de $\mathbb{C}$ amb extrem en el 0.*

Per tant, també hi ha una branca contínua del logaritme (i de qualsevol arrel) de z en $\mathbb{C} \setminus r$.

Demostració. Posem

$$r = \{Re^{i\theta} : 0 \leq R < \infty\}.$$

Escollim $\mathcal{A}z$ la branca de l'argument de z que pren valors en $(\theta, \theta + 2\pi)$, i vegem que és contínua. Siguin $z_n, z_0 \in \mathbb{C} \setminus r$ amb $z_n \rightarrow z_0$. Volem veure que $\mathcal{A}z_n \rightarrow \mathcal{A}z_0$. Suposem el contrari. Llavors, substituint (si és necessari) la successió (z_n) per una subsuccessió, podem suposar que existeix $\varepsilon > 0$ tal que per a tot $n \geq 0$, $|\mathcal{A}z_n - \mathcal{A}z_0| > \varepsilon$. Donat que la funció $\mathcal{A}z$ pren valors en un interval fitat, aplicant el teorema de Bolzano-Weierstrass⁴, podem trobar una subsuccessió convergent. És a dir, hi ha z_{n_k} amb

$$\mathcal{A}z_{n_k} \rightarrow \alpha \neq \mathcal{A}z_0; \quad \alpha \in [\theta, \theta + 2\pi].$$

($\alpha \neq \mathcal{A}z_0$, ja que per a tot $n \geq 0$, $|\mathcal{A}z_n - \mathcal{A}z_0| > \varepsilon$).

Com que l'exponencial és contínua, $e^{i\mathcal{A}z_{n_k}} \rightarrow e^{i\alpha}$, però també

$$e^{i\mathcal{A}z_{n_k}} = \frac{z_{n_k}}{|z_{n_k}|} \rightarrow \frac{z_0}{|z_0|} = e^{i\mathcal{A}z_0}.$$

Per tant

$$e^{i\alpha} = e^{i\mathcal{A}z_0} \Rightarrow \alpha - \mathcal{A}z_0 = 2k\pi$$

per algun $k \in \mathbb{Z}$, i això és absurd (l'única possibilitat és $k = 0$ i estem suposant que $\alpha \neq \mathcal{A}z_0$). $\square$

Proposició 2.16. *No hi ha cap branca contínua de l'argument de z en $\partial\mathbb{D}$.*

⁴Karl Weierstrass, Ostenfelde, 1815–1897, https://ca.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass

2. Funcions de variable complexa

Demostració. Suposem que n'hi ha una de contínua, diguem-li $\mathcal{A}(z)$. Com que $|z| = 1$, tenim que si $z = e^{i\theta}$,

$$e^{i\mathcal{A}(z)} = \frac{z}{|z|} = z = e^{i\theta} \Rightarrow \exists k_\theta \in \mathbb{Z} : \mathcal{A}(e^{i\theta}) = \theta + 2k_\theta\pi.$$

Aleshores $k_\theta = (\mathcal{A}(e^{i\theta}) - \theta)/2\pi$ és una funció contínua que pren valors enters i, per tant, és constant. És a dir, $k_\theta = k$. Llavors

$$0 + 2k\pi = \mathcal{A}(e^{i0}) = \mathcal{A}(1) = \mathcal{A}(e^{i2\pi}) = 2\pi + 2k\pi,$$

fet absurd. □

Observació 2.17 (Propietats del logaritme). (i) Si $\mathcal{L}$ és una branca contínua del logaritme en Ω , aleshores $e^{\mathcal{L}(z)} = z$ per $z \in \Omega$. Ara bé, $\mathcal{L}(e^z) = z$ no és cert en general, donat que per a $k \in \mathbb{Z}$, $e^z = e^{z+2k\pi i}$. Diem, doncs, que $\mathcal{L}$ és una *inversa per la dreta* de l'exponencial en Ω . Podem dir el mateix de les branques contínues d'arguments i arrels.

(ii) Per $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, com a conjunts de números, tenim que

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2.$$

Ara bé, fixada una branca $\mathcal{L}(z)$ del logaritme de z , pot passar que $\mathcal{L}(z_1 z_2) \neq \mathcal{L}(z_1) + \mathcal{L}(z_2)$ ja que la suma de dos arguments potser no pertany a la mateixa branca. •

Exemple 2.18. Considerem els punts $-1 - i$, $1 - i$. Llavors

$$\text{Log}((-1 - i)(1 - i)) = \text{Log}(-2) = \ln 2 + i\text{Arg}(-2) = \ln 2 + \pi i.$$

D'altra banda,

$$\text{Log}(-1 - i) + \text{Log}(1 - i) = (\ln \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i) + (\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i) = \ln 2 - \pi i. \quad \diamond$$

Exercicis

2.2.1. Donada l'equació de Cardano $z^3 + pz + q = 0$, comprova que si $C = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$, aleshores $z_1 = C - \frac{p}{3C}$ és solució de la cúbica. Les tres arrels s'obtenen canviant l'elecció de l'arrel cúbica.

Tot seguit obre GeoGebra⁵ i dibuixa els punts $p = 1 + i$ i $q = 2 + 0i$; defineix $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, C mitjançant la fórmula anterior, i $z_1 = C - \frac{p}{3C}$, $z_2 = wC - \frac{p}{3wC}$ i $z_3 = w^2C - \frac{p}{3w^2C}$. Escull tres colors diferents per z_j , i activa la seva traça. Deixant q fixat i movent p , per exemple, comprova que els tres punts són funció de p , i es poden determinar com a branques contínues localment de manera contínua, tot i que C presenta discontinuïtats

⁵o entra a <https://www.geogebra.org/m/jbszj89u>

2. Funcions de variable complexa

de salt que fan que els tres z_j vagin permutant la seva posició. Per exemple, pots fixar p en la circumferència de radi 4 amb la instrucció `p=Punt(Circumferència((0, 0), 4))` i observar què ocorre, i comparar amb el radi 2 o 3. Pots usar també la instrucció `lloc geomètric`. Quantes voltes cal que faci p a aquesta circumferència per tal que una arrel doni la volta a l'origen de manera contínua? $\triangleleft$

2.2.2. Calculeu els possibles valors de

a) $\log(1)$, b) $\log(-1)$, c) $\log(1+i)$, d) $\log(1-i\sqrt{3})$, e) $\log(i)$. $\triangleleft$

2.2.3. Escrivim $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ i $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$. Resoleu les equacions

a) $e^z = 2i$, c) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$, e) $\cos z = \sin z$.

b) $\text{Log}(z^2 - 1) = i\pi/2$, d) $\cos z = 2i$,

2.2.4. Determinar explícitament la inversa de $q(z) = 2e^z + e^{2z}$ en funció de logaritmes. Resoldre $q(z) = 3$, trobant totes les solucions.

2.2.5. Doneu exemples que mostrin la falsedat de la igualtat $\text{Log}(a \cdot b) = \text{Log } a + \text{Log } b$. (Per exemple, $a = b = -1 - i$). $\triangleleft$

2.2.6. Sigui $\mathcal{L}$ una determinació del logaritme en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ tal que $\mathcal{L}(1) = 2\pi i$. Proveu que la funció $f(z) = \mathcal{L}(z+3)$ és contínua en

$$D := \{z \in \mathbb{C}; \text{Re}(z) > -3\}.$$

Quant val $f(3i)$? $\triangleleft$

2.2.7. Una branca de l'argument $\mathcal{A}(z)$ (i la del logaritme $\mathcal{L}(z)$ corresponent, vegeu l'Observació 2.14) queda fixada si donem i) el domini Ω on està definida ii) el valor de $\mathcal{A}(z)$ (o de $\mathcal{L}(z)$) d'un punt d' Ω . Considereu els dominis:

$$\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi}, r \geq 0\}; \quad \Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi/4}, r \geq 0\};$$

$$\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus (\{x \in [-1, 0]\} \cup \{-1 + iy, y \in [0, 1.5]\} \cup \{x + 1.5i, x \in [-1, \infty)\}).$$

Completeu la següent taula.

	Ω_1	Ω_2	Ω_3
$\mathcal{A}(1) = 0$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$ $\mathcal{L}(2i) =$
$\mathcal{A}(1) = -2\pi$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$ $\mathcal{L}(2i) =$
$\mathcal{A}(i) = -\frac{3\pi}{2}$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$ $\mathcal{L}(2i) =$

2. Funcions de variable complexa

2.2.8. Estudieu si existeix alguna determinació del logaritme en els conjunts següents i determineu els possibles conjunts imatge:

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}$, c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$. ◁

2.2.9. Feu un esbós del domini $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : z \neq e^{x+i2\pi x} \text{ per } x \in \mathbb{R}\}$. Sigui $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una determinació de l'argument en aquest domini i $\mathcal{L}$ la determinació del logaritme associada. Suposant que $\mathcal{A}(i) = -\frac{3\pi}{2}$, determineu $\mathcal{A}(-i)$ i $\mathcal{L}(e^{5/2})$. ◁

2.2.10. Siguin $h_0(z), h_1(z)$ i $h_2(z)$ les determinacions de l'arrel cúbica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (és a dir, funcions contínues que satisfan que $h_j(z)^3 = z$ en Ω) tals que $h_0(1) = 1$, $h_1(1) = e^{2\pi i/3}$ i $h_2(1) = e^{4\pi i/3}$.

i) Descriviu $h_j(\Omega)$ per $j = 0, 1, 2$.

ii) Per $j = 0, 1, 2$ relacioneu h_j amb Log i Arg (on Log i Arg denoten les branques principals del logaritme i de l'argument respectivament).

iii) Usant les relacions anteriors, trobeu el valor de $h_j(i)$, per $j = 0, 1, 2$. ◁

2.3. Potències complexes

Definició 2.19 (Potències complexes). Sigui $z \in \mathbb{C}$ amb $z \neq 0$ i $a \in \mathbb{C}$. Sabem que $z = e^{\mathcal{L}(z)}$ per a qualsevol branca del logaritme $\mathcal{L}$ i, per tant, per a $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = (e^{\mathcal{L}(z)})^n = e^{n\mathcal{L}(z)}$.

Llavors definim

$$z^a := e^{a \log z} = e^{a(\ln |z| + i \arg z)} = e^{a(\operatorname{Log} z + 2k\pi i)}. \quad \bullet$$

Advertència 2.20. L'anterior definició és un abús de notació en tota regla, i no l'aplicarem mai quan a la base escrivim el nombre e : sempre parlem de

$$e^a = e^{\operatorname{Re} a} e^{i \operatorname{Im} a}$$

i no de

$$e^a \neq e^{a \log e} = e^{a(1+2k\pi i)},$$

la desigualtat sent certa sempre que $a \notin \mathbb{Z}$. Notem que aquesta definició seria, en el fons, circular! •

A priori, la potència z^a pren infinits valors com $\arg z$. Per exemple, donat que $\log i = \ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$,

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}; \quad k \in \mathbb{Z},$$

que pren infinits valors reals.

Hi ha casos en què pren un nombre finit de valors, com $i^{1/4}$ que pren 4 valors.

2. Funcions de variable complexa

Observació 2.21. De fet es pot comprovar que si $z, a \in \mathbb{C}$ i $z \neq 0$,

- Si $a \in \mathbb{Q}$ aleshores $z^a = e^{a \operatorname{Log} z} e^{2k\pi ia}$ pren un nombre finit de valors.
- El valor és únic si i només si $a \in \mathbb{Z}$ (és a dir, no depèn de la branca del logaritme escollit). En aquest cas tenim una potència natural de z o de z^{-1} .
- Si $a = p/q \in \mathbb{Q}$, amb $q > 0$ i $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$, aleshores $z^{p/q}$ pren exactament q valors.
- Si a no és racional, z^a té infinits valors que difereixen en un factor $e^{2\pi ika}$. •

Observació 2.22. Comparem $z^a z^b$ amb z^{a+b} . En l'observació assumim en general que $a, b, c \in \mathbb{C}$ i que les bases són no nul·les.

- $z^a z^b = e^{(a+b) \operatorname{Log} z + 2\pi i(ka+jb)}$, on $k, j \in \mathbb{Z}$,
- $z^{a+b} = e^{(a+b) \operatorname{Log} z + 2\pi im(a+b)}$, on $m \in \mathbb{Z}$.

Per tant, com a conjunts, $z^{a+b} \subset z^a z^b$, amb igualtat quan $a \in \mathbb{Z}$ o $b \in \mathbb{Z}$.

Anàlogament

- $(z^a)^b = e^{ab \operatorname{Log} z + 2\pi i(ka+j)b}$, on $k, j \in \mathbb{Z}$,
- $z^{ab} = e^{ab \operatorname{Log} z + 2\pi imab}$, on $m \in \mathbb{Z}$,

i tenim que $z^{ab} \subset (z^a)^b$, amb igualtat quan $b \in \mathbb{Z}$.

En canvi, com a conjunts de valors, sí que és cert que

$$(ab)^c = e^{c \operatorname{Log}(ab)} = e^{c(\operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b)} = a^c b^c.$$

•

Exercicis

2.3.1. Trobeu l'error en el següent raonament de Bernoulli: $(-z)^2 = z^2$, llavors $2 \log(-z) = 2 \log z$. Per tant, $\log(-z) = \log(z)$. ◁

2.3.2. Calculeu els possibles valors de

- a) i^i , b) $(\sqrt{3} + i)^{1-i}$, c) 2^{-i} , d) $(i^2)^i$, e) $(i^i)^2$. ◁

2.4. Determinacions de logaritmes i arrels de funcions

Recordem que $\mathcal{L}$ és una branca o determinació del logaritme de z en Ω si $\mathcal{L}$ és contínua en Ω i

$$e^{\mathcal{L}(z)} = z \quad \forall z \in \Omega.$$

Definim una determinació del logaritme (respectivament l'argument i l'arrel n -èsima) d'una funció contínua f com una branca contínua de $\log(f)$ (respectivament, $\arg(f)$ i $\sqrt[n]{f}$). La definició que segueix és una manera equivalent d'escriure-ho:

Definició 2.23. Sigui X espai mètric (normalment $X = \Omega \subset \mathbb{C}$ obert o $X = [a, b]$ un interval). Sigui $f : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ contínua. Una *determinació del logaritme* de f en X és una funció $\mathcal{L}_f : X \rightarrow \mathbb{C}$ contínua tal que

$$e^{\mathcal{L}_f(x)} = f(x) \quad \forall x \in X.$$

Diem que $\mathcal{A}_f$ és una determinació de l'argument de f en X si $\mathcal{A}_f$ és contínua en X i

$$f(x) = |f(x)| e^{i\mathcal{A}_f(x)} \quad \forall x \in X.$$

Diem que $\mathcal{S}_f$ és una determinació de l'arrel n -èsima de f en X , $\sqrt[n]{f}$, si $\mathcal{S}_f$ és contínua en X i

$$\mathcal{S}_f(x)^n = f(x) \quad \forall x \in X. \quad \bullet$$

Observació 2.24. Si tenim una determinació $\mathcal{A}_f$ de l'argument de f , llavors també tenim una determinació del logaritme de f definint

$$\mathcal{L}_f(x) := \ln |f(x)| + i\mathcal{A}_f(x).$$

També, si $\mathcal{L}_f$ és una determinació del logaritme de f , llavors $\text{Im } \mathcal{L}_f$ és una determinació de l'argument de f . Resumint, hi ha determinació del logaritme si i només si, hi ha determinació de l'argument. •

Exemple 2.25. Si $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $f(z) = z$, llavors no existeix cap determinació de $\log f(z) = \log z$ en X . (Vàrem veure que no hi ha cap argument continu en $\partial\mathbb{D}$). ◇

Exemple 2.26. Si $X = [0, 1]$ i $f(x) = e^{4\pi ix}$, llavors $\mathcal{L}_f(x) = 4\pi ix$ és una determinació de $\log f$ en X (altres serien $i(4\pi x + 2k\pi)$). ◇

Observació 2.27. (i) Si hi ha una determinació $\mathcal{L}_f$ del logaritme de f , aleshores hi ha determinació de $\sqrt[n]{f}$.

Simplement definim $\mathcal{S}_f(x) = e^{\frac{1}{n}\mathcal{L}_f(x)}$.

2. Funcions de variable complexa

- (ii) Pot existir una determinació de l'arrel n -èsima $\sqrt[n]{f}$, encara que no n'hi hagi cap del logaritme.

Per exemple, sigui $f(z) = z^n$ per $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} =: \Omega$. La funció $\mathcal{S}_f(z) = z$ és una determinació de $\sqrt[n]{f}$ en Ω (ja que $\mathcal{S}_f(z)^n = f(z)$). Però la funció f no té determinació del logaritme en Ω .

Efectivament, suposem que existeix una determinació del logaritme de f , que anomenem $\mathcal{L}_f$ i arribarem a una contradicció: definim $\varphi(t) = e^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$. Llavors $h_0(t) = 2\pi int$ i $h_1(t) = \mathcal{L}_f(\varphi(t))$ són determinacions del logaritme de la funció φ^n en $[0, 1]$. En efecte,

$$e^{h_1(t)} = e^{\mathcal{L}_f(\varphi(t))} = e^{\mathcal{L}_f(e^{2\pi it})} = f(e^{2\pi it}) = (e^{2\pi it})^n = (\varphi(t))^n,$$

i, d'altra banda,

$$e^{h_0(t)} = e^{2\pi int} = \varphi(t)^n.$$

Per tant, per a tot $t \in [0, 1]$, $e^{h_0(t)} = e^{h_1(t)}$, de manera que existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que $h_1 = h_0 + 2k\pi i$, vegeu la proposició 2.29.

A més a més, com que $\varphi(0) = e^{2\pi i \cdot 0} = e^{2\pi i} = \varphi(1)$, es compleix que

$$h_1(0) = \mathcal{L}_f(\varphi(0)) = \mathcal{L}_f(\varphi(1)) = h_1(1).$$

Però,

$$0 = h_1(0) - h_1(1) = h_0(0) + 2\pi ik - (h_0(1) + 2\pi ik) = 2\pi in \cdot 0 - 2\pi in \cdot 1 \neq 0.$$

- (iii) Si existeix una determinació $\mathcal{L}$ del logaritme de z en la imatge $f(\Omega)$, aleshores hi ha determinació del logaritme de f en Ω .

Simplement, definim $\mathcal{L}_f(z) = \mathcal{L}(f(z))$.

Ara bé, el recíproc no és cert. Pot existir determinació del logaritme de f en Ω , encara que no hi hagi cap logaritme continu de z en $f(\Omega)$. N'hi ha prou amb prendre $f(z) = e^z$, $\mathcal{L}_f(z) = z$, $\Omega = \mathbb{C}$, $f(\Omega) = \mathbb{C}^*$, vegeu l'exemple 2.28. •

Exemple 2.28. Sigui $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial\mathbb{D}$ contínua i $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{w_0} = \gamma(a)$. Llavors existeix una única determinació del logaritme de γ , $\mathcal{L}_\gamma$, tal que $\mathcal{L}_\gamma(a) = w_0$. Es demostra a la proposició 5.1. En canvi, no hi ha determinació del logaritme de $\partial\mathbb{D}$, vegeu la proposició 2.16. ◇

Proposició 2.29. Sigui X espai mètric **conne**x, i $f : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ contínua. Si $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ són dues determinacions del logaritme de f en X , llavors

$$\mathcal{L}_1(x) = \mathcal{L}_2(x) + 2\pi ki; \quad x \in X$$

per un cert $k \in \mathbb{Z}$.

2. Funcions de variable complexa

Demostració. Per $x \in X$, tenim que

$$e^{\mathcal{L}_1(x)} = f(x) = e^{\mathcal{L}_2(x)} \Rightarrow \exists k_x \in \mathbb{Z} : \mathcal{L}_1(x) - \mathcal{L}_2(x) = 2k_x\pi i.$$

Com que $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ són contínues en X , aleshores la funció $k : X \rightarrow \mathbb{Z}$ definida per

$$k(x) := k_x = \frac{\mathcal{L}_1(x) - \mathcal{L}_2(x)}{2\pi i}$$

és contínua en X . Com que X és connex, llavors $k(X)$ és un connex de $\mathbb{Z}$ i, per tant, és un punt, de manera que $k(x) = k$ per a tot $x \in X$. $\square$

Exercicis

2.4.1. *Segui X un espai topològic connex. Demostreu que si $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ són dues determinacions de l'arrel n -èsima de $f : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ llavors existeix una arrel n -èsima de la unitat ζ tal que $\mathcal{S}_2(x) = \zeta \cdot \mathcal{S}_1(x)$, per a tot $x \in X$.* $\triangleleft$

2.4.2. *Determineu els dominis de continuïtat (és a dir l'obert maximal on una funció és contínua) de les funcions e^{z^2} , $e^{1/z}$, $1/e^z$, $1/(e^z - 1)$, de la branca principal de $\sqrt{1-z}$ i de la branca principal de $\sqrt{1+e^z}$.* $\triangleleft$

2.4.3. *Donar una determinació de $f(z)$ que sigui contínua a la regió D donada.*

a) $f_1(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

b) $f_2(z) = (z^2 + 4)^{1/2}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{iy \in \mathbb{C} : |y| < 2\}$,

c) $f_3(z) = (z^4 - 1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,

d) $f_4(z) = (z^3 - 1)^{1/3}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. $\triangleleft$

2.5. Sèries de potències de nombres complexos

Una *sèrie de potències* de nombres complexos és una expressió de la forma

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - b)^n,$$

on $\{a_n\}$ és una successió de nombres complexos i $b \in \mathbb{C}$.

Per tal d'estudiar sèries de potències de nombres complexos, primer ens cal recordar diversos conceptes i resultats.

Definició 2.30 (Convergència uniforme). Diem que $f_n \rightarrow f$ uniformement en A si

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0.$$

Dit d'una altra manera, per tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que per tot $n > n_\varepsilon$ i tot $z \in A$ es té $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$. També, una sèrie de funcions $\sum_{n \geq 0} f_n$ convergeix uniformement en A si la successió $\sum_{k=0}^n f_k$ convergeix uniformement en A . $\bullet$

2. Funcions de variable complexa

Observació 2.31. Recordem que una successió $\{f_n\}$ és uniformement convergent si i només si és uniformement de Cauchy, i el mateix passa per una sèrie $\sum g_k$. És a dir, que per tot $\varepsilon > 0$ existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $m \geq n \geq n_0$ tenim que

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon, \quad \text{i} \quad \sup_{z \in A} \left| \sum_{k=n}^m g_k(z) \right| < \varepsilon \text{ respectivament.}$$

Recordem que si, a més a més, f_n són contínues, aleshores el seu límit uniforme és una funció contínua. •

Teorema 2.32 (Criteri M de Weierstrass). *Si tenim una sèrie de funcions $\sum_n f_n$, on $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, de manera que $|f_n(z)| \leq M_n$ per a tot $z \in A$, amb $\sum_n M_n < \infty$, aleshores la sèrie $\sum_n f_n$ convergeix absolutament i uniforme en A .*

Demostració. És una aplicació immediata de l'observació 2.31. □

Teorema 2.33 (Cauchy-Hadamard⁶). *Sigui $\sum_{n \geq 0} a_n(z-b)^n$ sèrie de potències de nombres complexos. Llavors existeix un únic $R \in [0, +\infty]$ de manera que*

- (a) *La sèrie convergeix absolutament per a tot $z \in \mathbb{C}$ amb $|z-b| < R$.*
- (b) *Per $z \in \mathbb{C}$ amb $|z-b| > R$, la sèrie és divergent.*
- (c) *Si $0 \leq r < R$, la sèrie convergeix absolutament i uniforme en $|z-b| \leq r$.*

A més, es té

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

R s'anomena radi de convergència de la sèrie de potències.

Observació 2.34. Cal entendre bé el significat de convergència uniforme en el teorema anterior. Dir que per tot $r < R$ hi ha convergència uniforme en $\overline{D_r(b)}$ no significa que hi hagi convergència uniforme en el disc de convergència $D_R(b)$. El que significa és que per tot $\varepsilon > 0$ i tot $0 < r < R$ existeix $n_{\varepsilon,r}$ tal que per tot $n > n_{\varepsilon,r}$ i tot $z \in D_r(b)$ es té $|f(z) - \sum_{k=0}^n a_k(z-b)^k| \leq \varepsilon$. Pot passar que $n_{\varepsilon,r} \xrightarrow{r \rightarrow R} \infty$, de manera que no podem esperar convergència uniforme en tot el disc de convergència.

Dit d'una altra manera, la velocitat de convergència sol empitjorar a mesura que ens apropem a la vora del disc $D_R(b)$. Un exemple paradigmàtic d'aquest comportament és la funció $f_n(x) = x^n$, que convergeix a zero a l'interval $[0, 1)$ de manera uniforme en $[0, r]$ per $r < 1$, tot i que $\sup_{0 \leq x < 1} |f_n(x) - 0| = 1$.

Notem també que la funció límit, diguem-ne $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z-b)^n$, és contínua en $\overline{D_r(b)}$ per tot $r < R$ (vegeu l'observació 2.31) i, per tant, és contínua en $D_R(b)$. •

Abans de demostrar el teorema, vegem alguns exemples.

⁶Jacques Hadamard, Versailles, 1865–1963, https://ca.wikipedia.org/wiki/Jacques_Hadamard

2. Funcions de variable complexa

Exemples 2.35. 1. El radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n \geq 0} z^n$ és $R = 1$.

Aquí aprofitem per recordar que, si $0 < r < 1$, llavors $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$. De la mateixa manera, també tenim que

$$\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Aquesta identitat és molt útil per calcular el valor de la suma d'algunes sèries de potències.

2. Calculem el radi de convergència de la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 0} 2^n z^n.$$

Tenim

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Per tant, el radi de convergència és $R = 1/2$, de manera que la sèrie convergeix si $|z| < 1/2$ i és divergent si $|z| > 1/2$.

3. El radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n \geq 1} n^n z^n$ és $R = 0$. $\diamond$

Prova del teorema. Clarament (c) implica (a), de manera que només ens cal demostrar (c) i (b).

(c) Si $R = 0$ no hi ha res a demostrar. En cas contrari, prenem ρ amb $|z - b| \leq r < \rho < R$. Llavors

$$\frac{1}{\rho} > \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_k \sup_{n \geq k} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Per tant, existeix un $k \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}, \quad n \geq k.$$

Per veure la convergència uniforme en $|z - b| \leq r$, aplicarem el criteri M de Weierstrass. Tenim que

$$|a_n(z - b)^n| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \quad |z - b| \leq r; \quad n \geq k.$$

Com que $r/\rho < 1$, la sèrie $\sum_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ és convergent, de manera que pel criteri M de Weierstrass, la nostra sèrie de potències convergeix absolutament i uniforme en $|z - b| \leq r$.

(b) Sigui $z \in \mathbb{C}$ amb $|z - b| > R$. Prenem $\rho > R$ amb $|z - b| > \rho$. Tenim que

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

De la definició de límit superior, veiem que hi ha infinits n_k de manera que $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1/\rho$. Aleshores

$$|a_{n_k}(z - b)^{n_k}| > \frac{|z - b|^{n_k}}{\rho^{n_k}} > 1,$$

de manera que la sèrie és divergent ja que el terme general no tendeix a zero. $\square$

2. Funcions de variable complexa

Com veiem, el càlcul del radi de convergència R ens determina tota la regió de convergència de la sèrie (un disc obert de radi R , d'aquí que R s'anomeni radi de convergència), excepte els punts z amb $|z - b| = R$, és a dir, els punts de la frontera del disc de convergència. Per aquests punts, la sèrie tant pot ser convergent com divergent, i s'ha d'estudiar a part (ho farem més endavant).

Exercicis

2.5.1. Considereu la sèrie de potències $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - i)^n$. Digueu si són certes les següents afirmacions.

a) $S(z)$ pot ser divergent en $z = 0$ i convergent en $z = -i$ simultàniament.

b) $S(z)$ pot ser convergent en $z = 1 + i$ i en $z = 2 + i$ simultàniament.

c) Si $S(z)$ és convergent en $z = 1 + i$, aleshores també ho és en $z = 2i$.

d) Si $S(z)$ és divergent en $z = 2i$, aleshores també ho és en $z = 2 + i$. ◁

2.5.2. Sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una sèrie convergent en el disc $D = D_R(0)$. Demostreu que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \quad \text{si } 0 < r < R. \quad \triangleleft$$

2.5.3. Sigui $S_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ i $S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$. Demostreu que S_1 és convergent en z si i només si ho és S_2 . En cas afirmatiu, tenim que $S_1(z) = zS_2(z)$.

2.6. Càlcul del radi de convergència

Pel criteri del quocient, observació 1.26, podem obtenir una altra manera de calcular el radi de convergència d'una sèrie de potències, que en alguns casos pot ser més convenient que aplicar el criteri de l'arrel.

Lema 2.36 (Criteri del quocient). Podem calcular el radi de convergència de la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 0} a_n(z - b)^n$$

amb la fórmula

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

sempre que aquest límit existeixi.

2. Funcions de variable complexa

Exemples 2.37. Calculem el radi de convergència R de les següents sèries de potències:

- (1) $\sum_{n \geq 1} nz^n$. Apliquem el criteri del quocient. Tenim que

$$R = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$

- (2) $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{(n+1)!}$. Aplicant el criteri del quocient, tenim que

$$R = \lim_n \frac{1/(n+1)!}{1/(n+2)!} = \lim_n \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \lim_n (n+2) = +\infty.$$

El criteri del quocient sol ser més simple per fer els càlculs, especialment quan apareixen factorials. $\diamond$

Advertència 2.38. El fet que existeixi el límit superior

$$\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

no implica que aquest coincideixi amb $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, vegeu l'Observació 1.26. $\bullet$

Exemple 2.39. Per tant, per calcular el radi de convergència R de la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 1} n2^n z^{2n}$$

no podem aplicar directament el criteri del quocient. Per tal de calcular R en aquest cas, ho podem fer:

- (i) Aplicant la definició de R amb la fórmula $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. En el nostre cas, tenim que $a_{2n} = n2^n$ i a_n val zero si n és senar. Llavors

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim \sqrt[2n]{n2^n} = \sqrt{2} \lim \sqrt[2n]{n} = \sqrt{2},$$

de manera que $R = 1/\sqrt{2}$.

- (ii) Fent el *canvi de variables* $w = z^2$ obtenim la sèrie de potències $\sum_{n \geq 1} n2^n w^n$. Apliquem el criteri del quocient per calcular el radi de convergència R' d'aquesta nova sèrie:

$$R' = \lim_n \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_n \frac{n}{n+1} = 1/2.$$

Aleshores la sèrie és convergent si $|w| < 1/2$ i divergent si $|w| > 1/2$. És a dir, la nostra sèrie inicial és convergent si $|z^2| < 1/2 \Leftrightarrow |z| < 1/\sqrt{2}$, i és divergent si $|z^2| > 1/2 \Leftrightarrow |z| > 1/\sqrt{2}$. Així també obtenim que $R = 1/\sqrt{2}$. $\diamond$

2. Funcions de variable complexa

Exemple 2.40. Calculem el radi de convergència R de la sèrie de potències lacunar⁷

$$\sum_{n \geq 1} 2^{-n} z^{2^n}.$$

Aquí no tenim cap canvi de variable que ens permeti aplicar el criteri del quocient. Aleshores hem de fer servir la definició

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ara observem que a_n sempre val zero excepte quan $n = 2^k$, que tenim que $a_{2^k} = 2^{-k}$. Llavors

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[2^k]{|a_{2^k}|} = \lim_k \sqrt[2^k]{2^{-k}} = \lim_k 2^{-\frac{k}{2^k}} = 2^0 = 1,$$

de manera que $R = 1$. ◇

Fins ara, només hem vist exemples de càlcul quan els coeficients són reals. No hi ha diferència si els coeficients són complexos, ja que sempre estem treballant amb el mòdul dels coeficients.

Exemple 2.41. Calculem el radi de convergència de la sèrie de potències

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+i} z^n.$$

En aquest cas, tenim que $a_n = \frac{1}{n+i}$, de manera que $|a_n| = \frac{1}{|n+i|} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Per tant

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = 1. \quad \diamond$$

Exemple 2.42. Per veure un altre exemple, calcularem el radi de convergència R de la sèrie de potències

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n(1-i)}{1+i} \right) z^n.$$

En aquest cas, tenim que

$$a_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n(1-i)}{1+i} \right) = \left(\frac{1}{n} + (-1)^{n+1} i \right)$$

ja que

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{|1+i|^2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Llavors

$$|a_n| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n},$$

de manera que

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{\sqrt{1+n^2}}{n} \cdot \frac{(n+1)}{\sqrt{(n+1)^2+1}} = 1. \quad \diamond$$

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Lacunary_function

Exercicis

2.6.1. Calculeu el radi de convergència de les següents sèries de potències

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n; \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{n}},$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n} z^n,$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} (z-2)^{n(n+1)},$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2^n}}{n^n},$$

$$h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2^n},$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n} (z-1)^n,$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (3z-2)^n,$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} (z+1)^n \quad a \in (0, 1),$$

$$j) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n)^n z^{2^n}.$$

<

2.7. Comportament a la frontera del disc de convergència

Quan estudiem la convergència d'una sèrie de potències de nombres complexos

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z-b)^n,$$

amb radi de convergència R , sabem que la sèrie convergeix per $|z-b| < R$, i que la sèrie és divergent quan $|z-b| > R$. Què passa pels punts z amb $|z-b| = R$? Llavors pot convergir o no. Per exemple, la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$$

té radi de convergència $R = 1$. Per $z = 1$, la sèrie és divergent, i per $z = -1$ la sèrie és alternada i, per tant, convergent (aquí quedaria estudiar els altres punts del cercle $|z| = 1$).

En la frontera del disc de convergència, tenim que $z-b = Re^{it}$, així que la sèrie a estudiar queda

$$\sum_{n \geq 0} a_n R^n e^{int}.$$

Per tal d'estudiar la convergència per t fixat, el primer que hem de fer és mirar si el terme general tendeix a zero o no. És a dir, mirem si

$$\left| a_n R^n e^{int} \right| \rightarrow 0 \quad \text{quan } n \rightarrow \infty.$$

2. Funcions de variable complexa

En cas que no tendeixi a zero, llavors ja sabem que la sèrie és divergent. En cas que tendeixi a zero, ens cal estudiar-ho millor.

Si no hem tret cap conclusió del primer pas, el següent pas natural sol ser comprovar si la sèrie decreix prou ràpidament, de manera que tinguem convergència absoluta a la frontera, és a dir si

$$\sum |a_n R^n| < +\infty.$$

Aleshores pel criteri M de Weierstrass la sèrie convergeix uniformement i absoluta en el disc tancat $\overline{D_R(b)}$.

Si no es compleix cap de les dues situacions anteriors, és a dir, si la sèrie no convergeix absolutament en cap punt de la frontera del disc de convergència però no podem garantir la divergència arreu, aleshores ens caldrà filar més prim.

Lema 2.43 (Fórmula de sumació per parts). *Siguin $\{a_n\}, \{b_n\}$ successions de nombres complexos, i posem $A_n = a_0 + \dots + a_n$. Llavors*

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=0}^n A_k (b_{k+1} - b_k).$$

Demostració. Posant $A_{-1} = 0$, tenim que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=0}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}. \end{aligned} \quad \square$$

Com a cas particular, estudiem les cues $\sum_{j=n}^m a_k b_k$ amb $m > n$. En tal cas podem definir $\tilde{a}_k = a_{n+k}$, $\tilde{b}_k = b_{n+k}$ i $\tilde{A}_k = \sum_{j=0}^k \tilde{a}_j = \sum_{j=n}^{n+k} a_j$. Aplicant la fórmula de sumació per parts, tenim que

$$\sum_{k=0}^{m-n} \tilde{a}_k \tilde{b}_k = \tilde{A}_{m-n} \tilde{b}_{m-n+1} - \sum_{k=0}^{m-n} \tilde{A}_k (\tilde{b}_{k+1} - \tilde{b}_k).$$

Deduïm doncs la següent identitat:

$$\sum_{k=n}^m a_k b_k = A_{n,m} b_{m+1} + \sum_{k=n}^m A_{n,k} (b_k - b_{k+1}), \quad (2.1)$$

on ara $A_{n,k} = \sum_{j=n}^k a_j$.

D'altra banda, notem que per tota constant $A \in \mathbb{C}$ tenim que

$$A b_{m+1} - A b_n + \sum_{k=n}^m A (b_k - b_{k+1}) = 0.$$

Com que $A_k = \sum_{j=0}^k a_j = A_{n,k} + A_{n-1}$ (per tot $k \geq n$), prenent $A = A_{n-1}$, de (2.1) en deduïm que

$$\sum_{k=n}^m a_k b_k = A_m b_{m+1} - A_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^m A_k (b_k - b_{k+1}). \quad (2.2)$$

2. Funcions de variable complexa

Teorema 2.44 (Criteri de Dirichlet-Abel uniforme). *Siguin X, Y dos conjunts. Siguin $\{a_n\}_{n \geq 1}$, una successió de funcions $a_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ i $\{b_n\}_{n \geq 1}$ una successió de funcions $b_n : Y \rightarrow \mathbb{R}$. Suposeu que es verifica alguna de les següents dues condicions:*

1. (criteri de Dirichlet) *Existeix $M > 0$ pel qual*

$$\left| \sum_{k=1}^N a_k(x) \right| \leq M,$$

per a tot $x \in X$ i $N \geq 1$.

La successió $\{b_n\}_{n \geq 1}$ és no negativa i decreix cap a 0 uniformement en Y (i.e. $b_{n+1}(y) \leq b_n(y)$ per a tot $n > 0$ i per a tot $y \in Y$, i $b_n(y) \rightarrow 0$ uniformement en Y).

2. (criteri d'Abel) *La sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ convergeix uniformement en X .*

La successió (b_n) és una successió monòtona de funcions reals fitada uniformement en Y .

Aleshores, la sèrie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(y)$ convergeix uniformement en $X \times Y$.

Demostració. Demostrem el criteri de Dirichlet. Posem $S_{n,m}(x, y) = \sum_{k=n}^m a_k(x)b_k(y)$, i sigui $\varepsilon > 0$. Pel criteri de Cauchy uniforme (vegeu l'observació 2.31), ens cal veure que hi ha $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a tot $x \in X$, $y \in Y$,

$$|S_{n,m}(x, y)| < \varepsilon, \quad m > n \geq n_0.$$

Per la versió (2.2) de la fórmula de sumació per parts (amb $a_0 = 0$), tenim que

$$\begin{aligned} |S_{n,m}(x, y)| &= \left| \sum_{k=n}^m a_k(x)b_k(y) \right| \\ &= \left| \sum_{k=n}^m A_k(x)(b_k(y) - b_{k+1}(y)) + A_m(x)b_{m+1}(y) - A_{n-1}(x)b_n(y) \right|, \end{aligned}$$

on $A_k(x) = \sum_{j=1}^k a_j(x)$, que per hipòtesi estan uniformement fitades per M .

Com que $b_n \rightarrow 0$ uniformement en Y , podem trobar $n_0 \in \mathbb{N}$, de manera que $2Mb_{n_0}(y) < \varepsilon$ per a tot $y \in Y$. Siguin $m \geq n \geq n_0$. Donat que també es compleix que la successió $\{b_k(y)\}$ és decreixent, i no-negativa, obtenim que per a tot $x \in X$, $y \in Y$,

$$\begin{aligned} |S_{n,m}(x, y)| &\leq M \sum_{k=n}^m |b_k(y) - b_{k+1}(y)| + M(|b_{m+1}(y)| + |b_n(y)|) \\ &= M \left(\sum_{k=n}^m (b_k(y) - b_{k+1}(y)) + (b_{m+1}(y) + b_n(y)) \right) = 2Mb_n(y) \\ &\leq 2Mb_{n_0}(y) < \varepsilon. \end{aligned}$$

De manera similar es pot demostrar el criteri d'Abel, usant la fórmula de sumació per parts (2.1). $\square$

2. Funcions de variable complexa

Com a conseqüència del criteri d'Abel, tenim el següent resultat que no demostrarem:

Teorema 2.45 (Teorema d'Abel). *Si la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ convergeix uniformement en un conjunt $A \subset \mathbb{C}$, llavors també convergeix uniformement en el con*

$$C(A, b) = b + \bigcup_{0 \leq t \leq 1} t(A - b).$$

En particular, si la sèrie convergeix en z_0 amb $|z_0 - b| = R$, llavors

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} a_n r^n (z_0 - b)^n = \sum_{n \geq 0} a_n (z_0 - b)^n.$$

Demostració. Vegeu l'exercici 2.7.2 □

Exemple 2.46. Considerem la sèrie de potències $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Mètode 1: El radi de convergència és $R = 1$. Vegem com és comporta en $|z| = 1$. Clarament, la sèrie $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ és convergent pel criteri de Dirichlet. Ara bé, el criteri de Dirichlet ens serveix també per estudiar la convergència de la sèrie $\sum_n \frac{1}{n} e^{int}$. Tenim que

$$\sum_{k=1}^n e^{ikt} = e^{it} \frac{(1 - e^{int})}{1 - e^{it}} = e^{i \frac{(n+1)t}{2}} \frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})},$$

on hem fet servir que

$$1 - e^{it} = e^{i \frac{t}{2}} (e^{-i \frac{t}{2}} - e^{i \frac{t}{2}}) = -2ie^{i \frac{t}{2}} \sin \frac{t}{2},$$

i de la mateixa manera,

$$1 - e^{int} = -2ie^{i \frac{nt}{2}} \sin \frac{nt}{2}.$$

Com que $\left| e^{i \frac{(n+1)t}{2}} \right| = 1$, i $|\sin(\frac{nt}{2})| \leq 1$, obtenim

$$\left| \sum_{k=1}^n e^{ikt} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{t}{2})|} \leq \frac{C}{|\varepsilon|} \quad \text{si } t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

Com que $\frac{1}{n} \searrow 0$, aplicant el criteri de Dirichlet, obtenim que la sèrie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} e^{int} \quad \text{convergeix uniformement en } [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

O equivalentment, en tot arc I tancat del cercle unitat que no contingui a $z = 1$.

Per tant, aplicant el teorema d'Abel, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ és uniformement convergent en el con $\{re^{it}; 0 \leq r \leq 1, t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]\}$. Per Cauchy-Hadamard, també tenim convergència uniforme en $\overline{D_r(0)}$ si $r < 1$ i, per tant, en tenim a tot compacte contingut en $\mathbb{D} \setminus \{1\}$ (sempre el podem recobrir per la unió d'un con i un disc de radi $r < 1$).

Si $t = 0$ ens queda la sèrie $\sum \frac{1}{n}$ que ja sabem que és divergent.

2. Funcions de variable complexa

Mètode 2: Treballem directament amb $z \in A \subset \overline{\mathbb{D}}$. Volem caracteritzar els conjunts A de manera que hi tinguem convergència uniforme. Primer mirem que hi puguem aplicar el criteri de Dirichlet. Si $z = 1$ la sèrie és divergent. Si ens situem a distància major que ε , és a dir $z \in A_\varepsilon := \overline{\mathbb{D}} \setminus D_\varepsilon(1)$, aleshores

$$\left| \sum_{k=1}^n z^k \right| = \left| z \frac{(1 - z^n)}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|} \leq \frac{2}{\varepsilon},$$

que és uniforme en A_ε i en n . Com que $\frac{1}{n} \searrow 0$, podem aplicar el criteri de Dirichlet i concloem directament que S convergeix uniformement en A_ε i, per tant en tenim a tot compacte contingut en $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$. Ens hem estalviat els teoremes d'Abel i Cauchy-Hadamard.

Més endavant (a l'exercici 3.4.5) veurem $S(z) = -\text{Log}(1 - z)$, així que quan $z \rightarrow 1$ tenim que $|S(z)| \geq |\ln(|1 - z|)| \rightarrow \infty$, i no podem tenir convergència uniforme en cap conjunt que s'acumuli en $z = 1$. Per tant, tot conjunt on hi hagi convergència uniforme, de fet, està contingut en A_ε per ε prou petit. $\diamond$

Exercicis

2.7.1. *Estudieu la convergència de les següents sèries de potències:*

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, & c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}, & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}. \\ b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)}, & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n, & \end{array} \quad \triangleleft$$

2.7.2. *Demostreu el criteri d'Abel i el teorema d'Abel. Indicació: Vegeu [BC13, teorema 2.20] per un cas més general en regions no tangencials (angles de Stolz).* $\triangleleft$