

3.5. Algunes funcions holomorfes importants

L'exponencial complexa: ja havíem vist que ve definida per

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

La sèrie té radi de convergència $R = +\infty$ i, per tant, e^z defineix una funció entera amb

$$(e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

La identitat

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w; \quad z, w \in \mathbb{C}$$

també es pot veure de la següent manera:

Per $a \in \mathbb{C}$, considerem la funció $f_a(z) = e^z e^{a-z}$. Com que és producte de funcions enteres, la funció f_a és entera amb

$$f_a'(z) = e^z e^{a-z} + e^z (-e^{a-z}) = 0.$$

Per tant f_a és constant en $\mathbb{C}$, és a dir, que $f_a(z) = f_a(a) = e^a$, així que

$$e^z e^{a-z} = e^a.$$

Posant $a = z + w$ obtenim el resultat.

De la identitat anterior, tenim que $e^z e^{-z} = 1$, i deduïm que $e^z \neq 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$, i també

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

Recordem també que

$$(i) \quad \overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \text{ per a tot } z \in \mathbb{C}.$$

$$(ii) \quad |e^{it}| = 1 \text{ per a tot } t \in \mathbb{R}.$$

Definició 3.33 (Funcions trigonomètriques). Per $z \in \mathbb{C}$, definim

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

vegeu la figura 3.3. Fent servir el desenvolupament en sèrie de potències de e^z , tenim que

$$\sin z = \sum_{n \geq 0} \frac{(i^n - (-i)^n)}{2i} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

També

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Per tant, $\sin z$ i $\cos z$ estenen les corresponents funcions $\sin x$ i $\cos x$ de $\mathbb{R}$ a tot el pla complex. •

3. Derivació complexa i holomorfia

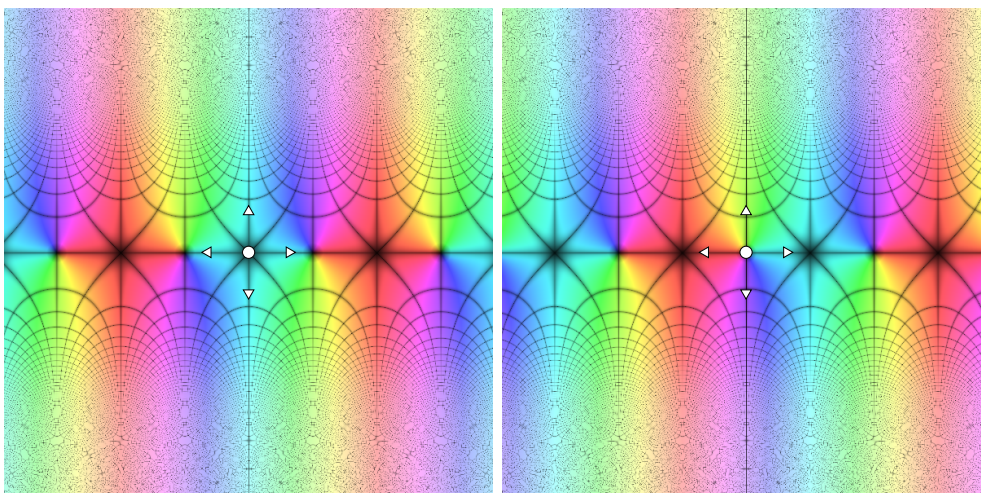


Figura 3.3.: A l'esquerra, la funció cosinus, a la dreta el sinus en $6\mathcal{Q}$.

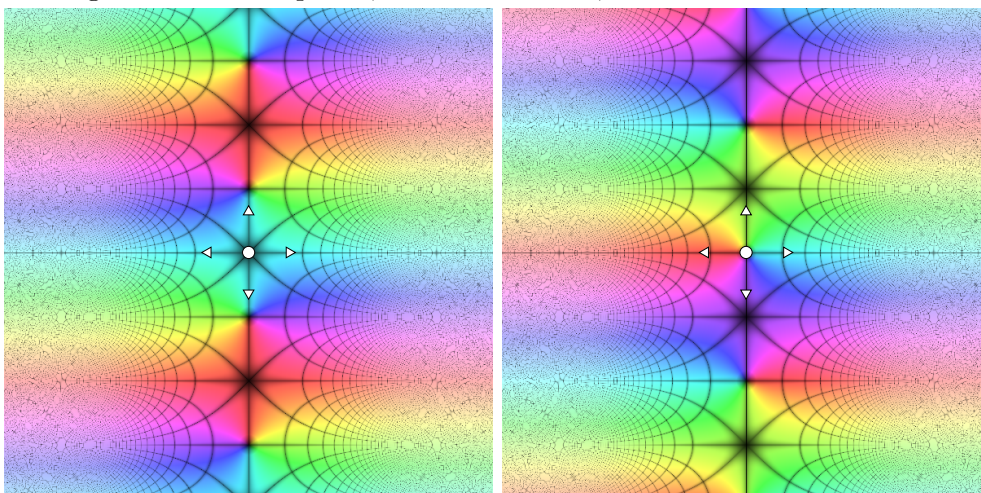


Figura 3.4.: Cosinus hiperbòlic i sinus hiperbòlic en $6\mathcal{Q}$.

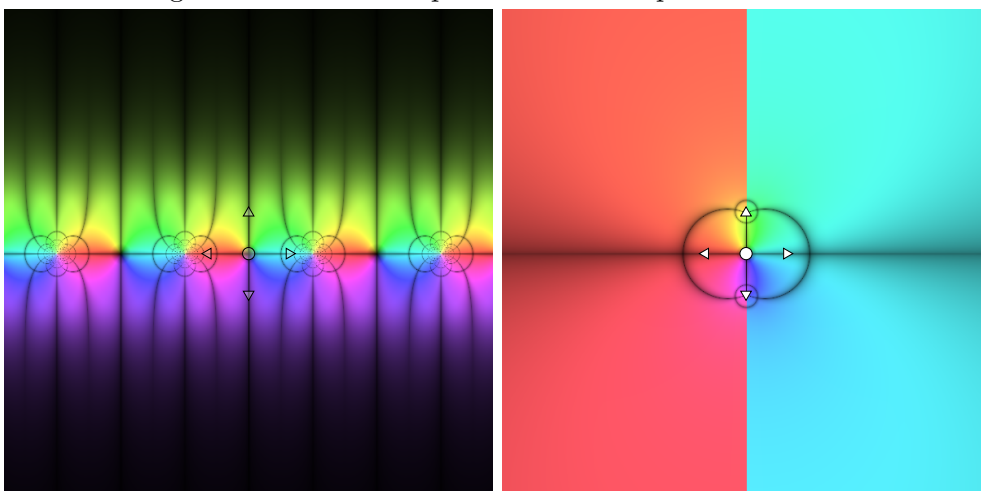


Figura 3.5.: Tangent i branca principal de l'arctangent en $6\mathcal{Q}$, vegeu l'exercici 3.5.5.

3. Derivació complexa i holomorfia

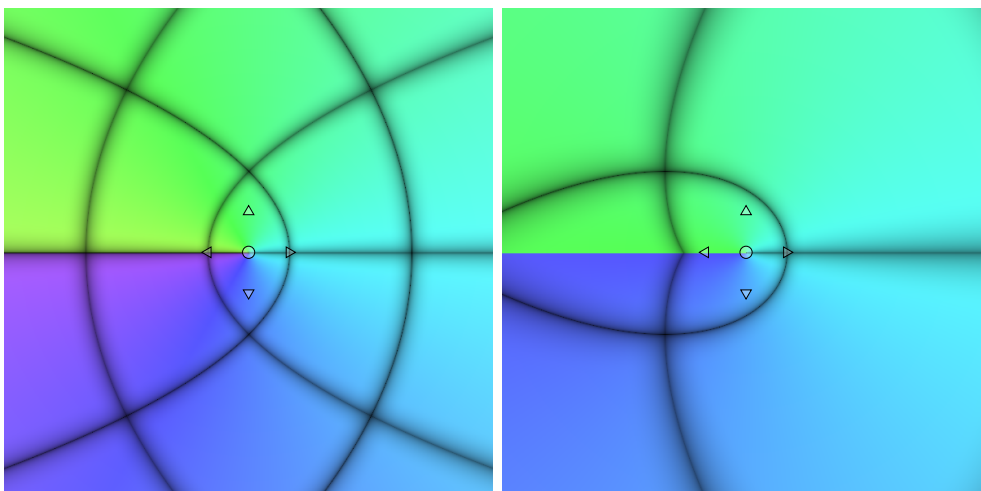


Figura 3.6.: Arrel quadrada principal i arrel cúbica principal en $6\mathcal{Q}$.

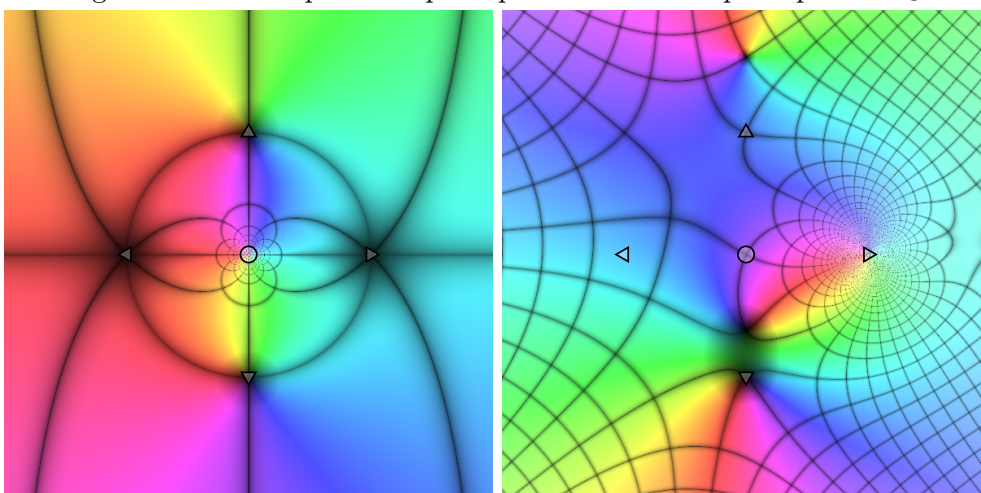


Figura 3.7.: $\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ i $\frac{z^3+2z+i}{z-1}$ en $2\mathcal{Q}$, presenten singularitats, vegeu l'exercici 2.1.7.

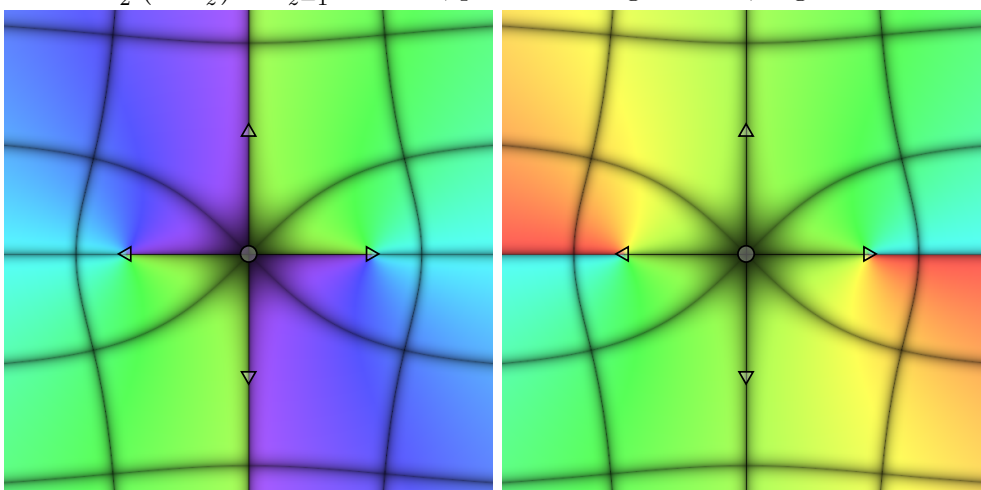


Figura 3.8.: Determinació principal de $\sqrt{z^2-1}$ i de $i\sqrt{1-z^2}$ en $2\mathcal{Q}$, vegeu l'exercici 2.4.3.

3. Derivació complexa i holomorfia

Advertència 3.34. Ara $\sin z$ i $\cos z$ no són fitades! Per exemple

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^t}{2i} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\sin(it)| = +\infty.$$

•

Exercicis

3.5.1. Demostreu que:

(i) $\sin z$ i $\cos z$ són funcions enteres amb

$$(\sin z)' = \cos z; \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

(ii) $\cos(-z) = \cos z$, i també $\sin(-z) = -\sin z$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(iv) Per a tot $z, w \in \mathbb{C}$, $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$. ◁

3.5.2. Resoleu les següents equacions:

a) $\sin z = 4$

b) $\cos z = i$. ◁

3.5.3. a) Proveu que $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$ i que $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$.

b) Trobeu tots els zeros de les funcions sinus i cosinus.

c) Deduïu de (b) que, per a $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, es verifica:

i) $\cos z_1 = \cos z_2$ si, i només si, $z_2 \pm z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

ii) $\sin z_1 = \sin z_2$ si, i només si, $z_2 - z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$ o bé $z_2 + z_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

d) Proveu que per a tot $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se satisfà:

i) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ (vegeu l'exercici 1.3.2).

ii) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

iii) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

iv) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

e) Sobre quines rectes està acotada la funció sinus? I la funció cosinus? ◁

3. Derivació complexa i holomorfia

3.5.4. (a) Proveu que per a cada $w \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, l'equació $\tan z = w$ té infinites solucions, que són la funció multivaluada

$$\arctan w := \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i-w}{i+w} \right).$$

Vegeu també que per a $w = \pm i$ l'equació no té cap solució.

(b) Vegeu que dues determinacions contínues de $\arctan w$ en un conjunt connex $E \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ difereixen de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Vegeu que no hi ha cap determinació contínua de $\arctan w$ als anells $\{r < |w-i| < R\}$, $\{r < |w+i| < R\}$, $0 < r < R < 2$, però que sí que n'hi ha si $2 < r < R < +\infty$.

3.5.5. Demostra que el domini de continuïtat de la branca principal de l'arctangent

$$\operatorname{Arctan} w := \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{i-w}{i+w} \right)$$

és $\mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)\}$. ◁

3.5.6. a) Sigui $\mathcal{L}$ la determinació del logaritme en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ que compleix que $\mathcal{L}(1) = 4\pi i$. Definim $f(z) := -\mathcal{L}(2-2z)$. Demostreu que f és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Calculeu $f(0)$ i $f(-i)$.

b) Considereu la sèrie de potències

$$S(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(2z-1)^n}{n}.$$

Demostreu que $S(z) = -\operatorname{Log}(2-2z)$, per tot $z \in D := D_{1/2}(1/2)$, on Log és la determinació principal del logaritme.

c) Quina relació hi ha entre $S(z)$ i $f(z)$? Indicació: Relacioneu primer $\mathcal{L}(z)$ amb $\operatorname{Log}(z)$ per $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. ◁

3.5.7. Sigui $\sqrt{\cdot}$ la determinació de l'arrel quadrada en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ que compleix que $\sqrt{-1} = i$ i sigui $f(z) = \sqrt{3z+2}$.

1. Expresseu $\sqrt{\cdot}$ en termes d'una determinació del logaritme i argument.

Recordem que

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2} (\ln |z| + i \arg z)}.$$

2. Quina és la regió més gran on f és holomorfa? Quina és la imatge? Existeix z tal que $f(z) = -i$?

3. Què val $f(\frac{i-2}{3})$? ◁

3. Derivació complexa i holomorfia

3.5.8. Els polinomis de Legendre⁴ $P_j(\zeta)$ són els coeficients de z^j en el desenvolupament de Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta z+z^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\zeta) z^j.$$

Provar que $P_j(\zeta)$ és un polinomi de grau j i calcular P_0, P_1, P_2 i P_3 .

◁

⁴Adrien-Marie Legendre, París, 1752 – 1833, https://ca.wikipedia.org/wiki/Adrien-Marie_Legendre

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

En aquest capítol expliquem com la integració del càlcul en diverses variables es pot aplicar al pla complex. Veurem en particular com integrar sobre corbes amb notació complexa, el teorema fonamental del càlcul per funcions amb primitives holomorfes, i una extensió d'aquest resultat anomenat teorema de Cauchy, on l'holomorfia es demana ja no a la primitiva sinó a la pròpia funció a integrar, i a més es pot relaxar la hipòtesi de $\mathbb{C}$ -derivabilitat en un punt aïllat del domini per demanar-hi tan sols continuïtat. Aquest resultat ens portarà a la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w-z_0} dw, \quad \text{per a tot } z_0 \in D_r(a).$$

la pedra angular de la teoria local de l'anàlisi complexa, coneguda com a teoria local de Cauchy.

Un cop demostrada la fórmula integral de Cauchy, deduirem un munt de propietats de les funcions holomorfes $f \in H(\Omega)$:

- Propietat de la mitjana: l'avaluació $f(z)$ coincideix amb la mitjana de la funció en una bola centrada en z .
- Analiticitat: podem expressar f localment com a sèrie de potències.
- Desigualtats de Cauchy: $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$, $n \geq 0$.
- Teorema de Liouville¹: si $f \in H(\mathbb{C})$ és fitada, és constant.
- Teorema fonamental de l'àlgebra: tot polinomi de coeficients complexos té almenys una arrel.
- Teorema de Morera²: si $g \in C(\Omega)$ integra 0 en vores de triangles, aleshores és holomorfa.
- Fórmula integral de Cauchy per derivades

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad \text{per a tot } z_0 \in D_r(a).$$

- Ordre dels zeros: si $f(a) = 0$ aleshores $f(z) = g(z)(z-a)^n$ amb g holomorfa i $g(a) \neq 0$.

¹Joseph Liouville, Saint-Omer, 1809–1882, https://ca.wikipedia.org/wiki/Joseph_Liouville

²Giacinto Morera, Novara, 1856–1909, https://ca.wikipedia.org/wiki/Giacinto_Morera

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

- Principi de prolongació analítica: si els zeros de f tenen un punt d'acumulació en Ω , aleshores $f \equiv 0$.
- Principi del mòdul màxim: si el màxim absolut de $|f|$ en $\overline{\Omega}$ s'assoleix a l'interior, aleshores f és constant.

Algunes d'aquestes propietats, com ara la de la mitjana, les desigualtats de Cauchy o el teorema de Liouville, de fet, es compleixen per tota funció harmònica (vegeu l'exercici 3.2.3) i es poden estendre a $\mathbb{R}^d$ amb $d \geq 3$, però les demostracions aquí presentades es poden aplicar només en el cas de variable complexa.

4.1. Corbes

Definició 4.1 (Corbes i camins). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Una *corba* en Ω és una aplicació $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ contínua.

La imatge (recorregut) de γ és $\gamma^* = \gamma([a, b]) \subset \Omega$. Observeu que podria tenir interseccions. El punt $\gamma(a)$ s'anomena *punt inicial*, i $\gamma(b)$ *punt final*.

Diem que és una *corba tancada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Diem que és una *corba simple* si γ és injectiva (és a dir, no té interseccions).

Diem que $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ és una *corba de classe C^1* si $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, amb $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([a, b])$ (en particular és derivable per la dreta en a i per l'esquerra en b). En aquest cas, definim

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t).$$

Diem que és una *corba C^1 a trossos* si hi ha una partició de l'interval $[a, b]$, diguem $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, de manera que $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ és de classe C^1 per $k = 1, \dots, n$. Farem servir el nom de *camí* per indicar una corba C^1 a trossos. •

Definició 4.2 (Reparametritzacions). Una *reparametrització* de γ és una corba $\eta : [c, d] \rightarrow \Omega$ de manera que $\eta = \gamma \circ \varphi$, on $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ és un homeomorfisme. En aquest cas, els recorreguts coincideixen, és a dir, $\eta^* = \gamma^*$, només canvia la velocitat en què la recorrem. Per exemple, una reparametrització de la corba $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ és $\eta(t) = e^{2it}$, $t \in [0, \pi]$.

En el cas de camins, les reparametritzacions són a més a més, de classe C^1 a trossos, i demanarem que φ i φ^{-1} també siguin C^1 a trossos.

La *corba inversa* de γ és la corba $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \Omega$ definida per $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$ (és a dir, recorre la imatge en sentit contrari). •

Definició 4.3 (Suma de camins). Escrivim la *suma de camins*: $\gamma \vee \eta$ (recorrem primer γ i després η). •

Definició 4.4 (Longitud d'una corba). Si $\gamma \in C^1$, la longitud de γ és

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Si γ és un camí (corba C^1 a trossos), llavors, seguint la notació de la Definició 4.1, definim

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt. \quad \bullet$$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Definició 4.5 (Integrals de funcions amb valors complexos). Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrable (en sentit de Riemann o de Lebesgue). Definim

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt. \quad \bullet$$

Lema 4.6. [Propietats de la integral] Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ són integrables, aleshores:

(i) la integral és $\mathbb{C}$ -lineal: si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, llavors

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt,$$

(ii) se satisfà la desigualtat triangular per integrals:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Demostració. Deixem la primera propietat com a exercici pel lector.

Per $A \in \mathbb{C}$, podem posar $|A| = e^{i\theta} A$, és a dir, $-\theta \in \arg(A)$. Llavors, prenent $A = \int_a^b f(t) dt$ i aplicant (i), tenim que

$$0 \leq \left| \int_a^b f(t) dt \right| = e^{i\theta} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{i\theta} f(t) dt.$$

Com que

$$\int_a^b e^{i\theta} f(t) dt \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b e^{i\theta} f(t) dt = \operatorname{Re} \left(\int_a^b e^{i\theta} f(t) dt \right),$$

de manera que, fent servir la definició de la integral d'una funció amb valors complexos, veiem que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \operatorname{Re} \left(\int_a^b e^{i\theta} f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{i\theta} f(t)) dt.$$

Com que $\operatorname{Re}(e^{i\theta} f(t)) \leq |e^{i\theta} f(t)| = |f(t)|$, obtenim el resultat. $\square$

Exercicis

4.1.1. Proveu que l'el·lipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ és una corba diferenciable (és a dir, existeix una parametrització $z(t)$, $t \in I$ que el seu rang és l'el·lipse, és diferenciable, $z'(t) \neq 0$ i z és corba simple. Diem que $z(t)$ és una parametrització admissible o regular). $\triangleleft$

4.1.2. Parametritzeu el contorn format pel perímetre del quadrat amb vèrtexs $-1 - i$, $1 - i$, $1 + i$, $-1 + i$, seguint aquest ordre. Quina és la seva longitud? $\triangleleft$

4.2. Integració sobre corbes

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínua, i $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ corba de classe C^1 . Definim les *integrals de camí*

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad \text{i} \quad \int_{\gamma} f(z) |dz| := \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

En cas que γ sigui un camí (corba C^1 a trossos), ho partim a trossos:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad \text{i} \quad \int_{\gamma} f(z) |dz| = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Exemple 4.7 (Exemple de dificultat de càlcul). Sigui $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, i sigui $f(z) = e^z$. Llavors

$$\int_{\gamma} e^z dz = \int_0^{2\pi} e^{e^{it}} i e^{it} dt = ?$$

Més endavant, al Corollari 4.10, veurem que aquesta integral dona zero. Fer el càlcul directe d'aquest tipus d'integrals pot ser una tasca difícil, encara que de vegades es pot calcular fàcilment. Per exemple, si $\gamma(t) = a + e^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$ i $k \in \mathbb{Z}$ (donem k voltes al cercle de radi 1 centrat en el punt a : si $k > 0$ anem en sentit contrari a les agulles del rellotge, i al revés si $k < 0$), llavors

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = \int_0^{2\pi} \frac{ik e^{ikt}}{e^{ikt}} dt = 2\pi ik. \quad \triangleleft$$

Proposició 4.8 (Propietats).

1. Donat un camí γ , tenim que

$$\int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. Si recorrem la corba en sentit invers, el signe canvia, és a dir,

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

3. Si γ és C^1 a trossos (camí), llavors

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt.$$

En particular, si $|f| \leq M$ per a tot $z \in \gamma^*$, llavors $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq M L(\gamma)$.

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

4. Si η és una reparametrització C^1 de γ , llavors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \pm \int_{\eta} f(z) dz,$$

on el signe és positiu si la reparametrització preserva el sentit i negatiu en cas contrari.

Demostració. 1. Exercici.

2. Tenim que $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$. Llavors

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma^-(t)) (\gamma^-)'(t) dt = - \int_a^b f(\gamma(a + b - t)) \gamma'(a + b - t) dt.$$

Fent el canvi de variable $s = a + b - t$, obtenim

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_b^a f(\gamma(s)) \gamma'(s) (-ds) = - \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

3. Directe a partir de la definició de la integral sobre una corba i la propietat (ii) del lema 4.6.

4. Tenim que $\eta = \gamma \circ \varphi$, i com que estem treballant amb corbes C^1 , l'aplicació bijectiva $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ també ha de ser de classe C^1 . Si $\varphi(c) = a$ (la reparametrització preserva el sentit), llavors

$$\int_{\eta} f(z) dz = \int_c^d f(\eta(t)) \eta'(t) dt = \int_c^d f(\gamma(\varphi(t))) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Llavors, fent el canvi de variable $s = \varphi(t)$, obtenim

$$\int_{\eta} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Si, en canvi, la reparametrització no preserva el sentit, és a dir, si $\varphi(c) = b$, aleshores podem combinar aquesta demostració amb l'apartat 2 per obtenir el signe canviat. $\square$

El següent resultat correspondria a una versió de la *regla de Barrow* del càlcul per integrals sobre corbes.

Teorema 4.9. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i f contínua en Ω . Supposem que existeix F primitiva holomorfa de f (és a dir, $F' = f$). Aleshores, per a tot camí γ en Ω , es compleix*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Demostració. Tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Si posem $g(t) = u(t) + iv(t) := F(\gamma(t))$, com que $(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t)) \gamma'(t)$, es compleix que $(F \circ \gamma)'(t) = g'(t) = u'(t) + iv'(t)$, de manera que, aplicant la regla de Barrow usual a $\mathbb{R}$, obtenim

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F \circ \gamma)'(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt + i \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} v'(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n (u(t_k) - u(t_{k-1})) + i \sum_{k=1}^n (v(t_k) - v(t_{k-1})) \\ &= u(b) - u(a) + i(v(b) - v(a)) = g(b) - g(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

Corol·lari 4.10. [Conseqüències]

- Si γ és un camí tancat en Ω i f té primitiva holomorfa en Ω , aleshores

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

- Si f té primitiva holomorfa en Ω , llavors $\int_{\gamma} f(z) dz$ no depèn del camí $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$. Només depèn dels punts inicials i finals (no cal ni parametritzar el camí).

Per exemple, si $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, llavors $\int_{\gamma} e^z dz = 0$. Si, en canvi, γ és un camí que va de 1 a $2i$, aleshores

$$\int_{\gamma} z^3 dz = \left[\frac{z^4}{4} \right]_1^{2i} = \left(\frac{(2i)^4}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{15}{4}.$$

Exercicis

4.2.1. Sigui $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el cercle unitat amb l'orientació habitual. Avalueu, per a tots els $m \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^m}, \quad \int_{\gamma} \frac{|dz|}{z^m}, \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{|z^m|}, \quad \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z^m|}. \quad \triangleleft$$

4.2.2. Sigui $\gamma = \partial D_r(0)$. Calculeu, per a $n \in \mathbb{Z}$, $\int_{\gamma} z^n dz$. ◁

4.2.3. Sigui $\gamma = [i+1, -i]$. Avalueu les següents integrals de línia:

$$a) \int_{\gamma} \sin(2z) dz, \quad b) \int_{|z|=1} z e^{z^2} dz, \quad c) \int_{|z-2|=1} \frac{1}{z} dz. \quad \triangleleft$$

4.2.4. Avaluar les següents integrals.

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

- a) $\int_{\gamma} \left(\frac{6}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + 1 - 3(z-i)^2 \right) dz$ si γ és $|z-i| = 4$ recorreguda un cop amb l'orientació estàndard.
- b) $\int_{\gamma} (x - 2xyi) dz$ al llarg del contorn $\gamma : z = t + it^2$ amb $t \in [0, 1]$.
- c) $\int_{\gamma} (|z-1+i|^2 - z) dz$ al llarg de la semicircumferència $\gamma : z = 1-i + e^{it}$ on $t \in [0, \pi]$.
- d) La funció no analítica $f(z) = x^2 + iy$ (per què?) al llarg de $|z| = 1$ recorreguda un cop en sentit antihorari. $\triangleleft$

4.2.5. Calcular les següents integrals al llarg del camí γ que s'indica.

- a) $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ per qualsevol contorn en el semiplà dret que va de $-3i$ a $3i$. Quin problema tenim si seguim un contorn pel semiplà esquerre? Indicació: considerar la determinació principal del logaritme en la qual el logaritme no està definit si $y = 0, x \leq 0$.
- b) $\int_{\gamma} e^z \cos z dz$ per un camí d'origen $a = i$ i final $b = \pi$.
- c) $\int_{\gamma} z^{1/2} dz$ per la branca principal de $z^{1/2}$ per un camí d'origen $a = i$ i final $b = \pi$ que no talli la semirecta $(-\infty, 0]$. $\triangleleft$

4.2.6. Considerem la determinació de l'arrel $\sqrt{z^2-1}$ que és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ i positiva a $(1, \infty)$.

- (a) Vegeu que $z + \sqrt{z^2-1}$ omet l'eix real negatiu si $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$, de manera que la determinació principal $\text{Log}(z + \sqrt{z^2-1})$ està definida a Ω .
- (b) Vegeu que $\text{Log}(z + \sqrt{z^2-1})$ és una primitiva de $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ a Ω .
- (c) Avalueu $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$, on γ és el tros de cercle $|z-1| = \sqrt{2}$ que va de i a $-i$ passant pel semiplà de la dreta ($\text{Re } z > 0$).

Indicació: comproveu que $\sqrt{z^2-1} = e^{\frac{1}{2}(\text{Log}(z-1) + \text{Log}(z+1))}$ s'estén a $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ de manera contínua. $\triangleleft$

4.2.7. Siguin $\gamma_1 := \{|z| = 1 : \text{Im } z \geq 0\}$ i $\gamma_2 := \{|z| = 2 : \text{Re } z, \text{Im } z \geq 0\}$. Demostreu que:

- a) $\left| \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+2} \right| \leq \pi,$
- b) $\left| \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{3},$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

$$c) \left| \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz \right| \leq 2\pi e, \quad d) \left| \int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{z^2} dz \right| \leq \pi e^2. \quad \triangleleft$$

4.2.8. (a) Sigui γ un camí en $\mathbb{C}$. Proveu que si f és una funció contínua en γ^* llavors

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})} dz.$$

(b) Dedueïu que si f és una funció contínua en el cercle unitat llavors

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z) dz} = - \int_{|z|=1} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}. \quad \triangleleft$$

4.3. Teorema de Cauchy

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert, $U \subset \Omega$ és un obert fitat prou regular (per exemple amb frontera C^1) i tal que $\bar{U} \subset \Omega$, i tenim dues funcions $f, g \in C^1(\Omega)$, pel teorema de Green³ (vegeu l'exercici 4.3.4) se satisfà la fórmula de Green en variable complexa:

$$\int_U (\partial f + \bar{\partial} g) dm = \frac{i}{2} \int_{\partial U} (f d\bar{z} - g dz). \quad (4.1)$$

Aquí, entenem que $\int_{\partial U} f d\bar{z} = \int_a^b f(\gamma(t)) \overline{\gamma'(t)} dt = \int_{\gamma} f(dx - idy)$ per alguna corba γ que parametrizzi ∂U en sentit antihorari, on, identificant $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, indiquem $\int_{\gamma} F_1 dx = \int_a^b F_1(\gamma(t)) \gamma_1'(t) dt$ i anàlogament per $\int_{\gamma} F_2 dy$. Així doncs, prenent $f = 0$, podem deduir que si $g \in H(\Omega)$, aleshores

$$\int_{\partial U} g(z) dz = 0.$$

A continuació obtindrem un resultat lleugerament més general sense fer ús de la fórmula de Green. El primer resultat, anomenat teorema de Cauchy-Goursat⁴ o també teorema de Cauchy per triangles, és un resultat clau per tal de provar el teorema de Cauchy per un disc o per oberts convexos. Aquests resultats seran suficients per a veure la fórmula integral de Cauchy i les conseqüències de la teoria local.

Teorema 4.11 (Cauchy-Goursat per triangles). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $p \in \Omega$ i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{p\})$. Llavors*

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

per a tot triangle $T \subset \Omega$.

³George Green, Nottingham, 1793–1841, https://ca.wikipedia.org/wiki/George_Green

⁴Édouard Jean-Baptiste Goursat, París, 1858–1936, https://ca.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Goursat

Observació 4.12.

1. Ens cal tenir tot el triangle ple T dins d' Ω . És a dir, si la frontera del triangle ∂T envolta un forat d' Ω , llavors no s'aplica.
2. En cas que f sigui holomorfa a tot Ω excepte un punt p , però f no és contínua en p , tampoc s'aplica. •

Comentari 4.13. Aquest enunciat és una versió local, o per triangles, del teorema de Cauchy-Goursat. La forma que sovint s'anomena simplement *teorema de Cauchy* afirma que la integral de f sobre qualsevol camí tancat del domini s'anul·la, però això requereix hipòtesis addicionals sobre el domini, per exemple que sigui un disc, un obert convex o, més endavant, un domini simplement connex (vegeu els teoremes 4.15, 4.17 i 5.26). En un obert amb forats, el resultat pot fallar, com mostra la integral de $1/z$ sobre la circumferència unitat, i caldrà tenir en compte les propietats topològiques del camí respecte al domini, vegeu el teorema 5.22.

Històricament, les formulacions clàssiques del teorema integral de Cauchy es demostraven amb hipòtesis de regularitat més fortes, com ara la continuïtat de la derivada. Goursat va observar que aquesta hipòtesi es pot eliminar: la $\mathbb{C}$ -derivabilitat ja és suficient. •

Demostrem abans un cas particular:

Proposició 4.14. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Llavors $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ per a tot triangle $T \subset \Omega$.*

Demostració. Tenim orientada la frontera ∂T del nostre triangle en sentit contrari a les agulles del rellotge. Fent servir els punts mitjos de cada segment, partim el nostre triangle T en 4 triangles T_1, T_2, T_3, T_4 , vegeu la figura 4.1. Totes les fronteres ∂T_i d'aquests triangles

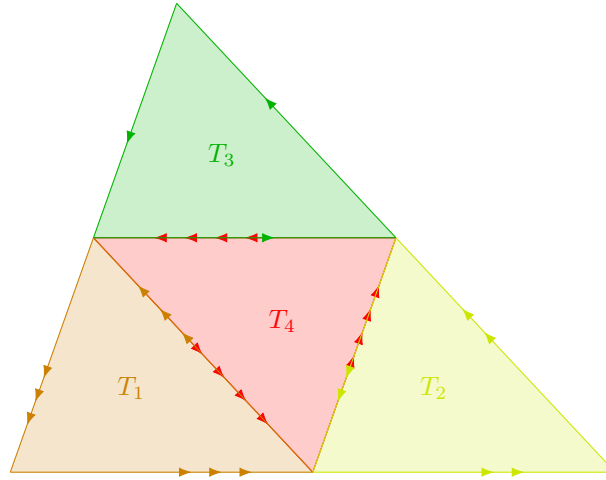


Figura 4.1.: Subdivisió d'un triangle en quatre triangles mitjançant els punts mitjos. Les integrals sobre els costats interiors es cancel·len en sumar les quatre vores orientades.

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

venen orientades en sentit contrari a les agulles del rellotge, de manera que el triangle del mig té els costats orientats en sentit contrari als costats comuns dels altres triangles (així quan es fa la suma de les integrals sobre la frontera d'aquests 4 triangles, les integrals en els segments del mig es cancel·len, al calcular-se un en un sentit, i l'altre en sentit contrari). Vegeu la figura 4.1. Llavors

$$\int_{\partial T} f = \int_{\partial T_1} f + \int_{\partial T_2} f + \int_{\partial T_3} f + \int_{\partial T_4} f.$$

Observem que

$$L(\partial T_j) = \frac{1}{2} L(\partial T); \quad \text{diam}(T_j) = \frac{1}{2} \text{diam}(T), \quad 1 \leq j \leq 4.$$

Anomenem $T^{(1)} := T_{j_1}$ un triangle dels 4 que maximitzi el valor absolut de la integral de camí:

$$\left| \int_{\partial T^{(1)}} f \right| \geq \left| \int_{\partial T_j} f \right|, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

Llavors

$$\left| \int_{\partial T} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T^{(1)}} f \right|.$$

Repetim el procés amb $T^{(1)}$ per tal d'obtenir un altre triangle $T^{(2)}$ amb propietats anàlogues. De manera inductiva, obtenim una successió $\{T^{(k)}\}$ de triangles que satisfan

$$(i) \quad T^{(1)} \supset T^{(2)} \supset \dots \supset T^{(k)} \supset \dots;$$

(ii)

$$\left| \int_{\partial T^{(k)}} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T^{(k+1)}} f \right|;$$

$$(iii) \quad L(\partial T^{(k+1)}) = \frac{1}{2} L(\partial T^{(k)}) \text{ i també } \text{diam}(T^{(k+1)}) = \frac{1}{2} \text{diam}(T^{(k)}).$$

Tot això implica que

(a)

$$\left| \int_{\partial T} f \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T^{(n)}} f \right|;$$

$$(b) \quad L(\partial T^{(n)}) = 2^{-n} L(\partial T) \text{ i també } \text{diam}(T^{(n)}) = 2^{-n} \text{diam}(T).$$

De (b) se segueix que $\text{diam}(T^{(n)}) \rightarrow 0$, així que juntament amb (i), tenim una successió decreixent de compactes en un espai mètric complet amb diàmetres que tendeixen a zero. Llavors

$$\bigcap_k T^{(k)} = \{z_0\},$$

vegeu la figura 4.2. Aquest resultat és com el teorema dels intervals encaixats, i se sol veure en assignatures anteriors del grau de matemàtiques.

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

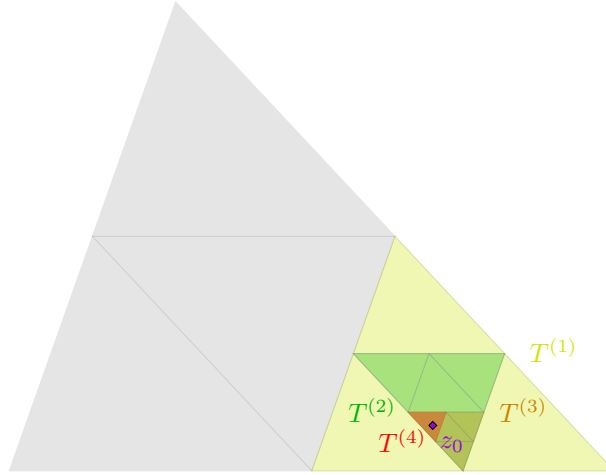


Figura 4.2.: Triangles encaixats $T^{(k)}$. Els diàmetres tendeixen a zero i la intersecció queda reduïda a un punt z_0 .

Fixem $\varepsilon > 0$. Com que f és holomorfa en z_0 , podem trobar $\delta > 0$ de manera que $D_\delta(z_0) \subset \Omega$ i

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon, \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

En altres paraules, tenim que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|, \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \quad (4.2)$$

Prenem n prou gran de manera que $\text{diam}(T^{(n)}) = 2^{-n} \text{diam}(T) < \delta$. Com que $z_0 \in T^{(n)}$, se segueix que $T^{(n)} \subset D_\delta(z_0)$.

Com que la funció $g_0(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ té primitiva holomorfa (ja que és un polinomi holomorf), tenim que

$$\int_{\partial T^{(n)}} g_0(z) dz = 0$$

i, per tant,

$$\left| \int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial T^{(n)}} (f(z) - g_0(z)) dz \right| = \left| \int_{\partial T^{(n)}} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right|.$$

Aplicant (4.2) obtenim

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right| &< \varepsilon \int_{\partial T^{(n)}} |z - z_0| |dz| \leq \varepsilon \text{diam}(T^{(n)}) L(\partial T^{(n)}) \\ &= \varepsilon 4^{-n} \text{diam}(T) L(\partial T). \end{aligned}$$

Per tant, per (a), veiem que

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| < \varepsilon \text{diam}(T) L(\partial T).$$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Com que $\varepsilon > 0$ és arbitrari i $\text{diam}(T)$ i $L(\partial T)$ són fixes, se segueix que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0,$$

tal com volíem veure. $\square$

Demostració del teorema de Cauchy-Goursat. En cas que el punt p , on no sabem si f és holomorfa, es trobi fora del triangle ple T , simplement podem agafar una regió Ω' amb $p \notin \Omega'$ de manera que $T \subset \Omega'$. Com que $f \in H(\Omega')$, aplicant la proposició 4.14 obtenim $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$.

En cas que el punt p es trobi en el triangle ple T , sempre ens reduïrem al cas que p sigui un dels vèrtexs del triangle. Anem doncs a fer aquest cas primer.

Si p és un dels vèrtexs del triangle, fixem $\varepsilon > 0$, i partim el triangle T en dues parts, vegeu la figura 4.3. Una que sigui un petit triangle T_ε de diàmetre $< \varepsilon$ amb vèrtex p , i l'altra part quedaria un trapezi Z . Com que el trapezi el podem partir en dos triangles, i el punt p queda fora dels dos triangles plens, aplicant el cas anterior tenim que

$$\int_{\partial Z} f(z) dz = 0.$$

Llavors

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{\partial Z} f(z) dz + \int_{\partial T_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial T_\varepsilon} f(z) dz.$$

Com que f és contínua en Ω , en particular és contínua en el compacte T , així que hi ha una constant positiva M de manera que $|f(z)| \leq M$ per a tot $z \in T$. En particular, $|f(z)| \leq M$ per a tot $z \in T_\varepsilon$, i M no depèn de ε . Llavors

$$\left| \int_{\partial T_\varepsilon} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial T_\varepsilon} |f(z)| |dz| \leq M L(\partial T_\varepsilon) < 3M\varepsilon.$$

Com que ε és arbitrari, deduïm que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

Si p es troba en ∂T , llavors ajuntem p amb el vèrtex del triangle que no es troba en el segment que conté p , per formar dos triangles, i pel cas anterior obtenim que $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$, vegeu la figura 4.3.

Si p es troba a l'interior del triangle T , ajuntem aquest punt amb tots els vèrtexs del triangle formant tres triangles, i aplicant el cas anterior veiem que $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$, vegeu la figura 4.3. $\square$

Teorema 4.15 (Teorema de Cauchy per un disc). *Si D un disc obert i $f \in C(D)$. Si $f \in H(D \setminus \{p\})$ amb $p \in D$, llavors f té primitiva holomorfa en D , i*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

per a tot camí tancat γ en D .

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

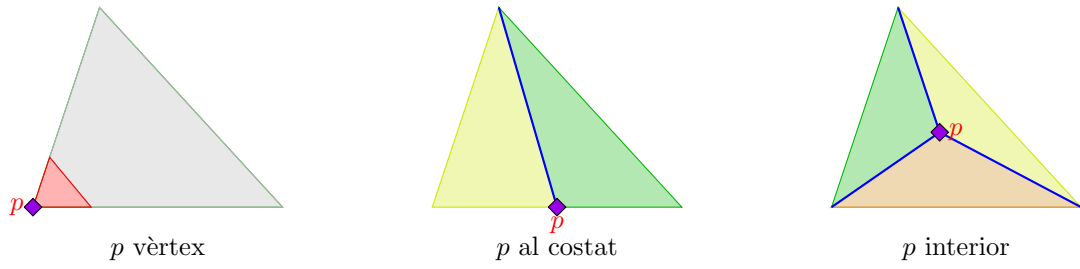


Figura 4.3.: Reducció dels casos en la prova de Cauchy-Goursat quan hi ha un punt excepcional p .

Demostració. Pel teorema 4.9, només cal provar que f té primitiva holomorfa en D . Fixem $a \in D$, i definim

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w) dw, \quad z \in D,$$

on $[a, z]$ és el segment que uneix a amb z .

Segui $z_0 \in D$ i anem a provar que F és holomorfa en z_0 amb $F'(z_0) = f(z_0)$. Ens cal provar que

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| = 0.$$

Considerem el triangle ∂T amb vèrtexs a , $z_0 + h$, z_0 amb $|h|$ prou petit per tal que $z_0 + h \in D$. Com que tot el triangle ple T es troba dins del disc D , aplicant el teorema de Cauchy-Goursat, obtenim que

$$\int_{\partial T} f(w) dw = 0.$$

És a dir,

$$\int_{[a, z_0+h]} f(w) dw + \int_{[z_0+h, z_0]} f(w) dw - \int_{[a, z_0]} f(w) dw = 0,$$

així que, tenint en compte la definició de F , tenim que

$$F(z_0 + h) - F(z_0) = - \int_{[z_0+h, z_0]} f(w) dw = \int_{[z_0, z_0+h]} f(w) dw.$$

Per tant, com que $f(z_0) = \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} f(z_0) dw$, arribem a la desigualtat

$$\left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{[z_0, z_0+h]} |f(w) - f(z_0)| |dw|.$$

Fixem $\varepsilon > 0$. Com que f és contínua en z_0 , hi ha $\delta > 0$ de manera que $|f(w) - f(z_0)| < \varepsilon$ si $|w - z_0| < \delta$. Prenent doncs h amb $|h| < \delta$, obtenim

$$\left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{|h|} L([z_0, z_0 + h]) = \varepsilon,$$

ja que la longitud del segment $[z_0, z_0 + h]$ és $|h|$. □

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Observació 4.16. Per tal de poder fer aquesta prova, ha estat clau el fet que podem triar h de manera que el triangle amb vèrtexs a , $z_0 + h$, z_0 es trobi dins de D . Això mateix ho podem fer si agafem un obert convex. Recordem que un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ es diu *convex* si per tot parell de punts $a, b \in \Omega$ el segment $[a, b] \subset \Omega$. Aleshores, la mateixa prova ens serveix canviant el disc obert D , per qualsevol obert convex Ω , de manera que obtenim el següent resultat. •

Teorema 4.17 (Teorema de Cauchy per oberts convexos). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert convex, i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{p\})$ amb $p \in \Omega$. Llavors f té primitiva holomorfa en Ω , i*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

per a tot camí tancat γ en Ω .

Exercicis

4.3.1. Recordeu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(a) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = \sqrt{\pi}$ per a tot $a > 0$. Indicació: Apliqueu el teorema de Cauchy al rectangle $[-R, R] \times [0, a]$.

(b) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(nx) dx = \sqrt{2\pi} e^{-n^2/2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ◁

4.3.2. Determineu el domini d'holomorfia de les funcions f donades i digueu per què $\int_{|z|=2} f(z) dz = 0$.

a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - 6z + 10}$,

b) $f(z) = \text{Log}(z + 3)$. ◁

4.3.3. Sigui $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funció harmònica en un disc D , és a dir, tal que $\Delta u = 4\bar{\partial}\partial u = 0$. Demostra que existeix una funció $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmònica tal que $(u + iv)$ és holomorfa. L'anomenem harmònica conjugada. Indicació: Demostreu que les equacions de Cauchy-Riemann per $F = U + iV$ es poden escriure com $\partial F = 2\partial U$ o com $\bar{\partial} \bar{U} = -i\bar{\partial} V$. ◁

4.3.4. El teorema de Green diu que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert i $U \subset \Omega$ és un obert fitat prou regular (per exemple amb frontera C^1) i tal que $\bar{U} \subset \Omega$, aleshores tot camp vectorial $F = (F_1, F_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ amb $F \in C^1(\Omega)$ satisfà que

$$\int_U (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dm = \int_{\partial U} (F_1 dx + F_2 dy).$$

Demostreu la fórmula de Green en variable complexa (4.1). ◁

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

4.3.5. Continuant amb l'exercici 4.3.4, demostreu la fórmula de Cauchy generalitzada, coneguda com a fórmula de Cauchy-Pompeiu⁵, que diu que si $\phi \in C^1(\Omega)$ i $z_0 \in U$, aleshores

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\phi(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} dm(z).$$

Notem que el cas particular $\phi \in C_c^1(U)$ ens diu $\phi = \mathcal{C}(\bar{\partial}\phi)$, on $\mathcal{C}$ indica la transformada de Cauchy

$$\mathcal{C}\psi(z_0) := -\frac{1}{\pi} \int_U \frac{\psi(z)}{z - z_0} dm(z). \quad \triangleleft$$

4.4. Fórmula integral de Cauchy

Hem vist les versions locals del teorema de Cauchy, provant el teorema de Cauchy per a un triangle i el teorema de Cauchy en oberts convexos. El proper resultat és la fórmula integral de Cauchy, un dels punts centrals de l'anàlisi complexa: transforma una hipòtesi local, l'holomorfia, en una representació integral que determina completament la funció a l'interior d'un disc a partir dels seus valors a la frontera. N'obtidrem les conseqüències més importants de la teoria local de Cauchy: desenvolupament en sèries de potències d'una funció holomorfa, zeros de funcions holomorfes (factorització local), principi de prolongació analítica, desigualtats de Cauchy, teorema de Liouville, teorema fonamental de l'àlgebra, teorema de l'aplicació oberta i principi del mòdul màxim.

Teorema 4.18 (Fórmula integral de Cauchy (versió local)). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad |z_0 - a| < r,$$

on $\gamma_r(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Observació 4.19. Ens cal tenir tot el disc tancat $\overline{D_r(a)}$ dins d' Ω . Aleshores, el resultat no s'aplicaria necessàriament si, per exemple, $\Omega = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ i $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. El teorema, ara com ara, exclouria fins i tot el cas que f fos contínua en $\overline{\mathbb{D}}$ (ens caldria tenir f holomorfa en un obert que contingui $\overline{\mathbb{D}}$), tot i que aquest cas es pot demostrar per pas al límit. •

Observació 4.20. Moltes vegades al llarg del text, farem ús de la notació $\int_{|z-a|=r} f(z) dz$ per indicar que estem integrant sobre la corba $\sigma_a(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (fent només una volta al cercle). Així, la fórmula integral de Cauchy es pot escriure com

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad |z_0 - a| < r. \quad \bullet$$

⁵Dimitrie Pompeiu, Broscăuți, 1873–1954, https://ca.wikipedia.org/wiki/Dimitrie_Pompeiu

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

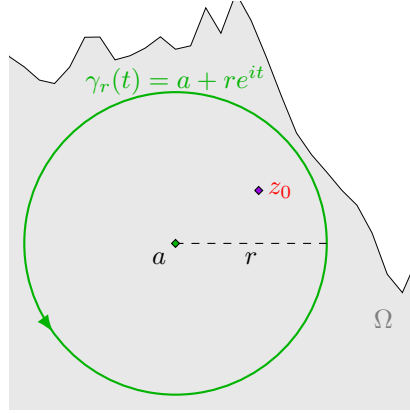


Figura 4.4.: Disc de Cauchy: si $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$ i $z_0 \in D_r(a)$, el valor $f(z_0)$ queda determinat pels valors de f a la circumferència.

Demostració. Com que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$, hi ha $r_1 > r$ de manera que $\overline{D_r(a)} \subset D := D_{r_1}(a) \subset \Omega$. Fixem $z_0 \in D_r(a)$, i definim la funció

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \in D \setminus \{z_0\} \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

Clarament g és holomorfa en $D \setminus \{z_0\}$. Vegem que g és també contínua en z_0 , ja que en ser f holomorfa, aleshores

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = g(z_0).$$

Així doncs, tenim que $g \in C(D) \cap H(D \setminus \{z_0\})$. Com que $\gamma_r \subset D$, pel teorema de Cauchy per un disc se segueix que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} g(z) dz = 0.$$

És a dir,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$

Per tant,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} \right).$$

Per acabar la prova, ens cal veure que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} = 1, \quad z_0 \in D_r(a). \quad (4.3)$$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Recordem que si $z_0 = a$ i $\gamma_r(t) = a + re^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$, aleshores (4.3) es compleix, vegeu l'exemple 4.7. Volem veure que això segueix sent cert per a qualsevol altre punt de $D_r(a)$. Observem primer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it} dt}{re^{it} + (a - z_0)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + (a - z_0)}{re^{it} + (a - z_0)} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a - z_0) dt}{re^{it} + (a - z_0)} \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a - z_0) dt}{re^{it} + (a - z_0)}. \end{aligned}$$

Per tant, només cal provar que

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{(a - z_0) dt}{re^{it} + (a - z_0)} = 0.$$

Si $z_0 = a$, no hi ha res a provar. Llavors suposem que $z_0 \neq a$. Si $\eta(t) = e^{-it}$, amb $t \in [0, 2\pi]$, tenim $\eta^* = \partial\mathbb{D}$ i $\eta'(t) = -ie^{-it}$. Aleshores,

$$I = (a - z_0) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{it}(r + (a - z_0)e^{-it})} = -\frac{(a - z_0)}{i} \int_{\eta} \frac{dw}{r + (a - z_0)w}.$$

Ara, posant $h(w) = (r + (a - z_0)w)^{-1}$, només ens cal provar que

$$\int_{|w|=1} h(w) dw = 0,$$

seguint la notació introduïda a l'observació 4.20, i això ens ho dona el teorema de Cauchy per un disc, si podem veure que h és holomorfa en un disc centrat al 0 de radi $R > 1$. Ara bé, h és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ excepte en el punt $w_0 = \frac{r}{z_0 - a}$, i com que $|w_0| > 1$, podem trobar tal R , així que ja hem provat el que es demanava. Podeu trobar una demostració alternativa de (4.3) a l'exercici 4.4.6. $\square$

Observació 4.21. Aplicant el teorema de Cauchy per oberts convexos, fent servir la mateixa prova, podem demostrar el següent resultat:

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert convex, γ camí tancat d' Ω i $f \in H(\Omega)$. Aleshores

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \text{Ind}(\gamma, z_0), \quad z_0 \notin \gamma^*,$$

on

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

és l'*índex* de γ respecte al punt z_0 . Més endavant, veurem la interpretació geomètrica de l'índex com també algunes propietats (essencialment compta el número de voltes que fa γ al voltant del punt z_0). $\bullet$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Fins al final del capítol, estudiem les conseqüències directes de la fórmula integral de Cauchy. Comencem per la propietat de la mitjana.

Lema 4.22 (Propietat de la mitjana). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$ i suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Demostració. Per la fórmula integral de Cauchy, tenim que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Parametritzant la corba fent $z = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, ens queda

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

□

Exercicis

4.4.1. *Avalueu, usant la fórmula integral de Cauchy, les següents integrals:*

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\int_{ z =2} \frac{z^2}{z-1} dz;$ | d) $\int_{ z =2} \frac{dz}{z^2+z+1};$ | g) $\int_{ z =3} \frac{3z-2}{z^2-z} dz;$ |
| b) $\int_{ z =1} \frac{\sin(e^z)}{z} dz;$ | e) $\int_{ z =2} \frac{dz}{z^2+2z-3};$ | h) $\int_{ z+1 =1} \frac{1}{z^2-1} dz.$ ◁ |
| c) $\int_{ z =2} \frac{dz}{z^2-1};$ | f) $\int_{ z-2 =\frac{3}{2}} \frac{\cos(z)}{z^2(z^2-\pi^2)} dz;$ | |

4.4.2. *Sigui p un polinomi de grau n , amb tots els seus zeros continguts en $D_R(0)$. Demostreu que*

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n. \quad \triangleleft$$

4.4.3. *Sigui $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Calculeu la integral de línia $\int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz$. Deduïu que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2) dt}{1+r^2-2r \cos(\theta-t)} = 2\pi, \quad \text{per a tot } 0 \leq r < 1 \text{ i } \theta \in \mathbb{R}. \quad \triangleleft$$

4.4.4. *Siguin $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, on Ω és un domini tal que $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Donat $a \in \mathbb{C}$ amb $|a| \neq 1$, calculeu*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{ag(w)}{aw-1} \right) dw. \quad \triangleleft$$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

4.4.5. Es consideren els següent exercicis relacionats amb la Fórmula Integral de Cauchy.⁶

a) Calculeu $\oint_C \frac{z^2}{z^4 - 1} dz$ sobre la circumferència de radi 3 centrada en 0.

b) És cert que $\oint_C \frac{e^z}{z} dz = 0$ si C és tancada i simple?

4.4.6. Demostreu (4.3) usant la fórmula integral de Cauchy centrada i el teorema de Cauchy en convexos. $\triangleleft$

4.5. Sèries de potències

Teorema 4.23 (Desenvolupament local en sèrie de potències). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Tota funció holomorfa en Ω és localment una sèrie de potències. Concretament, si $R_a = \text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, aleshores*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad \text{per tot } |z - a| < R_a,$$

amb

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \quad \text{per tot } r < R_a$$

i el radi de convergència de la sèrie és major o igual a R_a .

Combinant aquest resultat amb el teorema 3.30, veiem que f és holomorfa en Ω si i només si f hi és analítica.

Demostració. Per $0 < r < R_a$, tenim que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Aplicant la fórmula integral de Cauchy obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad |z-a| < r.$$

Volem escriure aquesta integral com una sèrie de potències. Tenim que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a) - (z-a)} = \frac{1}{(w-a) \left(1 - \frac{(z-a)}{w-a}\right)}.$$

Ara, observem que per w amb $|w-a| = r$, tenim que

$$\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = \frac{|z-a|}{r} < 1$$

⁶De vegades es fa servir la notació $\oint$ per indicar que la integral és sobre un camí tancat.

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

i, per tant,

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z-a}{w-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n.$$

Llavors

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Introduint aquesta expressió en la fórmula integral de Cauchy, obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right) dw.$$

Ara volem intercanviar l'ordre d'integració amb el sumatori. Això ho podem fer si la sèrie de funcions $\sum_{n \geq 0} f_n$ convergeix uniformement en $\{|w-a|=r\}$, on

$$f_n(w) = f(w) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Per w amb $|w-a|=r$, tenim que

$$|f_n(w)| \leq \left(\max_{w:|w-a|=r} |f(w)| \right) \frac{|z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} \leq \frac{C_r}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n.$$

Com que $|z-a| < r$, llavors $\sum_n \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n < \infty$, així que aplicant el criteri M de Weierstrass, se segueix que la sèrie $\sum_{n \geq 0} f_n$ convergeix uniformement en $\{|w-a|=r\}$. Intercanviant doncs la integració amb el sumatori, tenim que per $|z-a| < r$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n. \quad \square$$

Corol·lari 4.24. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Aleshores $f \in C^\infty(\Omega)$ i totes les seves derivades són holomorfes.*

Demostració. Com que això ja ho sabem per sèries de potències, és conseqüència del resultat anterior. $\square$

Exercicis

4.5.1. *Desenvolueu en sèrie de potències al voltant del punt a i doneu el radi de convergència de:*

a) $1/z$, $a = 1$,

c) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $a = 0$,

e) $\frac{e^z}{1-z}$, $a = 0$,

b) $z^2 e^z$, $a = 0$,

d) $\frac{1}{(1-z)^3}$, $a = 0$,

f) $\frac{1}{1+e^z}$, $a = 0$.

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

(en (e) i (f) només cal calcular els 3 primers termes).

◁

4.5.2. Sigui $\alpha \in \mathbb{C}$, provar que si $(1+z)^\alpha$ es pensa com $e^{\alpha \text{Log}(1+z)}$ llavors per $|z| < 1$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \dots$$

(binomi de Newton⁷).

4.5.3. Trobeu els desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt a de les següents funcions:

a) $f(z) = \cos^2 z$, $a = 0$.

c) $\sqrt[3]{z}$, $a = 1$.

b) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$, $a = 1$.

Aquí $\sqrt[3]{\cdot}$ és la determinació de l'arrel cúbica en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ que val $(-1 + i\sqrt{3})/2$ en $z = 1$.

◁

4.5.4. Considereu la funció $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+i)z}$ i el punt $a = -1$.

1. "Sense fer cap càlcul", raoneu quin és el disc de convergència de la sèrie de potències de f al voltant del punt a .

2. Calculeu la sèrie de potències de f al voltant de a .

◁

4.5.5. a) Es pot desenvolupar $\sqrt{z}$ en sèrie de potències en un entorn de l'origen?

b) Quin és el disc màxim centrat a 0 on es pot desenvolupar $\cos(1/(z-1))$ en sèrie de potències?

c) I la funció $\frac{1}{2-z} + \frac{z}{3-z}$?

4.5.6. Determinar com a mínim els coeficients a_1, a_2, a_3, a_4 de la sèrie de Taylor de $1/(1+z+z^4)$ centrada a l'origen. Expliqueu perquè el radi de convergència és com a mínim $2/3$.

4.5.7. Vegem com el teorema 4.23 és propi de l'anàlisi complexa. Una funció de variable real f és analítica en un interval obert $I \subset \mathbb{R}$ si es pot expressar localment com a sèrie de potències amb coeficients reals. Demostreu que si f és analítica en I aleshores hi és derivable. Troba una funció infinites vegades derivable en $\mathbb{R}$ que no hi sigui analítica. Troba una funció f analítica en $\mathbb{R}$ que tingui radi de convergència 1.

⁷Isaac Newton, Woolsthorpe-by-Colsterworth, Lincolnshire, 1642 – 1727, https://ca.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

4.6. Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades i desigualtats de Cauchy

Com que també sabem que $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ (vegeu l'observació 3.31), obtenim el següent resultat

Lema 4.25 (Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$ i sigui $a \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Notem que el requisit que la circumferència estigui centrada en a serà relaxat en el corollari 4.39.

Exemple 4.26. Calculem

$$I = \int_{|z-1|=1} \frac{ze^z}{(z-1)^2} dz.$$

La funció $f(z) = ze^z$ és entera. Llavors, per la fórmula integral de Cauchy per derivades, tenim que

$$I = \int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1) = 4\pi i e.$$

◇

Lema 4.27 (Desigualtats de Cauchy). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$, i sigui $a \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M_r}{r^n}, \quad n \geq 0,$$

on $M_r = \sup_{|z-a|=r} |f(z)| = \max_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Observació 4.28. En particular, tenim que $|f(a)| \leq \max_{|z-a|=r} |f(z)|$. •

Demostració. Aplicant la fórmula integral de Cauchy per derivades, tenim que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Per tant

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|w-a|=r} \frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}} |dw| = \frac{n!}{2\pi r^{n+1}} \int_{|w-a|=r} |f(w)| |dw| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi r^{n+1}} M_r L(\{|w-a|=r\}) = \frac{n! M_r}{r^n}. \end{aligned}$$

□

Observació 4.29. La desigualtat no es pot millorar. Per exemple, sigui $f(z) = z^n$, $a = 0$ i $r = 1$. En aquest cas, $M = M_1 = \max_{|z|=1} |f(z)| = 1$, i també tenim que $f^{(n)}(0) = n!$, així que $|f^{(n)}(0)| = n! M$. •

Exercicis

4.6.1. Donat $r > 0$ i $a \in \mathbb{C}$ calculeu

$$I = \int_{|z-a|=r} \frac{e^{2z}}{(z-a)^3} dz. \quad \triangleleft$$

4.6.2. Siguin $0 \leq m \leq n$ enters. Calculeu

$$\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{m+1}} dz. \quad \triangleleft$$

4.6.3. Intenteu calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ fent servir la fórmula integral de Cauchy per derivades (potser cal recordar la desigualtat $|\int_{\Gamma} f(z) dz| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz|$.)

a) Considereu la semicircumferència C en el semiplà superior centrada a 0 amb radi R i tancada pel segment de l'eix OX . Calculeu $\int_C \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$.

b) Descomponeu $C = C_1 \cup C_2$ on C_1 és el segment de $-R$ a R i C_2 la part restant de C . Fent servir la desigualtat triangular per integrals donar una fita superior de $\left| \int_{C_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \right|$.

c) Fent servir els apartats anteriors calcular $\int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$. Que passa si R tendeix a infinit? $\triangleleft$

4.6.4. Sigui $\alpha > 0$ i $f \in H(\mathbb{D})$ tal que existeix $c > 0$ i per a tot $|z| < 1$, $(1-|z|)^{\alpha} |f(z)| \leq c$. Demostreu que per a tot $n \geq 0$, $|f^{(n)}(0)| \leq cn! \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha} (n+\alpha)^{\alpha}$. $\triangleleft$

4.6.5. Sigui f una funció entera de manera que existeixen constants $C, M > 0$ tals que $|f(z)|e^{-C|z|} \leq M$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Demostreu que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leq CM$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.

Indicació: Apliqueu la desigualtat de Cauchy al cercle centrat a z i de radi r per provar que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leq \frac{M}{r} e^{Cr}$ per a tot $r > 0$ i $z \in \mathbb{C}$. Avalueu a $r = 1/C$. $\triangleleft$

4.6.6. (a) Supposem que una funció f entera satisfà que $|f(z)| \leq M_R$ si $|z| = R$. Demostreu que els coeficients c_k de la seva sèrie de Taylor centrada a $a = 0$ compleixen

$$|c_k| \leq \frac{M_R}{R^k}.$$

(b) Supposem que el mòdul d'un polinomi $P(z)$ està acotat per 1 pels z al disc unitat. Demostreu que tots els coeficients de P tenen mòdul acotat per 1. $\triangleleft$

4.6.7. Proveu que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \leq |e^{iz}|$ per a tot $z \in \mathbb{D}$, aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! e. \quad \triangleleft$$