

4.7. Teorema de Liouville i teorema fonamental de l'àlgebra

Teorema 4.30 (Teorema de Liouville). *Tota funció entera i fitada és constant.*

Demostració. Sigui $z \in \mathbb{C}$. Per a tot $R > 0$, tenim que $\overline{D_R(z)} \subset \Omega = \mathbb{C}$ i $f \in H(\mathbb{C})$. Com que $|f(w)| \leq M$ per a tot $w \in \mathbb{C}$, aplicant les desigualtats de Cauchy amb $n = 1$, obtenim

$$|f'(z)| \leq \frac{1!M}{R} \longrightarrow 0$$

quan $R \rightarrow \infty$, ja que M no depèn de R . Per tant $f'(z) = 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$, i f és constant. $\square$

Corol·lari 4.31. *Si f és entera amb $\operatorname{Re} f \geq 0$, llavors f és constant.*

Demostració. En efecte, considerem la funció entera $g(z) = e^{-f(z)}$. Llavors

$$|g(z)| = e^{-\operatorname{Re} f(z)} \leq e^0 = 1,$$

de manera que g és entera i fitada. Pel teorema de Liouville, g és constant. Com que g és constant i $g = e^{-f}$ no s'anul·la, derivant obtenim

$$0 = g' = -f' e^{-f},$$

i per tant $f' \equiv 0$. Així f és constant. $\square$

El teorema fonamental de l'àlgebra ja havia aparegut al capítol inicial com una de les grans motivacions per introduir els nombres complexos. Ara en podem donar una demostració curta i elegant a partir del teorema de Liouville, mostrant com una propietat analítica de les funcions enteres implica un resultat algebraic fonamental.

Teorema 4.32 (Teorema fonamental de l'àlgebra). *Donat un polinomi (holomorf) no constant P , existeix $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.*

Demostració. Suposem que $P(z) \neq 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Aleshores la funció $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ és entera. Si veiem que és fitada, aplicant el teorema de Liouville arribarem a contradicció. Si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, llavors

$$|P(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \longrightarrow +\infty$$

quan $|z| \rightarrow +\infty$, així que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$, fet que clarament implica que f és fitada. Com que f és entera i fitada, pel teorema de Liouville, f ha de ser constant, de manera que P és constant! $\square$

Corol·lari 4.33. *Tot polinomi de grau n té exactament n arrels complexes (comptant multiplicitats).*

Demostració. Sabem que P té un zero, diem α_1 . Llavors $P(z) = (z - \alpha_1)P_1(z)$, on P_1 és un polinomi de grau $n - 1$, que també té un zero si $n \geq 2$. Iterant aquest procés obtenim el resultat. $\square$

Exercicis

4.7.1. Suposem que f és entera. Provar que si $f^{(4)}(z)$ és fitada en el pla llavors f és un polinomi de grau 4 com a màxim. $\triangleleft$

4.7.2. La funció $f(z) = 1/z^2$ tendeix a 0 quan $z \rightarrow \infty$ però no és una funció constant. Contradiu això el teorema de Liouville? $\triangleleft$

4.7.3. Sigui f una funció entera. Per a $|a| < R$ i $|b| < R$ calculeu

$$I = \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

Useu el resultat per demostrar el teorema de Liouville. $\triangleleft$

4.7.4. Caracteritzeu les funcions enteres f tals que $|f'(z)| \leq |z|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. $\triangleleft$

4.7.5. Sigui f una funció entera. Usant el teorema de Liouville proveu que

(a) Si $|f| \geq 1$, llavors f és constant.

(b) Si $\operatorname{Re} f \geq 0$, llavors f és constant.

(c) Si $\operatorname{Im} f \leq 1$, llavors f és constant. $\triangleleft$

(d) Si $\operatorname{Re} f$ no té zeros, llavors f és constant.

4.7.6. Sigui f una funció entera tal que $|f(z)| \leq Ce^{\operatorname{Re} z}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$, on $C > 0$ és una constant. Què es pot dir de f ? $\triangleleft$

4.7.7. Sigui f una funció entera tal que $|f'(z)| < |f(z)|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Què podem dir de f ? $\triangleleft$

4.8. Teorema de Morera

El teorema de Morera es pot veure com una mena de recíproc del teorema de Cauchy-Goursat: si una funció contínua té integrals nul·les sobre tots els triangles, aleshores necessàriament és holomorfa.

Teorema 4.34 (Teorema de Morera). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in C(\Omega)$. Si per a tot triangle $T \subset \Omega$, es té

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0,$$

llavors f és holomorfa en Ω .

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Demostració. Si resseguim la prova del teorema de Cauchy per un disc, veurem que hem provat que si $D \subset \Omega$ és un disc obert, $f \in C(D)$ i $\int_{\partial T} f = 0$ per a tot triangle $T \subset D$, llavors f té primitiva holomorfa en D .

Fixem $z_0 \in \Omega$, i prenem $r > 0$ de manera que $D_r(z_0) \subset \Omega$. Llavors f té primitiva F holomorfa en $D_r(z_0)$, així que $f = F'$ és holomorfa en z_0 . $\square$

Corol·lari 4.35. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{p\})$. Llavors $f \in H(\Omega)$.*

Demostració. Pel teorema de Cauchy-Goursat, tenim que $\int_{\partial T} f = 0$ per a tot triangle $T \subset \Omega$, i aplicant el teorema de Morera, se segueix que f és holomorfa en Ω . $\square$

Teorema 4.36 (Principi de reflexió de Schwarz⁸). *Sigui Ω un domini simètric respecte de l'eix real, i anomenem $\Omega_+ = \Omega \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ i $\Omega_- = \Omega \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$. Sigui $g \in H(\Omega_+)$ tal que per tot $x \in \mathbb{R} \cap \Omega$ existeix $g(x) := \lim_{\Omega_+ \ni z \rightarrow x} g(z)$ i $g(x) \in \mathbb{R}$. Aleshores la funció*

$$f(z) := \begin{cases} g(z) & \text{si } z \in \Omega_+ \\ g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \cap \Omega \\ \overline{g(\bar{z})} & \text{si } z \in \Omega_- \end{cases}$$

satisfà que $f \in H(\Omega)$.

Demostració. Que $f \in C(\Omega)$ és un exercici (vegeu l'exercici 4.8.1). Per veure que f és holomorfa n'hi ha prou amb veure que integra zero en triangles, en el sentit del teorema de Morera.

Notem que $f \in H(\Omega_-)$ per la regla de la cadena (vegeu l'observació 3.25, el lema 3.24 i l'exemple 3.18), ja que per $z \in \Omega_-$ tenim que

$$\bar{\partial} f(z) = \bar{\partial} \bar{f}(z) = \overline{\partial g(\bar{z})} = \overline{\partial g(\bar{z})} \cdot 1 = 0.$$

Per veure que la integral

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

s'anul·la en triangles que intersequin amb la recta real, n'hi ha prou amb veure que s'anul·la en rectangles continguts en $\Omega_- \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$ o en $\Omega_+ \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$ i amb un costat contingut en la recta real, així com per triangles amb només un vèrtex sobre la recta real, vegeu la figura 4.5. Ara, aquesta integral s'anul·la en quadrilàters continguts en Ω_- o en Ω_+ per l'holomorfia de f en aquests dos dominis (i de Cauchy-Goursat), i per pas al límit obtenim el mateix per aquests casos. Deixem els detalls pel lector. $\square$

Teorema 4.37 (Teorema de Weierstrass). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i sigui $\{f_n\}$ una successió de funcions de $H(\Omega)$ de manera que $f_n \rightarrow f$ uniformement sobre els compactes d' Ω . Llavors $f \in H(\Omega)$, i $f'_n \rightarrow f'$ uniformement sobre els compactes d' Ω .*

⁸Karl Hermann Amandus Schwarz, Sobieszów, 1843–1921, https://ca.wikipedia.org/wiki/Hermann_Schwarz

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

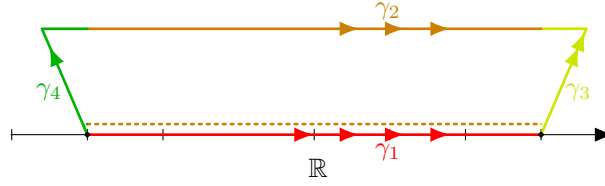


Figura 4.5.: Per acabar la demostració del principi de reflexió de Schwarz, només cal veure que $\int_{\gamma_2} f(z) dz \rightarrow \int_{\gamma_1} f(z) dz$ i $\int_{\gamma_j} |f(z)| |dz| \rightarrow 0$ per $j \in \{3, 4\}$ quan fem petita la component vertical de γ_2 .

Demostració. Com que $f_n \in H(\Omega) \subset C(\Omega)$ i $f_n \rightarrow f$ uniformement sobre compactes, se segueix que $f \in C(\Omega)$. Llavors, pel teorema de Morera, per provar que $f \in H(\Omega)$, ens cal veure que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

per a tot triangle $T \subset \Omega$. Fixem $T \subset \Omega$ triangle. Com que $f_n \rightarrow f$ uniformement en el compacte ∂T , podem passar el límit a fora de la integral en el càlcul que segueix,

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{\partial T} \lim_n f_n(z) dz = \lim_n \int_{\partial T} f_n(z) dz = 0,$$

ja que, en ser f_n holomorfs en Ω , aplicant el teorema de Cauchy-Goursat, tenim que

$$\int_{\partial T} f_n(z) dz = 0.$$

Finalment, per veure que $f' = \lim_n f'_n$ i que la convergència és uniforme en compactes, n'hi ha prou amb veure que ho és en $K_\varepsilon = \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \Omega^c) \geq \varepsilon\} \cap \overline{D_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)}$ per $\varepsilon > 0$. Aleshores (sempre que $K_\varepsilon \neq \emptyset$), usem la fórmula integral de Cauchy per a derivades amb radi $r = \varepsilon/2$, i obtenim

$$\sup_{z_0 \in K_\varepsilon} |f'(z_0) - f'_n(z_0)| \stackrel{\text{L.4.25}}{=} \sup_{z_0 \in K_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) - f_n(z)}{(z-z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{r} \sup_{K_{\varepsilon/2}} |f - f_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

suposant que ε és prou petit (fa falta ja que quan $z \in \partial D_r(z_0)$ tenim que $|z| \leq |z_0| + r \leq \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{2}{\varepsilon}$ i, per tant, $z \in K_{\varepsilon/2}$ si, per exemple $\varepsilon < 1$). $\square$

Exercicis

4.8.1. Demostreu la continuïtat de f en el principi de reflexió de Schwarz. $\triangleleft$

4.8.2. Sigui $f(z) = 1/z^2$. Comproveu que $\int_\gamma f(z) dz = 0$ per a tot camí tancat γ que no passi per 0, però f no és analítica en 0. Contradiu això el corollari 4.35 del teorema de Morera? $\triangleleft$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

4.8.3. (a) Sigui h una funció contínua a $\mathbb{R}$ amb suport compacte (és a dir, existeix $K \subset \mathbb{R}$ compacte tal que $h(x) = 0$ si $x \notin K$) i sigui

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-itz} dt$$

(quan ens restringim a $z \in \mathbb{R}$, H s'anomena transformada de Fourier de h ; si prenem iz en el lloc de z , H s'anomena transformada de Laplace⁹ bilateral de h). Proveu que H és una funció entera amb creixement exponencial: existeixen $A, C > 0$ tals que $|H(z)| \leq Ce^{A|\operatorname{Im} z|}$.

(b) Sigui h una funció contínua a $[0, 1]$. Demostreu que la seva transformada de Hilbert¹⁰

$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z} dt$$

és analítica per a $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$. ◁

4.8.4. Sigui f holomorfa en un obert Ω , i sigui $z_0 \in \Omega$ amb $f'(z_0) \neq 0$. Demostreu que hi ha $r_0 > 0$ de manera que, per $0 < \varepsilon < r_0$, es compleix la identitat

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

Indicació: proveu primer que la funció G definida per

$$G(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

és holomorfa en Ω . ◁

4.9. Derivació sota el signe integral i fórmula integral de Cauchy per derivades

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors, per la fórmula integral de Cauchy, tenim que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz, \quad |z_0 - a| < r.$$

També tenim la fórmula integral de Cauchy per derivades.

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

⁹Pierre-Simon Laplace, Beaumont-en-Auge, 1749–1827, https://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace

¹⁰David Hilbert, Königsberg, 1862–1943, https://ca.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Observem aquí una diferència: podem aplicar la fórmula integral de Cauchy per a tot $z_0 \in D_r(a)$; i en canvi en la versió per derivades només tenim l'enunciat per a $z_0 = a$, que és el centre del disc. Així doncs, una qüestió que ens apareix de manera natural és si en la fórmula integral de Cauchy per derivades, també podem agafar $z_0 \in D_r(a)$ igual que en la fórmula de Cauchy. La resposta és que sí, i l'obtindrem com a conseqüència del següent resultat, que té interès per si sol i que usarem per les demostracions de la teoria global de Cauchy. Notem que la fórmula integral de Cauchy per derivades no centrada també es pot obtenir usant la fórmula integral de Cauchy per derivades centrada i el teorema de Cauchy en convexos, vegeu l'exercici 4.9.2.

Teorema 4.38 (Derivació sota el signe d'integració). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, sigui $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camí i sigui $F : \Omega \times \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ una funció contínua. Si $F(\cdot, z)$ és holomorfa en Ω per a cada $z \in \gamma^* := \gamma([a, b])$, llavors la funció definida per*

$$f(w) = \int_{\gamma} F(w, z) dz, \quad w \in \Omega$$

és holomorfa en Ω amb

$$f'(w) = \int_{\gamma} \frac{\partial F}{\partial w}(w, z) dz, \quad w \in \Omega.$$

Abans de passar a la prova d'aquest teorema, apliquem-lo per provar la versió desitjada de la fórmula integral de Cauchy per derivades.

Corol·lari 4.39 (Fórmula integral de Cauchy per derivades). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors, per $n \in \mathbb{N}$,*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad \text{sempre que } |z_0 - a| < r.$$

Demostració. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors, com que f és holomorfa en Ω , per la fórmula integral de Cauchy, tenim que

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{|z-a|=r} F(w, z) dz, \quad w \in D_r(a),$$

on

$$F(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-w)}.$$

Passarem a aplicar el teorema de derivació sota el signe integral amb $\Omega = D_r(a)$ i la corba $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Tenim que $\gamma^* = \gamma([0, 2\pi]) = \{z : |z - a| = r\}$. Com que $w \in D_r(a)$ i $|z - a| = r$, llavors clarament F és contínua en $D_r(a) \times \gamma([0, 2\pi])$, i també, per $z \in \gamma([0, 2\pi])$ fixat, la funció $F_z(w) = F(w, z)$ és holomorfa en w . Així doncs, aplicant el teorema de derivació sota el signe integral, se segueix que

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz, \quad w \in D_r(a).$$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Iterant aquesta fórmula, obtenim que

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz, \quad |w-a| < r.$$

□

Per provar el teorema 4.38, és suficient demostrar el següent cas particular.

Proposició 4.40. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $F : \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua. Si $F(w, s)$ és holomorfa en w per a tot $s \in [a, b]$, llavors la funció*

$$f(w) = \int_a^b F(w, s) ds$$

és holomorfa en Ω amb

$$f'(w) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial w}(w, s) ds, \quad w \in \Omega.$$

Demostrem ara el teorema de derivació sota el signe integral a partir de la proposició anterior.

Demostració del teorema 4.38. Podem suposar que γ és de classe C^1 . Llavors

$$\int_{\gamma} F(w, z) dz = \int_a^b F(w, \gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_a^b G(w, s) ds,$$

on $G(w, s) = F(w, \gamma(s)) \gamma'(s)$ que és clarament contínua en $\Omega \times [a, b]$ degut a la hipòtesi sobre F . També G és holomorfa en w per a tot $s \in [a, b]$. Per tant, aplicant la proposició, se segueix que f és holomorfa en Ω amb

$$f'(w) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial w}(w, s) ds = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial w}(w, \gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} \frac{\partial F}{\partial w}(w, z) dz. \quad \square$$

Demostració de la proposició. Podem suposar $a = 0$ i $b = 1$. Per $n \geq 1$, considerem la suma finita de funcions

$$f_n(w) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(w, \frac{k}{n}\right), \quad w \in \Omega.$$

Com que, per hipòtesi, les funcions $F(w, \frac{k}{n})$ són holomorfes en w i en tenim una suma finita, se segueix que les funcions f_n són holomorfes en Ω .

Per veure que f és holomorfa en Ω , provarem que $f_n \rightarrow f$ uniformement sobre els compactes d' Ω , així que aplicant el teorema de Weierstrass (vegeu el teorema 4.37), obtindrem que $f \in H(\Omega)$, amb $f'(w) = \lim_n f'_n(w)$.

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Sigui $K \subset \Omega$ compacte. Recordem que, si una funció és contínua en un compacte, aleshores hi és uniformement contínua. Per tant, en ser F contínua en el compacte $K \times [0, 1]$, donat $\varepsilon > 0$, hi ha $\delta > 0$ de manera que

$$\sup_{w \in K} |F(w, s_1) - F(w, s_2)| < \varepsilon, \quad \text{si } |s_1 - s_2| < \delta. \quad (4.4)$$

Observem que, com que $\frac{1}{n} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}$, tenim que

$$f_n(w) = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F\left(w, \frac{k}{n}\right) ds.$$

També

$$f(w) = \int_0^1 F(w, s) ds = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F(w, s) ds.$$

Aleshores, si $n > 1/\delta$ i $w \in K$,

$$\begin{aligned} |f_n(w) - f(w)| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(F\left(w, \frac{k}{n}\right) - F(w, s) \right) ds \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| F\left(w, \frac{k}{n}\right) - F(w, s) \right| ds \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} - \frac{(k-1)}{n} \right) = \varepsilon, \end{aligned}$$

on hem aplicat (4.4), ja que per $s \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Obtenim $|s - \frac{k}{n}| < \frac{1}{n} < \delta$, ja que hem triat $n > 1/\delta$. Per tant,

$$\sup_{w \in K} |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon, \quad n > 1/\delta,$$

provant que $f_n \rightarrow f$ uniformement en compactes d' Ω i, per tant, f és holomorfa en Ω pel teorema de Weierstrass.

Fixem ara $w \in \Omega$ i prenem $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(w)} \subset \Omega$. Per la fórmula integral de Cauchy per derivades (la versió on prenem el centre del disc, que ja tenim provada), tenim que

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{1}{(z-w)^2} \left(\int_0^1 F(z, s) ds \right) dz.$$

Finalment, aplicant el teorema de Fubini obtenim

$$f'(w) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{F(z, s)}{(z-w)^2} dz \right) ds = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial w}(w, s) ds,$$

ja que com que fixat $s \in [0, 1]$, la funció $F_s(w) = F(w, s)$ és holomorfa, per la fórmula integral de Cauchy per la derivada, tenim que

$$\frac{\partial F}{\partial w}(w, s) = F'_s(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{F_s(z)}{(z-w)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{F(z, s)}{(z-w)^2} dz.$$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Per tal de justificar l'aplicació del teorema de Fubini, cal provar que

$$J := \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|z-w|=r} \frac{|F(z, s)|}{|z-w|^2} |dz| \right) ds < \infty.$$

Com que F és contínua en $\Omega \times [0, 1]$, en particular és contínua en el compacte $\partial D_r(w) \times [0, 1]$ i, per tant, fitada en aquest compacte. Llavors hi ha una constant $M > 0$ de manera que $|F(z, s)| \leq M$ per a tot z amb $|z-w| = r$ i tot $s \in [0, 1]$. Llavors

$$J = \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^1 \int_{|z-w|=r} |F(z, s)| |dz| ds \leq \frac{M}{2\pi r^2} \int_0^1 2\pi r ds < \infty. \quad \square$$

Exercicis

4.9.1. Avalueu, usant la fórmula de Cauchy per a les derivades

$$a) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-1/2)^2} dz. \quad b) \int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{(3z-2)^4} dz. \quad c) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} e^{e^{i\theta}} d\theta. \quad \triangleleft$$

4.9.2. Demostreu la fórmula integral de Cauchy per derivades no centrada usant la fórmula integral de Cauchy per derivades centrada i el teorema de Cauchy en convexos.

4.10. Zeros de funcions holomorfes i principi de prolongació analítica

Tot seguit estudiem el conjunt de punts on una funció holomorfa donada val zero, l'anomenat *conjunt de zeros* de la funció. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$, i escrivim

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

Proposició 4.41. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si existeix $a \in \Omega$ de manera que $f^{(n)}(a) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, llavors $f \equiv 0$.

Demostració. Sigui

$$A = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0 \text{ per a tot } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Tenim que A és no buit ja que $a \in A$. Vegem que A és relativament tancat en Ω . Donada una successió $\{b_k\} \subset A$ amb $b_k \rightarrow b \in \Omega$, volem provar que $b \in A$. Com que cada $f^{(n)}$ és contínua i $b_k \in A$, tenim que

$$f^{(n)}(b) = f^{(n)}(\lim_k b_k) = \lim_k f^{(n)}(b_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad b \in A.$$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Per tant A és tancat en Ω . Vegem que A és obert. Sigui $b \in A$. Com que tota funció holomorfa és localment una sèrie de potències, podem trobar $r > 0$ amb $\overline{D_r(b)} \subset \Omega$ i

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n = 0, \quad z \in D_r(b).$$

Com que $f(z) = 0$ per a tot $z \in D_r(b)$, se segueix que $D_r(b) \subset A$ així que A també és obert.

Com que Ω és connex, i A és no buit, i obert i tancat en Ω a la vegada, se segueix que $A = \Omega$ i $f \equiv 0$ en Ω . $\square$

Teorema 4.42. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$ amb $f \not\equiv 0$. Per a tot $z_0 \in Z(f)$ hi ha un únic $m \in \mathbb{N}$ (anomenat l'ordre o multiplicitat del zero z_0) de manera que*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad z \in \Omega,$$

on $g \in H(\Omega)$ amb $g(z_0) \neq 0$.

Demostració. Com que tota funció holomorfa és localment una sèrie de potències, podem trobar $r > 0$ amb $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$ i tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in D_r(z_0).$$

Sabem que $a_0 = f(z_0) = 0$. Sigui m el mínim nombre natural amb $a_m \neq 0$ (aquest mínim existeix per la proposició anterior, ja que $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$). Tenim que

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m h(z), \quad z \in D_r(z_0),$$

amb

$$h(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{k \geq 0} a_{m+k}(z - z_0)^k, \quad z \in D_r(z_0)$$

que és holomorfa en $D_r(z_0)$ amb $h(z_0) \neq 0$. Finalment, definint

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} & \text{si } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ h(z_0) & \text{si } z = z_0, \end{cases}$$

tenim que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = a_m = h(z_0) \neq 0$, g és holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$ i g és contínua en z_0 i, per tant, holomorfa en tot Ω , vegeu el corollari 4.35. $\square$

Exemple 4.43. Trobem la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció

$$f(z) = 6 \sin(z^3) + z^9 - 6z^3.$$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Tenim que

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \mathcal{O}(z^7),$$

vegeu l'Observació 3.3. Per tant,

$$\sin(z^3) = z^3 - \frac{z^9}{6} + \frac{z^{15}}{5!} + \mathcal{O}(z^{21}),$$

així que

$$f(z) = 6 \sin(z^3) + z^9 - 6z^3 = \frac{6z^{15}}{5!} + o(z^{20})$$

i, per tant, $z = 0$ té ordre o multiplicitat 15, vegeu la figura ??.

◇

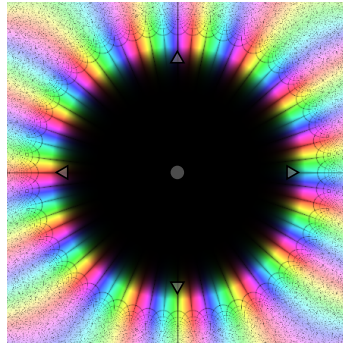


Figura 4.6.: Representació del zero d'ordre 15 de $f(z) = 6 \sin(z^3) + z^9 - 6z^3$, vegeu l'exemple 4.43.

Corol·lari 4.44. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$ amb $f \not\equiv 0$. Llavors els zeros de f són aïllats.*

Demostració. Sigui $z_0 \in Z(f)$. Pel teorema anterior existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ amb $g \in H(\Omega)$ i $g(z_0) \neq 0$. Per continuïtat, hi ha $\varepsilon > 0$ de manera que $g(z) \neq 0$ per $z \in D_\varepsilon(z_0)$, així que $f(z) \neq 0$ si $z \in D_\varepsilon(z_0)$ amb $z \neq z_0$. □

Recordem que z_0 és un punt d'acumulació d'un conjunt A si hi ha una successió $(z_n)_n \subset A \setminus \{z_0\}$ amb $z_n \rightarrow z_0$.

Teorema 4.45 (Principi de prolongació analítica). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si $Z(f)$ té un punt d'acumulació en Ω , aleshores $f \equiv 0$ en Ω .*

Demostració. Sigui $z_0 \in \Omega$ punt d'acumulació de $Z(f)$, és a dir, hi ha $z_n \in Z(f)$ amb $z_n \rightarrow z_0$. Com que f és contínua, llavors $f(z_0) = \lim_n f(z_n) = 0$, i $z_0 \in Z(f)$, pel que z_0 és un zero de f que no és aïllat. Com que sabem que els zeros d'una funció holomorfa no idènticament nul·la són aïllats, això implica que $f \equiv 0$. □

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Corol·lari 4.46. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa, no idènticament zero. Llavors el conjunt de zeros de f és un conjunt finit o numerable.*

Demostració. Podem escriure $\Omega = \bigcup_n K_n$, on $K_n := \{z \in \mathbb{C}; d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\} \cap \overline{D_n(0)}$. Llavors, per a cada n , K_n és compacte (tancat i fitat a $\mathbb{C}$). Donat que f no és idènticament zero, els zeros són aïllats, i es compleix en particular que $Z(f) \cap K_n$ és finit (si no hi hauria un punt d'acumulació), així que

$$Z(f) = \bigcup_n (Z(f) \cap K_n)$$

és finit o numerable en ser unió numerable de conjunts finits. $\square$

Observació 4.47. En cas que f tingui un número infinit de zeros, aquests s'han d'acumular a la frontera d' Ω . Si f és entera, llavors els zeros s'acumulen a $\{\infty\}$. Per exemple, els zeros de $f(z) = \sin z$ són $k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. $\bullet$

El principi de prolongació analítica s'aplica moltes vegades en la forma següent:

Corol·lari 4.48 (Principi de prolongació analítica, versió 2). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f, g \in H(\Omega)$. Si $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ té un punt d'acumulació en Ω , aleshores $f \equiv g$ en Ω .*

Demostració. Apliquem el principi de prolongació analítica a la funció holomorfa $h = f - g$, i obtenim el resultat, ja que $Z(h) = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$. $\square$

En particular, si Ω és connex i $f, g \in H(\Omega)$ coincideixen en, per exemple, un obert, o bé un arc, o una recta, o un cercle, o un segment; llavors $f \equiv g$ en Ω .

Exemple 4.49. Cerquem totes les funcions $f \in H(\mathbb{D})$ amb $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2+1}$, per a tot $n \in \mathbb{N}$ amb $n > 1$. Observem que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}.$$

Llavors la funció $g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ és holomorfa en $\mathbb{D}$ i compleix que $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2+1}$, i deduïm que $f, g \in H(\mathbb{D})$ amb $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$. Com que $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \in \mathbb{D}$ i $\mathbb{D}$ és connex, llavors aplicant el principi de prolongació analítica, obtenim que

$$f(z) = g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

$\diamond$

Exercicis

4.10.1. Trobeu els zeros, amb l'ordre corresponent, de les següents funcions:

$$a) \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}, \quad b) z^2 \sin z, \quad c) \frac{1}{z} + \frac{1}{z^5}. \quad \triangleleft$$

4.10.2. Trobeu la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció entera $f(z) = 2 \cos z^3 + z^6 - 2$. $\triangleleft$

4.10.3. Trobeu tots els zeros de les següents funcions holomorfes i calculeu-ne les seves multiplicitats:

$$a) f(z) = z^2(e^{z^2} - 1), \quad c) f(z) = (\sqrt{z} - 2)^3.$$

$$b) f(z) = (z^2 - \pi^2)z^{-1} \sin z,$$

Aquí $\sqrt{\cdot}$ és la determinació de l'arrel quadrada en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ que val -1 en $z = 1$. $\triangleleft$

4.10.4. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini. Demostreu que l'anell de funcions holomorfes $H(\Omega)$ a una regió Ω és un domini d'integritat, és a dir, si $f, g \in H(\Omega)$ amb $fg \equiv 0$ aleshores $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$. $\triangleleft$

4.10.5. Sigui $\{a_n\}_n$ una successió estrictament decreixent de nombres reals $a_n \in (0, 1)$ i tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}$. Demostreu que:

(a) Si $f(a_n) \in \mathbb{R}$ per a tot n , aleshores $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ per a tot $z \in \mathbb{D}$.

(b) Si a més $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$ per a tot n , aleshores f és constant. $\triangleleft$

4.10.6. Trobeu totes les funcions holomorfes a $\mathbb{D}$ tals que:

(a) $|f(1/n)| \leq 1/2^n$, per a tot nombre natural $n \geq 2$.

(b) $f(1/n) = \ln(1 + n^3) - 3 \ln n$ per a $n > 1$. $\triangleleft$

4.10.7. Trobeu totes les funcions f holomorfes en el disc $D_2(0)$ tals que $f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ per a tot $\theta \in [0, 2\pi)$, i a més $f(0) = 0$. $\triangleleft$

4.10.8. (a) Sigui f una funció entera tal que existeixen constants $n \in \mathbb{N}$, $C > 0$ i $R > 0$ tals que $|f(z)| \leq C|z|^n$, per a $|z| \geq R$. Demostreu que f és un polinomi de grau més petit o igual que n .

(b) Deduïu que si f és una funció entera amb $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$, llavors f és un polinomi.

Indicació: Demostreu que f només té un nombre finit de zeros $a_1, \dots, a_n$ (comptant multiplicitats) i apliqueu l'apartat (a) a la funció $F = P/f$, on $P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$. $\triangleleft$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

4.10.9. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (obert connex) tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Suposem que tenim $f, g, h \in H(\Omega)$ i $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tals que per $x + iy \in \Omega$ tenim

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

i per $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$ tenim

$$u(x, 0) = g(x) \quad v(x, 0) = h(x).$$

Demostreu que

$$f(z) = g(z) + ih(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

◁

4.11. El principi del mòdul màxim

Una característica de les funcions holomorfes és que no poden tenir màxims absoluts en el seu domini de definició. Podem observar el contrast amb l'anàleg real: existeixen moltes funcions derivables amb màxims absoluts en l'interior del domini de definició com, per exemple, la funció $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 1 - x^2$ que té un màxim absolut en $x = 0$.

Teorema 4.50 (Principi del mòdul màxim). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ té un màxim absolut en Ω , llavors f és constant.

Demostració. Sigui $z_0 \in \Omega$ amb $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ per a tot $z \in \Omega$. Posem

$$A = \{z \in \Omega : |f(z)| = |f(z_0)|\}.$$

Es compleix que A és no buit ja que $z_0 \in A$. Com que Ω és connex, si veiem que A és obert i tancat en Ω , tindrem que $A = \Omega$, que implica que $|f|$ és constant i, per l'exercici 3.2.6, també f és constant. Ja sabem que A és tancat en Ω , ja que $|f|$ és contínua i $A = (|f|)^{-1}(x_0)$ amb $x_0 = |f(z_0)|$.

Vegem que A és obert. Donat $a \in A$, volem trobar $r > 0$ de manera que $D_r(a) \subset A$. Sigui $r > 0$ tal que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Per la propietat de la mitjana, es compleix llavors que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + se^{it}) dt, \quad 0 < s \leq r.$$

Per tant, com que $a \in A$, obtenim

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + se^{it})| dt \leq |f(z_0)| = |f(a)|, \quad 0 < s \leq r.$$

Com que $|f|$ és contínua i $|f(a + se^{it})| \leq |f(a)|$ per a tot $t \in [0, 2\pi]$, es verifica que

$$|f(a)| = |f(a + se^{it})|, \quad \forall t \in [0, 2\pi], \quad 0 < s \leq r.$$

És a dir, $D_r(a) \subset A$.

□

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

Passem ara a veure algunes conseqüències, que quan les apliquem, seguirem dient que apliquem el principi del mòdul màxim.

Corol·lari 4.51. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ regió fitada, i $f \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Llavors el màxim de $|f|$ s'assoleix a la frontera $\partial\Omega$.*

Demostració. Com que Ω és fitat, llavors $\overline{\Omega}$ és un tancat i fitat de $\mathbb{C}$ i, per tant, compacte. Com que $|f|$ és contínua en el compacte $\overline{\Omega}$, llavors $|f|$ té un màxim absolut en un punt a de $\overline{\Omega}$. En cas que $a \in \partial\Omega$, ja hem acabat. Si, en canvi, $a \in \Omega$, pel principi del mòdul màxim, llavors f és constant, així que, $|f(z)| = |f(a)|$ en Ω i, per continuïtat, $|f|$ assolix el màxim en tot punt de la frontera. $\square$

Corol·lari 4.52. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ té un màxim local en Ω , llavors f és constant.*

Demostració. Per hipòtesi, hi ha $a \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $|f(z)| \leq |f(a)|$ per a tot $z \in D_r(a)$. Com que $f \in H(D_r(a))$ i $|f|$ té un màxim absolut en $D_r(a)$, pel principi del mòdul màxim, se segueix que f és constant en $D_r(a)$ i, en ser Ω connex, aplicant el principi de prolongació analítica obtenim que f és constant en Ω . $\square$

Lema 4.53 (Lema de Schwarz). *Sigui $f : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ una funció holomorfa tal que $f(0) = 0$. Aleshores*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{per tot } z \in \mathbb{D},$$

i $|f'(0)| \leq 1$. Si es compleix la igualtat $|f(z_0)| = |z_0|$ en algun punt $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ o bé la igualtat $|f'(0)| = 1$, aleshores $f(z) = \lambda z$ per algun $\lambda \in \partial\mathbb{D}$.

Demostració. Suposem $f \neq 0$. Sabem que $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ és analítica, i $|g(z)| \leq \frac{1}{|z|}$. Pel principi del mòdul màxim,

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r} \quad \text{en } D_r(0).$$

Fent $r \rightarrow 1$ deduïm la primera desigualtat. A més, $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

Si es produeix alguna igualtat $|f(z_0)| = |z_0|$ amb $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ (respectivament $|f'(0)| = 1$), aleshores g assolix un extrem del mòdul en z_0 (respectivament en 0) i, per tant, g és constant. $\square$

Exemple 4.54. Vegem que, per a tot polinomi holomorf P , tenim que

$$\sup_{|z|=1} \left| P(z) - \frac{1}{z} \right| \geq 1.$$

Aquest resultat ens diu que la funció $\frac{1}{z}$ no es pot aproximar uniformement per polinomis holomorfs en el compacte $S^1 = \{|z| = 1\}$.

Observem primer que

$$\sup_{|z|=1} \left| P(z) - \frac{1}{z} \right| = \sup_{|z|=1} \frac{|zP(z) - 1|}{|z|} = \sup_{|z|=1} |zP(z) - 1|.$$

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

En ser la funció $h(z) = zP(z) - 1$ entera, pel principi del mòdul màxim

$$1 = |h(0)| \leq \sup_{|z|=1} |h(z)| = \sup_{|z|=1} \left| P(z) - \frac{1}{z} \right|. \quad \diamond$$

Una altra propietat rellevant de les funcions holomorfes (no constants) és que envien oberts a oberts. Aquesta propietat no val per a funcions de variable real (tan regulars com vulguem). Per exemple, la imatge de la funció $f(x) = x^2$ de l'interval obert $(-1, 1)$ és $[0, 1)$ que no és obert.

Teorema 4.55 (Teorema de l'aplicació oberta). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$ no constant. Aleshores f és oberta. És a dir, si U és un obert d' Ω , llavors $f(U)$ és obert.*

Demostració. Sigui $U \subset \Omega$ obert, i $z_0 \in U$. Per veure que $f(U)$ és obert, volem trobar un entorn de $w_0 := f(z_0)$ dins de $f(U)$. Considerem la funció

$$g(z) = f(z) - w_0, \quad z \in \Omega.$$

Com que $g(z_0) = 0$ i els zeros de les funcions holomorfes són aïllats, en ser f no constant, podem trobar $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ amb $g(z) \neq 0$ per a tot $z \in \overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$.

Sigui $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ amb $0 \leq t \leq 2\pi$, de manera que $\gamma^* = \partial D_r(z_0)$. Llavors $0 \notin (g \circ \gamma)^*$, on $g \circ \gamma$ denota la imatge per g de la corba γ . Per tant

$$\delta = \inf_{z \in \gamma^*} |g(z)| > 0.$$

És a dir,

$$|g(z)| \geq \delta, \quad |z - z_0| = r.$$

Passarem a provar que $D_{\delta/2}(w_0) \subset f(U)$.

Suposem que $w \in D_\delta(w_0) \setminus f(U)$. Això implica que la funció

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w} \quad (4.5)$$

és holomorfa en U . Pel principi del mòdul màxim, tenim que

$$|h(z_0)| \leq \sup_{z \in \gamma^*} |h(z)|. \quad (4.6)$$

(Aquesta desigualtat també es pot obtenir fent servir la propietat de la mitjana, per exemple). Com que $|g(z)| \geq \delta > |w - w_0|$ per $z \in \gamma^*$, tenim que

$$\begin{aligned} |h(z)| &= \frac{1}{|f(z) - w|} = \frac{1}{|f(z) - w_0 + (w_0 - w)|} \leq \frac{1}{|g(z)| - |w - w_0|} \\ &\leq \frac{1}{\delta - |w - w_0|}, \quad z \in \gamma^*. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\frac{1}{|w - w_0|} \stackrel{(4.5)}{=} |h(z_0)| \stackrel{(4.6)}{\leq} \frac{1}{\delta - |w - w_0|} \Rightarrow |w - w_0| \geq \frac{\delta}{2},$$

és a dir, $w \notin D_{\delta/2}(w_0)$. Concloem doncs que f és oberta. $\square$

Exercicis

4.11.1. Cerqueu l'enunciat del teorema de Stone¹¹-Weierstrass i compareu-lo amb l'exemple 4.54.

4.11.2. Trobeu el màxim de:

a) $|\cos z|$ i $|\sin z|$ a $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

b) $|e^z|$ i $|e^{z^2}|$ a $|z| \leq 1$. ◁

4.11.3. Trobeu totes les funcions holomorfes en $\mathbb{D}$ tals que $f(1/2) = 3$ i $|f(z)| \leq 3$ si $|z| < 1$. ◁

4.11.4. Es considera $f(z) = e^{\cos(z)} z^2$ i el disc D de radi 2 centrat a 5. Provar que $f(z)$ assoleix el valor màxim i mínim del mòdul en $\bar{D}$ a la frontera. Indicació: considerar $1/f(z)$. ◁

4.11.5. Sigui f una funció holomorfa en el disc $D_R(0)$, $R > 0$. Definim

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < R.$$

Demostreu que si f no és constant, aleshores $M(r)$ és estrictament creixent a $[0, R)$. ◁

4.11.6. Sigui f una funció holomorfa en un obert connex Ω i D un disc obert tal que $\bar{D} \subset \Omega$. Supposeu que $|f(z)| = c$ per tot $z \in \partial D$, on c és una constant. Proveu que f té almenys un zero en D o bé f és constant en Ω . Indicació: Distingiu segons si $c = 0$ o $c > 0$. En el segon cas, proveu que si f no té zeros en D , aleshores f és constant en D . ◁

4.11.7. Sigui f una funció holomorfa i no constant en $\Omega \subset \mathbb{C}$, un obert connex. Supposeu que existeix $a \in \Omega$ tal que $|f(a)| \leq |f(z)|$ per a tot $z \in \Omega$. Proveu que aleshores $f(a) = 0$. ◁

4.11.8. Sigui $f \in H(\Omega)$ en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $f \circ f = f$. Demostreu que o bé f és constant, o bé és la identitat. ◁

4.11.9. Sigui $f \in H(\mathbb{C})$ no constant. Demostreu que, per a tot $c > 0$,

$$\overline{\{z; |f(z)| < c\}} = \{z; |f(z)| \leq c\}. \quad \text{◁}$$

¹¹Marshall Harvey Stone, New York City, 1903–1989, https://en.wikipedia.org/wiki/Marshall_H._Stone

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Un cop hem estudiat la teoria local de Cauchy, el proper objectiu és estudiar propietats globals de les funcions holomorfes. Mitjançant la versió global del teorema de Cauchy, estudiarem la relació entre l'holomorfia d'una funció i la topologia del domini on està definida. Per a donar aquesta versió global, cal estudiar un concepte topològic, el de cicle homòleg a zero. Veurem aplicacions importants de la teoria global, entre les quals es troben el teorema dels residus, que ens permetrà calcular molts tipus d'integrals, o el principi de l'argument i teorema de Rouché que controlen els zeros de les funcions holomorfes.

5.1. Índex d'una corba tancada respecte d'un punt

Comencem amb la noció d'índex d'una corba tancada γ respecte d'un punt z_0 , $\text{Ind}(\gamma, z_0)$. Intuïtivament, $\text{Ind}(\gamma, z_0)$ compta el nombre de voltes que ha de donar sobre si mateix un observador col·locat en el punt z_0 per a resseguir la corba, vegeu la figura 5.2.

Abans de donar la definició, necessitem el següent resultat:

Proposició 5.1. 1. *Siguin $a, w_0 \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ tals que $D_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sigui $z_0 \in D_r(a)$ tal que $e^{w_0} = z_0$. Llavors existeix una única determinació del logaritme en $D_r(a)$, $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{L}(z_0) = w_0$.*

2. *Sigui $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ contínua i $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{w_0} = \gamma(a)$. Llavors existeix una única determinació del logaritme de γ , $\hat{\gamma}$, tal que $\hat{\gamma}(a) = w_0$. A més, si γ és diferenciable, aleshores $\hat{\gamma}$ també ho és i $\hat{\gamma}'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$.*

Demostració. Provem 1. La unicitat és immediata, ja que dues determinacions del logaritme només poden diferir en un múltiple de $2\pi i$ per la proposició 2.29. Per veure l'existència, sigui $a = |a|e^{i\alpha}$. Llavors $D_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}(-\infty, 0]$ i si ℓ és una determinació del logaritme a $\mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}(-\infty, 0]$, llavors $\ell|_{D_r(a)}$ és una determinació del logaritme a $D_r(a)$. Es compleix, doncs, que si denotem $k = \frac{w_0 - \ell(z_0)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$, la funció $\mathcal{L}(z) := \ell(z) + 2\pi i k$ és una determinació del logaritme en $D_r(a)$ tal que $\mathcal{L}(z_0) = w_0$.

Provem ara 2. Com abans, la unicitat és evident. Per demostrar l'existència, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $a = 0$ i $b = 1$. Sigui $\varepsilon = \frac{1}{2} \inf_{t \in [0, 1]} |\gamma(t)| > 0$. Donat que γ és uniformement contínua en $[0, 1]$, existeix $\delta > 0$ tal que $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon$ per a tot $s, t \in [0, 1]$ tal que $|t - s| \leq \delta$.

Sigui $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$ i sigui $z_k = \gamma(\frac{k}{n})$, per a $k = 0, 1, \dots, n$. Llavors per a $k = 0, 1, \dots, n-1$, tenim $|z_k - z_{k+1}| < \varepsilon$ i

$$\gamma\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subset D_\varepsilon(z_k) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Aplicant l'apartat 1, sigui $\mathcal{L}_0$ l'única determinació del logaritme en $D_\varepsilon(z_0)$ tal que $\mathcal{L}_0(z_0) = w_0$. I, recurrentment, per a $k = 1, \dots, n-1$, sigui $\mathcal{L}_k$ l'única determinació del logaritme en $D_\varepsilon(z_k)$ tal que $\mathcal{L}_k(z_k) = \mathcal{L}_{k-1}(z_k)$.

Llavors si $k = 1, \dots, n-1$, les determinacions $\mathcal{L}_{k-1}$ i $\mathcal{L}_k$ coincideixen en $D_\varepsilon(z_k) \cap D_\varepsilon(z_{k-1})$, ja que dues determinacions del logaritme en un domini connex difereixen en una constant de la forma $2\pi im$. Per tant, la funció $\hat{\gamma}(t) = \mathcal{L}_k(\gamma(t))$, si $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$, és la determinació del logaritme de γ que compleix que $\hat{\gamma}(0) = w_0$.

Finalment, si γ és diferenciable, com a conseqüència de la construcció de $\hat{\gamma}$ i del fet que les determinacions del logaritme són holomorfes, es verifica que $\hat{\gamma}$ és diferenciable i si $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$, llavors $\hat{\gamma}'(t) = \mathcal{L}'_k(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$. $\square$

Definició 5.2 (Índex d'una corba tancada respecte a un punt). Sigi $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una corba tancada en $\mathbb{C}$ i $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Llavors, l'índex de γ respecte a z es defineix per:

$$\text{Ind}(\gamma, z) := \frac{\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)}{2\pi i},$$

on $\hat{\gamma}_z$ és qualsevol determinació del logaritme de $\gamma_z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, definida per $\gamma_z(t) = \gamma(t) - z$, vegeu la figura 5.1. $\bullet$

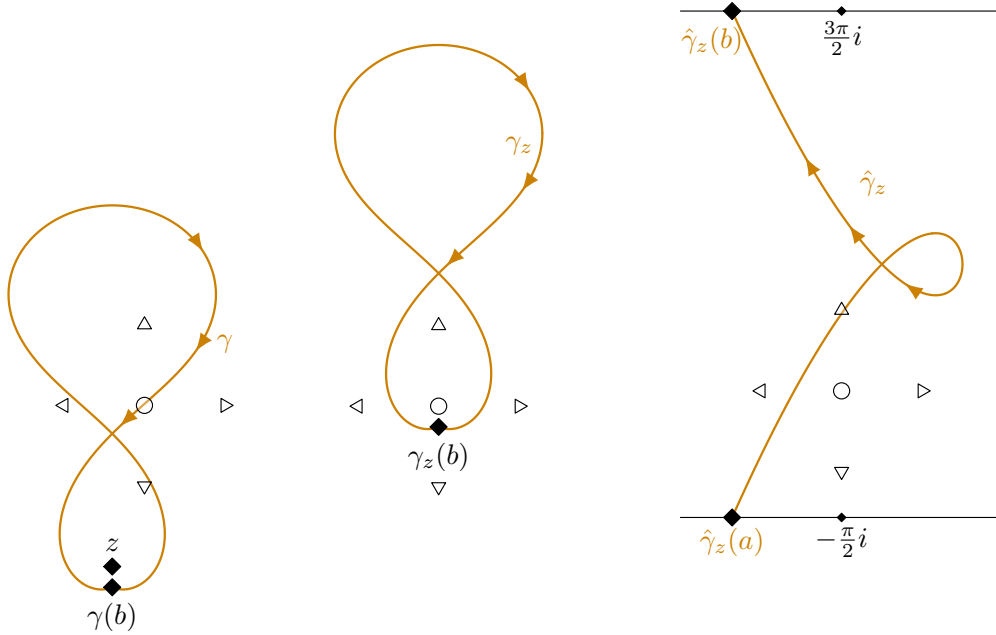


Figura 5.1.: Construcció de $\hat{\gamma}_z$ com a logaritme de $\gamma_z = \gamma - z$. Notem que en aquest cas tenim $\text{Ind}(\gamma, z) = 1$, ja que $\hat{\gamma}_z$ augmenta en $2\pi i$ en recórrer el camí, és a dir, que l'argument de $\gamma(t) - z$ augmenta en 2π en recórrer el camí γ .

Observació 5.3. 1. Donat que dues determinacions del logaritme de γ_z difereixen en un múltiple de $2\pi i$, l'índex està ben definit.

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

2. L'índex $\text{Ind}(\gamma, z)$ és un nombre enter. En efecte, donat que γ és una corba tancada, γ_z també ho és i, per tant, $e^{\hat{\gamma}_z(b)} = \gamma_z(b) = \gamma_z(a) = e^{\hat{\gamma}_z(a)}$. Llavors,

$$\text{Ind}(\gamma, z) := \frac{\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}.$$

Aquest valor, doncs, pot ser positiu, negatiu o zero: una volta és positiva si es realitza en el sentit contrari a les agulles del rellotge i és negativa si es fa en el sentit de gir de les agulles del rellotge, vegeu la figura 5.3. •

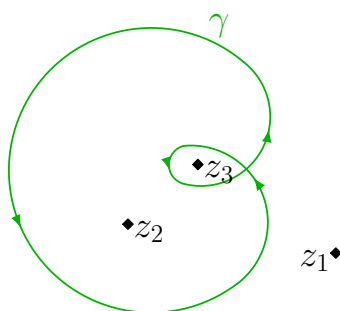


Figura 5.2.: Tenim $\text{Ind}(\gamma, z_1) = 0$, ja que des de z_1 podem observar tot el camí sense haver de “girar” sobre nosaltres mateixos. En canvi, $\text{Ind}(\gamma, z_2) = 1$ perquè ens cal fer una volta si som a z_2 , i $\text{Ind}(\gamma, z_3) = 2$ perquè ens cal fer dues voltes per resseguir el camí amb la mirada si ens situem a z_3 . Vegeu l'observació 5.3.

Observació 5.4 (Càlcul geomètric de l'índex). Fixem una semirecta L amb origen z_0 que no travessi punts on el camí té interseccions. Per cada vegada que el camí γ passa per L en sentit positiu, li sumem 1, i si passa en sentit negatiu, li restem 1. Vegeu figures 5.3–5.5. •

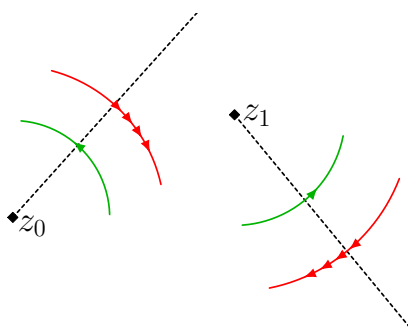


Figura 5.3.: Podem observar els camins verds que intersequen en sentit positiu o antihorari i els vermells en negatiu o horari, vegeu l'observació 5.4.

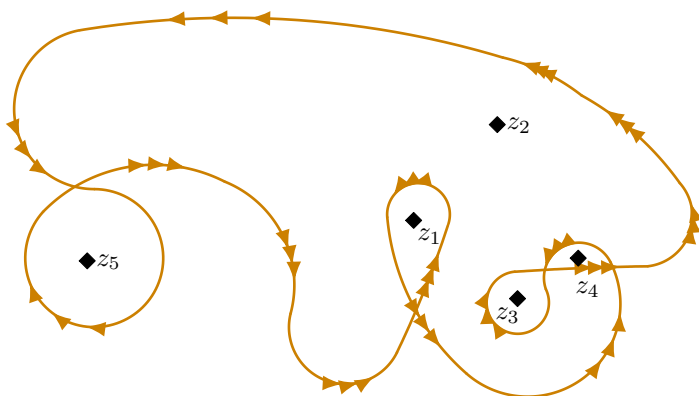


Figura 5.4.: Per a calcular l'índex de γ respecte a z_j , tracem una semirecta partint del punt i sumem interseccions amb la corba en sentit positiu i restem les de sentit negatiu, tal com il·lustra la figura 5.3, vegeu la figura 5.5.

Proposició 5.5 (Expressió integral de l'índex). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, γ un camí tancat en Ω i $z_0 \notin \gamma^*$. L'índex de γ respecte a z_0 ve definit com*

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

En particular, si γ^- denota el camí invers de γ (és a dir, recorregut en sentit invers), tenim que

$$\text{Ind}(\gamma^-, z) = -\text{Ind}(\gamma, z), \quad z \notin \gamma^*.$$

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que γ és de classe $\mathcal{C}^1$ ja que, altrament, descompondríem el camí i la integral en un nombre finit de trossos. Llavors si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ i $\hat{\gamma}_z$ és una determinació del logaritme de $\gamma_z = \gamma - z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es verifica que

$$\text{Ind}(\gamma, z) = \frac{\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b (\hat{\gamma}_z)'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad \square$$

A continuació ens mirem l'índex $\text{Ind}(\gamma, z)$ com una funció de z .

Proposició 5.6 (Propietats de la funció índex). *Sigui γ un camí tancat. Llavors:*

- a) *La funció $\text{Ind}(\gamma, z) : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$ és contínua;*
- b) *$\text{Ind}(\gamma, z)$ és constant en cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$;*
- c) *$\text{Ind}(\gamma, z) = 0$ si z pertany a la component no fitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

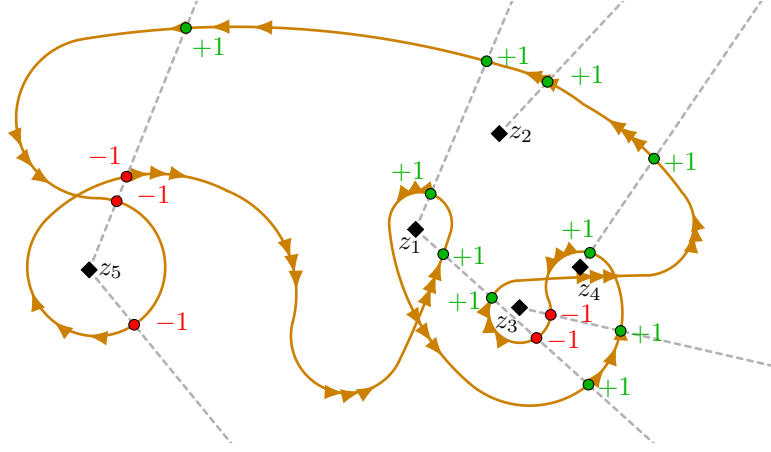


Figura 5.5.: Trobem $\text{Ind}(\gamma, z_1) = 1 + 1 = 1 + 1 - 1 + 1 = 2$ per dues semirectes diferents. Així mateix calculem $\text{Ind}(\gamma, z_2) = 1$, $\text{Ind}(\gamma, z_3) = 0$, $\text{Ind}(\gamma, z_4) = 2$ i $\text{Ind}(\gamma, z_5) = -1$.

Demostració. (a) Per $z, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, tenim que

$$\begin{aligned} |\text{Ind}(\gamma, z) - \text{Ind}(\gamma, z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0} \right) dw \right| \\ &= \frac{|z-z_0|}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{dw}{(w-z)(w-z_0)} \right|. \end{aligned}$$

Volem veure que aquesta quantitat tendeix a zero quan $z \rightarrow z_0$. Sigui

$$\delta := \frac{1}{2} \text{dist}(z_0, \gamma^*).$$

Clarament tenim que $|w-z_0| \geq 2\delta$ si $w \in \gamma^*$. Llavors, per $|z-z_0| < \delta$, tenim també

$$|w-z| \geq |w-z_0| - |z-z_0| \geq 2\delta - \delta = \delta, \quad w \in \gamma^*.$$

Per tant, si $|z-z_0| < \delta$, tenim que

$$|\text{Ind}(\gamma, z) - \text{Ind}(\gamma, z_0)| \leq \frac{|z-z_0|}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|dw|}{|w-z||w-z_0|} \leq \frac{|z-z_0|}{4\pi\delta^2} L(\gamma).$$

Com que aquesta quantitat tendeix a zero quan $z \rightarrow z_0$, ja hem provat la continuïtat de la nostra funció.

(b) Com que la funció $\text{Ind}(\gamma, z)$ és contínua i pren valors en $\mathbb{Z}$, és constant en cada component connexa.

(c) Sabem que és constant en aquesta component. Prenem $R > 0$ prou gran de manera que $\gamma^* \subset D_R(0)$ i també $R > L(\gamma)$ on $L(\gamma)$ és la longitud de γ . Si $|z| > 2R$, llavors $|w-z| \geq |z| - |w| \geq 2R - R = R$ per $w \in \gamma^*$ i, per tant,

$$|\text{Ind}(\gamma, z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|dw|}{|w-z|} \leq \frac{1}{2\pi R} L(\gamma) < \frac{1}{2\pi}.$$

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Com que $\text{Ind}(\gamma, z)$ ha de ser un enter, l'única possibilitat és que valgui 0, i com que l'índex és constant en aquesta component, val zero en tot punt d'aquesta. $\square$

Exercicis

5.1.1. Considerem el camí $\gamma(t) = 4e^{it} \cos \frac{2}{3}t$, $(0 \leq t \leq 6\pi)$. Calculeu $\text{Ind}(\gamma, 3)$ i $\text{Ind}(\gamma, 1)$. $\triangleleft$

5.1.2. Considerem el camí $\gamma(t) = (1 + e^{it} + e^{-it})e^{it}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Esbosseu el dibuix de la corba i calculeu-ne l'índex en cada component connexa del complementari de la seva imatge. Calculeu

$$\int_{\gamma} \frac{3z - 3}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} dz. \quad \triangleleft$$

5.2. El teorema global de Cauchy

Recordem la fórmula integral de Cauchy per oberts convexos: Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert convex i sigui $f \in H(\Omega)$. Llavors

$$f(z_0) \text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad z_0 \notin \gamma^*$$

per a tot camí tancat γ en Ω , vegeu el teorema 4.18 i l'observació 4.21.

Exemple 5.7. Sigui γ la corba en forma d'infinít o “ulleres”, anomenada lemniscata de Bernoulli¹ (vegeu la figura 5.6), amb $-1/2$ i $1/2$ un a dins de cada part. Com que la funció $f(z) = \cos(\frac{\pi}{2}z)$ és entera (holomorfa a tot $\mathbb{C}$), tenim que

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w + 1/2} dw = 2\pi i \cos(-\pi/4) \text{Ind}(\gamma, -1/2) = 2\pi i \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi i,$$

i també

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - 1/2} dw = 2\pi i \cos(\pi/4) \text{Ind}(\gamma, 1/2) = 2\pi i \frac{\sqrt{2}}{2} (-1) = -\sqrt{2}\pi i. \quad \diamond$$

Volem obtenir versions més generals tant del teorema de Cauchy com de la fórmula integral de Cauchy, que siguin vàlides per oberts no necessàriament convexos, com també per unions de camins.

Definició 5.8 (Cadenes i cicles). Una *cadena* és una combinació lineal de camins

$$\Gamma = \sum_{i=1}^k n_i \gamma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z},$$

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

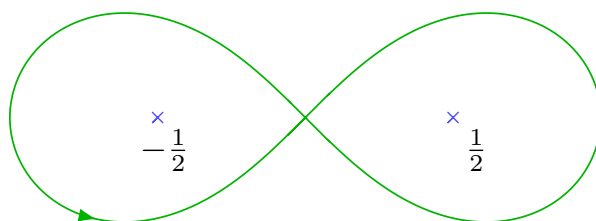
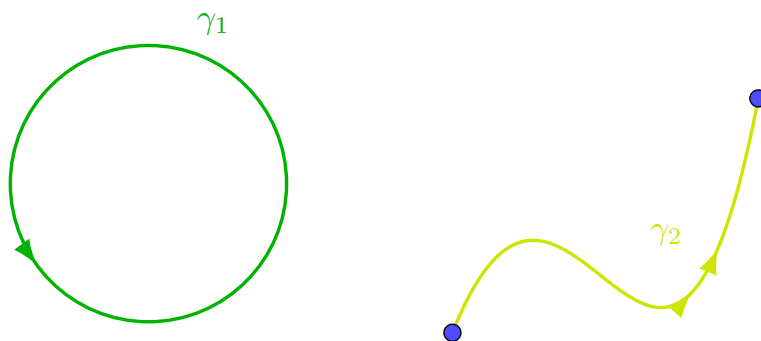


Figura 5.6.: Lemniscata de Bernoulli.



$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

Figura 5.7.: Una cadena formada per dos camins.

on γ_i és un camí per a tot $1 \leq i \leq k$. Vegeu la figura 5.7 per exemples de cadenes.

La imatge o recorregut de Γ és $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \dots \cup \gamma_k^*$.

Si $f \in C(\Gamma^*)$, definim la integral per linealitat

$$\int_{\Gamma} f dz = n_1 \int_{\gamma_1} f dz + \dots + n_k \int_{\gamma_k} f dz.$$

Diem que Γ és un *cicle* si γ_i és un camí tancat per a tot $1 \leq i \leq k$.

L'*índex* d'un *cicle* Γ respecte d'un punt $z_0 \notin \Gamma^*$ és

$$\text{Ind}(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{i=1}^k n_i \text{Ind}(\gamma_i, z_0). \quad \bullet$$

Degut a la definició, aquest índex té les mateixes propietats que l'índex d'una corba: és un enter, és constant en cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, i val zero a la component no fitada.

¹Jacob Bernoulli, Basilea, 1654–1705, https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli

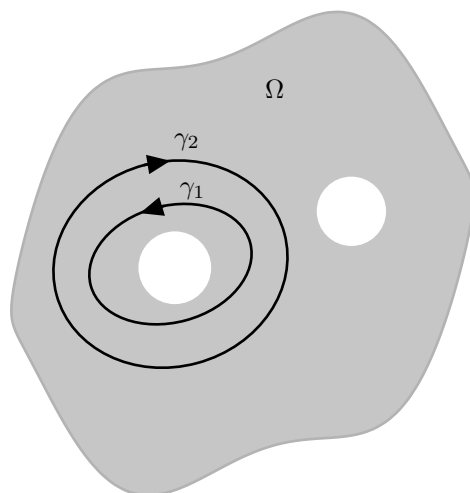


Figura 5.8.: Vegeu l'exemple 5.11.

Exemple 5.9. Considerem les corbes $\gamma_1(t) = 4e^{it}$ i $\gamma_2(t) = e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$. Formem el cicle

$$\Gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2) = \gamma_1 - \gamma_2.$$

Tenim $\text{Ind}(\Gamma, 6i) = 0$, ja que estem a la component no fitada. També

$$\text{Ind}(\Gamma, 2) = \text{Ind}(\gamma_1, 2) - \text{Ind}(\gamma_2, 2) = 1 - 0 = 1.$$

$$\text{Ind}(\Gamma, 0) = \text{Ind}(\gamma_1, 0) - \text{Ind}(\gamma_2, 0) = 1 - 1 = 0. \quad \diamond$$

Definició 5.10 (Homologia). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i Γ un cicle en Ω . Diem que Γ és homòleg a 0 en Ω si

$$\text{Ind}(\Gamma, a) = 0 \quad \forall a \notin \Omega.$$

Posem $\Gamma \approx 0$ en Ω per indicar que Γ és homòleg a 0 en Ω . •

Exemple 5.11. En la figura 5.8, els camins γ_1 i γ_2 **no** són homòlegs a 0 en Ω . En canvi, el cicle $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ **sí** que ho és. $\diamond$

Definició 5.12. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i siguin Γ_1 i Γ_2 cicles en Ω . Diem que Γ_1 és homòleg a Γ_2 en Ω si $\Gamma_1 - \Gamma_2$ és homòleg a 0 en Ω . En aquest cas, fem servir la notació $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ en Ω . •

Teorema 5.13 (Teorema de Cauchy global). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i sigui Γ un cicle en Ω . Llavors, les següents afirmacions són equivalents:*

(a) Γ és homòleg a 0 en Ω .

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

(b) Es compleix la fórmula integral de Cauchy global: per tota $f \in H(\Omega)$,

$$f(z) \operatorname{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*.$$

(c) Per tota $f \in H(\Omega)$,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Per ser precisos, sovint s'anomena *teorema de Cauchy global* la implicació $(a) \Rightarrow (c)$; la resta de l'enunciat incorpora també la fórmula integral de Cauchy global.

Prova de $(c) \Rightarrow (a)$. Si tenim un cicle Γ en Ω de manera que $\int_{\Gamma} f = 0$ per a tota $f \in H(\Omega)$, llavors si prenem un punt $a \notin \Omega$, la funció $f_a(z) = \frac{1}{z-a}$ és holomorfa en Ω , i

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f_a(z) dz = 0, \quad \forall a \notin \Omega.$$

Prova de $(b) \Rightarrow (c)$. Fixem $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$, i definim la funció $F(z) = (z-a)f(z)$, que és holomorfa en Ω . Aplicant la fórmula integral de Cauchy, com que $F(a) = 0$, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z)}{z-a} dz \stackrel{b)}{=} F(a) \operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 0.$$

Prova de $(a) \Rightarrow (b)$. Considerem la funció $F : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida per

$$F(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } z \neq w \\ f'(z) & \text{si } z = w. \end{cases}$$

Llavors F és contínua en $\Omega \times \Omega$ (vegeu la demostració al final de la prova), i per a tot $w \in \Omega$, la funció $F_w(z) := F(z, w)$ és holomorfa en Ω (clarament és holomorfa en $\Omega \setminus \{w\}$ i contínua en Ω , i sabem que aquestes dues condicions, aplicant el teorema de Cauchy-Goursat i el teorema de Morera (concretament usant el corollari 4.35), impliquen que és holomorfa a tot Ω). Pel teorema 4.38 de derivació sota el signe integral, la funció

$$g(z) = \int_{\Gamma} F(z, w) dw, \quad z \in \Omega$$

és holomorfa en Ω .

Ara volem estendre aquesta funció a tot $\mathbb{C}$, per tal d'obtenir una funció entera. Considerem l'obert no buit

$$U = \{w \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \operatorname{Ind}(\Gamma, w) = 0\}.$$

Observeu que donat que hem vist que $\operatorname{Ind}(\Gamma, \cdot)$ és constant en cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, U és la unió d'algunes d'aquestes components connexes que són obertes, i entre elles

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

hi ha la component connexa no fitada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. A més, com que Γ és homòleg a 0 en Ω , tenim que $\text{Ind}(\Gamma, a) = 0$ per a tot $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, de manera que $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset U$ i, per tant,

$$\Omega \cup U = \mathbb{C}.$$

Definim

$$\tilde{g}(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in U.$$

Per $z \in U \cap \Omega$, fent servir la definició d'índex obtenim que

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z} \\ &= \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) \text{Ind}(\Gamma, z) = \tilde{g}(z), \end{aligned}$$

ja que $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per $z \in U$. Per tant, la funció $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida per

$$G(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } z \in \Omega \\ \tilde{g}(z) & \text{si } z \in U \end{cases}$$

està ben definida a tot $\mathbb{C}$ i és entera.

Vegem que és fitada. Prenem $R > 0$ prou gran de manera que $\Gamma^* \subset \{|\zeta| \leq R\}$. Observem que, si $|z| > 2R$, llavors z pertany a la component no fitada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, així que $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$, que implica que $z \in U$. Per tant, si $|z| > 2R$, tenim que

$$|G(z)| = |\tilde{g}(z)| \leq \int_{\Gamma} \frac{|f(w)|}{|w-z|} |dw| \leq M \frac{L(\Gamma)}{|z| - R}, \quad (5.1)$$

on $M = \sup_{w \in \Gamma^*} |f(w)|$ i $L(\Gamma) = \sum |n_i| L(\gamma_i)$. Per tant, G és fitada en $\{|z| > 2R\}$. Com que G és contínua, G també és fitada en el compacte $\overline{D_{2R}(0)}$, de manera que G és una funció entera i fitada. Pel teorema de Liouville, G és constant. Ara bé, (5.1) també ens diu que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} G(z) = 0$ que, en ser G constant, implica que $G \equiv 0$.

Així doncs, per $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$, tenim que

$$0 = \frac{G(z)}{2\pi i} = \frac{g(z)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \text{Ind}(\Gamma, z). \quad \square$$

Demostració de la continuïtat de F . Comprovem que la funció $F : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida per

$$F(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} & \text{si } z \neq w \\ f'(z) & \text{si } z = w, \end{cases}$$

és contínua en $\Omega \times \Omega$.

En efecte, sigui $\Delta = \{(z, w) \in \Omega \times \Omega; z = w\}$ la diagonal, que és un tancat relatiu en $\Omega \times \Omega$. Llavors, F és contínua en $(\Omega \times \Omega) \setminus \Delta$ i ens queda comprovar que F és també contínua en els punts de la diagonal.

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Fixem un punt $a \in \Omega$ i considerem un disc $D_r(a) \subset \Omega$. Sigui $z \neq w \in D_r(a)$. Llavors es verifica

$$\begin{aligned} |F(z, w) - F(a, a)| &= \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(a) \right| = \left| \frac{f(z) - f'(a)z - (f(w) - f'(a)w)}{z - w} \right| \\ &= \frac{1}{|z - w|} \left| \int_{[w, z]} (f'(\zeta) - f'(a)) d\zeta \right| \leq \frac{|z - w|}{|z - w|} \sup_{\zeta \in [w, z]} |f'(\zeta) - f'(a)|. \end{aligned}$$

Observeu que donat que $F(z, z) = f'(z)$, aquesta desigualtat val també si $z = w$. Tenint en compte que f' és contínua en a (ja que, per la teoria local de Cauchy, les funcions holomorfes són analítiques i, en particular, tenen derivada contínua) i, per tant,

$$\lim_{(z, w) \rightarrow (a, a)} \sup_{\zeta \in [w, z]} |f'(\zeta) - f'(a)| = 0,$$

obtenim que

$$\lim_{(z, w) \rightarrow (a, a)} F(z, w) = F(a, a) = f'(a). \quad \square$$

Vegem ara una aplicació immediata del teorema anterior.

Corol·lari 5.14. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i $f \in H(\Omega)$. Sigui Γ_1 i Γ_2 cicles en Ω . Si $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ en Ω , llavors*

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Demostració. Com que el cicle $\Gamma_1 - \Gamma_2$ és homòleg a 0 en Ω , aplicant el teorema de Cauchy global, tenim que

$$0 = \int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz. \quad \square$$

Exemple 5.15. Considerem l'anell

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}.$$

Per r_1, r_2 amb $r < r_1 < r_2 < R$, considerem els cercles $\gamma_1(t) = r_1 e^{it}$ i $\gamma_2(t) = r_2 e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$. Com que $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2 \approx 0$, tenim que γ_1 i γ_2 són corbes homòlogues en Ω i, per tant,

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

per a tota funció f holomorfa en Ω . ◇

Corol·lari 5.16 (Fórmula integral de Cauchy per derivades-versió global). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$, i sigui Γ un cicle en Ω homòleg a 0. Llavors*

$$f^{(n)}(z) \operatorname{Ind}(\Gamma, z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw, \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*.$$

Demostració. Com que l'índex és constant en cada component connexa d' $\Omega \setminus \Gamma^*$, només cal aplicar la versió global de la fórmula integral de Cauchy, i derivar sota el signe integral. □

Exercicis

5.2.1. Considerem el camí $\gamma(t) = (2 \sin(2t - \frac{\pi}{3}), 2 \sin(3t))$, amb $t \in [0, 2\pi]$. Esbosseu el camí, calculeu l'índex de la corba en cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, i trobeu el valor de

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2+1} dz. \quad \triangleleft$$

5.3. Homotopia i teorema de Cauchy

Definició 5.17 (Homotopia). Siguin $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ corbes tancades. Diem que γ_0 i γ_1 són *homòtopes* en Ω (posem $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω) si existeix una aplicació contínua $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ de manera que

- (i) $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ per a tot $t \in [a, b]$;
- (ii) $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ per a tot $t \in [a, b]$;
- (iii) $H(a, s) = H(b, s)$ per a tot $s \in [0, 1]$. •

Observem que la condició (iii) ens diu que les corbes $\gamma_s(t) := H(t, s)$ són tancades per a tot $s \in [0, 1]$.

Essencialment, si $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω , llavors la corba γ_0 s'ha de poder deformar contínuament cap a la corba γ_1 sense passar per cap punt que no sigui d' Ω (vegeu l'exemple de la Figura 5.9).

Definició 5.18 (Corba homòtopa a 0 o contractible). Diem que una corba γ és *homòtopa a 0* en Ω o *contractible* en Ω (posem $\gamma \sim 0$ en Ω) si γ és homòtopa a una corba constant (és a dir, a un punt). •

Observació 5.19. Evidentment, el concepte de corbes homòtopes també té sentit per corbes que no siguin tancades però tinguin els mateixos extrems. Quan es parla d'homotopia de corbes no tancades d'extrems fixats, se sol imposar que l'homotopia sigui contínua, compleixi (i) i (ii) de la definició 5.17, però que en lloc de la condició (iii) compleixi que les corbes $\gamma_s(t) := H(t, s)$ tinguin el mateix punt inicial i final que γ_0 i γ_1 , és a dir, $\gamma_s(a) = \gamma_0(a)$ i $\gamma_s(b) = \gamma_0(b)$ per a tot $s \in [0, 1]$.

Es pot veure fàcilment que dues corbes d'extrems fixats γ_0 i γ_1 són homòtopes en Ω si i només si $\gamma_0 \vee \gamma_1^-$ és homòtopa a 0 en Ω , vegeu la definició 4.3. •

Proposició 5.20. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i siguin $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ dues corbes tancades en Ω de manera que $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω . Llavors

$$\text{Ind}(\gamma_0, z) = \text{Ind}(\gamma_1, z) \quad \forall z \notin \Omega.$$

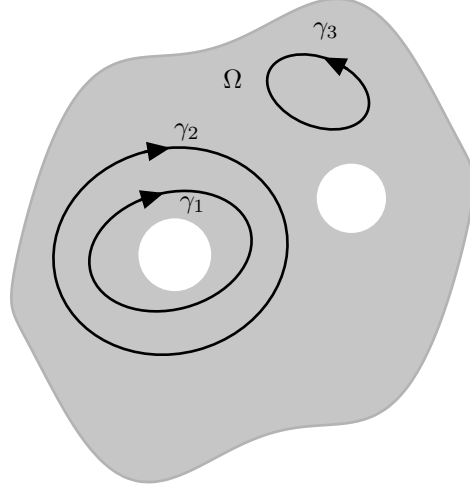


Figura 5.9.: Tenim $\gamma_1 \sim \gamma_2$, $\gamma_3 \sim 0$. Tenim en canvi que $\gamma_1 \not\sim \gamma_3$, $\gamma_1 \not\sim 0$ i $\gamma_2 \not\sim 0$.

És a dir, si $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω , aleshores γ_0 és homòloga a γ_1 en Ω . En particular, $\gamma \sim 0$ en Ω implica que γ és homòloga a 0 en Ω . Ara bé, el recíproc no és cert (veure la figura 5.10 per un exemple d'una corba en un obert Ω homòloga a 0, però no homòtopa a 0 en Ω).

Demostrem primer un resultat d'invariància de l'índex sota pertorbacions, conegut informalment com el *teorema de l'arbre, la persona i el gos*.

Lema 5.21. *Siguin $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dues corbes tancades i sigui $z \in \mathbb{C}$. Si*

$$|\gamma(t) - \eta(t)| < |z - \gamma(t)| \quad \forall t \in [a, b],$$

llavors $\text{Ind}(\gamma, z) = \text{Ind}(\eta, z)$.

Demostració. Observem que la hipòtesi implica que $z \notin \gamma^* = \gamma([a, b])$. També tenim que $z \notin \eta^*$ ja que per $t \in [a, b]$ tenim

$$|z - \eta(t)| = |z - \gamma(t) + (\gamma(t) - \eta(t))| \geq |z - \gamma(t)| - |\gamma(t) - \eta(t)| > 0.$$

A més a més, per a $t \in [a, b]$, escrivint $\gamma_z(t) = \gamma(t) - z$ i $\eta_z(t) = \eta(t) - z$ tenim que

$$|\gamma_z(t) - \eta_z(t)| < |\gamma_z(t)|.$$

Tot plegat ens dona que $0 \notin \gamma_z^*$ i la corba tancada $\alpha_z = \frac{\eta_z}{\gamma_z}$ verifica

$$|1 - \alpha_z(t)| < 1 \quad \forall t \in [a, b].$$

Sigui $\hat{\gamma}_z$ una determinació del logaritme de γ_z i $\mathcal{L}$ una determinació del logaritme en $D_1(1)$. Llavors, $\hat{\alpha}_z := \mathcal{L} \circ \alpha_z$ és una determinació del logaritme d' α_z i, per tant, $\hat{\eta}_z := \hat{\gamma}_z + \hat{\alpha}_z$ és una determinació del logaritme de η_z . En conseqüència,

$$\begin{aligned} 2\pi i \text{Ind}(\eta, z) &= \hat{\eta}_z(b) - \hat{\eta}_z(a) = (\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)) + (\hat{\alpha}_z(b) - \hat{\alpha}_z(a)) \\ &= \hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a) = 2\pi i \text{Ind}(\gamma, z). \end{aligned}$$

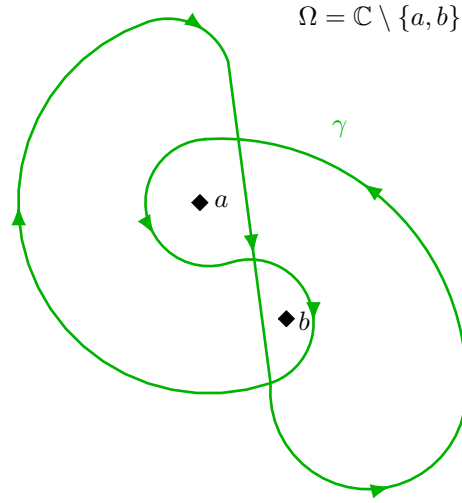


Figura 5.10.: El camí γ és homòleg a 0 en Ω ja que $\text{Ind}(\gamma, a) = 0 = \text{Ind}(\gamma, b)$, però $\gamma \not\sim 0$ en Ω , ja que no és contractible.

Aquí hem usat que, com que η i γ són corbes tancades, també ho és α_z i, en particular,

$$\hat{\alpha}_z(b) = \mathcal{L}(\alpha_z(b)) = \mathcal{L}(\alpha_z(a)) = \hat{\alpha}_z(a). \quad \square$$

Demostració de la proposició 5.20. Sigui H una homotopia entre γ_0 i γ_1 . Volem veure que $\text{Ind}(\gamma_0, z) = \text{Ind}(\gamma_1, z)$ per a tot $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sigui $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Com que $[a, b] \times [0, 1]$ és compacte, $H([a, b] \times [0, 1])$ també i H és uniformement contínua. Per tant,

$$(1) \quad \varepsilon = d(z, H([a, b] \times [0, 1])) = \inf_{(t,s) \in [a,b] \times [0,1]} |z - H(t, s)| > 0.$$

$$(2) \quad \text{Existeix } n \geq 1 \text{ tal que per a tot } t \in [a, b] \text{ i tots } s_1, s_2 \in [0, 1] \text{ tals que } |s_1 - s_2| \leq \frac{1}{n},$$

$$|H(t, s_1) - H(t, s_2)| < \varepsilon.$$

Per a cada $s \in [0, 1]$, considerem la corba tancada γ_s en Ω definida per $\gamma_s(t) = H(t, s)$, si $t \in [a, b]$. Llavors, (1) i (2) ens donen que per a tot $t \in [a, b]$, i tot $s_1, s_2 \in [0, 1]$ amb $|s_1 - s_2| \leq \frac{1}{n}$,

$$|\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)| < |z - \gamma_{s_1}(t)|.$$

Aplicant el lema anterior, deduïm que $\text{Ind}(\gamma_{s_1}, z) = \text{Ind}(\gamma_{s_2}, z)$, per a tot $s_1, s_2 \in [0, 1]$ amb $|s_1 - s_2| \leq \frac{1}{n}$. En particular,

$$\text{Ind}(\gamma_{\frac{k-1}{n}}, z) = \text{Ind}(\gamma_{\frac{k}{n}}, z),$$

per a $k = 1, \dots, n$. Per tant,

$$\text{Ind}(\gamma_0, z) = \text{Ind}(\gamma_1, z). \quad \square$$

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Com que tota corba homòtopa a zero en Ω és homòloga a zero en Ω , a partir del teorema de Cauchy global, obtenim la següent versió homotòpica.

Teorema 5.22 (Versió homotòpica del teorema de Cauchy). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i γ un camí tancat en Ω homòtop a 0 en Ω . Si $f \in H(\Omega)$, aleshores*

$$(a) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 0;$$

(b)

$$f(z) \operatorname{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall z \in \Omega \setminus \gamma^*.$$

Com a culminació de la teoria, tenim els següents corol·laris, amb gran quantitat d'aplicacions, com veurem en els capítols següents.

Teorema 5.23 (Teorema de deformació). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$, i siguin γ_0, γ_1 camins tancats homòtops en Ω . Llavors*

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Demostració. Tenim que $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1$ és un cicle en Ω . Si $z \notin \Omega$, per la proposició 5.20 tenim que $\operatorname{Ind}(\gamma_0, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, z)$, així que $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per a tot $z \notin \Omega$ i, per tant, el cicle Γ és homòleg a 0 en Ω . Pel teorema de Cauchy global obtenim que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz. \quad \square$$

Corol·lari 5.24 (Teorema de la independència del camí). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i siguin γ_0, γ_1 camins amb extrems fixos i homòtops en Ω (vegeu l'observació 5.19). Si $f \in H(\Omega)$, aleshores*

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Demostració. El camí $\gamma := \gamma_0 \vee \gamma_1^-$ és tancat (ull: en aquest cas, estem considerant el camí que primer recorre γ_0 i després la corba γ_1 en sentit contrari) i homòtop a 0 en Ω , vegeu l'observació 5.19. Aleshores el resultat és conseqüència del teorema anterior. $\square$

5.4. Dominis simplement connexos

Com ja hem mencionat en seccions anteriors, un domini simplement connex és intuïtivament un obert connex del pla “sense forats”. En aquests tipus de dominis, tota la teoria anterior pren una forma especial ja que, per exemple, totes les corbes tancades són contractibles, una propietat que, de fet, es pot prendre com a definició.

Definició 5.25. Un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ és *simplement connex* si és connex i tota corba tancada en Ω és homòtopa a 0 en Ω . $\bullet$

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

De fet, si $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ i Ω és connex en $\mathbb{C}$, aleshores són equivalents:

- Ω és simplement connex,
- tot cicle en Ω és homòleg a 0 en Ω , i
- $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ és connex.

Vegeu [BC13, proposició 6.4], per exemple, on la definició de partida és la tercera, per veure l'equivalència de la segona i la tercera. Que la primera implica la segona és la proposició 5.20. Que la tercera implica la primera es pot veure usant arguments elementals, vegeu l'exercici ???. Per exemple, sabem que $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ és connex, però no simplement connex. Aquí tenim $\mathbb{C} \setminus \Omega = \{0\}$ que és connex. En canvi $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega = \{0\} \cup \{\infty\}$ que no és connex. Notem que la definició de simplement connex en dimensions superiors o en espais arc-connexos sol ser anàloga a la segona de les anteriors.

Teorema 5.26 (Teorema de Cauchy per dominis simplement connexos). *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, $f \in H(\Omega)$ i γ un camí tancat en Ω . Llavors $\int_\gamma f(z)dz = 0$ i també val la fórmula integral de Cauchy.*

Demostració. Com que Ω és simplement connex, podem usar directament la versió homotòpica del teorema de Cauchy. $\square$

Proposició 5.27 (Existència de primitives en dominis simplement connexos). *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, i $f \in H(\Omega)$. Llavors f té primitiva holomorfa en Ω .*

Demostració. Fixem un punt $a \in \Omega$. Com que Ω és un obert connex, llavors és arc-connex, de manera que donat $z \in \Omega$, hi ha una corba que uneix a amb z en Ω ³. Com que volem que sigui derivable a trossos, podem suposar que es tracta d'una poligonal $L_{a,z} \subset \Omega$. Definim

$$F(z) = \int_{L_{a,z}} f(w) dw, \quad z \in \Omega.$$

Aquesta definició no depèn de la poligonal escollida: si L_1 i L_2 són dues poligonals de a a z , aleshores $L_1 \vee L_2^-$ és un camí tancat en Ω i, pel teorema de Cauchy en dominis simplement connexos,

$$\int_{L_1} f(w) dw - \int_{L_2} f(w) dw = 0.$$

Donat h amb $|h|$ prou petit, considerem el camí tancat γ format per la poligonal $L_{a,z}$, el segment $[z, z+h]$ i la poligonal $L_{a,z+h}$ (recorreguda en sentit contrari). Com que Ω és simplement connex, pel teorema de Cauchy tenim que

$$0 = \int_\gamma f(w) dw = F(z) + \int_{[z,z+h]} f(w) dw - F(z+h).$$

A partir d'aquí acabem la prova, veient que F és holomorfa amb $F'(z) = f(z)$, igual com vam fer en el teorema de Cauchy per un disc, vegeu el teorema 4.15. $\square$

³Recordem que no és cert en general que un conjunt connex sigui arc-connex.

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Proposició 5.28 (Determinació del logaritme en dominis simplement connexos). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, i $f \in H(\Omega)$ amb $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Llavors existeix $g \in H(\Omega)$ amb*

$$e^{g(z)} = f(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

A més, si $z_0 \in \Omega$ i tenim que $e^{w_0} = f(z_0)$, podem escollir g de manera que $g(z_0) = w_0$.

Demostració. Com que $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$, llavors la funció f'/f és holomorfa en Ω . Per la proposició anterior, té primitiva holomorfa G . Considerem la funció $H(z) = e^{G(z)} \in H(\Omega)$ amb $H(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Llavors la funció f/H és holomorfa en Ω amb derivada donada per

$$(f/H)' = \frac{f'H - fH'}{H^2}.$$

Però $H' = HG' = Hf'/f$ així que $f'H - fH' = 0$. Per tant f/H és igual a una constant $c \neq 0$ en Ω . És a dir,

$$f(z) = ce^{G(z)} = e^{G(z)+c'}$$

per alguna constant c' . Agafant $g(z) = G(z) + c' + 2k\pi i$ per un $k \in \mathbb{Z}$ apropiat, tenim que $g(z_0) = w_0$ i la proposició queda provada. $\square$

Com a exemple, notem que en la regió $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$, on E és una espiral que surt del 0 fins a l'infinit (vegeu l'exercici 2.2.9), hi ha determinació holomorfa del logaritme de z (ja que Ω és simplement connex, la funció $f(z) = z \in H(\Omega)$, i $f(z) \neq 0$ en Ω).

Comentari 5.29. El fet que tota funció holomorfa tingui primitiva en Ω , o que tota funció holomorfa sense zeros en Ω tingui determinació del seu logaritme en Ω , caracteritza els dominis simplement connexos (vegeu [BC13, teorema 6.22]), encara que quan tenim un obert connex Ω , la millor manera de comprovar si és simplement connex és mirar si $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ és connex o no. $\bullet$

Exercicis

5.4.1. *Siguin $f, g \in H(\mathbb{C})$ tals que $f^2 + g^2 \equiv 1$. Demuestra que existeix $h \in H(\mathbb{C})$ tal que $f = \cos(h)$ i $g = \sin(h)$.* $\triangleleft$

5.4.2. *[Determinació de l'arrel en dominis simplement connexos] Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, i $f \in H(\Omega)$ amb $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Llavors existeix $g \in H(\Omega)$ amb*

$$g(z)^2 = f(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

A més, si $z_0 \in \Omega$ i tenim que $w_0^2 = f(z_0)$, podem escollir g de manera que $g(z_0) = w_0$.

5.5. Funcions harmòniques

En aquesta secció farem servir la notació introduïda a la secció 3.2.

Definició 5.30 (Funció harmònica). Diem que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és una *funció harmònica* si $f \in C^2(\Omega)$ i el seu laplacà

$$\Delta f = (\partial_x)^2 f + (\partial_y)^2 f = 0.$$

Diem que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és una *funció antiholomorfa* si $f \in C^1(\Omega)$ i

$$\partial f = 0. \quad \bullet$$

Exemple 5.31. Les funcions lineals $f(x + iy) = x + y$ són evidentment harmòniques. Però hi ha altres polinomis harmònics. Per exemple, $f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z^2)$ i $f(z) = 2xy = \operatorname{Im}(z^2)$. $\diamond$

Observació 5.32 (Càlcul del laplacà amb les derivades de Wirtinger). Notem que si $f \in C^2(\Omega)$, aleshores

$$4\bar{\partial}\partial f = 2\bar{\partial}(\partial_x f - i\partial_y f) = \partial_x \partial_x f + i\partial_y \partial_x f - i\partial_x \partial_y f - i^2 \partial_y \partial_y f = \Delta f,$$

on hem usat el teorema d'igualtat de les derivades creuades per cancel·lar els termes amb ∂_x i ∂_y . Anàlogament trobem que

$$4\partial\bar{\partial}f = \Delta f. \quad \bullet$$

En particular, hem demostrat el següent resultat.

Lema 5.33 (Holomorfia implica harmonicitat). Una funció $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és harmònica si i només si $f \in C^2(\Omega)$ i

$$\bar{\partial}\partial f \equiv 0,$$

si i només si $f \in C^2(\Omega)$ i

$$\partial\bar{\partial}f \equiv 0.$$

En particular, f és harmònica si i només si $f \in C^2(\Omega)$ i $\partial f \in H(\Omega)$.

Lema 5.34. Sigui $f \in H(\Omega)$. Aleshores les seves parts real i imaginària són harmòniques.

Demostració. Notem que $\partial\bar{\partial}f = 0$. Per tant, pel lema 5.33, la funció f és harmònica. Però $\Delta f = 0$ si i només si $\Delta u = 0$ i $\Delta v = 0$, on $u = \operatorname{Re} f$ i $v = \operatorname{Im} f$. $\square$

Anem a veure com podem obtenir el resultat en direcció contrària, suposant Ω simplement connex. Evidentment, no és suficient que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ i $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ siguin harmòniques per tal que $u + iv$ sigui holomorfa, ja que si no serien condicions equivalents. Però per tota u harmònica i de valors reals sí que podem trobar v tal que $u + iv$ sigui holomorfa. Comencem per veure en primer lloc que podem descompondre tota funció harmònica com a suma de la seva part holomorfa i la seva part antiholomorfa en dominis simplement connexos.

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Lema 5.35 (Descomposició en parts holomorfa i antiholomorfa). *Si Ω un domini simplement connex, i sigui $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funció harmònica. Aleshores existeixen dues funcions $F, G \in H(\Omega)$ tals que*

$$f = F + \bar{G}.$$

A més, la descomposició és única mòdul constants additives.

Demostració. Pel lema 5.33 tenim que $\partial f \in H(\Omega)$. Per la proposició 5.27 podem trobar una primitiva holomorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, és a dir tal que

$$\bar{\partial}F = 0 \quad \text{i} \quad \partial F = \partial f.$$

Anomenem $G := \overline{f - F}$. Aleshores

$$\bar{\partial}G \stackrel{\text{O.3.25}}{=} \bar{\partial}\bar{G} = \overline{\partial(f - F)} = 0.$$

Per veure la unicitat, notem que si $f = \tilde{F} + \bar{\tilde{G}} = F + \bar{G}$ amb $F, G, \tilde{F}, \tilde{G} \in H(\Omega)$, aleshores tenim que

$$\partial\bar{G} = \bar{\partial}G = 0 = \overline{\partial\tilde{G}} = \partial\tilde{G}$$

i, per tant,

$$(F - \tilde{F})' = \partial(F - \tilde{F}) = \partial(F + \bar{G} - \tilde{F} - \bar{\tilde{G}}) = \partial(f - f) = 0.$$

La proposició 3.14 ens permet concloure que $F - \tilde{F} = c \in \mathbb{C}$. A més,

$$G - \tilde{G} = \overline{(f - F) - (f - \tilde{F})} = -\bar{c}. \quad \square$$

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és harmònica, aleshores és *analítica real*, és a dir, per tot $z_0 = a + ib \in \Omega$ existeixen coeficients $a_{n,m}$ i un radi r tals que

$$f(x + iy) = \sum_{n,m \geq 0} a_{n,m} (x - a)^n (y - b)^m \quad \text{per } (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2.$$

De fet, tenim una forma més concreta, i és que els polinomis aproximadors són harmònics i, per tant, en expressar el polinomi en termes de z i $\bar{z}$ no poden aparèixer termes creuats tipus $(z - z_0)^n (\bar{z} - \bar{z}_0)^m$ amb $n, m > 0$:

Lema 5.36 (Expressió en sèries de potències). *Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és harmònica, llavors per cada $z_0 \in \Omega$ existeixen coeficients $a_n, b_m \in \mathbb{C}$ tals que, si $R := \text{dist}(z_0, \Omega^c)$, aleshores*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m \geq 1} b_m (\bar{z} - \bar{z}_0)^m \quad \text{per } |z - z_0| < R.$$

La convergència és uniforme i absoluta en compactes de $D_R(z_0)$.

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Demostració. Sigui $r = \text{dist}(z_0, \Omega^c)$. Aleshores f és harmònica en $D_r(z_0)$. Pel lema 5.35, existeixen $F, G \in H(D_r(z_0))$ tals que $f = F + \bar{G}$. Pel teorema 4.23, F i G es poden expressar en forma de sèries de potències amb radi de convergència major o igual a r . Absorbint els termes independents en $a_0 = F(z_0) + \overline{G(z_0)}$, obtenim el resultat. $\square$

Teorema 5.37 (Existència de la conjugada harmònica). *Sigui Ω un domini simplement connex, i sigui $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funció harmònica. Aleshores existeix una funció harmònica $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que anomenem harmònica conjugada de u tal que*

$$u + iv \in H(\Omega).$$

A més, v és única mòdul una constant real additiva.

Demostració. Pel lema 5.35, existeixen $F, G \in H(\Omega)$ tals que $u = F + \bar{G}$. En particular,

$$V := \text{Im } F = \text{Im } G,$$

i escrivim $U = \text{Re } F$ i $\tilde{U} = \text{Re } G$.

En primer lloc vegem que $U = \tilde{U} + c$. Efectivament, com que U i $\tilde{U}$ prenen valors reals, tenim que $U = \bar{U}$ i el mateix passa amb $\tilde{U}$, així que

$$F - G = U + iV - \tilde{U} - iV = U - \tilde{U} \in \mathbb{R},$$

de manera que

$$F - G = \overline{F - G},$$

així que

$$(F - G)' = \partial(F - G) = \partial(\overline{F - G}) \stackrel{\circ 3.25}{=} \overline{\partial(F - G)} = 0.$$

La proposició 3.14 ens permet concloure que $U - \tilde{U} = F - G = c \in \mathbb{R}$.

Definim ara $v = 2V$. Com que $U = \tilde{U} + c$, trobem $u = F + \bar{G} = 2U - c$ i $u + iv = 2F - c \in H(\Omega)$.

Per veure la unicitat, n'hi ha prou amb observar que si tinguéssim dues solucions v i $\tilde{v}$, aleshores la seva diferència seria holomorfa en un obert connex i tindria valors reals, de manera que ha de ser constant pel primer apartat de l'exercici 3.2.6 aplicat a la funció $f = i(v - \tilde{v})$. $\square$

Per acabar aquesta pinzellada de funcions harmòniques, ens interessem per com queda la fórmula integral de Cauchy en aquest context. Per simplificar les expressions estudiarem el cas $a = 0$, és a dir, que treballem amb discs centrats a l'origen.

Definició 5.38. El *nucli de Poisson*⁴ és la funció

$$P(z, z_0) = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2}.$$

⁴Siméon Denis Poisson, Pithiviers, 1781–1840, https://ca.wikipedia.org/wiki/Sim%C3%A9on_Denis_Poisson

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

El nucli de Herglotz⁵ és la funció

$$H(z, z_0) = \frac{z + z_0}{z - z_0}.$$

Notem que els dos nuclis estan relacionats per la fórmula

$$\operatorname{Re} H(z, z_0) = \operatorname{Re} \left(\frac{(z + z_0)\overline{(z - z_0)}}{|z - z_0|^2} \right) = P(z, z_0). \quad (5.2)$$

Teorema 5.39 (Fórmula integral de Poisson). *Sigui $f : D_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$ una funció harmònica, i sigui $r < R$. Aleshores per tot $z_0 \in D_r(a)$ tenim que*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} f(z) P(z - a, z_0 - a) |dz|.$$

Demostració. Comencem per comprovar que aquesta fórmula val per funcions holomorfes en $D_R(0)$. Efectivament, la fórmula integral de Cauchy diu que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

D'altra banda, com que $\frac{f(z)}{r^2 - z\bar{z}_0}$ és holomorfa en $z \in D_r(0)$ ja que el denominador no s'anul·la, i pel teorema de Cauchy per un disc, tenim que

$$\int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{z(\bar{z} - \bar{z}_0)} dz = \int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{r^2 - \bar{z}_0 z} dz = 0.$$

Per tant,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \left(\frac{f(z)}{z - z_0} + \frac{f(z)\bar{z}_0}{z(\bar{z} - \bar{z}_0)} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} f(z) \left(\frac{z}{z - z_0} + \frac{\bar{z}_0}{(\bar{z} - \bar{z}_0)} \right) \frac{dz}{z}.$$

Notem que

$$\frac{z}{z - z_0} + \frac{\bar{z}_0}{(\bar{z} - \bar{z}_0)} = \frac{z(\bar{z} - \bar{z}_0) + \bar{z}_0(z - z_0)}{|z - z_0|^2} = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2} = P(z, z_0).$$

Deduïm que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) P(re^{it}, z_0) \frac{ire^{it} dt}{re^{it}} = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(0)} f(z) P(z, z_0) |dz|,$$

tal com volíem veure.

⁵Gustav Herglotz, Wallern, 1881–1953, https://ca.wikipedia.org/wiki/Gustav_Herglotz

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Si f és harmònica, aleshores considerem la descomposició $f(z+a) = F(z) + \overline{G(z)}$ donada en $D_R(0)$ pel lema 5.35. Trobem que

$$\begin{aligned} f(z_0) &= F(z_0 - a) + \overline{G(z_0 - a)} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(0)} F(z) P(z, z_0 - a) |dz| + \overline{\frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(0)} G(z) P(z, z_0 - a) |dz|} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(0)} (F(z) + \overline{G(z)}) P(z, z_0 - a) |dz|, \end{aligned}$$

i concloem la demostració amb el canvi de variable $z = w - a$. $\square$

Vegem com podem recuperar el valor d'una funció holomorfa en termes de la seva part imaginària a la frontera (es pot obtenir una expressió anàloga també amb la part real) com a conseqüència del teorema anterior.

Corol·lari 5.40 (Fórmula de representació de Herglotz). *Donada una funció $f \in H(\Omega)$, si $v = \operatorname{Im} f$, aleshores per tot $r < \operatorname{dist}(a, \Omega^c)$ tenim que*

$$f(z_0) = \operatorname{Re} f(a) + \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) H(z - a, z_0 - a) |dz| \quad \text{per a tot } z_0 \in D_r(a).$$

Demostració. Pel teorema 4.38 de derivació sota el signe d'integració, trobem que tota funció contínua $f \in C(\partial D_r(a))$ dona lloc a una funció holomorfa en el disc $D_r(a)$ en integrar contra el nucli de Herglotz. En particular, si definim per $z_0 \in D_r(a)$ la funció

$$g(z_0) := \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) H(z - a, z_0 - a) |dz|,$$

aquesta és holomorfa en $D_r(a)$. Per $z_0 \in D_r(a)$ trobem doncs que

$$\operatorname{Im} g(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} \operatorname{Re} (v(z) H(z - a, z_0 - a)) |dz| \stackrel{(5.2)}{=} \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) P(z - a, z_0 - a) |dz|,$$

i per la fórmula integral de Poisson (vegeu el teorema 5.39) tenim que

$$\operatorname{Im} g = v \quad \text{en } D_r(a).$$

Com que l'harmònica conjugada de v és única llevat d'una constant additiva, trobem que $f = g + c$ amb $c \in \mathbb{R}$. En particular, avaluant en a tenim que

$$\begin{aligned} c = f(a) - g(a) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} f(z) P(z - a, 0) |dz| - \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) H(z - a, 0) |dz| \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} \operatorname{Re} f(z) |dz| = \operatorname{Re} f(a). \end{aligned} \quad \square$$

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Observació 5.41. En la demostració anterior, hem vist que

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_r(a)} v(z) H(z-a, z_0-a) \frac{dz}{z-a},$$

i, per tant, utilitzant el teorema 4.38 de derivació sota el signe integral, obtenim

$$g'(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_r(a)} v(z) \partial_{z_0} H(z-a, z_0-a) \frac{dz}{z-a} = \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) \partial_{z_0} H(z-a, z_0-a) |dz|.$$

Per tant,

$$g'(z_0) = \frac{i}{\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) \frac{z-a}{(z-z_0)^2} |dz|. \quad \bullet$$

Exercicis

5.5.1. Demostrea el lema 5.34 usant les equacions de Cauchy-Riemann directament. $\triangleleft$

5.5.2. Sigui Ω un domini simplement connex, i sigui $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ una aplicació de Riemann, és a dir un homeomorfisme holomorf entre $\mathbb{D}$ i Ω amb inversa holomorfa, vegeu el teorema 7.6. Suposem que φ s'estén contínuament a $\partial\mathbb{D}$, que φ^{-1} s'estén contínuament a $\partial\Omega$ i que les seves derivades s'estenen contínuament a $\partial\mathbb{D}$ i a $\partial\Omega$ respectivament (sense anular-s'hi). Demostreu que existeixen determinacions del logaritme i l'argument de manera que

$$\mathcal{L}_{\varphi'}(z_0) = \operatorname{Re} \mathcal{L}_{\varphi'}(0) + \frac{i}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{A}_{\varphi'}(z) H(z, z_0) |dz|. \quad \triangleleft$$

5.6. El problema de Dirichlet

Donada una funció $f \in C(\partial\mathbb{D})$, el problema de Dirichlet consisteix a trobar una solució $u \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap C^2(\mathbb{D})$ de l'equació

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0 & \text{per a tot } z \in \mathbb{D}, \\ u(\xi) = f(\xi) & \text{per a tot } \xi \in \partial\mathbb{D}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Definim

$$u_f(z_0) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z) P(z, z_0) |dz|.$$

Teorema 5.42. Donada $f \in C(\partial\mathbb{D})$, u_f soluciona el problema de Dirichlet (5.3).

Demostració. Suposarem f de valors reals per simplificar l'argument, el cas general se'n segueix per linearitat. Tenim doncs

$$u_f(z_0) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z) H(z, z_0) |dz|.$$

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Com que u_f és la part real d'una funció holomorfa (vegeu el teorema de derivació sota el signe integral), inferim que u_f és harmònica. Per veure que, de fet, soluciona (5.3), ens cal veure que el límit quan ens aproximem a la frontera coincideix amb f .

Notem que la fórmula integral de Poisson per $f(z) \equiv 1$ diu que

$$\int_{\partial\mathbb{D}} P(z, z_0) |dz| = 2\pi, \quad (5.4)$$

independentment del valor particular de $z_0 \in \mathbb{D}$. Per altra banda, podem fitar la integral lluny de z_0 com

$$\int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0| > \delta} P(z, z_0) |dz| \leq (1 - |z_0|) \mathcal{O}(1/\delta), \quad (5.5)$$

vegeu l'exercici 5.6.1.

Sigui $\varepsilon > 0$. Volem veure que $|u_f(z_0) - f(\xi)| < \varepsilon$ si $|z_0 - \xi|$ és prou petit. Fixem-nos que

$$u_f(z_0) - f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z) P(z, z_0) |dz| - f(\xi) \stackrel{(5.4)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} (f(z) - f(\xi)) P(z, z_0) |dz|.$$

Prenent valors absoluts, i separant la part local i la part no-local, trobem

$$\begin{aligned} |u_f(z_0) - f(\xi)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0| \leq \delta} |f(z) - f(\xi)| P(z, z_0) |dz| \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0| > \delta} |f(z) - f(\xi)| P(z, z_0) |dz| = \boxed{1} + \boxed{2}. \end{aligned}$$

Per la part local, notem que si $|z_0 - \xi| < \delta/2$ i $|z - z_0| \leq \delta$, aleshores $|z - \xi| < |z - z_0| + |z_0 - \xi| \leq 2\delta$ i, si δ és prou petit, aleshores $|f(z) - f(\xi)| < \varepsilon/2$. En resum,

$$\boxed{1} \leq \frac{\varepsilon/2}{2\pi} \int_{z \in \partial\mathbb{D}} P(z, z_0) |dz| \stackrel{(5.4)}{=} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per la part no local, fitem $|f(z) - f(\xi)| \leq 2 \sup |f|$ i usem (5.5) per inferir que

$$\boxed{2} \leq \frac{\sup |f|}{\pi} \int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0| > \delta} P(z, z_0) |dz| \stackrel{(5.5)}{\leq} \sup |f| \frac{C(1 - |z_0|)}{\delta}.$$

Si ara fixem primer δ per controlar la part local i després suposem que $|z_0 - \xi|$ és prou petit (i en particular $1 - |z_0| = |\xi| - |z_0| \leq |z_0 - \xi|$ és petit també) de manera que la part local estigui fitada per $\varepsilon/2$, inferim que

$$|u_f(z_0) - f(\xi)| \leq \varepsilon.$$

Finalment observem que el paràmetre δ escollit no depèn de ξ , i la fita de $|z_0 - \xi| < \frac{\delta\varepsilon}{2C \sup |f|}$ depèn de $\sup |f|$ i δ , però no de ξ . Per tant, la continuïtat trobada és uniforme en $\xi \in \partial\mathbb{D}$ i se'n dedueix ràpidament que $u_f \in C(\mathbb{D})$. $\square$

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Tot seguit donem una expressió alternativa de la solució del problema de Dirichlet sota hipòtesis extremes. Suposem que tenim una funció $u : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ contínua i harmònica en el disc, i anomenem $f(\theta) := u(e^{i\theta})$ als seus valors frontera. Aleshores sabem que

$$u(z) = F + \bar{G} \quad \text{amb } F, G \in H(\mathbb{D}),$$

on podem escollir $G(0) = 0$. De la teoria local de Cauchy, vam aprendre que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{i} \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

per $z \in \mathbb{D}$. Fem una suposició més. Suposem ara que

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| < +\infty \quad \text{i} \quad \sum_{n \geq 1} |b_n| < +\infty.$$

Aleshores, pel teorema d'Abel tenim convergència uniforme en $\bar{\mathbb{D}}$ i per tant podem dir que F i G són contínues al disc tancat, amb

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{i} \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

per a tot $z \in \bar{\mathbb{D}}$, i a més podem intercanviar límits: si $|z| = 1$ aleshores

$$u(z) = \lim_{r \rightarrow 1} u(rz) = \lim_{r \rightarrow 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n r^n \bar{z}^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \bar{z}^n.$$

Per la fórmula integral de Cauchy per a derivades, sabem l'expressió dels coeficients a_n en termes dels valors de F a discs $r\mathbb{D}$ amb $r < 1$ (i de b_n en termes de G):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(r\mathbb{D})} \frac{F(w)}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+1}} re^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} F(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta. \quad (5.6)$$

A més,

$$\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \bar{G}(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \overline{\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} G(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta} = \overline{\frac{1}{2\pi i r^{2n}} \int_{\partial(r\mathbb{D})} G(w) w^{(n-1)} dw}.$$

Si $n > 0$, pel teorema de Cauchy en un disc tenim que

$$\int_{\partial(r\mathbb{D})} G(w) w^{(n-1)} dw = 0.$$

Si, en canvi, $n = 0$, aleshores la fórmula integral de Cauchy ens permet arribar a la mateixa conclusió:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(r\mathbb{D})} G(w) w^{-1} dw = G(0) = 0.$$

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

En resum, tornant a (5.6) i usant la convergència uniforme de F i G ens permeten passar al límit:

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \xrightarrow{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Raonant anàlogament amb $\bar{u}$, per $n \geq 1$ obtenim

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

és a dir

$$\bar{b}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta.$$

Si anomenem ara, per $n \in \mathbb{Z}$ el *coeficient de Fourier*

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

el que hem vist és que

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(-n) \bar{z}^n, \quad (5.7)$$

i en particular, per $z = e^{i\theta}$ tenim

$$f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\theta},$$

amb convergència uniforme en $\theta \in [0, 2\pi]$.

Aquest raonament ens ha permès recuperar f en $\partial\mathbb{D}$ en termes dels coeficients de Fourier, que al seu torn estan determinades pels valors de f en $\partial\mathbb{D}$. Notem que en aquest raonament hem partit del fet que f és harmònica en el disc, contínua fins la frontera i les seves parts holomorfa i antiholomorfa tenen *a priori* bones propietats de convergència (convergència uniforme en la frontera). En general, donada una funció contínua $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, podem definir els coeficients de Fourier anteriors i la podem estendre de manera harmònica al disc mitjançant (5.7), però podem garantir-ne la continuïtat a la frontera? Podem garantir que $f(\theta)$ i $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\theta}$ definides com abans mantenen alguna relació? Aquest és el camp d'estudi de l'anàlisi de Fourier, que s'escapa de l'abast d'aquests apunts.

Exercicis

5.6.1. *Demostreu que*

$$\int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z - z_0| > \delta} P(z, z_0) |dz| \leq (1 - |z_0|) \mathcal{O}(1/\delta).$$

Indicació: Feu la integral en anells $2^j \delta < |z - z_0| \leq 2^{j+1} \delta$ i sumeu.

◁

5. *Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy*

6. Sèries de Laurent

En aquest capítol veurem com són les singularitats aïllades de les funcions holomorfes i estudiarem els desenvolupaments en sèrie entorn d'una singularitat. Obtindrem el teorema dels residus, que ens permetrà calcular integrals definides i indefinides que altrament serien complicades.

6.1. Sèries de Laurent i singularitats

Veurem tot seguit que tota funció holomorfa en un anell té un desenvolupament en sèrie de Laurent¹, que té una expressió formal similar a les sèries de potències, considerant també exponents negatius.

Sigui $a \in \mathbb{C}$, i siguin $0 \leq r < R \leq \infty$. Considerem l'anell

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}.$$

Observem que a Ω , són holomorfes les funcions $1, (z - a), (z - a)^2, \dots, (z - a)^n$, però també ho són les funcions $(z - a)^{-1}, (z - a)^{-2}, \dots, (z - a)^{-n}$.

Definició 6.1 (Sèrie de Laurent). Anomenem *sèrie de Laurent* al voltant d' $a \in \mathbb{C}$ una sèrie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

La part amb exponents negatius s'anomena la *part singular* de la sèrie de Laurent. •

Observem que $f_2(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ és una sèrie de potències que tindrà un radi de convergència R_2 , de manera que $f_2 \in H(D_{R_2}(a))$.

Considerem ara la sèrie que correspondria a les potències negatives, amb $w = \frac{1}{z-a}$, és a dir, estudiem la sèrie $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$. Aquesta és també una sèrie de potències, que tindrà el seu radi de convergència R_1 i, en particular, convergirà uniformement en $|w| \leq r$, per a tot $r < R_1$. Aleshores

$$f_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}$$

convergirà si $\frac{1}{|z-a|} < R_1$, és a dir, si $|z - a| > \frac{1}{R_1}$. I a més a més, la sèrie que defineix $f_1(z)$ convergeix uniformement en $\{|z - a| \geq 1/r\}$, on $r < R_1$.

¹Pierre Alphonse Laurent, París, 1813-1854, https://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre_Alphonse_Laurent

6. Sèries de Laurent

Ajuntant les dues parts de la sèrie de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$, veiem que f és holomorfa en l'anell $\{\frac{1}{R_1} < |z - a| < R_2\}$ (sempre que $1/R_1 < R_2$). El recíproc d'aquesta afirmació també és certa: tota funció holomorfa en un anell s'expressa com una sèrie de Laurent.

Teorema 6.2 (Existència i unicitat). *Sigui $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ amb $0 \leq r < R \leq \infty$, i sigui $f \in H(\Omega)$. Aleshores hi ha una única sèrie de Laurent amb*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n, \quad z \in \Omega.$$

A més, la sèrie convergeix absolutament i uniforme en els compactes d' Ω . En particular,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad \text{per qualsevol } \rho \in (r, R). \quad (6.1)$$

Demostració. Considerem les sèries $f_2(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n$ i $f_3(w) = \sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$ amb c_n donat per (6.1) (observem que el valor de ρ escollit no afecta, ja que si $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, els cercles $\gamma_{\rho_j}(t) = a + \rho_j e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$ són homòlegs en Ω , vegeu l'exemple 5.15), amb radis de convergència $R_2 = \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}$ i $R_3 = \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} \right)^{-1}$.

Notem en primer lloc que si $n \in \mathbb{Z}$ i $r < \rho < R$, aleshores

$$|c_n| \stackrel{\text{P.4.8}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{|w-a|=\rho} \frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}} |dw| \leq \frac{\sup_{\partial D_\rho(a)} |f|}{\rho^n}.$$

Per tant,

$$\frac{1}{R_2} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\sup_{\partial D_\rho(a)} |f|}}{\rho} = \frac{1}{\rho},$$

i

$$\frac{1}{R_3} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\sup_{\partial D_\rho(a)} |f|} \rho = \rho.$$

Com que $\rho \in (r, R)$ és arbitrari, deduïm que

$$R_1 := \frac{1}{R_3} \leq r \quad \text{i} \quad R \leq R_2.$$

Les sèries f_2 i f_3 convergeixen absolutament i uniforme en compactes dels seus discs de convergència $D_{R_2}(a)$ i $D_{R_3}(0)$ respectivament. Fent el canvi $w = (z - a)^{-1}$ en la segona sèrie deduïm que

$$f_1(z) := f_3((z - a)^{-1}) = \sum_{n \leq -1} c_n (z - a)^n$$

és convergent absolutament i uniforme en compactes de $\{|z - a| > R_1\}$. Per tant, $f_1 + f_2$ és convergent absolutament i uniforme en compactes d' Ω tal com volíem veure.

6. Sèries de Laurent

Resta demostrar que $f = f_1 + f_2$ i que la sèrie és única. Comencem per veure la coincidència. Fixem $z \in \Omega$. Prenem r_1, r_2 amb $r < r_1 < |z - a| < r_2 < R$, i considerem els cercles

$$\gamma_1(t) = a + r_1 e^{it}, \quad \gamma_2(t) = a + r_2 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Definim el cicle $\Gamma = \gamma_2 - \gamma_1$. Com que Γ és homòloga a 0 en l'anell Ω , i $\text{Ind}(\Gamma, z) = 1$, aplicant la fórmula integral de Cauchy global, obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Ara desenvoluparem en sèrie cadascuna de les dues integrals, de la mateixa manera que vam fer quan vam provar que tota funció holomorfa és localment una sèrie de potències, i ja haurem acabat. En primer lloc, per $w \in \gamma_2^*$, i com que $|z - a| < r_2 = |w - a|$, tenim que $\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = \frac{|z-a|}{r_2} < 1$. Per tant

$$\frac{1}{w - z} = \sum_{k \geq 0} \frac{(z - a)^k}{(w - a)^{k+1}},$$

i la convergència de la sèrie és uniforme en γ_2^* pel criteri M de Weierstrass. Per tant, podem treure el sumatori fora de la integral per obtenir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{k \geq 0} (z - a)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r_2} \frac{f(w)}{(w - a)^{k+1}} dw = f_2(z).$$

Per a la segona integral, procedim anàlogament: observem que, per $w \in \gamma_1^*$ tenim que $\left| \frac{w-a}{z-a} \right| = \frac{r_1}{|z-a|} < 1$. Per tant

$$\frac{1}{z - w} = \sum_{k \geq 1} \frac{(w - a)^{k-1}}{(z - a)^k}.$$

Aplicant el criteri M de Weierstrass, aquest cop en γ_1^* , deduïm que la sèrie anterior convergeix uniformement en γ_1^* i, per tant, podem treure el sumatori fora de la integral per obtenir

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z - a)^k} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r_1} f(w) (w - a)^{k-1} dw \right) = f_1(z).$$

Vegem ara la unicitat. Prenem ρ amb $r < \rho < R$. Recordem que, per $k \in \mathbb{Z}$, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} (z - a)^k dz = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -1 \\ 1 & \text{si } k = -1 \end{cases}$$

Si $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k (z - a)^k$ convergeix uniformement en els compactes d' Ω (això serà així per Cauchy-Hadamard), llavors podem treure el sumatori fora de la integral en el càlcul que segueix, per obtenir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} (w - a)^{k-(n+1)} dw = b_n,$$

que determina el coeficient $b_n = c_n$ de manera única. $\square$

Exercicis**6.1.1.** *Calcular la sèrie de Laurent de*

$$a) \frac{z-1}{z(z-4)^3} \text{ a } 0 < |z-4| < 4.$$

$$b) 1/e^{(1-1/z)} \text{ per } |z| > 0.$$

<

6.1.2. *Per a la funció $f(z) = \frac{\sin z \cos 3z}{z^4}$*

1. *Trobar els primers termes no nuls de la part central de la seva sèrie de Laurent a $z = 0$.*

2. *Calcular $\oint f(z)dz$ si es recorre $|z| = 1$ un cop i en sentit antihorari.*

<

6.1.3. *Trobeu el desenvolupament en sèrie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ a les corones:*

(a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, (b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$, (c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ i (d) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$.

<

6.1.4. *Segui $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$, donar les sèries de Laurent per les tres corones centrades a 0 allà on f és analítica ($|z| < 1$, $1 < |z| < 3$ i $|z| > 3$).*

<

6.1.5. *Donar els primers termes de la sèrie de Laurent de*

$$a) f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{3z}\right) \text{ per } |z| > 0.$$

$$b) f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \text{ per } 0 < |z| < R.$$

<

6.1.6. *Quina és la corona (o anell) de convergència de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$?*

<

6.2. Singularitats aïllades de funcions holomorfes

Definició 6.3. Segui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i considerem un subconjunt $E \subset \Omega$. Si $f \in H(\Omega \setminus E)$ i no està definida en els punts de E (o bé hi està definida però no hi és $\mathbb{C}$ -derivable), aleshores diem que E són les *singularitats* de f en Ω .

Una singularitat z_0 d'una funció holomorfa f es diu *aïllada* si hi ha $r > 0$ de manera que $f \in H(D_r(z_0) \setminus \{z_0\})$. •

Per exemple, les funcions

$$\frac{\sin z}{z}; \quad \frac{1}{z^2}; \quad e^{1/z}$$

són holomorfes a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, i tenen una singularitat aïllada en $z = 0$.

6. Sèries de Laurent

Definició 6.4 (Singularitat evitable). Sigui z_0 una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f . Diem que z_0 és una *singularitat evitable* de f si hi ha $\varepsilon > 0$ i $g \in H(D_\varepsilon(z_0))$ amb

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad \bullet$$

És a dir, una singularitat evitable seria una singularitat “fictícia”, ja que podríem redefinir la funció de manera que sigui holomorfa al voltant del punt. És clar que si z_0 és una singularitat aïllada de f , i existeix $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, llavors z_0 és una singularitat evitable de f (simplement definint $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$). Ara bé, existeix un criteri encara més feble per determinar quan una singularitat aïllada és evitable.

Proposició 6.5. *Sigui z_0 singularitat aïllada d'una funció holomorfa f . Llavors z_0 és evitable si i només si*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Demostració. Tenim que $f \in H(D_r(z_0) \setminus \{z_0\})$. Si z_0 és una singularitat evitable, llavors hi ha $\varepsilon > 0$ i $g \in H(D_\varepsilon(z_0))$ amb $f(z) = g(z)$ per $z \in D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. Per tant

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = 0 \cdot g(z_0) = 0.$$

Suposem ara que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$, i provarem que z_0 és una singularitat evitable de f . Definim

$$h(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}.$$

Llavors h és holomorfa en $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Com que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$, la funció h és contínua en z_0 , de manera que se segueix que h és holomorfa en $D_r(z_0)$ (veure una de les conseqüències del teorema de Morera). Com que $h(z_0) = 0$, pel teorema 4.42 hi ha $g \in H(D_r(z_0))$ amb $h(z) = (z - z_0)g(z)$. En particular, $f(z) = g(z)$ per $z \neq z_0$, de manera que z_0 és una singularitat evitable de f . $\square$

A partir d'aquesta proposició ja podem veure que la funció $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ té una singularitat evitable en $z = 0$. En canvi, les singularitats en $z = 0$ de les funcions $\frac{1}{z^2}$ i $e^{1/z}$ no són evitables.

Definició 6.6 (Pol). Sigui z_0 una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f . Diem que z_0 és un *pol* de f si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty. \quad \bullet$$

Exemple 6.7. La funció $\frac{1}{z^2}$ té un pol en $z = 0$. En canvi, la singularitat en $z = 0$ de la funció $f(z) = e^{1/z}$ no és evitable ni és un pol, ja que si $z = -x$, tenim que $e^{-1/x} \rightarrow 0$ quan $x \rightarrow 0$, i en canvi, per $z = ix$, tenim que $|e^{1/ix}| = 1$. $\diamond$

Definició 6.8 (Singularitat essencial). Una singularitat aïllada d'una funció holomorfa que no és evitable ni és un pol es diu que és una *singularitat essencial*. $\bullet$

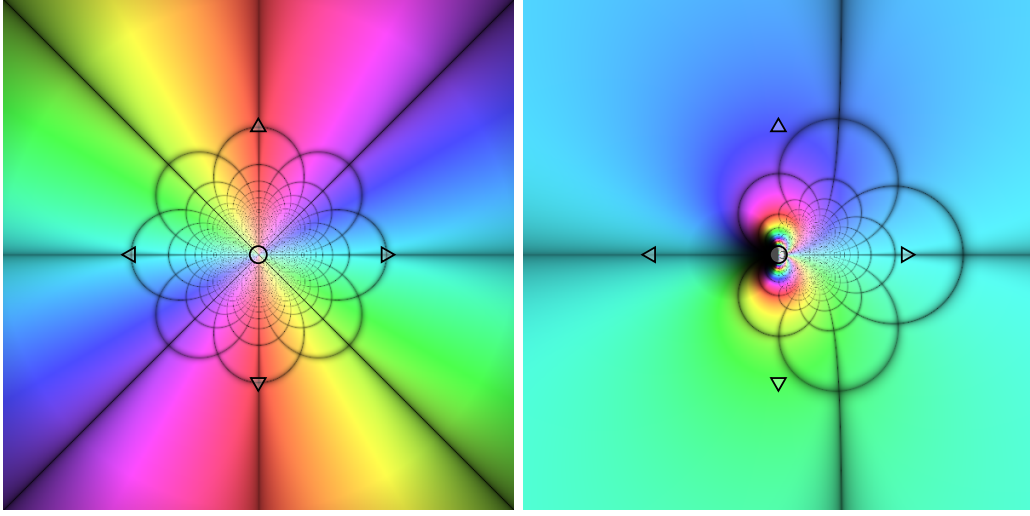


Figura 6.1.: A l'esquerra la funció $\frac{1}{z^2}$, amb un pol d'ordre 2 a l'origen; a la dreta $f(z) = e^{1/z}$, amb una singularitat essencial a l'origen.

Tornem al cas en què una funció f holomorfa en $D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ tingui un pol en el punt z_0 . Donat que $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, existeix $0 < r < R$ i per a tot $0 < |z - z_0| < r$, $f(z) \neq 0$. Si definim en $\Omega = D_r(z_0)$ la funció

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases},$$

es compleix que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, que prova que g és contínua en z_0 . Per tant, $g \in C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{z_0\})$, que implica que $g \in H(\Omega)$. Com que $g(z_0) = 0$, pel teorema 4.42 hi ha $m \in \mathbb{N}$ de manera que $g(z) = (z - z_0)^m g_1(z)$, on $g_1 \in H(\Omega)$ amb $g_1(z_0) \neq 0$. En particular, $g_1(z) \neq 0$ en un entorn de z_0 , de manera que podem desenvolupar en sèrie de potències al voltant de z_0 la funció $1/g_1$,

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k.$$

Llavors, per z en un entorn de z_0 amb $z \neq z_0$, tenim que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{g_1(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k \\ &= \frac{A_0}{(z - z_0)^m} + \frac{A_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{(z - z_0)} + G(z), \end{aligned}$$

on G és una sèrie de potències al voltant de z_0 , i $A_0 \neq 0$.

6. Sèries de Laurent

Definició 6.9. Donada una funció f amb un pol en z_0 , anomenem *ordre del pol* z_0 el nombre natural m tal que podem escriure

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

amb $c_{-m} \neq 0$. •

Per exemple, la funció $f(z) = \frac{1}{z^2}$ té un pol d'ordre 2 en $z = 0$.

També veiem que z_0 és un pol de f d'ordre m , si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0)^k f(z)| = +\infty, \quad \text{per a tot } k < m,$$

i existeix el límit

$$c_{-m} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0.$$

Si tenim una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f , podem veure quin tipus de singularitat és mitjançant la sèrie de Laurent de f en $0 < |z - z_0| < r$.

Lema 6.10 (Classificació de singularitats aïllades en termes de la sèrie de Laurent). *Sigui f holomorfa en $\{0 < |z - z_0| < r\}$ amb sèrie de Laurent donada per*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

(i) z_0 és evitable si i només si $c_{-n} = 0$ per a tot $n \geq 1$;

(ii) z_0 és un pol d'ordre m si i només si $c_{-n} = 0$ per a tot $n > m$ i $c_{-m} \neq 0$;

(iii) z_0 és una singularitat essencial si i només si hi ha infinits $c_{-n} \neq 0$ per $n > 0$.

El següent resultat ens dona una idea del que passa al voltant d'una singularitat essencial d'una funció holomorfa.

Teorema 6.11 (Casorati²-Weierstrass). *Sigui f holomorfa en $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Si z_0 és una singularitat essencial de f , llavors*

$$f(D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$$

és dens en $\mathbb{C}$ per a tot $0 < \varepsilon \leq r$.

Demostració. Sigui ε amb $0 < \varepsilon \leq r$. Suposem que $f(D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ no és dens en $\mathbb{C}$. Aleshores hi ha $w_0 \in \mathbb{C}$ i $t > 0$ de manera que

$$|f(z) - w_0| \geq t \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon. \quad (6.2)$$

²Felice Casorati, Pavia, 1835–1890, https://ca.wikipedia.org/wiki/Felice_Casorati

6. Sèries de Laurent

En particular, $f(z) \neq w_0$ i, per tant, la funció

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

és holomorfa en $D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. La condició (6.2) ens diu també que g és fitada, de manera que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = 0$, que implica que $\{z_0\}$ és una singularitat evitable de g per la proposició 6.5. Llavors existeix

$$\alpha = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - w_0}.$$

Si $\alpha = 0$, llavors $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, de manera que z_0 seria un pol de f , en contradicció amb la nostra hipòtesi. Finalment, si $\alpha \neq 0$, llavors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 + \frac{1}{\alpha}$$

de manera que z_0 seria una singularitat evitable de f , en contradicció amb el fet que z_0 és una singularitat essencial de f . $\square$

Un resultat més avançat (teorema gran de Picard³), ens diu que al voltant d'una singularitat essencial, una funció holomorfa pren tots els valors complexos excepte potser un.

Exercicis

6.2.1. Construcció de funcions

1. Trobar una funció f que tingui un pol d'ordre 2 a $z = 1 + i$ i singularitats essencials a $z = 0, 1$.
2. Trobar una funció f que tingui una singularitat evitable a $z = 0$, un pol d'ordre 6 a $z = 1$ i una singularitat essencial a $z = i$. $\triangleleft$

6.2.2. Sigui f analítica amb zero d'ordre n a z_0 i g analítica amb zero d'ordre m a z_0 . Si $h(z) = f(z)/g(z)$ proveu que

- a) si $n > m$ $h(z)$ té un zero d'ordre $n - m$ a z_0 ,
- b) si $n < m$ $h(z)$ té un pol d'ordre $m - n$ a z_0 ,
- c) si $n = m$ $h(z)$ s'estén a una funció holomorfa i no nul·la a z_0 . $\triangleleft$

6.2.3. Determineu les singularitats de les funcions següents. Si a és una singularitat evitable de f , calculeu el valor que cal donar a $f(a)$ per tal que f sigui holomorfa en un entorn d' a , i si a és un pol de f , determineu la part singular de f en a (la part de la sèrie amb índexs negatius).

³Charles Émile Picard, París, 1856–1941, https://ca.wikipedia.org/wiki/Charles_%C3%89mile_Picard

6. Sèries de Laurent

- a) $f(z) = z \cos(1/z)$. c) $f(z) = \frac{1}{(1 - e^z)^2}$. $\triangleleft$
 b) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3(z - 1)^2}$.

6.2.4. Sigui $f \in H(D_r(a) \setminus \{a\})$. Supposem que existeix una successió $(z_n)_n$ tal que $z_n \rightarrow a$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e^{f(z_n)}| = 0, \quad \left| f\left(z_n + \frac{1}{n}\right) \right| \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determineu el tipus de singularitat que té la funció f en el punt a . $\triangleleft$

6.2.5. a) La funció $\tan(1/z)$ té una singularitat aïllada al 0? De quin tipus?

b) Sigui 0 singularitat aïllada de $f(z)$. Supposem que $|f(z)| \leq |z|^{-\alpha}$ on $0 < \alpha < 1$.
 Demostreu que 0 és una singularitat evitable. $\triangleleft$

6.3. Teorema dels Residus

L'objectiu és calcular el valor de $\int_{\gamma} f$ quan γ és un camí tancat en Ω , però la funció f no és holomorfa en tot Ω , sinó que té singularitats aïllades.

Definició 6.12. Sigui f holomorfa amb una singularitat aïllada en un punt a . Sigui

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$$

el desenvolupament en sèrie de Laurent de f al voltant del punt a . El *residu* de f en a és

$$\text{Res}(f, a) = c_{-1}. \quad \bullet$$

Proposició 6.13. Sigui $r > 0$ i $a \in \mathbb{C}$ i sigui $f \in H(D_r(a) \setminus \{a\})$. Llavors

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, a) \quad \forall 0 < \varepsilon < r.$$

Demostració. Això és una conseqüència immediata del teorema 6.2 i de la definició de residu. $\square$

Observació 6.14 (Càlcul de residus). És clar que si $z = a$ és una singularitat evitable de f , llavors $\text{Res}(f, a) = 0$.

Si $z = a$ és un pol simple de f , llavors

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z).$$

6. Sèries de Laurent

Suposem que $z = a$ és un pol de f d'ordre m . En aquest cas, obtenim el desenvolupament de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r.$$

Llavors, per $0 < |z-a| < r$, tenim que

$$g(z) := (z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-(m-1)}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + \cdots$$

de manera que el residu de f en el punt a és el coeficient $(m-1)$ -èsim del desenvolupament en sèrie de potències de la funció g , que sabem que és

$$\frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

Per tant, si $z = a$ és un pol de f d'ordre m , llavors

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \partial^{(m-1)} [(z-a)^m f(z)]_{z=a}. \quad \bullet$$

Exemple 6.15. Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2-1)^2},$$

que té singularitats en els punts $z_0 = 1$ i $z_1 = -1$, que són pols d'ordre 2. Llavors, si $g(z) = (z-1)^2 f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2}$, tenim que

$$\text{Res}(f, 1) = g'(1) = 0.$$

Si $h(z) = (z+1)^2 f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, llavors $h'(z) = \frac{e^z(z-1)-2e^z}{(z-1)^3}$ i

$$\text{Res}(f, -1) = h'(-1) = \frac{1}{2e}. \quad \diamond$$

Teorema 6.16 (Teorema dels residus). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i sigui $f \in H(\Omega \setminus A)$, on $A \subset \Omega$ no té punts d'acumulació en Ω . Si Γ és un cicle en $\Omega \setminus A$ que és homòleg a 0 en Ω , llavors*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Ind}(\Gamma, a) \text{Res}(f, a).$$

Demostració. Vegem primer que la suma té un nombre finit de termes diferents de zero. Posem

$$K = \Gamma^* \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*; \text{Ind}(\Gamma, z) \neq 0\}.$$

Comprovem que K és compacte. Observem primer que $K \subset \Omega$, ja que per hipòtesi $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per a tot $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Si R és prou gran, llavors $\Gamma^* \subset D_R(0)$ i $\mathbb{C} \setminus D_R(0)$ està contingut en la component connexa no fitada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, on es verifica que $\text{Ind}(\Gamma, \cdot) = 0$. Per

6. Sèries de Laurent

tant, $K \subset D_R(0)$ i, en particular, K és **fitat**. D'altra banda, cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ és un obert i K és el complementari de les components connexes de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ on l'índex val zero, és a dir, K és **tancat** i, en conseqüència, K és compacte.

Com que A no té punts d'acumulació en Ω , és finit o numerable i, en particular,

$$B = \{a \in A : \text{Ind}(\Gamma, a) \neq 0\} = K \cap A,$$

és finit ja que el compacte $K \subset \Omega$ no pot contenir punts d'acumulació. Per tant

$$B = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Considerem els discs oberts $D_i := D_{\varepsilon_i}(a_i)$, $i = 1, \dots, n$ amb $\overline{D_i} \cap (A \setminus \{a_i\}) = \emptyset$ de manera que

- (i) $\overline{D_{\varepsilon_i}(a_i)} \subset \Omega$, $i = 1, \dots, n$;
- (ii) $D_{\varepsilon_i}(a_i) \cap \Gamma^* = \emptyset$, $i = 1, \dots, n$;
- (iii) $\overline{D_{\varepsilon_i}(a_i)} \cap \overline{D_{\varepsilon_j}(a_j)} = \emptyset$ per $i \neq j$.

Per $i = 1, \dots, n$, siguin $\gamma_i(t) = a_i + \varepsilon_i e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, cercles de centre a_i i radi ε_i , i considerem el cicle

$$\Lambda = \Gamma - \sum_{i=1}^n n_i \gamma_i, \quad n_i = \text{Ind}(\Gamma, a_i).$$

Llavors Λ és un cicle en $\Omega \setminus A$. Vegem que és homòleg a 0 en $\Omega \setminus A$. Hem de veure que

$$\text{Ind}(\Lambda, z) = 0 \quad \text{per a tot } z \notin (\Omega \setminus A).$$

Si $z \notin \Omega$, llavors $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$, ja que Γ és homòleg a 0 en Ω . També, per $i = 1, \dots, n$, tenim que $\text{Ind}(\gamma_i, z) = 0$, ja que z pertany a la component no fitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma_i^*$, de manera que $\text{Ind}(\Lambda, z) = 0$.

Si $z \in A \setminus B$, llavors $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per la definició del conjunt B . A més, també $\text{Ind}(\gamma_i, z) = 0$ per a tot $i = 1, \dots, n$ ja que z es troba a l'exterior del cercle γ_i . Per tant, $\text{Ind}(\Lambda, z) = 0$.

Si $z \in B$, llavors $z = a_k$ per algun $1 \leq k \leq n$. Com que $\text{Ind}(\gamma_i, a_k) = 0$ si $i \neq k$, i $\text{Ind}(\gamma_k, a_k) = 1$, tenim que

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\Lambda, z) &= \text{Ind}(\Lambda, a_k) = \text{Ind}(\Gamma, a_k) - \sum_{i=1}^n n_i \text{Ind}(\gamma_i, a_k) \\ &= \text{Ind}(\Gamma, a_k) - n_k = \text{Ind}(\Gamma, a_k) - \text{Ind}(\Gamma, a_k) = 0. \end{aligned}$$

Així doncs, tenim una funció $f \in H(\Omega \setminus A)$, i Λ és un cicle en $\Omega \setminus A$ que és homòleg a 0 en $\Omega \setminus A$. Pel teorema de Cauchy global, tenim que

$$\int_{\Lambda} f(z) dz = 0.$$

6. Sèries de Laurent

És a dir,

$$0 = \int_{\Lambda} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{i=1}^n n_i \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

Per la proposició 6.13, tenim que

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_i),$$

de manera que, com que $n_i = \operatorname{Ind}(\Gamma, a_i)$, tenim que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Ind}(\Gamma, a_i) \operatorname{Res}(f, a_i). \quad \square$$

Moltes vegades aplicarem el teorema dels residus quan tinguem una funció holomorfa amb un nombre finit de singularitats $\{a_1, \dots, a_n\}$ dins d'una corba γ tancada simple orientada positivament, així que els índexs d'aquests punts valen 1. En aquest cas el teorema dels residus ens diu que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f, a_i).$$

Exercicis

6.3.1. *Existeix alguna funció f amb pol simple a z_0 tal que $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$? Què passa si el pol és d'ordre 2, pot passar que $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$?* $\triangleleft$

6.3.2. *Calculeu els residus de les funcions següents en els punts indicats:*

a) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}, z_0 = 0.$

b) $f(z) = \frac{1 + e^z}{z^4}, z_0 = 0.$ $\triangleleft$

6.3.3. *Calculeu $\int_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{z-a} dz$ pels diferents valors d' $a \in \mathbb{C}$ tals que $|a| \neq 1$.* $\triangleleft$

6.3.4. *Decidiu si són certes o falses les següents afirmacions. Doneu els arguments que provin les afirmacions.*

1. Si f, g tenen un pol a z_0 llavors $f + g$ té un pol a z_0 .
2. Si f, g tenen un pol a z_0 i en els dos casos el residu és no nul llavors $f \cdot g$ té un pol a z_0 amb residu no nul.
3. Si f té una singularitat essencial a $z = 0$ i g un pol d'ordre finit a $z = 0$ llavors $f + g$ té singularitat essencial a $z = 0$.

6. Sèries de Laurent

4. Si f té un pol d'ordre m a $z = 0$ llavors $f(z^2)$ té un pol d'ordre $2m$. ◁

6.3.5. Supposem que f és holomorfa amb un zero d'ordre m a z_0 . Proveu que $g(z) = f'(z)/f(z)$ té un pol simple a z_0 amb $\text{Res}(g, z_0) = m$. ◁

6.3.6. a) Proveu que si $g(z)$ té un zero simple a z_0 , llavors $1/g(z)$ té un pol simple a z_0 .

b) Proveu que $\text{Res}(1/g, z_0) = 1/g'(z_0)$.

c) Sigui $f(z) = 1/\sin(z)$, trobeu els seus pols i proveu que són simples. Trobeu els residus. ◁

6.3.7. Trobeu i classifiqueu les singularitats aïllades de cadascuna de les funcions següents. Calculeu el residu a cada singularitat.

a) $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2(z + 1)}.$

b) $g(z) = \frac{1}{e^z - 1}.$

c) $h(z) = \cos(1 - 1/z).$ ◁

6.3.8. Avalueu $\oint \frac{1}{(z+1)(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)} dz$ al llarg de la corba $|z-3| = 3$ recorreguda en sentit antihorari. ◁

6.3.9. Avalueu les següents integrals

a) $\oint_{|z|=5} \frac{\sin z}{z^2 - 4} dz,$

c) $\oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z^2(z-2)(z+5i)} dz.$ ◁

b) $\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz,$

6.3.10. Calculeu la integral de la funció $f(z) = \frac{1+z}{1+\sin z}$ sobre la vora del disc $D_7(0)$. ◁

6.3.11. Per a $t > 0$, sigui C_t la circumferència de centre it , que passa pels punts -2 i 2 . Calculeu

$$f(t) = \int_{C_t} \frac{e^{i\pi z} + 1}{z(z-t)} dz, \quad \text{per a } t \neq 2. \quad \text{◁}$$

6.4. Residu a l'infinit

Una funció holomorfa en un domini que contingui un entorn de l'infinit i tal que $f(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ es pot entendre que hi té un pol. Si $f(\infty) \in \mathbb{C}$, parlarem d'una singularitat evitable, i si $\nexists f(\infty)$, d'una singularitat essencial. El teorema dels residus ens permet també relacionar el residu en aquesta singularitat amb els residus en $\mathbb{C}$.

Definició 6.17. Sigui f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus E$ amb un conjunt finit de singularitats aïllades E , i sigui Γ una corba simple tancada orientada positivament i tal que tots els punts de E queden a l'interior de Γ . Aleshores el *residu de f a l'infinit* és

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz. \quad \bullet$$

Pel teorema dels residus, si A és el conjunt de singularitats aïllades de f en $\mathbb{C}$, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = - \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f, a),$$

ja que $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 1$ per hipòtesi.

Lema 6.18. Sigui f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus E$ amb un conjunt finit de singularitats aïllades E . Aleshores el residu de f a l'infinit és

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = - \operatorname{Res} \left(\frac{1}{w^2} f \left(\frac{1}{w} \right), 0 \right).$$

Demostració. Fem el canvi de variable $w = 1/z$. Sigui C_t la circumferència de radi t , recorreguda en sentit antihorari. Si R és tal que C_R conté totes les singularitats, aleshores trobem

$$-2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = \int_{C_R} f(z) dz = \int_{C_{1/R}^-} f \left(\frac{1}{w} \right) \frac{-dw}{w^2},$$

on $C_{1/R}^-$ és la corba inversa de $C_{1/R}$, vegeu la definició 4.2. Canviant-ne l'orientació trobem

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_{1/R}} f \left(\frac{1}{w} \right) \frac{dw}{w^2} \stackrel{\text{T 6.16}}{=} - \operatorname{Res} \left(\frac{1}{w^2} f \left(\frac{1}{w} \right), 0 \right),$$

tal com volíem veure. □

Exercicis

6.4.1. Trobar el valor la integral $\oint_{|z|=2} \frac{5z-1}{z(z-1)} dz$ calculant el residu de l'integrand a l'infinit. ◁

6.4.2. Sigui $a \in \mathbb{R}$, calculeu, estudiant el residu a l'infinit, $I = \oint_C \frac{a^2 - z^2}{z(z^2 + a^2)} dz$ on C és una corba simple que envolta les singularitats de l'integrand. ◁

6.4.3. Avaluar $\oint_{|z|=1} e^{1/z} \sin(1/z) dz$. ◁

6.5. Aplicació al càlcul d'integrals

El teorema dels residus es pot fer servir per calcular diverses integrals reals. Farem diversos exemples típics.

Exemple 6.19. Tenim una funció racional R sense singularitats en $|z| = 1$, i volem calcular

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt.$$

Fent el canvi $z = e^{it}$, podem posar

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}; \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}.$$

Com que $dz = ie^{it} dt$, llavors $dt = \frac{dz}{iz}$, de manera que

$$I = \frac{1}{i} \int_{\gamma} R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{z},$$

on γ és el cercle $|z| = 1$. Ara apliquem el teorema dels residus i ja està.

Per exemple,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}.$$

Fent el canvi $z = e^{it}$, tenim que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz.$$

La funció

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

té singularitats en els punts $\alpha = (-2 + \sqrt{3})i$ i $\beta = (-2 - \sqrt{3})i$. Tenim que $|\alpha| < 1$ i $|\beta| > 1$, així que aplicant el teorema dels residus, tenim que

$$\int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \alpha).$$

Com que α és un pol simple de f , tenim que

$$\operatorname{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{2}{z - \beta} = \frac{2}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{3}i}.$$

Per tant,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

◇

Exemple 6.20. Càlcul d'integrals del tipus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx$$

on f no té cap pol en l'eix real.

Per exemple, donat $k > 0$, calculem

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2} dx.$$

Tenim

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx \right).$$

Així doncs, calcularem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx.$$

Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + k^2}.$$

Aquesta funció és holomorfa a tot $\mathbb{C}$, excepte en els punts ki , $-ki$ que són pols de f d'ordre 1. Prenem $R > 0$ molt gran, de manera que $R > k$. Integrem la funció f en el semicercle γ format pel segment $\gamma_1(x) = x$, amb $x \in [-R, R]$ i $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Com que només

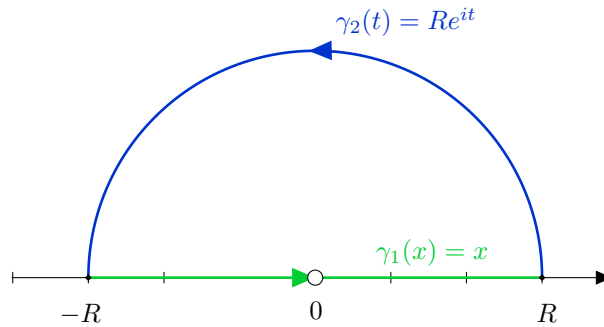


Figura 6.2.: Camins per l'exemple 6.20.

el punt ki es troba en l'interior del semicercle, pel teorema dels residus, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ki).$$

Calculem ara el residu de f en el punt ki . Com que és un pol d'ordre 1, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, ki) = \lim_{z \rightarrow ki} (z - ki) f(z) = \lim_{z \rightarrow ki} \frac{e^{iz}}{z + ki} = \frac{e^{iki}}{2ki},$$

6. Sèries de Laurent

així que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{\pi}{k} e^{-k}.$$

D'altra banda, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx.$$

Fent $R \rightarrow \infty$, obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{\pi}{k} e^{-k},$$

on

$$I_R = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Si veiem que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$, aleshores obtindrem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx = \frac{\pi}{k} e^{-k} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2} dx = \frac{\pi}{2k} e^{-k}.$$

Provem doncs que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$. Tenim que

$$I_R = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{R^2 e^{2it} + k^2} Ri e^{it} dt.$$

Llavors

$$|I_R| \leq \int_0^{\pi} \frac{|e^{iRe^{it}}|}{|R^2 e^{2it} + k^2|} R dt.$$

Com que $|e^{iRe^{it}}| = e^{-R \sin t}$, fent servir que $|R^2 e^{2it} + k^2| \geq R^2 - k^2$, i que $\sin t \geq 0$ per $t \in [0, \pi]$, veiem que

$$|I_R| \leq \frac{R}{R^2 - k^2} \int_0^{\pi} e^{-R \sin t} dt \leq \frac{\pi R}{R^2 - k^2} \rightarrow 0$$

quan $R \rightarrow \infty$, provant el resultat desitjat. $\diamond$

Exemple 6.21. Si f té algun pol en l'eix real, evitem el pol. Per exemple, calculem

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Integrant per parts, es pot veure que aquesta integral impròpia és convergent (encara que no és absolutament convergent). Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z},$$

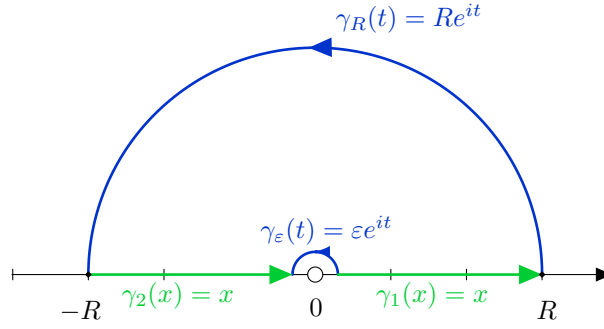


Figura 6.3.: Camins per l'exemple 6.21.

que és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Integrem f en el camí γ de la següent figura. Pel teorema de Cauchy, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

D'altra banda, com que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 - \gamma_{\varepsilon}$, amb $\gamma_1(x) = x$ per $x \in [\varepsilon, R]$; $\gamma_2(y) = y$ per $y \in [-R, -\varepsilon]$; $\gamma_R(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \pi]$ i $\gamma_{\varepsilon}(t) = \varepsilon e^{it}$ per $t \in [0, \pi]$, tenim que

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz.$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

També, després de fer el canvi $x = -y$, tenim que

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iy}}{y} dy = - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx.$$

Per tant, per a $0 < \varepsilon < R$, tenim

$$0 = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx + I_R - I_{\varepsilon}.$$

Això és,

$$0 = 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx + I_R - I_{\varepsilon}.$$

Fent primer $R \rightarrow +\infty$ i després $\varepsilon \rightarrow 0$, i usant que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$ (vegeu l'exercici 6.5.1), obtenim

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}.$$

Tot plegat ens dona que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}.$$

6. Sèries de Laurent

Vegem ara que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(e^{iz} - 1)}{z} dz = 0.$$

Efectivament, per $|z| = \varepsilon$ amb $0 < \varepsilon < 1$ tenim que

$$\left| \frac{e^{iz} - 1}{z} \right| \leq \frac{e^{|z|} - 1}{|z|} \leq e^{|z|} = e^\varepsilon \leq e$$

(aquestes desigualtats es poden veure a partir del desenvolupament en sèrie de l'exponencial) i, per tant,

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(e^{iz} - 1)}{z} dz \right| \leq e \operatorname{Long}(\gamma_\varepsilon) = e \pi \varepsilon,$$

que tendeix a zero quan ε tendeix a zero.

Això implica que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{i \varepsilon e^{it} dt}{\varepsilon e^{it}} = \pi i.$$

Per tant

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad \diamond$$

Observació 6.22. Si R és una funció racional sense pols a l'eix real i

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zR(z) = 0$$

(és a dir, si $R = P/Q$ amb $\deg Q \geq \deg P + 2$), aleshores podem calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$$

integrant R sobre un semicercle del semiplà superior i fent tendir el radi a infinit. Vegeu l'exercici 6.5.3. •

Exemple 6.23. Càlcul de

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}, \quad n \geq 2.$$

Aquesta integral és convergent ja que $n > 1$. Considerem la funció

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n},$$

que és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ excepte en les solucions de $z^n + 1 = 0$, és a dir, en

$$a_k = e^{i(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Integrem la funció f en el “formatget” γ del dibuix, amb $R > 1$ gran. Només el pol a_0 es

6. Sèries de Laurent

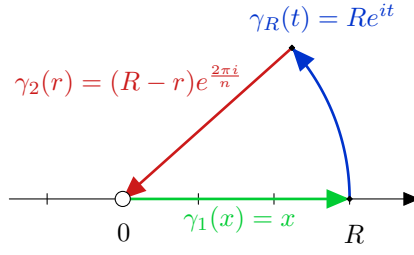


Figura 6.4.: Camins per l'exemple 6.23.

troba en l'interior del camí γ , de manera que, pel teorema dels residus,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_0).$$

Com que $a_0 = e^{\pi i/n}$ és un zero simple de $1 + z^n$, tenim

$$\operatorname{Res}(f, a_0) = \frac{1}{na_0^{n-1}}.$$

Com que $a_0^n = -1$, això també es pot escriure com

$$\operatorname{Res}(f, a_0) = -\frac{a_0}{n}.$$

Per tant,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -\frac{2\pi i}{n} e^{\pi i/n}.$$

D'altra banda, si $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi/n]$, aleshores

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi}{n} \frac{R}{R^n - 1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

A més,

$$\int_{[0,R]} f(z) dz = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n},$$

mentre que, en el segment radial inclinat, posant $z = te^{2\pi i/n}$,

$$\int_{[0, Re^{2\pi i/n}]} f(z) dz = e^{2\pi i/n} \int_0^R \frac{dt}{1+t^n}.$$

Tenint en compte l'orientació del contorn, obtenim, fent $R \rightarrow +\infty$,

$$(1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2\pi i}{n} e^{\pi i/n}.$$

6. Sèries de Laurent

Finalment, com que

$$1 - e^{2\pi i/n} = -2ie^{\pi i/n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

deduïm

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}.$$

◇

Exemple 6.24. Per $0 < \alpha < 1$, podem calcular

$$\int_0^\infty \frac{Q(x)}{x^\alpha} dx$$

on Q no té cap pol en $\{0\} \cup \mathbb{R}^+$ amb $\lim_{z \rightarrow \infty} zQ(z) = 0$.

En aquest cas, considerem la funció

$$f(z) = Q(z) z^{-\alpha}, \quad z^{-\alpha} = e^{-\alpha \mathcal{L}z},$$

amb $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$, amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$. Llavors $z^{-\alpha}$ és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Sobre la vora superior del tall,

$$z^{-\alpha} \rightarrow x^{-\alpha},$$

mentre que sobre la vora inferior,

$$z^{-\alpha} \rightarrow e^{-2\pi i\alpha} x^{-\alpha}.$$

. En aquest cas, integrem f en el recinte “comecocos” γ de la figura 6.5.

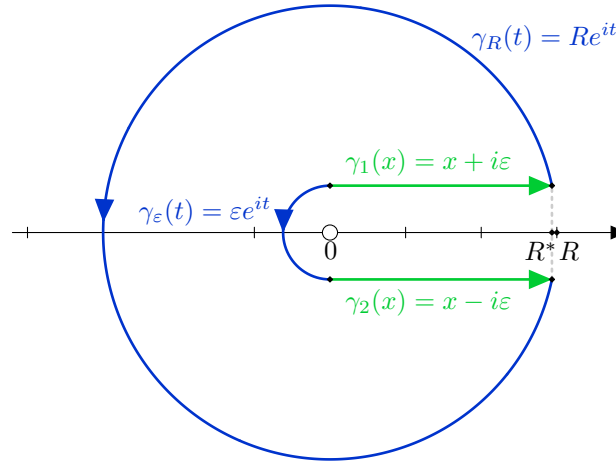


Figura 6.5.: Camins per l'exemple 6.24.

6. Sèries de Laurent

Tenim $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R - \gamma_2 - \gamma_\varepsilon$, amb

$$\begin{aligned}\gamma_1(x) &= x + i\varepsilon, & \text{per } x \in [0, R^*]; \\ \gamma_R(t) &= Re^{it}, & \text{per } t \in [\varepsilon^*, 2\pi - \varepsilon^*]; \\ \gamma_2(x) &= x - i\varepsilon, & \text{per } x \in [0, R^*]; \\ \gamma_\varepsilon(t) &= \varepsilon e^{it}, & \text{per } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

Així, si veiem que els arcs exterior i interior no contribueixen en el límit, el teorema dels residus dona

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_0^\infty \frac{Q(x)}{x^\alpha} dx = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Res}(Q(z)z^{-\alpha}, a),$$

on A és el conjunt de pols de Q en $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, vegeu l'exercici 6.5.5. $\diamond$

Exemple 6.25. Calcular integrals del tipus

$$\int_0^\infty R(x) \ln x \, dx,$$

on R no té cap pol en $\mathbb{R}^+$ i si $R = P/Q$, grau $Q \geq \text{grau } P + 2$.

Observem, primer, que si raonem com en els casos anteriors i agafem la funció $g(z) = R(z) \mathcal{L}z$ on $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$ amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$, i integrem la funció g en la regió “comecocos” del cas anterior, es compleix que $z \in \gamma_1^*$, $z = x + i\varepsilon$, així que $\mathcal{L}z \rightarrow \ln x$ si $\varepsilon \rightarrow 0$ i si $z \in \gamma_3^*$, $z = x - i\varepsilon$, de manera que $\mathcal{L}z \rightarrow \ln x + 2\pi i$ si $\varepsilon \rightarrow 0$. Tot plegat ens dona que si $z = x + i\varepsilon$, amb $x > 0$, $g(x + i\varepsilon) \rightarrow R(x) \ln x$, i $g(x - i\varepsilon) \rightarrow R(x)(\ln x + 2\pi i)$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$ i, com que els camins es recorren en sentits oposats, la part corresponent a $R(x) \ln(x)$ es cancel·la, i no podem calcular la integral desitjada.

Per aquest motiu, agafem la funció

$$f(z) = R(z) (\mathcal{L}z)^2,$$

on $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$ amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$, i integrem la funció f en la regió “comecocos” del cas anterior. La component imaginària ens permetrà recuperar la integral buscada, vegeu l'exercici 6.5.7. $\diamond$

Exercicis

6.5.1. Per $r > 0$, considerem la corba $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $\gamma_r(t) = re^{it}$, i sigui

$$I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Demostreu que $\lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = 0$. $\triangleleft$

6.5.2. Considereu la funció $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 9)(z^2 + 4)^2}$.

6. Sèries de Laurent

(a) Determineu les singularitats de f .

(b) Calculeu la part principal del desenvolupament de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(c) Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor.

◁

6.5.3. Demostreu que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

◁

6.5.4. Calculeu

$$I := \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^5}.$$

◁

6.5.5. Donat $a \in (0, 1)$ calculeu el valor de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2} dx.$$

◁

6.5.6. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

◁

6.5.7. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

◁

6.5.8. Justifiqueu la integrabilitat (Lebesgue o impròpia Riemann) i calculeu les següents integrals (en tots els apartats $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $n = 0, 1, 2, \dots$):

a) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4 \cos t} dt.$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1} dx.$

◁

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2 + \cos t} dt.$

6. Sèries de Laurent

6.5.9. Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3} dx$$

i calculeu-ne el seu valor (cal justificar tots els passos). ◁

6.5.10. Sigui $f(z) = e^z/z^2$ i la recta $\gamma = \{1 + it; t \in (-\infty, +\infty)\}$.

a) Calculeu (justificant tots els passos)

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Indicació: integreu f sobre la vora del semidisc de centre $z_0 = 1$ i radi R amb $\operatorname{Re} z \leq 1$.

b) Deduïu que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(t) + 2t\sin(t)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2\pi}{e}$. ◁

6.5.11. Considereu

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)^2}.$$

(a) Trobeu la part principal de la sèrie de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(b) Justifiqueu la convergència de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor (justifiqueu tots els passos). ◁

6.5.12. Sigui $f(z) = e^{iz^2}$, i considereu el camí γ_R format per el segment que va de 0 a R ; l'arc del cercle $|z| = R$ que va de R a $Re^{i\pi/4}$, i el segment que va de $Re^{i\pi/4}$ a 0. Demostreu que

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$

i utilitzeu-ho per a calcular les integrals de Fresnel

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx, \quad \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx.$$

Observació: Podeu utilitzar que $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ◁

6.5.13. (a) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$. Suposem que $f(a_n) = 0$ per una successió $a_n \in \mathbb{D}^*$ tal que $a_n \rightarrow 0$. Demostreu que $f \equiv 0$ o bé $z = 0$ és una singularitat essencial de f .

6. Sèries de Laurent

(b) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^*$ tal que per a tot $n \geq 2$, f no té zeros sobre les corbes $|z| = 1/n$ i a més

$$\int_{|z|=1/n} \frac{1}{f(z)} dz \neq \int_{|z|=1/(n+1)} \frac{1}{f(z)} dz.$$

Demostreu que $z = 0$ és una singularitat essencial de f . Indicació: Utilitzeu el teorema de deformació i l'apartat anterior. $\triangleleft$

6.5.14. Calculeu, justificant tots els passos, la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2 + x + 1} dx, \quad -1 < \alpha < 1.$$

Indicació: Considereu la funció $f(z) = \frac{z^\alpha}{z^2 + z + 1}$. Definiu una determinació del logaritme $\log(z)$ a $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ de manera que $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$. Finalment integreu la funció $f(z)$ a la mateixa regió que les integrals del tipus

$$\int_0^{+\infty} R(x) \ln(x) dx. \quad \triangleleft$$

6.6. Principi de l'argument

El principi de l'argument i el teorema de Rouché es fan servir per calcular el nombre de zeros i pols d'una funció meromorfa dins d'una corba tancada.

Definició 6.26. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Diem que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és meromorfa en Ω si $f \in H(\Omega \setminus E)$, on $E \subset \Omega$ està format per punts aïllats, i aquestes singularitats de f són pols. En aquest cas, posem $f \in M(\Omega)$. $\bullet$

Teorema 6.27 (Principi de l'argument). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in M(\Omega)$. Denotem per Z el conjunt dels zeros de f en Ω , i per E el conjunt de pols de f en Ω . Sigui γ un camí tancat en $\Omega \setminus (Z \cup E)$, homòleg a 0 en Ω . Llavors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \in Z} \text{Ind}(\gamma, z) m(f, z) - \sum_{p \in E} \text{Ind}(\gamma, p) m(f, p),$$

on $m(f, z)$ és la multiplicitat del zero z , i $m(f, p)$ denota l'ordre del pol p .

Com en el teorema dels residus, les sumes anteriors tenen només un nombre finit de termes no nuls.

Observació 6.28. S'anomena el principi de l'argument, ja que si $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$ és la corba imatge, llavors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Ind}(\Gamma, 0),$$

6. Sèries de Laurent

així que, si γ és una corba tancada simple, llavors el nombre de zeros menys el nombre de pols de f en l'interior de γ (comptant multiplicitats) és igual al nombre de voltes que dona la corba imatge $f(\gamma)$ al voltant del zero, que seria la variació de l'argument al llarg de $f(\gamma)$ dividit per 2π .

En efecte, tenim que

$$\text{Ind}(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-0} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt}{f(\gamma(t))} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad \bullet$$

Demostració del teorema 6.27. Observem que si f és holomorfa en $\Omega \setminus E$, llavors la funció $h = f'/f$ és holomorfa en $\Omega \setminus (E \cup Z)$. Aplicant el teorema dels residus, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{w \in E \cup Z} \text{Res} \left(\frac{f'}{f}, w \right) \text{Ind}(\gamma, w).$$

• Si z_0 és un zero de f de multiplicitat m , llavors $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, on g és holomorfa en un entorn de z_0 amb $g(z_0) \neq 0$. Llavors, en un entorn de z_0 tenim que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Com que $g(z) \neq 0$ en un entorn de z_0 , llavors g'/g és holomorfa en aquest entorn, de manera que

$$\text{Res}(f'/f, z_0) = m.$$

• Si p_0 és un pol de f d'ordre m , llavors $\tilde{g}(z) = (z - p_0)^m f(z)$ és holomorfa en un entorn de p_0 amb $\tilde{g}(p_0) \neq 0$. Llavors, procedint com abans obtenim

$$\text{Res}(f'/f, p_0) = -m.$$

Per tant

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{w \in Z} \text{Res} \left(\frac{f'}{f}, w \right) \text{Ind}(\gamma, w) + \sum_{p \in E} \text{Res} \left(\frac{f'}{f}, p \right) \text{Ind}(\gamma, p) \\ &= \sum_{w \in Z} \text{Ind}(\gamma, w) m(f, w) - \sum_{p \in E} \text{Ind}(\gamma, p) m(f, p). \end{aligned} \quad \square$$

Exemple 6.29. Aplicant el principi de l'argument calculem el nombre de zeros (comptant multiplicitats) del polinomi $Q(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10$ al primer quadrant.

Volem aplicar el principi de l'argument a la corba $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ formada per:

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x, & x &\in [0, R] \\ \gamma_2(t) &= Re^{it}, & t &\in [0, \pi/2] \\ (\gamma_3)_-(y) &= iy, & y &\in [0, R]. \end{aligned}$$

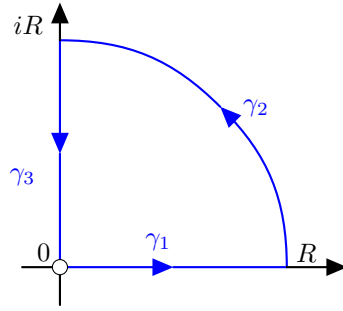


Figura 6.6.: Camins per l'exemple 6.29.

on $R > 0$ és prou gran per englobar les arrels de Q al primer quadrant $\mathcal{Q}_1$, que són un nombre finit. Pel principi de l'argument,

$$\#Z(Q) \cap \mathcal{Q}_1 = \sum_{w \in Z} \text{Ind}(\gamma, w) m(Q, w) = \text{Ind}(Q \circ \gamma, 0).$$

En el que raonarem a continuació, provarem també que el polinomi Q no té cap zero a γ^* .

Mirem doncs quantes voltes fa la corba $Q \circ \gamma$ al voltant de 0, vegeu la figura 6.7. Estudiem cada tros de γ .

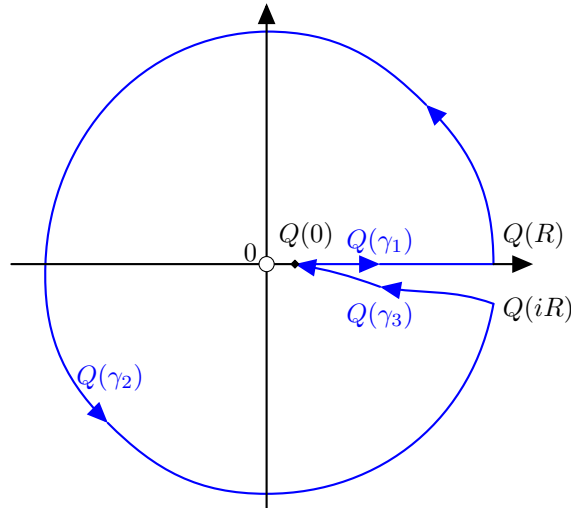


Figura 6.7.: Imatge per Q dels camins de l'exemple 6.29.

La corba $Q(\gamma_1(x)) = Q(x)$ és continguda a $\mathbb{R}_+$, ja que

$$Q(x) = x^4 + 2x(x^2 - 1) + 10 > 10 - 2 = 8 > 0.$$

Tenim doncs que Q no s'anul·la a γ_1^* i $Q(\gamma_1)$ és un segment al semieix real positiu, que va de $Q(0)$ a $Q(R)$.

Seguidament

$$Q(\gamma_2(t)) = Q(Re^{it}) = (Re^{it})^4 \left(1 + \frac{2}{Re^{it}} - \frac{2}{(Re^{it})^3} + \frac{10}{(Re^{it})^4} \right).$$

Per tant, quan R és molt gran, $Q(\gamma_2(t))$ no s'anul·la i és una petita pertorbació de $R^4 e^{i4t}$, i podem argumentar com en la demostració del lema 5.21. Com que $t \in [0, \pi/2]$, obtenim que $4t \in [0, 2\pi]$ i la variació de l'argument és $2\pi \pm \mathcal{O}(R^{-1})$.

Pel tercer tros tenim que

$$Q((\gamma_3)_-(y)) = Q(iy) = (y^4 + 10) - 2i(y^3 + y),$$

i en particular $Q(iR)$ és un punt amb part imaginària negativa. Observem que per a $y > 0$,

$$\operatorname{Re} Q(iy) > 0, \quad \operatorname{Im} Q(iy) < 0.$$

Per tant $Q(\gamma_3(y))$ va del punt $Q(iR)$ cap a $Q(0)$ restant sempre dins del quart quadrant.

Amb tot això tenim que el nombre de voltes que fa $Q \circ \gamma$ al voltant de 0 és 1; pel principi de l'argument

$$\#Z(Q) \cap \mathcal{Q}_1 = \operatorname{Ind}(Q \circ \gamma, 0) = 1. \quad \diamond$$

Exercicis

6.6.1. Quines de les següents funcions són meromorfs a $\mathbb{C}$?

$$a) z^5, \quad b) z^{5/2}, \quad c) e^{1/z}, \quad d) 1/\sin(z). \quad \triangleleft$$

6.6.2. Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) amb part real positiva del polinomi $P(z) = z^6 - z^4 - 2z - 6$.

I si alternativament el polinomi fos $Q(z) = z^6 - z^4 - 2z + 6$? $\triangleleft$

6.6.3. Sigui f una funció entera tal que

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Demostreu que f té, com a molt, un zero a tot $\mathbb{C}$. $\triangleleft$

6.7. Teorema de Rouché

Teorema 6.30 (Teorema de Rouché⁴). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f, g \in M(\Omega)$. Sigui γ un camí tancat simple homòleg a 0 en Ω . Suposem que f i g no tenen pols en γ^* . Si

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \quad z \in \gamma^*$$

⁴Eugène Rouché, Someire, 1832–1910, https://ca.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne_Rouch%C3%A9

aleshores

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g,$$

on Z_f, Z_g denoten el nombre de zeros (comptant multiplicitats) de f i g en l'interior de γ , i P_f, P_g el nombre de pols (comptant l'ordre) de f i g en l'interior de γ .

Observació 6.31. Cal que la desigualtat sigui estricta. També, en ser γ simple, tenim que $\text{Ind}(\gamma, z)$ val 0 o +1 per $z \notin \gamma^*$. •

Demostració del teorema 6.30. Notem que f i g tampoc no poden tenir zeros en γ^* per la hipòtesi imposada (en cas contrari, tindriem $|g(z)| < |g(z)|$ o bé $|f(z)| < 0$).

Tenim $F = f/g \in M(\Omega)$. Si suposem, per simplificar, que els pols i els zeros d'una funció no coincideixen ni amb zeros ni amb pols de l'altra, aleshores

$$\{\text{zeros de } F\} = \{\text{zeros de } f\} \cup \{\text{pols de } g\}; \quad \{\text{pols de } F\} = \{\text{zeros de } g\} \cup \{\text{pols de } f\}.$$

Per la hipòtesi, tenim que $\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1$ per $z \in \gamma^*$, de manera que la corba imatge $\Gamma = F(\gamma) \subset D_1(1)$, així que Γ no dona cap volta al voltant del 0 i, per tant, $\text{Ind}(\Gamma, 0) = 0$. Pel principi de l'argument

$$0 = \text{Ind}(\Gamma, 0) = Z_F - P_F = Z_f + P_g - (Z_g + P_f),$$

d'on obtenim el resultat. En el cas general, la mateixa conclusió se segueix de la identitat local

$$\text{ord}_a(F) = \text{ord}_a(f) - \text{ord}_a(g),$$

on els pols es compten amb ordre negatiu. □

La majoria de les vegades apliquem el teorema de Rouché en un cercle $\{|z - a| = R\}$ i a funcions f, g holomorfes en un entorn de $\overline{D_R(a)}$. En aquest cas, si $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ per $|z - a| = R$, se segueix que f i g tenen el mateix nombre de zeros comptant multiplicitats en el disc obert $D_R(a)$. Això ens pot servir per determinar els zeros de f en el disc, si podem triar una funció g de la qual es pugui determinar fàcilment el nombre de zeros.

Exemple 6.32. Trobem el nombre de zeros del polinomi $P(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ en el disc unitat $\mathbb{D}$.

Prenem la funció $g(z) = 6z^3$ que té 3 zeros comptant multiplicitats en $\mathbb{D}$. Tenim que $|g(z)| = 6$ si $|z| = 1$. Llavors

$$|P(z) - g(z)| = |z^7 - 2z^5 - z + 1| \leq |z|^7 + 2|z|^5 + |z| + 1 = 5 < 6 = |g(z)|, \quad \text{si } |z| = 1.$$

Pel teorema de Rouché, P i g tenen el mateix nombre de zeros (comptant multiplicitats) en $\mathbb{D}$, així que P té 3 zeros en $\mathbb{D}$. ◇

Exemple 6.33. Trobem quants zeros té $P(z) = z^4 - 6z + 3$ en l'anell $\{1 < |z| < 2\}$.

Primer, trobem els zeros de P dins del disc $\{|z| < 2\}$. Prenem $g(z) = z^4$ que té 4 zeros comptant multiplicitats en $\{|z| < 2\}$. Tenim que

$$|P(z) - g(z)| = |-6z + 3| \leq 6|z| + 3 = 15 < 16 = |g(z)| \quad \text{si } |z| = 2.$$

6. Sèries de Laurent

Com abans, aquesta desigualtat també implica que P no té zeros en $|z| = 2$. Pel teorema de Rouché, P i g tenen el mateix nombre de zeros en $\{|z| < 2\}$, de manera que P té 4 zeros en $\{|z| < 2\}$.

Ara, busquem els zeros de P en el disc unitat $\{|z| < 1\}$. Prenem $h(z) = -6z$ que té un zero en el disc unitat. Tenim que

$$|P(z) - h(z)| = |z^4 + 3| \leq |z|^4 + 3 = 4 < 6 = |h(z)| \quad \text{si } |z| = 1.$$

Pel teorema de Rouché, P té exactament un zero, comptant multiplicitats, en el disc unitat.

En conclusió, el polinomi P té 3 zeros en l'anell $\{1 < |z| < 2\}$. $\diamond$

Teorema 6.34 (Teorema de Hurwitz⁵). *Sigui f_n una successió de funcions holomorfes en un domini Ω tals que $f_n \rightarrow f$ uniformement en compactes d' Ω , per una certa funció f . Si per a tota $n \geq 0$, f_n no s'anul·la en cap punt d' Ω , aleshores o bé $f \equiv 0$ o bé f no s'anul·la en Ω .*

Demostració. Comencem observant que f és holomorfa en Ω pel teorema de Weierstrass. Suposem que f no és idènticament 0, però $f(a) = 0$ per un cert $a \in \Omega$. Aleshores, com que els zeros de f han de ser aïllats (en ser f no idènticament nul·la), tenim que $f(z) \neq 0$ en un cert disc puntejat $\overline{D_r(a)} \setminus \{a\} \subset \Omega$. Sigui $0 < m = \min_{|z-a|=r} |f(z)|$ que existeix perquè f és contínua i el cercle és un compacte i sigui n prou gran per garantir que

$$|f_n(z) - f(z)| < m$$

per a tot z en $\{|z - a| = r\}$, fet que es dona per la convergència uniforme. Aleshores, sobre la corba $\{|z - a| = r\}$,

$$|f_n(z) - f(z)| < m \leq |f(z)|,$$

i pel teorema de Rouché, f_n i f tenen el mateix nombre de zeros dins $\{|z - a| = r\}$. Però això és una contradicció ja que f en té almenys un, i f_n no en té cap per hipòtesi. $\square$

Exercicis

6.7.1. *Demostreu que l'equació $e^z = 2z + 1$ té exactament una solució en el disc unitat obert. Indicació: Proveu que $|e^z - 1| \leq e - 1$ si $|z| = 1$.* $\triangleleft$

6.7.2. *Sigui f una funció holomorfa en el disc unitat tancat tal que $|f(z)| < 1$, per a $|z| = 1$. Quants punts fixos té f ?* $\triangleleft$

6.7.3. *Calculeu el nombre de solucions (comptant multiplicitats) de les següents equacions en el disc unitat:*

(a) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0.$

(b) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0.$

⁵Adolf Hurwitz, Hildesheim, 1859–1919, https://ca.wikipedia.org/wiki/Adolf_Hurwitz

6. Sèries de Laurent

(c) $z^7 - 5z^4 + z^2 = 2$. ◁

6.7.4. Quants zeros té $P(z) = z^4 + 6z^3 - 4z^2 + 1/8$ en la regió $\{z \in \mathbb{C}; \frac{1}{2} < |z| < 1\}$? ◁

6.7.5. Considerem $P(z) = z^6 + 3z^4 + z^2 + z + 9$.

(a) Proveu que tots els zeros de $P(z)$ són a l'anell $1 < |z| < 2$.

(b) Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) de $P(z)$ al primer quadrant. ◁

6.7.6. (a) Calculeu el nombre de solucions a $\mathbb{D}$ de l'equació $e^z = 4z + 1$.

(b) Demostreu que l'equació $e^z = 3z^n$ té n solucions en el disc unitat ($n = 1, 2, \dots$). ◁

6.7.7. Sigui $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$, i $n \in \mathbb{N}$.

(a) Demostreu que l'equació

$$(z - 1)^n e^z = a$$

té exactament n arrels diferents al semiplà $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Indicació: Considereu un disc centrat a $z = 1$ i de radi $R = 1$ primer, després mireu d'augmentar el radi sense sortir del semiplà tancat de la dreta.

(b) Proveu que si, a més, $|a| \leq 1/2^n$, llavors totes aquestes arrels són al disc $D_{1/2}(1)$. ◁

6.7.8. Demostreu que per a tot $R > 0$ existeix $n(R) \geq 0$ tal que si $n > n(R)$

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

no té zeros al disc $\{|z| \leq R\}$. ◁

6.7.9. Sigui f_n una successió de funcions holomorfes en un domini Ω tals que $f_n \rightarrow f$ uniformement en compactes d' Ω , per una certa funció f .

1. (Corol·lari de Hurwitz) Deduïu que si $f_n(z) \neq a$ per a tot $z \in \Omega$ i tot $n \in \mathbb{N}$, aleshores, $f \equiv a$ o bé $f(z) \neq a$ en Ω .
2. Proveu que si f_n és injectiva en Ω per a tot $n \geq 0$, aleshores f és constant o bé f és injectiva en Ω . Indicació: Argumenteu per reducció a l'absurd, i utilitzeu l'apartat anterior.
3. Proveu que si f té un zero d'ordre m en $a \in \Omega$, aleshores existeix $\rho_0 > 0$ tal que per tot $\rho < \rho_0$ i per tot $n > n_\rho$, f_n té exactament m zeros en $D_\rho(a)$ comptant multiplicitats. ◁

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

5.6.2. *Suposem que $\phi_1, \phi_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ són harmòniques a Ω i contínues fins a $\partial\Omega$ i que $\phi_1 = \phi_2$ a la vora $\partial\Omega$. Provar que si Ω és simplement connex i fitat, aleshores $\phi_1 = \phi_2$ en tot punt d' Ω . Indicació: trobar la funció v harmònica conjugada de $\phi_1 - \phi_2$ i aplicar el principi del màxim (mínim) a $\phi_1 - \phi_2 + iv$.* $\triangleleft$

5.6.3. *Una distribució estacionària T de la temperatura en una regió Ω és una funció harmònica i contínua fins la frontera. Trobeu la temperatura T a l'interior d'un disc de radi 1 si sabem que la temperatura val $\operatorname{Im} z$ als dos primers quadrants de la circumferència de frontera i 0 a la resta de punts de la vora. En particular vegeu que la temperatura al centre del disc és $1/\pi$.* $\triangleleft$

5. *Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy*

6. Sèries de Laurent

En aquest capítol veurem com són les singularitats aïllades de les funcions holomorfes i estudiarem els desenvolupaments en sèrie entorn d'una singularitat. Obtindrem el teorema dels residus, que ens permetrà calcular integrals definides i indefinides que altrament serien complicades.

6.1. Sèries de Laurent i singularitats

Veurem tot seguit que tota funció holomorfa en un anell té un desenvolupament en sèrie de Laurent¹, que té una expressió formal similar a les sèries de potències, considerant també exponents negatius.

Sigui $a \in \mathbb{C}$, i siguin $0 \leq r < R \leq \infty$. Considerem l'anell

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}.$$

Observem que a Ω , són holomorfes les funcions $1, (z - a), (z - a)^2, \dots, (z - a)^n$, però també ho són les funcions $(z - a)^{-1}, (z - a)^{-2}, \dots, (z - a)^{-n}$.

Definició 6.1 (Sèrie de Laurent). Anomenem *sèrie de Laurent* al voltant d' $a \in \mathbb{C}$ una sèrie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

La part amb exponents negatius s'anomena la *part singular* de la sèrie de Laurent. •

Observem que $f_2(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ és una sèrie de potències que tindrà un radi de convergència R_2 , de manera que $f_2 \in H(D_{R_2}(a))$.

Considerem ara la sèrie que correspondria a les potències negatives, amb $w = \frac{1}{z-a}$, és a dir, estudiem la sèrie $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$. Aquesta és també una sèrie de potències, que tindrà el seu radi de convergència R_1 i, en particular, convergirà uniformement en $|w| \leq r$, per a tot $r < R_1$. Aleshores

$$f_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}$$

convergirà si $\frac{1}{|z-a|} < R_1$, és a dir, si $|z - a| > \frac{1}{R_1}$. I a més a més, la sèrie que defineix $f_1(z)$ convergeix uniformement en $\{|z - a| \geq 1/r\}$, on $r < R_1$.

¹Pierre Alphonse Laurent, París, 1813-1854, https://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre_Alphonse_Laurent

6. Sèries de Laurent

Ajuntant les dues parts de la sèrie de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$, veiem que f és holomorfa en l'anell $\{\frac{1}{R_1} < |z - a| < R_2\}$ (sempre que $1/R_1 < R_2$). El recíproc d'aquesta afirmació també és certa: tota funció holomorfa en un anell s'expressa com una sèrie de Laurent.

Teorema 6.2 (Existència i unicitat). *Sigui $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ amb $0 \leq r < R \leq \infty$, i sigui $f \in H(\Omega)$. Aleshores hi ha una única sèrie de Laurent amb*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n, \quad z \in \Omega.$$

A més, la sèrie convergeix absolutament i uniforme en els compactes d' Ω . En particular,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad \text{per qualsevol } \rho \in (r, R). \quad (6.1)$$

Demostració. Considerem les sèries $f_2(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n$ i $f_3(w) = \sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$ amb c_n donat per (6.1) (observem que el valor de ρ escollit no afecta, ja que si $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, els cercles $\gamma_{\rho_j}(t) = a + \rho_j e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$ són homòlegs en Ω , vegeu l'exemple 5.15), amb radis de convergència $R_2 = \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}$ i $R_3 = \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} \right)^{-1}$.

Notem en primer lloc que si $n \in \mathbb{Z}$ i $r < \rho < R$, aleshores

$$|c_n| \stackrel{\text{P.4.8}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{|w-a|=\rho} \frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}} |dw| \leq \frac{\sup_{\partial D_\rho(a)} |f|}{\rho^n}.$$

Per tant,

$$\frac{1}{R_2} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\sup_{\partial D_\rho(a)} |f|}}{\rho} = \frac{1}{\rho},$$

i

$$\frac{1}{R_3} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\sup_{\partial D_\rho(a)} |f|} \rho = \rho.$$

Com que $\rho \in (r, R)$ és arbitrari, deduïm que

$$R_1 := \frac{1}{R_3} \leq r \quad \text{i} \quad R \leq R_2.$$

Les sèries f_2 i f_3 convergeixen absolutament i uniforme en compactes dels seus discs de convergència $D_{R_2}(a)$ i $D_{R_3}(0)$ respectivament. Fent el canvi $w = (z - a)^{-1}$ en la segona sèrie deduïm que

$$f_1(z) := f_3((z - a)^{-1}) = \sum_{n \leq -1} c_n (z - a)^n$$

és convergent absolutament i uniforme en compactes de $\{|z - a| > R_1\}$. Per tant, $f_1 + f_2$ és convergent absolutament i uniforme en compactes d' Ω tal com volíem veure.

6. Sèries de Laurent

Resta demostrar que $f = f_1 + f_2$ i que la sèrie és única. Comencem per veure la coincidència. Fixem $z \in \Omega$. Prenem r_1, r_2 amb $r < r_1 < |z - a| < r_2 < R$, i considerem els cercles

$$\gamma_1(t) = a + r_1 e^{it}, \quad \gamma_2(t) = a + r_2 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Definim el cicle $\Gamma = \gamma_2 - \gamma_1$. Com que Γ és homòloga a 0 en l'anell Ω , i $\text{Ind}(\Gamma, z) = 1$, aplicant la fórmula integral de Cauchy global, obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Ara desenvoluparem en sèrie cadascuna de les dues integrals, de la mateixa manera que vam fer quan vam provar que tota funció holomorfa és localment una sèrie de potències, i ja haurem acabat. En primer lloc, per $w \in \gamma_2^*$, i com que $|z - a| < r_2 = |w - a|$, tenim que $\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = \frac{|z-a|}{r_2} < 1$. Per tant

$$\frac{1}{w - z} = \sum_{k \geq 0} \frac{(z - a)^k}{(w - a)^{k+1}},$$

i la convergència de la sèrie és uniforme en γ_2^* pel criteri M de Weierstrass. Per tant, podem treure el sumatori fora de la integral per obtenir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{k \geq 0} (z - a)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r_2} \frac{f(w)}{(w - a)^{k+1}} dw = f_2(z).$$

Per a la segona integral, procedim anàlogament: observem que, per $w \in \gamma_1^*$ tenim que $\left| \frac{w-a}{z-a} \right| = \frac{r_1}{|z-a|} < 1$. Per tant

$$\frac{1}{z - w} = \sum_{k \geq 1} \frac{(w - a)^{k-1}}{(z - a)^k}.$$

Aplicant el criteri M de Weierstrass, aquest cop en γ_1^* , deduïm que la sèrie anterior convergeix uniformement en γ_1^* i, per tant, podem treure el sumatori fora de la integral per obtenir

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z - a)^k} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r_1} f(w) (w - a)^{k-1} dw \right) = f_1(z).$$

Vegem ara la unicitat. Prenem ρ amb $r < \rho < R$. Recordem que, per $k \in \mathbb{Z}$, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} (z - a)^k dz = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -1 \\ 1 & \text{si } k = -1 \end{cases}$$

Si $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k (z - a)^k$ convergeix uniformement en els compactes d' Ω (això serà així per Cauchy-Hadamard), llavors podem treure el sumatori fora de la integral en el càlcul que segueix, per obtenir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} (w - a)^{k-(n+1)} dw = b_n,$$

que determina el coeficient $b_n = c_n$ de manera única. $\square$

Exercicis**6.1.1.** *Calcular la sèrie de Laurent de*

$$a) \frac{z-1}{z(z-4)^3} \text{ a } 0 < |z-4| < 4.$$

$$b) 1/e^{(1-1/z)} \text{ per } |z| > 0.$$

<

6.1.2. *Per a la funció $f(z) = \frac{\sin z \cos 3z}{z^4}$*

1. *Trobar els primers termes no nuls de la part central de la seva sèrie de Laurent a $z = 0$.*

2. *Calcular $\oint f(z)dz$ si es recorre $|z| = 1$ un cop i en sentit antihorari.*

<

6.1.3. *Trobeu el desenvolupament en sèrie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ a les corones:*

(a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, (b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$, (c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ i (d) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$.

<

6.1.4. *Segui $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$, donar les sèries de Laurent per les tres corones centrades a 0 allà on f és analítica ($|z| < 1$, $1 < |z| < 3$ i $|z| > 3$).*

<

6.1.5. *Donar els primers termes de la sèrie de Laurent de*

$$a) f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{3z}\right) \text{ per } |z| > 0.$$

$$b) f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \text{ per } 0 < |z| < R.$$

<

6.1.6. *Quina és la corona (o anell) de convergència de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$?*

<

6.2. Singularitats aïllades de funcions holomorfes

Definició 6.3. Segui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i considerem un subconjunt $E \subset \Omega$. Si $f \in H(\Omega \setminus E)$ i no està definida en els punts de E (o bé hi està definida però no hi és $\mathbb{C}$ -derivable), aleshores diem que E són les *singularitats* de f en Ω .

Una singularitat z_0 d'una funció holomorfa f es diu *aïllada* si hi ha $r > 0$ de manera que $f \in H(D_r(z_0) \setminus \{z_0\})$. •

Per exemple, les funcions

$$\frac{\sin z}{z}; \quad \frac{1}{z^2}; \quad e^{1/z}$$

són holomorfes a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, i tenen una singularitat aïllada en $z = 0$.

Definició 6.4 (Singularitat evitable). Sigui z_0 una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f . Diem que z_0 és una *singularitat evitable* de f si hi ha $\varepsilon > 0$ i $g \in H(D_\varepsilon(z_0))$ amb

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad \bullet$$

És a dir, una singularitat evitable seria una singularitat “fictícia”, ja que podríem redefinir la funció de manera que sigui holomorfa al voltant del punt. És clar que si z_0 és una singularitat aïllada de f , i existeix $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, llavors z_0 és una singularitat evitable de f (simplement definint $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$). Ara bé, existeix un criteri encara més feble per determinar quan una singularitat aïllada és evitable.

Proposició 6.5. *Sigui z_0 singularitat aïllada d'una funció holomorfa f . Llavors z_0 és evitable si i només si*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Demostració. Tenim que $f \in H(D_r(z_0) \setminus \{z_0\})$. Si z_0 és una singularitat evitable, llavors hi ha $\varepsilon > 0$ i $g \in H(D_\varepsilon(z_0))$ amb $f(z) = g(z)$ per $z \in D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. Per tant

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = 0 \cdot g(z_0) = 0.$$

Suposem ara que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$, i provarem que z_0 és una singularitat evitable de f . Definim

$$h(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}.$$

Llavors h és holomorfa en $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Com que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$, la funció h és contínua en z_0 , de manera que se segueix que h és holomorfa en $D_r(z_0)$ (veure una de les conseqüències del teorema de Morera). Com que $h(z_0) = 0$, pel teorema 4.42 hi ha $g \in H(D_r(z_0))$ amb $h(z) = (z - z_0)g(z)$. En particular, $f(z) = g(z)$ per $z \neq z_0$, de manera que z_0 és una singularitat evitable de f . $\square$

A partir d'aquesta proposició ja podem veure que la funció $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ té una singularitat evitable en $z = 0$. En canvi, les singularitats en $z = 0$ de les funcions $\frac{1}{z^2}$ i $e^{1/z}$ no són evitables.

Definició 6.6 (Pol). Sigui z_0 una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f . Diem que z_0 és un *pol* de f si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty. \quad \bullet$$

Exemple 6.7. La funció $\frac{1}{z^2}$ té un pol en $z = 0$. En canvi, la singularitat en $z = 0$ de la funció $f(z) = e^{1/z}$ no és evitable ni és un pol, ja que si $z = -x$, tenim que $e^{-1/x} \rightarrow 0$ quan $x \rightarrow 0$, i en canvi, per $z = ix$, tenim que $|e^{1/ix}| = 1$. $\diamond$

Definició 6.8 (Singularitat essencial). Una singularitat aïllada d'una funció holomorfa que no és evitable ni és un pol es diu que és una *singularitat essencial*. $\bullet$

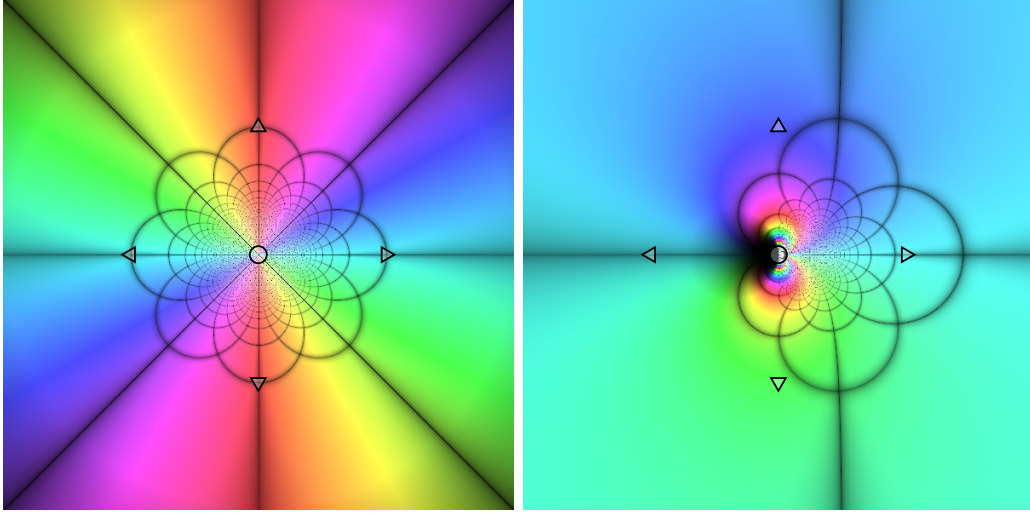


Figura 6.1.: A l'esquerra la funció $\frac{1}{z^2}$, amb un pol d'ordre 2 a l'origen; a la dreta $f(z) = e^{1/z}$, amb una singularitat essencial a l'origen.

Tornem al cas en què una funció f holomorfa en $D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ tingui un pol en el punt z_0 . Donat que $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, existeix $0 < r < R$ i per a tot $0 < |z - z_0| < r$, $f(z) \neq 0$. Si definim en $\Omega = D_r(z_0)$ la funció

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases},$$

es compleix que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, que prova que g és contínua en z_0 . Per tant, $g \in C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{z_0\})$, que implica que $g \in H(\Omega)$. Com que $g(z_0) = 0$, pel teorema 4.42 hi ha $m \in \mathbb{N}$ de manera que $g(z) = (z - z_0)^m g_1(z)$, on $g_1 \in H(\Omega)$ amb $g_1(z_0) \neq 0$. En particular, $g_1(z) \neq 0$ en un entorn de z_0 , de manera que podem desenvolupar en sèrie de potències al voltant de z_0 la funció $1/g_1$,

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k.$$

Llavors, per z en un entorn de z_0 amb $z \neq z_0$, tenim que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{g_1(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k \\ &= \frac{A_0}{(z - z_0)^m} + \frac{A_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{(z - z_0)} + G(z), \end{aligned}$$

on G és una sèrie de potències al voltant de z_0 , i $A_0 \neq 0$.

6. Sèries de Laurent

Definició 6.9. Donada una funció f amb un pol en z_0 , anomenem *ordre del pol* z_0 el nombre natural m tal que podem escriure

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

amb $c_{-m} \neq 0$. •

Per exemple, la funció $f(z) = \frac{1}{z^2}$ té un pol d'ordre 2 en $z = 0$.

També veiem que z_0 és un pol de f d'ordre m , si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0)^k f(z)| = +\infty, \quad \text{per a tot } k < m,$$

i existeix el límit

$$c_{-m} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0.$$

Si tenim una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f , podem veure quin tipus de singularitat és mitjançant la sèrie de Laurent de f en $0 < |z - z_0| < r$.

Lema 6.10 (Classificació de singularitats aïllades en termes de la sèrie de Laurent). *Sigui f holomorfa en $\{0 < |z - z_0| < r\}$ amb sèrie de Laurent donada per*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

(i) z_0 és evitable si i només si $c_{-n} = 0$ per a tot $n \geq 1$;

(ii) z_0 és un pol d'ordre m si i només si $c_{-n} = 0$ per a tot $n > m$ i $c_{-m} \neq 0$;

(iii) z_0 és una singularitat essencial si i només si hi ha infinits $c_{-n} \neq 0$ per $n > 0$.

El següent resultat ens dona una idea del que passa al voltant d'una singularitat essencial d'una funció holomorfa.

Teorema 6.11 (Casorati²-Weierstrass). *Sigui f holomorfa en $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Si z_0 és una singularitat essencial de f , llavors*

$$f\left(D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}\right)$$

és dens en $\mathbb{C}$ per a tot $0 < \varepsilon \leq r$.

Demostració. Sigui ε amb $0 < \varepsilon \leq r$. Suposem que $f(D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ no és dens en $\mathbb{C}$. Aleshores hi ha $w_0 \in \mathbb{C}$ i $t > 0$ de manera que

$$|f(z) - w_0| \geq t \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon. \quad (6.2)$$

²Felice Casorati, Pavia, 1835–1890, https://ca.wikipedia.org/wiki/Felice_Casorati

6. Sèries de Laurent

En particular, $f(z) \neq w_0$ i, per tant, la funció

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

és holomorfa en $D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. La condició (6.2) ens diu també que g és fitada, de manera que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = 0$, que implica que $\{z_0\}$ és una singularitat evitable de g per la proposició 6.5. Llavors existeix

$$\alpha = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - w_0}.$$

Si $\alpha = 0$, llavors $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, de manera que z_0 seria un pol de f , en contradicció amb la nostra hipòtesi. Finalment, si $\alpha \neq 0$, llavors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 + \frac{1}{\alpha}$$

de manera que z_0 seria una singularitat evitable de f , en contradicció amb el fet que z_0 és una singularitat essencial de f . $\square$

Un resultat més avançat (teorema gran de Picard³), ens diu que al voltant d'una singularitat essencial, una funció holomorfa pren tots els valors complexos excepte potser un.

Exercicis

6.2.1. Construcció de funcions

1. Trobar una funció f que tingui un pol d'ordre 2 a $z = 1 + i$ i singularitats essencials a $z = 0, 1$.
2. Trobar una funció f que tingui una singularitat evitable a $z = 0$, un pol d'ordre 6 a $z = 1$ i una singularitat essencial a $z = i$. $\triangleleft$

6.2.2. Sigui f analítica amb zero d'ordre n a z_0 i g analítica amb zero d'ordre m a z_0 . Si $h(z) = f(z)/g(z)$ proveu que

- a) si $n > m$ $h(z)$ té un zero d'ordre $n - m$ a z_0 ,
- b) si $n < m$ $h(z)$ té un pol d'ordre $m - n$ a z_0 ,
- c) si $n = m$ $h(z)$ s'estén a una funció holomorfa i no nul·la a z_0 . $\triangleleft$

6.2.3. Determineu les singularitats de les funcions següents. Si a és una singularitat evitable de f , calculeu el valor que cal donar a $f(a)$ per tal que f sigui holomorfa en un entorn d' a , i si a és un pol de f , determineu la part singular de f en a (la part de la sèrie amb índexs negatius).

³Charles Émile Picard, París, 1856–1941, https://ca.wikipedia.org/wiki/Charles_%C3%89mile_Picard

6. Sèries de Laurent

- a) $f(z) = z \cos(1/z)$. c) $f(z) = \frac{1}{(1 - e^z)^2}$. $\triangleleft$
 b) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3(z - 1)^2}$.

6.2.4. Sigui $f \in H(D_r(a) \setminus \{a\})$. Supposem que existeix una successió $(z_n)_n$ tal que $z_n \rightarrow a$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e^{f(z_n)}| = 0, \quad \left| f\left(z_n + \frac{1}{n}\right) \right| \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determineu el tipus de singularitat que té la funció f en el punt a . $\triangleleft$

6.2.5. a) La funció $\tan(1/z)$ té una singularitat aïllada al 0? De quin tipus?

b) Sigui 0 singularitat aïllada de $f(z)$. Supposem que $|f(z)| \leq |z|^{-\alpha}$ on $0 < \alpha < 1$.
 Demostreu que 0 és una singularitat evitable. $\triangleleft$

6.3. Teorema dels Residus

L'objectiu és calcular el valor de $\int_{\gamma} f$ quan γ és un camí tancat en Ω , però la funció f no és holomorfa en tot Ω , sinó que té singularitats aïllades.

Definició 6.12. Sigui f holomorfa amb una singularitat aïllada en un punt a . Sigui

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$$

el desenvolupament en sèrie de Laurent de f al voltant del punt a . El *residu* de f en a és

$$\text{Res}(f, a) = c_{-1}. \quad \bullet$$

Proposició 6.13. Sigui $r > 0$ i $a \in \mathbb{C}$ i sigui $f \in H(D_r(a) \setminus \{a\})$. Llavors

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, a) \quad \forall 0 < \varepsilon < r.$$

Demostració. Això és una conseqüència immediata del teorema 6.2 i de la definició de residu. $\square$

Observació 6.14 (Càlcul de residus). És clar que si $z = a$ és una singularitat evitable de f , llavors $\text{Res}(f, a) = 0$.

Si $z = a$ és un pol simple de f , llavors

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z).$$

6. Sèries de Laurent

Suposem que $z = a$ és un pol de f d'ordre m . En aquest cas, obtenim el desenvolupament de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r.$$

Llavors, per $0 < |z-a| < r$, tenim que

$$g(z) := (z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-(m-1)}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + \cdots$$

de manera que el residu de f en el punt a és el coeficient $(m-1)$ -èsim del desenvolupament en sèrie de potències de la funció g , que sabem que és

$$\frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

Per tant, si $z = a$ és un pol de f d'ordre m , llavors

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \partial^{(m-1)} [(z-a)^m f(z)]_{z=a}. \quad \bullet$$

Exemple 6.15. Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2-1)^2},$$

que té singularitats en els punts $z_0 = 1$ i $z_1 = -1$, que són pols d'ordre 2. Llavors, si $g(z) = (z-1)^2 f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2}$, tenim que

$$\text{Res}(f, 1) = g'(1) = 0.$$

Si $h(z) = (z+1)^2 f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, llavors $h'(z) = \frac{e^z(z-1)-2e^z}{(z-1)^3}$ i

$$\text{Res}(f, -1) = h'(-1) = \frac{1}{2e}. \quad \diamond$$

Teorema 6.16 (Teorema dels residus). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i sigui $f \in H(\Omega \setminus A)$, on $A \subset \Omega$ no té punts d'acumulació en Ω . Si Γ és un cicle en $\Omega \setminus A$ que és homòleg a 0 en Ω , llavors*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Ind}(\Gamma, a) \text{Res}(f, a).$$

Demostració. Vegem primer que la suma té un nombre finit de termes diferents de zero. Posem

$$K = \Gamma^* \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*; \text{Ind}(\Gamma, z) \neq 0\}.$$

Comprovem que K és compacte. Observem primer que $K \subset \Omega$, ja que per hipòtesi $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per a tot $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Si R és prou gran, llavors $\Gamma^* \subset D_R(0)$ i $\mathbb{C} \setminus D_R(0)$ està contingut en la component connexa no fitada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, on es verifica que $\text{Ind}(\Gamma, \cdot) = 0$. Per

6. Sèries de Laurent

tant, $K \subset D_R(0)$ i, en particular, K és **fitat**. D'altra banda, cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ és un obert i K és el complementari de les components connexes de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ on l'índex val zero, és a dir, K és **tancat** i, en conseqüència, K és compacte.

Com que A no té punts d'acumulació en Ω , és finit o numerable i, en particular,

$$B = \{a \in A : \text{Ind}(\Gamma, a) \neq 0\} = K \cap A,$$

és finit ja que el compacte $K \subset \Omega$ no pot contenir punts d'acumulació. Per tant

$$B = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Considerem els discs oberts $D_i := D_{\varepsilon_i}(a_i)$, $i = 1, \dots, n$ amb $\overline{D_i} \cap (A \setminus \{a_i\}) = \emptyset$ de manera que

- (i) $\overline{D_{\varepsilon_i}(a_i)} \subset \Omega$, $i = 1, \dots, n$;
- (ii) $D_{\varepsilon_i}(a_i) \cap \Gamma^* = \emptyset$, $i = 1, \dots, n$;
- (iii) $\overline{D_{\varepsilon_i}(a_i)} \cap \overline{D_{\varepsilon_j}(a_j)} = \emptyset$ per $i \neq j$.

Per $i = 1, \dots, n$, siguin $\gamma_i(t) = a_i + \varepsilon_i e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, cercles de centre a_i i radi ε_i , i considerem el cicle

$$\Lambda = \Gamma - \sum_{i=1}^n n_i \gamma_i, \quad n_i = \text{Ind}(\Gamma, a_i).$$

Llavors Λ és un cicle en $\Omega \setminus A$. Vegem que és homòleg a 0 en $\Omega \setminus A$. Hem de veure que

$$\text{Ind}(\Lambda, z) = 0 \quad \text{per a tot } z \notin (\Omega \setminus A).$$

Si $z \notin \Omega$, llavors $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$, ja que Γ és homòleg a 0 en Ω . També, per $i = 1, \dots, n$, tenim que $\text{Ind}(\gamma_i, z) = 0$, ja que z pertany a la component no fitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma_i^*$, de manera que $\text{Ind}(\Lambda, z) = 0$.

Si $z \in A \setminus B$, llavors $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per la definició del conjunt B . A més, també $\text{Ind}(\gamma_i, z) = 0$ per a tot $i = 1, \dots, n$ ja que z es troba a l'exterior del cercle γ_i . Per tant, $\text{Ind}(\Lambda, z) = 0$.

Si $z \in B$, llavors $z = a_k$ per algun $1 \leq k \leq n$. Com que $\text{Ind}(\gamma_i, a_k) = 0$ si $i \neq k$, i $\text{Ind}(\gamma_k, a_k) = 1$, tenim que

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\Lambda, z) &= \text{Ind}(\Lambda, a_k) = \text{Ind}(\Gamma, a_k) - \sum_{i=1}^n n_i \text{Ind}(\gamma_i, a_k) \\ &= \text{Ind}(\Gamma, a_k) - n_k = \text{Ind}(\Gamma, a_k) - \text{Ind}(\Gamma, a_k) = 0. \end{aligned}$$

Així doncs, tenim una funció $f \in H(\Omega \setminus A)$, i Λ és un cicle en $\Omega \setminus A$ que és homòleg a 0 en $\Omega \setminus A$. Pel teorema de Cauchy global, tenim que

$$\int_{\Lambda} f(z) dz = 0.$$

6. Sèries de Laurent

És a dir,

$$0 = \int_{\Lambda} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{i=1}^n n_i \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

Per la proposició 6.13, tenim que

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_i),$$

de manera que, com que $n_i = \operatorname{Ind}(\Gamma, a_i)$, tenim que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Ind}(\Gamma, a_i) \operatorname{Res}(f, a_i). \quad \square$$

Moltes vegades aplicarem el teorema dels residus quan tinguem una funció holomorfa amb un nombre finit de singularitats $\{a_1, \dots, a_n\}$ dins d'una corba γ tancada simple orientada positivament, així que els índexs d'aquests punts valen 1. En aquest cas el teorema dels residus ens diu que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f, a_i).$$

Exercicis

6.3.1. *Existeix alguna funció f amb pol simple a z_0 tal que $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$? Què passa si el pol és d'ordre 2, pot passar que $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$?* $\triangleleft$

6.3.2. *Calculeu els residus de les funcions següents en els punts indicats:*

a) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$, $z_0 = 0$.

b) $f(z) = \frac{1 + e^z}{z^4}$, $z_0 = 0$. $\triangleleft$

6.3.3. *Calculeu $\int_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{z-a} dz$ pels diferents valors d' $a \in \mathbb{C}$ tals que $|a| \neq 1$.* $\triangleleft$

6.3.4. *Decidiu si són certes o falses les següents afirmacions. Doneu els arguments que provin les afirmacions.*

1. Si f, g tenen un pol a z_0 llavors $f + g$ té un pol a z_0 .
2. Si f, g tenen un pol a z_0 i en els dos casos el residu és no nul llavors $f \cdot g$ té un pol a z_0 amb residu no nul.
3. Si f té una singularitat essencial a $z = 0$ i g un pol d'ordre finit a $z = 0$ llavors $f + g$ té singularitat essencial a $z = 0$.

6. Sèries de Laurent

4. Si f té un pol d'ordre m a $z = 0$ llavors $f(z^2)$ té un pol d'ordre $2m$. ◁

6.3.5. Supposem que f és holomorfa amb un zero d'ordre m a z_0 . Proveu que $g(z) = f'(z)/f(z)$ té un pol simple a z_0 amb $\text{Res}(g, z_0) = m$. ◁

6.3.6. a) Proveu que si $g(z)$ té un zero simple a z_0 , llavors $1/g(z)$ té un pol simple a z_0 .

b) Proveu que $\text{Res}(1/g, z_0) = 1/g'(z_0)$.

c) Sigui $f(z) = 1/\sin(z)$, trobeu els seus pols i proveu que són simples. Trobeu els residus. ◁

6.3.7. Trobeu i classifiqueu les singularitats aïllades de cadascuna de les funcions següents. Calculeu el residu a cada singularitat.

a) $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2(z + 1)}.$

b) $g(z) = \frac{1}{e^z - 1}.$

c) $h(z) = \cos(1 - 1/z).$ ◁

6.3.8. Avalueu $\oint \frac{1}{(z+1)(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)} dz$ al llarg de la corba $|z-3| = 3$ recorreguda en sentit antihorari. ◁

6.3.9. Avalueu les següents integrals

a) $\oint_{|z|=5} \frac{\sin z}{z^2 - 4} dz,$

c) $\oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z^2(z-2)(z+5i)} dz.$ ◁

b) $\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz,$

6.3.10. Calculeu la integral de la funció $f(z) = \frac{1+z}{1+\sin z}$ sobre la vora del disc $D_7(0)$. ◁

6.3.11. Per a $t > 0$, sigui C_t la circumferència de centre it , que passa pels punts -2 i 2 . Calculeu

$$f(t) = \int_{C_t} \frac{e^{i\pi z} + 1}{z(z-t)} dz, \quad \text{per a } t \neq 2. \quad \text{◁}$$

6.4. Residu a l'infinit

Una funció holomorfa en un domini que contingui un entorn de l'infinit i tal que $f(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ es pot entendre que hi té un pol. Si $f(\infty) \in \mathbb{C}$, parlarem d'una singularitat evitable, i si $\nexists f(\infty)$, d'una singularitat essencial. El teorema dels residus ens permet també relacionar el residu en aquesta singularitat amb els residus en $\mathbb{C}$.

Definició 6.17. Sigui f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus E$ amb un conjunt finit de singularitats aïllades E , i sigui Γ una corba simple tancada orientada positivament i tal que tots els punts de E queden a l'interior de Γ . Aleshores el *residu de f a l'infinit* és

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz. \quad \bullet$$

Pel teorema dels residus, si A és el conjunt de singularitats aïllades de f en $\mathbb{C}$, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = - \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f, a),$$

ja que $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 1$ per hipòtesi.

Lema 6.18. Sigui f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus E$ amb un conjunt finit de singularitats aïllades E . Aleshores el residu de f a l'infinit és

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = - \operatorname{Res} \left(\frac{1}{w^2} f \left(\frac{1}{w} \right), 0 \right).$$

Demostració. Fem el canvi de variable $w = 1/z$. Sigui C_t la circumferència de radi t , recorreguda en sentit antihorari. Si R és tal que C_R conté totes les singularitats, aleshores trobem

$$-2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = \int_{C_R} f(z) dz = \int_{C_{1/R}^-} f \left(\frac{1}{w} \right) \frac{-dw}{w^2},$$

on $C_{1/R}^-$ és la corba inversa de $C_{1/R}$, vegeu la definició 4.2. Canviant-ne l'orientació trobem

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_{1/R}} f \left(\frac{1}{w} \right) \frac{dw}{w^2} \stackrel{\text{T 6.16}}{=} - \operatorname{Res} \left(\frac{1}{w^2} f \left(\frac{1}{w} \right), 0 \right),$$

tal com volíem veure. □

Exercicis

6.4.1. Trobar el valor la integral $\oint_{|z|=2} \frac{5z-1}{z(z-1)} dz$ calculant el residu de l'integrand a l'infinit. ◁

6.4.2. Sigui $a \in \mathbb{R}$, calculeu, estudiant el residu a l'infinit, $I = \oint_C \frac{a^2 - z^2}{z(z^2 + a^2)} dz$ on C és una corba simple que envolta les singularitats de l'integrand. ◁

6.4.3. Avaluar $\oint_{|z|=1} e^{1/z} \sin(1/z) dz$. ◁

6.5. Aplicació al càlcul d'integrals

El teorema dels residus es pot fer servir per calcular diverses integrals reals. Farem diversos exemples típics.

Exemple 6.19. Tenim una funció racional R sense singularitats en $|z| = 1$, i volem calcular

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt.$$

Fent el canvi $z = e^{it}$, podem posar

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}; \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}.$$

Com que $dz = ie^{it} dt$, llavors $dt = \frac{dz}{iz}$, de manera que

$$I = \frac{1}{i} \int_{\gamma} R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{z},$$

on γ és el cercle $|z| = 1$. Ara apliquem el teorema dels residus i ja està.

Per exemple,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}.$$

Fent el canvi $z = e^{it}$, tenim que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz.$$

La funció

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

té singularitats en els punts $\alpha = (-2 + \sqrt{3})i$ i $\beta = (-2 - \sqrt{3})i$. Tenim que $|\alpha| < 1$ i $|\beta| > 1$, així que aplicant el teorema dels residus, tenim que

$$\int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \alpha).$$

Com que α és un pol simple de f , tenim que

$$\operatorname{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{2}{z - \beta} = \frac{2}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{3}i}.$$

Per tant,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

◇

Exemple 6.20. Càlcul d'integrals del tipus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx$$

on f no té cap pol en l'eix real.

Per exemple, donat $k > 0$, calculem

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2} dx.$$

Tenim

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx \right).$$

Així doncs, calcularem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx.$$

Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + k^2}.$$

Aquesta funció és holomorfa a tot $\mathbb{C}$, excepte en els punts ki , $-ki$ que són pols de f d'ordre 1. Prenem $R > 0$ molt gran, de manera que $R > k$. Integrem la funció f en el semicercle γ format pel segment $\gamma_1(x) = x$, amb $x \in [-R, R]$ i $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Com que només

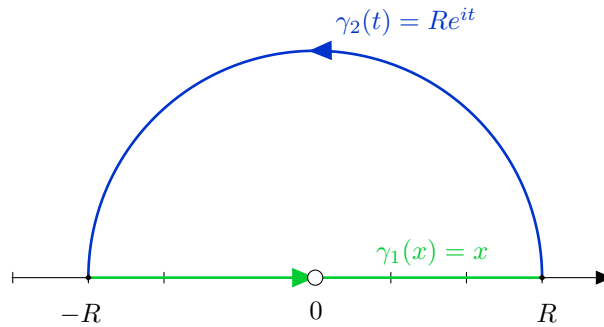


Figura 6.2.: Camins per l'exemple 6.20.

el punt ki es troba en l'interior del semicercle, pel teorema dels residus, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ki).$$

Calculem ara el residu de f en el punt ki . Com que és un pol d'ordre 1, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, ki) = \lim_{z \rightarrow ki} (z - ki) f(z) = \lim_{z \rightarrow ki} \frac{e^{iz}}{z + ki} = \frac{e^{iki}}{2ki},$$

6. Sèries de Laurent

així que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{\pi}{k} e^{-k}.$$

D'altra banda, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx.$$

Fent $R \rightarrow \infty$, obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{\pi}{k} e^{-k},$$

on

$$I_R = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Si veiem que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$, aleshores obtindrem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx = \frac{\pi}{k} e^{-k} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2} dx = \frac{\pi}{2k} e^{-k}.$$

Provem doncs que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$. Tenim que

$$I_R = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{R^2 e^{2it} + k^2} Ri e^{it} dt.$$

Llavors

$$|I_R| \leq \int_0^{\pi} \frac{|e^{iRe^{it}}|}{|R^2 e^{2it} + k^2|} R dt.$$

Com que $|e^{iRe^{it}}| = e^{-R \sin t}$, fent servir que $|R^2 e^{2it} + k^2| \geq R^2 - k^2$, i que $\sin t \geq 0$ per $t \in [0, \pi]$, veiem que

$$|I_R| \leq \frac{R}{R^2 - k^2} \int_0^{\pi} e^{-R \sin t} dt \leq \frac{\pi R}{R^2 - k^2} \rightarrow 0$$

quan $R \rightarrow \infty$, provant el resultat desitjat. $\diamond$

Exemple 6.21. Si f té algun pol en l'eix real, evitem el pol. Per exemple, calculem

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Integrant per parts, es pot veure que aquesta integral impròpia és convergent (encara que no és absolutament convergent). Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z},$$

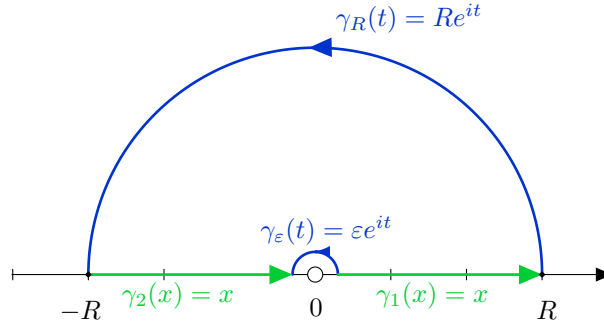


Figura 6.3.: Camins per l'exemple 6.21.

que és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Integrem f en el camí γ de la següent figura. Pel teorema de Cauchy, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

D'altra banda, com que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 - \gamma_{\varepsilon}$, amb $\gamma_1(x) = x$ per $x \in [\varepsilon, R]$; $\gamma_2(y) = y$ per $y \in [-R, -\varepsilon]$; $\gamma_R(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \pi]$ i $\gamma_{\varepsilon}(t) = \varepsilon e^{it}$ per $t \in [0, \pi]$, tenim que

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz.$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

També, després de fer el canvi $x = -y$, tenim que

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iy}}{y} dy = - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx.$$

Per tant, per a $0 < \varepsilon < R$, tenim

$$0 = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx + I_R - I_{\varepsilon}.$$

Això és,

$$0 = 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx + I_R - I_{\varepsilon}.$$

Fent primer $R \rightarrow +\infty$ i després $\varepsilon \rightarrow 0$, i usant que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$ (vegeu l'exercici 6.5.1), obtenim

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}.$$

Tot plegat ens dona que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}.$$

6. Sèries de Laurent

Vegem ara que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(e^{iz} - 1)}{z} dz = 0.$$

Efectivament, per $|z| = \varepsilon$ amb $0 < \varepsilon < 1$ tenim que

$$\left| \frac{e^{iz} - 1}{z} \right| \leq \frac{e^{|z|} - 1}{|z|} \leq e^{|z|} = e^\varepsilon \leq e$$

(aquestes desigualtats es poden veure a partir del desenvolupament en sèrie de l'exponencial) i, per tant,

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(e^{iz} - 1)}{z} dz \right| \leq e \operatorname{Long}(\gamma_\varepsilon) = e \pi \varepsilon,$$

que tendeix a zero quan ε tendeix a zero.

Això implica que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{i \varepsilon e^{it} dt}{\varepsilon e^{it}} = \pi i.$$

Per tant

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad \diamond$$

Observació 6.22. Si R és una funció racional sense pols a l'eix real i

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zR(z) = 0$$

(és a dir, si $R = P/Q$ amb $\deg Q \geq \deg P + 2$), aleshores podem calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$$

integrant R sobre un semicercle del semiplà superior i fent tendir el radi a infinit. Vegeu l'exercici 6.5.3. •

Exemple 6.23. Càlcul de

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}, \quad n \geq 2.$$

Aquesta integral és convergent ja que $n > 1$. Considerem la funció

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n},$$

que és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ excepte en les solucions de $z^n + 1 = 0$, és a dir, en

$$a_k = e^{i(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Integrem la funció f en el “formatget” γ del dibuix, amb $R > 1$ gran. Només el pol a_0 es

6. Sèries de Laurent

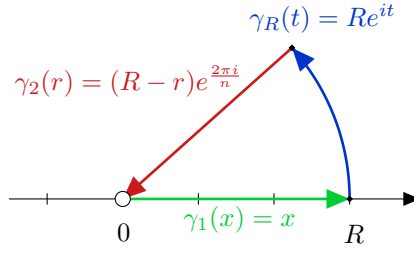


Figura 6.4.: Camins per l'exemple 6.23.

troba en l'interior del camí γ , de manera que, pel teorema dels residus,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_0).$$

Com que $a_0 = e^{\pi i/n}$ és un zero simple de $1 + z^n$, tenim

$$\operatorname{Res}(f, a_0) = \frac{1}{na_0^{n-1}}.$$

Com que $a_0^n = -1$, això també es pot escriure com

$$\operatorname{Res}(f, a_0) = -\frac{a_0}{n}.$$

Per tant,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -\frac{2\pi i}{n} e^{\pi i/n}.$$

D'altra banda, si $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi/n]$, aleshores

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi}{n} \frac{R}{R^n - 1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

A més,

$$\int_{[0,R]} f(z) dz = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n},$$

mentre que, en el segment radial inclinat, posant $z = te^{2\pi i/n}$,

$$\int_{[0, Re^{2\pi i/n}]} f(z) dz = e^{2\pi i/n} \int_0^R \frac{dt}{1+t^n}.$$

Tenint en compte l'orientació del contorn, obtenim, fent $R \rightarrow +\infty$,

$$(1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2\pi i}{n} e^{\pi i/n}.$$

6. Sèries de Laurent

Finalment, com que

$$1 - e^{2\pi i/n} = -2ie^{\pi i/n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

deduïm

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}.$$

◇

Exemple 6.24. Per $0 < \alpha < 1$, podem calcular

$$\int_0^\infty \frac{Q(x)}{x^\alpha} dx$$

on Q no té cap pol en $\{0\} \cup \mathbb{R}^+$ amb $\lim_{z \rightarrow \infty} zQ(z) = 0$.

En aquest cas, considerem la funció

$$f(z) = Q(z) z^{-\alpha}, \quad z^{-\alpha} = e^{-\alpha \mathcal{L}z},$$

amb $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$, amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$. Llavors $z^{-\alpha}$ és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Sobre la vora superior del tall,

$$z^{-\alpha} \rightarrow x^{-\alpha},$$

mentre que sobre la vora inferior,

$$z^{-\alpha} \rightarrow e^{-2\pi i\alpha} x^{-\alpha}.$$

. En aquest cas, integrem f en el recinte “comecocos” γ de la figura 6.5.

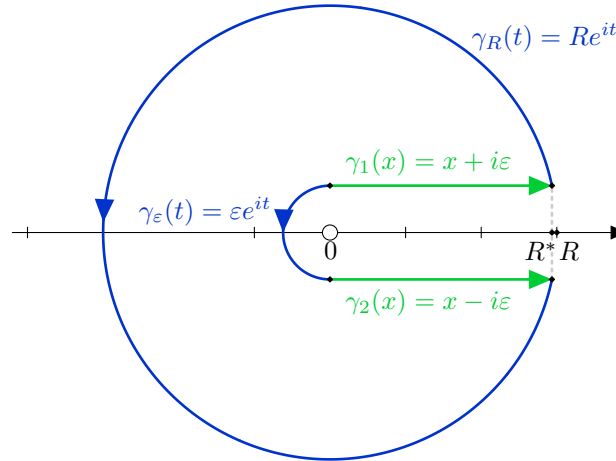


Figura 6.5.: Camins per l'exemple 6.24.

6. Sèries de Laurent

Tenim $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R - \gamma_2 - \gamma_\varepsilon$, amb

$$\begin{aligned}\gamma_1(x) &= x + i\varepsilon, & \text{per } x \in [0, R^*]; \\ \gamma_R(t) &= Re^{it}, & \text{per } t \in [\varepsilon^*, 2\pi - \varepsilon^*]; \\ \gamma_2(x) &= x - i\varepsilon, & \text{per } x \in [0, R^*]; \\ \gamma_\varepsilon(t) &= \varepsilon e^{it}, & \text{per } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

Així, si veiem que els arcs exterior i interior no contribueixen en el límit, el teorema dels residus dona

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_0^\infty \frac{Q(x)}{x^\alpha} dx = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Res}(Q(z)z^{-\alpha}, a),$$

on A és el conjunt de pols de Q en $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, vegeu l'exercici 6.5.5. $\diamond$

Exemple 6.25. Calcular integrals del tipus

$$\int_0^\infty R(x) \ln x dx,$$

on R no té cap pol en $\mathbb{R}^+$ i si $R = P/Q$, grau $Q \geq \text{grau } P + 2$.

Observem, primer, que si raonem com en els casos anteriors i agafem la funció $g(z) = R(z) \mathcal{L}z$ on $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$ amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$, i integrem la funció g en la regió “comecocos” del cas anterior, es compleix que $z \in \gamma_1^*$, $z = x + i\varepsilon$, així que $\mathcal{L}z \rightarrow \ln x$ si $\varepsilon \rightarrow 0$ i si $z \in \gamma_3^*$, $z = x - i\varepsilon$, de manera que $\mathcal{L}z \rightarrow \ln x + 2\pi i$ si $\varepsilon \rightarrow 0$. Tot plegat ens dona que si $z = x + i\varepsilon$, amb $x > 0$, $g(x + i\varepsilon) \rightarrow R(x) \ln x$, i $g(x - i\varepsilon) \rightarrow R(x)(\ln x + 2\pi i)$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$ i, com que els camins es recorren en sentits oposats, la part corresponent a $R(x) \ln(x)$ es cancel·la, i no podem calcular la integral desitjada.

Per aquest motiu, agafem la funció

$$f(z) = R(z) (\mathcal{L}z)^2,$$

on $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$ amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$, i integrem la funció f en la regió “comecocos” del cas anterior. La component imaginària ens permetrà recuperar la integral buscada, vegeu l'exercici 6.5.7. $\diamond$

Exercicis

6.5.1. Per $r > 0$, considerem la corba $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $\gamma_r(t) = re^{it}$, i sigui

$$I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Demostreu que $\lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = 0$. $\triangleleft$

6.5.2. Considereu la funció $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 9)(z^2 + 4)^2}$.

6. Sèries de Laurent

(a) Determineu les singularitats de f .

(b) Calculeu la part principal del desenvolupament de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(c) Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor.

◁

6.5.3. Demostreu que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

◁

6.5.4. Calculeu

$$I := \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^5}.$$

◁

6.5.5. Donat $a \in (0, 1)$ calculeu el valor de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2} dx.$$

◁

6.5.6. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

◁

6.5.7. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

◁

6.5.8. Justifiqueu la integrabilitat (Lebesgue o impròpia Riemann) i calculeu les següents integrals (en tots els apartats $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $n = 0, 1, 2, \dots$):

a) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4 \cos t} dt.$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1} dx.$

◁

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2 + \cos t} dt.$

6. Sèries de Laurent

6.5.9. Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3} dx$$

i calculeu-ne el seu valor (cal justificar tots els passos). ◁

6.5.10. Sigui $f(z) = e^z/z^2$ i la recta $\gamma = \{1 + it; t \in (-\infty, +\infty)\}$.

a) Calculeu (justificant tots els passos)

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Indicació: integreu f sobre la vora del semidisc de centre $z_0 = 1$ i radi R amb $\operatorname{Re} z \leq 1$.

b) Deduïu que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(t) + 2t\sin(t)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2\pi}{e}$. ◁

6.5.11. Considereu

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)^2}.$$

(a) Trobeu la part principal de la sèrie de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(b) Justifiqueu la convergència de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor (justifiqueu tots els passos). ◁

6.5.12. Sigui $f(z) = e^{iz^2}$, i considereu el camí γ_R format per el segment que va de 0 a R ; l'arc del cercle $|z| = R$ que va de R a $Re^{i\pi/4}$, i el segment que va de $Re^{i\pi/4}$ a 0. Demostreu que

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$

i utilitzeu-ho per a calcular les integrals de Fresnel

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx, \quad \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx.$$

Observació: Podeu utilitzar que $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ◁

6.5.13. (a) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$. Suposem que $f(a_n) = 0$ per una successió $a_n \in \mathbb{D}^*$ tal que $a_n \rightarrow 0$. Demostreu que $f \equiv 0$ o bé $z = 0$ és una singularitat essencial de f .

6. Sèries de Laurent

(b) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^*$ tal que per a tot $n \geq 2$, f no té zeros sobre les corbes $|z| = 1/n$ i a més

$$\int_{|z|=1/n} \frac{1}{f(z)} dz \neq \int_{|z|=1/(n+1)} \frac{1}{f(z)} dz.$$

Demostreu que $z = 0$ és una singularitat essencial de f . Indicació: Utilitzeu el teorema de deformació i l'apartat anterior. $\triangleleft$

6.5.14. Calculeu, justificant tots els passos, la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2 + x + 1} dx, \quad -1 < \alpha < 1.$$

Indicació: Considereu la funció $f(z) = \frac{z^\alpha}{z^2 + z + 1}$. Definiu una determinació del logaritme $\log(z)$ a $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ de manera que $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$. Finalment integreu la funció $f(z)$ a la mateixa regió que les integrals del tipus

$$\int_0^{+\infty} R(x) \ln(x) dx. \quad \triangleleft$$

6.6. Principi de l'argument

El principi de l'argument i el teorema de Rouché es fan servir per calcular el nombre de zeros i pols d'una funció meromorfa dins d'una corba tancada.

Definició 6.26. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Diem que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és meromorfa en Ω si $f \in H(\Omega \setminus E)$, on $E \subset \Omega$ està format per punts aïllats, i aquestes singularitats de f són pols. En aquest cas, posem $f \in M(\Omega)$. $\bullet$

Teorema 6.27 (Principi de l'argument). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in M(\Omega)$. Denotem per Z el conjunt dels zeros de f en Ω , i per E el conjunt de pols de f en Ω . Sigui γ un camí tancat en $\Omega \setminus (Z \cup E)$, homòleg a 0 en Ω . Llavors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \in Z} \text{Ind}(\gamma, z) m(f, z) - \sum_{p \in E} \text{Ind}(\gamma, p) m(f, p),$$

on $m(f, z)$ és la multiplicitat del zero z , i $m(f, p)$ denota l'ordre del pol p .

Com en el teorema dels residus, les sumes anteriors tenen només un nombre finit de termes no nuls.

Observació 6.28. S'anomena el principi de l'argument, ja que si $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$ és la corba imatge, llavors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Ind}(\Gamma, 0),$$

6. Sèries de Laurent

així que, si γ és una corba tancada simple, llavors el nombre de zeros menys el nombre de pols de f en l'interior de γ (comptant multiplicitats) és igual al nombre de voltes que dona la corba imatge $f(\gamma)$ al voltant del zero, que seria la variació de l'argument al llarg de $f(\gamma)$ dividit per 2π .

En efecte, tenim que

$$\text{Ind}(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-0} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt}{f(\gamma(t))} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad \bullet$$

Demostració del teorema 6.27. Observem que si f és holomorfa en $\Omega \setminus E$, llavors la funció $h = f'/f$ és holomorfa en $\Omega \setminus (E \cup Z)$. Aplicant el teorema dels residus, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{w \in E \cup Z} \text{Res} \left(\frac{f'}{f}, w \right) \text{Ind}(\gamma, w).$$

• Si z_0 és un zero de f de multiplicitat m , llavors $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, on g és holomorfa en un entorn de z_0 amb $g(z_0) \neq 0$. Llavors, en un entorn de z_0 tenim que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Com que $g(z) \neq 0$ en un entorn de z_0 , llavors g'/g és holomorfa en aquest entorn, de manera que

$$\text{Res}(f'/f, z_0) = m.$$

• Si p_0 és un pol de f d'ordre m , llavors $\tilde{g}(z) = (z - p_0)^m f(z)$ és holomorfa en un entorn de p_0 amb $\tilde{g}(p_0) \neq 0$. Llavors, procedint com abans obtenim

$$\text{Res}(f'/f, p_0) = -m.$$

Per tant

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{w \in Z} \text{Res} \left(\frac{f'}{f}, w \right) \text{Ind}(\gamma, w) + \sum_{p \in E} \text{Res} \left(\frac{f'}{f}, p \right) \text{Ind}(\gamma, p) \\ &= \sum_{w \in Z} \text{Ind}(\gamma, w) m(f, w) - \sum_{p \in E} \text{Ind}(\gamma, p) m(f, p). \end{aligned} \quad \square$$

Exemple 6.29. Aplicant el principi de l'argument calculem el nombre de zeros (comptant multiplicitats) del polinomi $Q(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10$ al primer quadrant.

Volem aplicar el principi de l'argument a la corba $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ formada per:

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x, & x &\in [0, R] \\ \gamma_2(t) &= Re^{it}, & t &\in [0, \pi/2] \\ (\gamma_3)_-(y) &= iy, & y &\in [0, R]. \end{aligned}$$

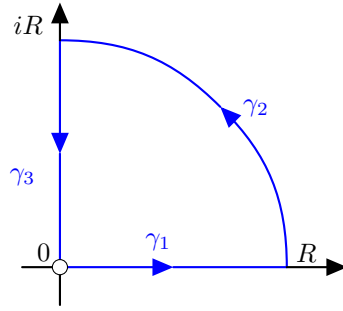


Figura 6.6.: Camins per l'exemple 6.29.

on $R > 0$ és prou gran per englobar les arrels de Q al primer quadrant $\mathcal{Q}_1$, que són un nombre finit. Pel principi de l'argument,

$$\#Z(Q) \cap \mathcal{Q}_1 = \sum_{w \in Z} \text{Ind}(\gamma, w) m(Q, w) = \text{Ind}(Q \circ \gamma, 0).$$

En el que raonarem a continuació, provarem també que el polinomi Q no té cap zero a γ^* .

Mirem doncs quantes voltes fa la corba $Q \circ \gamma$ al voltant de 0, vegeu la figura 6.7. Estudiem cada tros de γ .

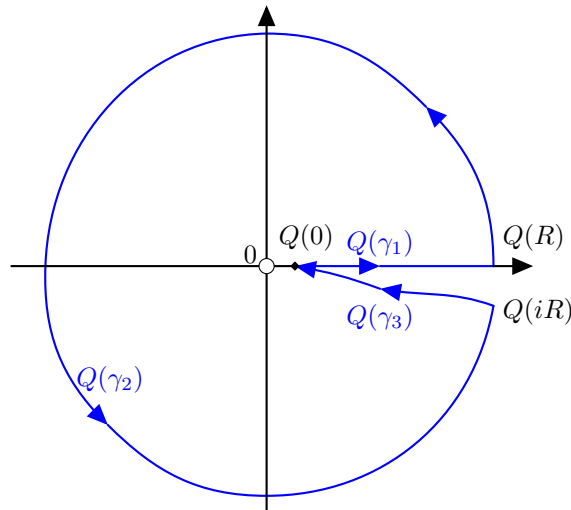


Figura 6.7.: Imatge per Q dels camins de l'exemple 6.29.

La corba $Q(\gamma_1(x)) = Q(x)$ és continguda a $\mathbb{R}_+$, ja que

$$Q(x) = x^4 + 2x(x^2 - 1) + 10 > 10 - 2 = 8 > 0.$$

Tenim doncs que Q no s'anul·la a γ_1^* i $Q(\gamma_1)$ és un segment al semieix real positiu, que va de $Q(0)$ a $Q(R)$.

Seguidament

$$Q(\gamma_2(t)) = Q(Re^{it}) = (Re^{it})^4 \left(1 + \frac{2}{Re^{it}} - \frac{2}{(Re^{it})^3} + \frac{10}{(Re^{it})^4} \right).$$

Per tant, quan R és molt gran, $Q(\gamma_2(t))$ no s'anul·la i és una petita pertorbació de $R^4 e^{i4t}$, i podem argumentar com en la demostració del lema 5.21. Com que $t \in [0, \pi/2]$, obtenim que $4t \in [0, 2\pi]$ i la variació de l'argument és $2\pi \pm \mathcal{O}(R^{-1})$.

Pel tercer tros tenim que

$$Q((\gamma_3)_-(y)) = Q(iy) = (y^4 + 10) - 2i(y^3 + y),$$

i en particular $Q(iR)$ és un punt amb part imaginària negativa. Observem que per a $y > 0$,

$$\operatorname{Re} Q(iy) > 0, \quad \operatorname{Im} Q(iy) < 0.$$

Per tant $Q(\gamma_3(y))$ va del punt $Q(iR)$ cap a $Q(0)$ restant sempre dins del quart quadrant.

Amb tot això tenim que el nombre de voltes que fa $Q \circ \gamma$ al voltant de 0 és 1; pel principi de l'argument

$$\#Z(Q) \cap \mathcal{Q}_1 = \operatorname{Ind}(Q \circ \gamma, 0) = 1. \quad \diamond$$

Exercicis

6.6.1. Quines de les següents funcions són meromorfs a $\mathbb{C}$?

$$a) z^5, \quad b) z^{5/2}, \quad c) e^{1/z}, \quad d) 1/\sin(z). \quad \triangleleft$$

6.6.2. Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) amb part real positiva del polinomi $P(z) = z^6 - z^4 - 2z - 6$.

I si alternativament el polinomi fos $Q(z) = z^6 - z^4 - 2z + 6$? $\triangleleft$

6.6.3. Sigui f una funció entera tal que

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Demostreu que f té, com a molt, un zero a tot $\mathbb{C}$. $\triangleleft$

6.7. Teorema de Rouché

Teorema 6.30 (Teorema de Rouché⁴). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f, g \in M(\Omega)$. Sigui γ un camí tancat simple homòleg a 0 en Ω . Suposem que f i g no tenen pols en γ^* . Si

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \quad z \in \gamma^*$$

⁴Eugène Rouché, Someire, 1832–1910, https://ca.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne_Rouch%C3%A9

aleshores

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g,$$

on Z_f, Z_g denoten el nombre de zeros (comptant multiplicitats) de f i g en l'interior de γ , i P_f, P_g el nombre de pols (comptant l'ordre) de f i g en l'interior de γ .

Observació 6.31. Cal que la desigualtat sigui estricta. També, en ser γ simple, tenim que $\text{Ind}(\gamma, z)$ val 0 o +1 per $z \notin \gamma^*$. •

Demostració del teorema 6.30. Notem que f i g tampoc no poden tenir zeros en γ^* per la hipòtesi imposada (en cas contrari, tindriem $|g(z)| < |g(z)|$ o bé $|f(z)| < 0$).

Tenim $F = f/g \in M(\Omega)$. Si suposem, per simplificar, que els pols i els zeros d'una funció no coincideixen ni amb zeros ni amb pols de l'altra, aleshores

$$\{\text{zeros de } F\} = \{\text{zeros de } f\} \cup \{\text{pols de } g\}; \quad \{\text{pols de } F\} = \{\text{zeros de } g\} \cup \{\text{pols de } f\}.$$

Per la hipòtesi, tenim que $\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1$ per $z \in \gamma^*$, de manera que la corba imatge $\Gamma = F(\gamma) \subset D_1(1)$, així que Γ no dona cap volta al voltant del 0 i, per tant, $\text{Ind}(\Gamma, 0) = 0$. Pel principi de l'argument

$$0 = \text{Ind}(\Gamma, 0) = Z_F - P_F = Z_f + P_g - (Z_g + P_f),$$

d'on obtenim el resultat. En el cas general, la mateixa conclusió se segueix de la identitat local

$$\text{ord}_a(F) = \text{ord}_a(f) - \text{ord}_a(g),$$

on els pols es compten amb ordre negatiu. □

La majoria de les vegades apliquem el teorema de Rouché en un cercle $\{|z - a| = R\}$ i a funcions f, g holomorfes en un entorn de $\overline{D_R(a)}$. En aquest cas, si $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ per $|z - a| = R$, se segueix que f i g tenen el mateix nombre de zeros comptant multiplicitats en el disc obert $D_R(a)$. Això ens pot servir per determinar els zeros de f en el disc, si podem triar una funció g de la qual es pugui determinar fàcilment el nombre de zeros.

Exemple 6.32. Trobem el nombre de zeros del polinomi $P(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ en el disc unitat $\mathbb{D}$.

Prenem la funció $g(z) = 6z^3$ que té 3 zeros comptant multiplicitats en $\mathbb{D}$. Tenim que $|g(z)| = 6$ si $|z| = 1$. Llavors

$$|P(z) - g(z)| = |z^7 - 2z^5 - z + 1| \leq |z|^7 + 2|z|^5 + |z| + 1 = 5 < 6 = |g(z)|, \quad \text{si } |z| = 1.$$

Pel teorema de Rouché, P i g tenen el mateix nombre de zeros (comptant multiplicitats) en $\mathbb{D}$, així que P té 3 zeros en $\mathbb{D}$. ◇

Exemple 6.33. Trobem quants zeros té $P(z) = z^4 - 6z + 3$ en l'anell $\{1 < |z| < 2\}$.

Primer, trobem els zeros de P dins del disc $\{|z| < 2\}$. Prenem $g(z) = z^4$ que té 4 zeros comptant multiplicitats en $\{|z| < 2\}$. Tenim que

$$|P(z) - g(z)| = |-6z + 3| \leq 6|z| + 3 = 15 < 16 = |g(z)| \quad \text{si } |z| = 2.$$

6. Sèries de Laurent

Com abans, aquesta desigualtat també implica que P no té zeros en $|z| = 2$. Pel teorema de Rouché, P i g tenen el mateix nombre de zeros en $\{|z| < 2\}$, de manera que P té 4 zeros en $\{|z| < 2\}$.

Ara, busquem els zeros de P en el disc unitat $\{|z| < 1\}$. Prenem $h(z) = -6z$ que té un zero en el disc unitat. Tenim que

$$|P(z) - h(z)| = |z^4 + 3| \leq |z|^4 + 3 = 4 < 6 = |h(z)| \quad \text{si } |z| = 1.$$

Pel teorema de Rouché, P té exactament un zero, comptant multiplicitats, en el disc unitat.

En conclusió, el polinomi P té 3 zeros en l'anell $\{1 < |z| < 2\}$. $\diamond$

Teorema 6.34 (Teorema de Hurwitz⁵). *Sigui f_n una successió de funcions holomorfes en un domini Ω tals que $f_n \rightarrow f$ uniformement en compactes d' Ω , per una certa funció f . Si per a tota $n \geq 0$, f_n no s'anul·la en cap punt d' Ω , aleshores o bé $f \equiv 0$ o bé f no s'anul·la en Ω .*

Demostració. Comencem observant que f és holomorfa en Ω pel teorema de Weierstrass. Suposem que f no és idènticament 0, però $f(a) = 0$ per un cert $a \in \Omega$. Aleshores, com que els zeros de f han de ser aïllats (en ser f no idènticament nul·la), tenim que $f(z) \neq 0$ en un cert disc puntejat $\overline{D_r(a)} \setminus \{a\} \subset \Omega$. Sigui $0 < m = \min_{|z-a|=r} |f(z)|$ que existeix perquè f és contínua i el cercle és un compacte i sigui n prou gran per garantir que

$$|f_n(z) - f(z)| < m$$

per a tot z en $\{|z - a| = r\}$, fet que es dona per la convergència uniforme. Aleshores, sobre la corba $\{|z - a| = r\}$,

$$|f_n(z) - f(z)| < m \leq |f(z)|,$$

i pel teorema de Rouché, f_n i f tenen el mateix nombre de zeros dins $\{|z - a| = r\}$. Però això és una contradicció ja que f en té almenys un, i f_n no en té cap per hipòtesi. $\square$

Exercicis

6.7.1. *Demostreu que l'equació $e^z = 2z + 1$ té exactament una solució en el disc unitat obert. Indicació: Proveu que $|e^z - 1| \leq e - 1$ si $|z| = 1$.* $\triangleleft$

6.7.2. *Sigui f una funció holomorfa en el disc unitat tancat tal que $|f(z)| < 1$, per a $|z| = 1$. Quants punts fixos té f ?* $\triangleleft$

6.7.3. *Calculeu el nombre de solucions (comptant multiplicitats) de les següents equacions en el disc unitat:*

(a) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0.$

(b) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0.$

⁵Adolf Hurwitz, Hildesheim, 1859–1919, https://ca.wikipedia.org/wiki/Adolf_Hurwitz

6. Sèries de Laurent

(c) $z^7 - 5z^4 + z^2 = 2$. ◁

6.7.4. Quants zeros té $P(z) = z^4 + 6z^3 - 4z^2 + 1/8$ en la regió $\{z \in \mathbb{C}; \frac{1}{2} < |z| < 1\}$? ◁

6.7.5. Considerem $P(z) = z^6 + 3z^4 + z^2 + z + 9$.

(a) Proveu que tots els zeros de $P(z)$ són a l'anell $1 < |z| < 2$.

(b) Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) de $P(z)$ al primer quadrant. ◁

6.7.6. (a) Calculeu el nombre de solucions a $\mathbb{D}$ de l'equació $e^z = 4z + 1$.

(b) Demostreu que l'equació $e^z = 3z^n$ té n solucions en el disc unitat ($n = 1, 2, \dots$). ◁

6.7.7. Sigui $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$, i $n \in \mathbb{N}$.

(a) Demostreu que l'equació

$$(z - 1)^n e^z = a$$

té exactament n arrels diferents al semiplà $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Indicació: Considereu un disc centrat a $z = 1$ i de radi $R = 1$ primer, després mireu d'augmentar el radi sense sortir del semiplà tancat de la dreta.

(b) Proveu que si, a més, $|a| \leq 1/2^n$, llavors totes aquestes arrels són al disc $D_{1/2}(1)$. ◁

6.7.8. Demostreu que per a tot $R > 0$ existeix $n(R) \geq 0$ tal que si $n > n(R)$

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

no té zeros al disc $\{|z| \leq R\}$. ◁

6.7.9. Sigui f_n una successió de funcions holomorfes en un domini Ω tals que $f_n \rightarrow f$ uniformement en compactes d' Ω , per una certa funció f .

1. (Corol·lari de Hurwitz) Deduïu que si $f_n(z) \neq a$ per a tot $z \in \Omega$ i tot $n \in \mathbb{N}$, aleshores, $f \equiv a$ o bé $f(z) \neq a$ en Ω .
2. Proveu que si f_n és injectiva en Ω per a tot $n \geq 0$, aleshores f és constant o bé f és injectiva en Ω . Indicació: Argumenteu per reducció a l'absurd, i utilitzeu l'apartat anterior.
3. Proveu que si f té un zero d'ordre m en $a \in \Omega$, aleshores existeix $\rho_0 > 0$ tal que per tot $\rho < \rho_0$ i per tot $n > n_\rho$, f_n té exactament m zeros en $D_\rho(a)$ comptant multiplicitats. ◁

6. *Séries de Laurent*