

8. Fluids

La solució de molts problemes importants en *dinàmica de fluids*, també anomenada *hidrodinàmica* o *aerodinàmica* s'obté sovint fent servir mètodes de variable complexa.

8.1. Qüestions generals. Escenari i notació.

1. *El flux del fluid és bidimensional.* En el nostre model suposem que les característiques del flux són idèntiques per tot pla paral·lel. Això ens permet fixar l'atenció només en un pla, considerem el pla z . Les figures construïdes en aquest pla s'interpreten com seccions transversals de cilindres, vegeu la figura 8.1.

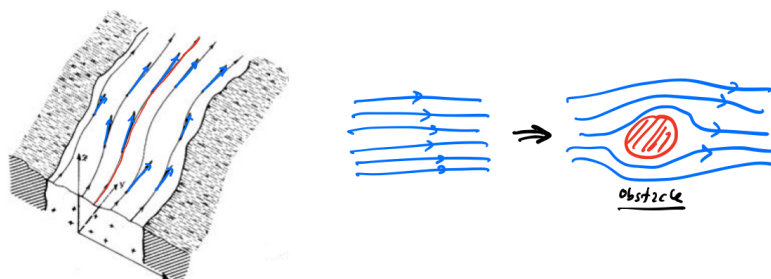


Figura 8.1.: Secció bidimensional d'un flux. El disc representa la secció d'un cilindre de l'espai.

2. *El flux és estacionari o uniforme.* Considerem que la velocitat del fluid en un punt no varia amb el temps, només depèn de la posició (x, y) . Vegeu per exemple un mapa de vents de la Terra a <https://earth.nullschool.net/>, cal esperar un bona estona per veure com canvia la distribució. En petita escala temporal podem pensar que és un flux estacionari.
3. *Les components de la velocitat deriven d'un potencial.* Denotem per $\mathbf{V}(x, y) = (V_1, V_2)$ les components de la velocitat del fluid en el punt (x, y) . Suposarem que existeix una funció $\varphi(x, y)$, que anomenem *velocitat potencial*, de manera que

$$\nabla\varphi = \text{grad}\varphi = \mathbf{V}.$$

En aquest cas el flux es diu que és *irrotacional* o *potencial*. Es pot demostrar¹ que

¹Ho podeu fer com a exercici.

8. Fluids

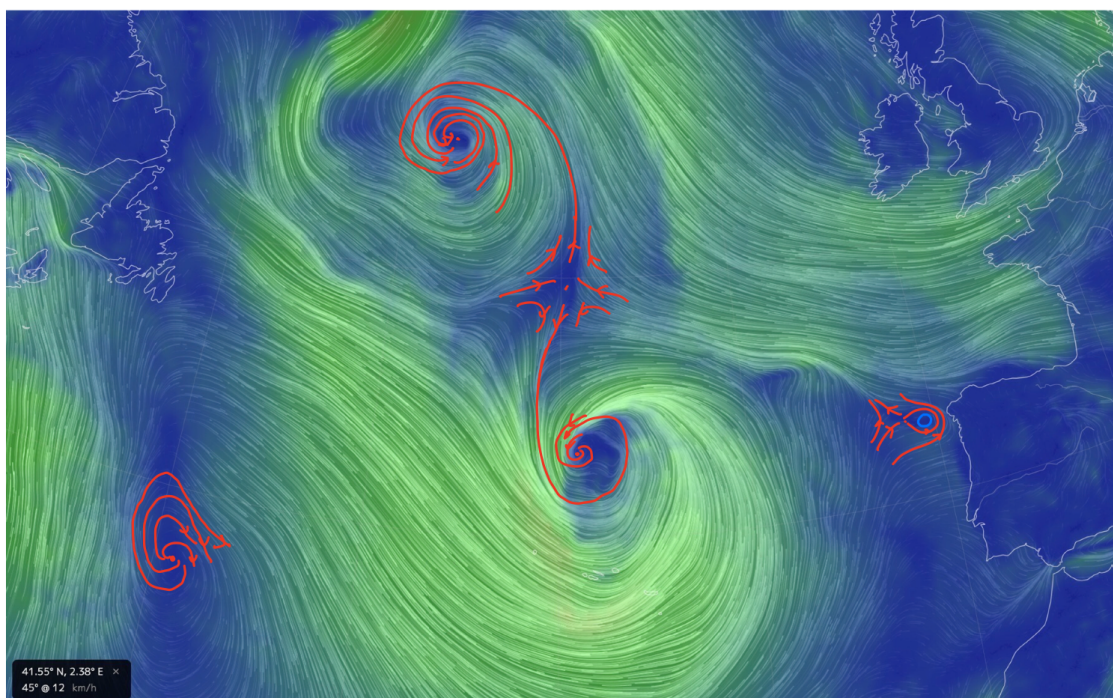


Figura 8.2.: Mapa de vents.

aquesta condició és equivalent a

$$\text{rot} \mathbf{V} = \frac{-\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0.$$

4. *El fluid és incompressible.* La densitat, o massa per unitat de volum, és constant. Si V_n és la component normal de la velocitat al llarg d'un circuit tancat C (vegeu la figura 8.3) aquesta condició equival a

$$Q := \int_C V_n ds = \int_C (-V_2 dx + V_1 dy) = 0.$$

Això expressa que la quantitat de fluid dins C és constant (entra el mateix que surt). Aquesta condició és equivalent a

$$\text{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0.$$

A la quantitat Q se l'anomena *flux* del vector $\mathbf{V}$ a través del contorn C . En fluids més generals la quantitat Q pot ser no nul·la.

En general, per fluxos que no necessàriament provenen d'un potencial, a la quantitat

$$\Gamma := \int_C (V_1 dx + V_2 dy) = \int_C V_t ds$$

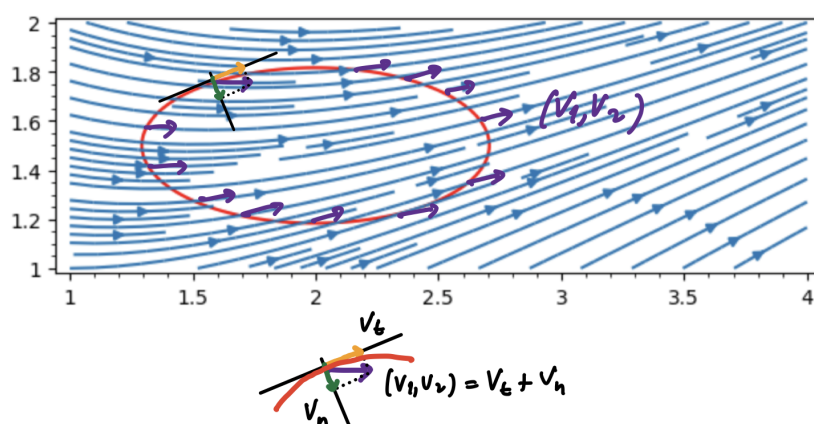


Figura 8.3.: Component tangencial V_t i normal V_n del flux respecte a un circuit.

on C és una corba tancada, V_t la component tangencial de $\mathbf{V}$ en C (vegeu la figura 8.3) i ds l'element de longitud, se l'anomena *circulació* del flux al voltant de C .

Siugi $\psi(x, y)$ una funció harmònica conjugada de la velocitat potencial $\varphi(x, y)$ definida al conjunt $\Omega \subset \mathbb{C}$ (és a dir, que $\varphi_x = \psi_y$ i $\varphi_y = -\psi_x$). La funció analítica en Ω donada per

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

s'anomena *potencial complex*.

Notació 8.1. Fixem la següent notació pel capítol:

- $\Phi(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ s'anomena *potencial complex*.
- La funció φ és la *funció potencial* (o velocitat potencial) i ψ la *funció de corrent*.
- Les corbes $\varphi = c$ són les *línies equipotencials* i $\psi = c$ les *línies de corrent* o *de flux* (són ortogonals).
- El camp del flux, o *velocitat de corrent*, $\mathbf{V}$ satisfà

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}(z) &= V e^{i\alpha} = V_1 + iV_2 = \overline{\Phi'(z)}, \\ V &= |\mathbf{V}| = |\Phi'|, \quad \alpha = -\arg(\Phi'), \\ \mathbf{V} &= \text{grad}\varphi. \end{aligned} \right\}$$

- Els punts on $\Phi'(z) = 0$ s'anomenen punts *estacionaris* o *d'estancament* (en aquests punts la velocitat és zero). •

Observació 8.2 (Comandes amb Sage.). Per dibuixar les línies de corrent i les línies equipotencials caldrà la comanda `contour_plot` i per dibuixar els camps (amb fletxes de direcció) `plot_vector_field` o `streamline_plot`. •

Exercicis

8.1.1. Proveu que $\Gamma = 0$ en un flux potencial (suposeu que la funció potencial és de classe C^2 com a mínim). $\triangleleft$

8.1.2. Proveu que per fluxos definits en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ que satisfan les quatre hipòtesis anteriors, la velocitat potencial $\varphi(x, y)$ és una funció harmònica. $\triangleleft$

8.1.3. Proveu que $\overline{\Phi'(z)} = \mathbf{V}(z) = V_1 + iV_2$. $\triangleleft$

8.2. Fluxos bàsics.

Exemple 8.3 (Flux uniforme). Ve donat pel potencial $\Phi(z) = V_0 e^{-\delta i} z$, amb $V_0, \delta \in \mathbb{R}$.

Trobem la seva expressió. Recordem que $\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = \overline{V_0 e^{-\delta i}} = V_0 e^{\delta i}$, $V = V_0$, per tant,

$$\varphi = \operatorname{Re}(\Phi(z)) = \operatorname{Re}(V_0 e^{-\delta i}(x + iy)) = V_0(\cos \delta \cdot x + \sin \delta \cdot y).$$

$$\psi = \operatorname{Im}(\Phi(z)) = \operatorname{Im}(V_0 e^{-\delta i}(x + iy)) = V_0(-\sin \delta \cdot x + \cos \delta \cdot y).$$

Les línies de flux $\psi = c$ són rectes amb pendent $\tan \delta$ i δ és l'angle que formen les línies de flux amb l'eix real. $\diamond$

Exemple 8.4 (Font al punt $z = a$). Aquí $\Phi(z) = k \log(z - a)$, $k \in \mathbb{R}$. Quan $k > 0$ s'anomena *font* (en anglès, *source*), si $k < 0$ una *pica* (en anglès, *sink*).

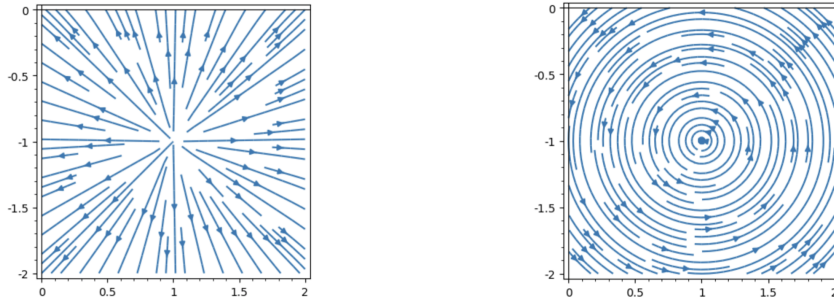


Figura 8.4.: A l'esquerra hi ha una font amb $k = 2$, a la dreta, un remolí amb $k = 2$. $a = 1 - i$.

Trobem l'expressió de $\mathbf{V}$, V , φ i ψ . Tenim que $\overline{\Phi'(z)} = \frac{k}{\bar{z} - \bar{a}} = k \frac{z - a}{|z - a|^2} = \frac{k}{|z - a|^2}(x - a_1 + i(y - a_2))$. Llavors

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{k}{|z - a|^2}(x - a_1, y - a_2), \quad V(x, y) = \frac{k}{|z - a|}.$$

Les direccions de flux que dona $\mathbf{V}$ segueixen la direcció de $z - a$, si $k > 0$ surten, una font, i si $k < 0$ entren, una pica. Com que $\Phi = k \log(z - a) = k(\ln |z - a| + i \arg(z - a))$

8. Fluids

tenim que $\psi(x, y) = k \arg(z - a)$ i les corbes $\psi = c$ són línies que surten de a com es veu a l'esquerra de la figura 8.4. Observem que

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z) dz = \int_C \frac{k dz}{z - a} = 2k\pi i.$$

Aleshores $\Gamma = 0$ i $Q = 2k\pi$. No té circulació i la potència és $2k\pi$. $\diamond$

Exemple 8.5 (Flux amb circulació). Estudiem el cas $\Phi(z) = -ik \log(z - a)$ $k \in \mathbb{R}$. Veurem que la velocitat del flux és inversament proporcional a la distància al punt a . Diem que en el punt a hi ha un *remolí* de força k .

Procedim com en el cas anterior. Tenim que $\overline{\Phi'(z)} = \frac{ki}{\bar{z} - \bar{a}} = ki \frac{z - a}{|z - a|^2} = \frac{ki}{|z - a|^2} (x - a_1 + i(y - a_2)) = \frac{k}{|z - a|^2} (-(y - a_2) + i(x - a_1))$. Llavors

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{k}{|z - a|^2} (-(y - a_2), x - a_1), \quad V(x, y) = \frac{k}{|z - a|}.$$

Les direccions de flux que dona $\mathbf{V}$ segueixen direccions de circumferències amb centre a , si $k > 0$ en direcció antihorària i si $k < 0$ en direcció horària, en els dos casos és un remolí.

Com que $\Phi = -ki \log(z - a) = -ki(\log|z - a| + i \arg(z - a)) = k(\arg(z - a) - i \log(|z - a|))$ tenim que $\psi(x, y) = -k \log|z - a|$ i les corbes $\psi = c$ són circumferències centrades a a tal com es veu a la dreta de la figura 8.4. Observem que si C envolta a , aleshores

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z) dz = \int_C \frac{-ik dz}{z - a} = 2k\pi.$$

Aleshores $\Gamma = 2k\pi$ i $Q = 0$. La circulació és $2k\pi$ i la potència és 0. $\diamond$

Exercicis

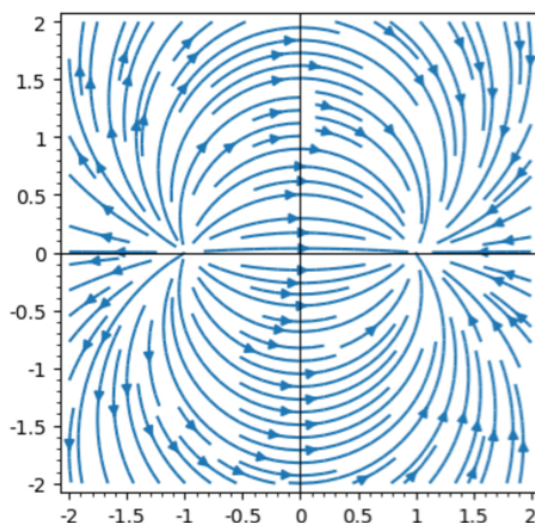
8.2.1. Superposició. *Sumant diferents potencials complexos es poden descriure fluxos més sofisticats. Un exemple important s'obté sumant una font al punt $-a$ amb una pica al punt a amb $a > 0$:*

$$\Phi(z) = k \log(z + a) - k \log(z - a) = k \log \left(\frac{z + a}{z - a} \right).$$

Trobeu l'expressió de $\mathbf{V}$, V , φ i ψ . Dibuixeu les línies de corrent ($\psi = c$). $\triangleleft$

8.2.2. *En l'exercici anterior, fem $a \rightarrow 0$ i $k \rightarrow \infty$ de manera que $2ka = \mu$ sigui finit. Vegeu que al límit obtenim el potencial complex $\Phi(z) = \mu/z$ que s'anomena doblet o dipol. Ve a ser una font i una pica separades per una distància infinitesimal. La quantitat $2\pi\mu$ s'anomena moment del doblet. Trobeu l'expressió de $\mathbf{V}$, V , φ i ψ . Dibuixeu les línies de corrent ($\psi = c$).* $\triangleleft$

8.2.3. Font-remolí. *Estudieu el flux amb funció potencial $\Phi(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log(z - a)$. Discutiu segons els valors de Γ (circulació o intensitat) i Q (potència). Feu dibuixos de les línies de camp segons els signes de Γ i Q .* $\triangleleft$

Figura 8.5.: Superposició amb $a = 1$.

8.3. Obstacles

Un problema important en la teoria de fluids és determinar el model de corrent que es mou inicialment a velocitat uniforme V_0 i que ha d'evitar un obstacle. La idea general és considerar un potencial complex de la forma $\Phi(z) = V_0 z + G(z)$ on $G(z)$ compleix que $\lim_{z \rightarrow \infty} G'(z) = 0$. Això vol dir que lluny de l'obstacle el corrent ve donat per $V_0 z$. De vegades cal també que aquest nou potencial Φ tingui la frontera de l'obstacle com a trajectòria.

Exemple 8.6. Estudiem el corrent del fluid amb potencial complex donat per

$$\Phi(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

amb $V_0, a \in \mathbb{R}$.

Ja veiem que és una superposició d'un flux lineal (quan z és gran) i un doblet (quan z

prop de zero).

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= V_0 \left(x \left(1 + \frac{a^2}{|z|^2} \right) + iy \left(1 - \frac{a^2}{|z|^2} \right) \right) \\ \varphi &= V_0 x \left(1 + \frac{a^2}{|z|^2} \right) \\ \psi &= V_0 y \left(1 - \frac{a^2}{|z|^2} \right) \\ \mathbf{V} &= \overline{\Phi'(z)} = V_0 \left(1 - \frac{a^2 z^2}{|z|^4} \right) \\ V &= |V_0| \left| 1 - \frac{a^2 z^2}{|z|^4} \right|.\end{aligned}$$

Comprovem ara que $|z| = a$ és una línia de corrent: observem que els punts de $C = \{z = x + iy : |z|^2 = a^2\}$ satisfan $\psi(x, y) = ct$. En efecte, si $z \in C$ llavors

$$\psi(z) = V_0 y (1 - a^2/a^2) = 0$$

i C és la corba de nivell zero, és una línia de flux. A la figura 8.6 es pot veure el flux per $V_0 = a^2 = 3$.

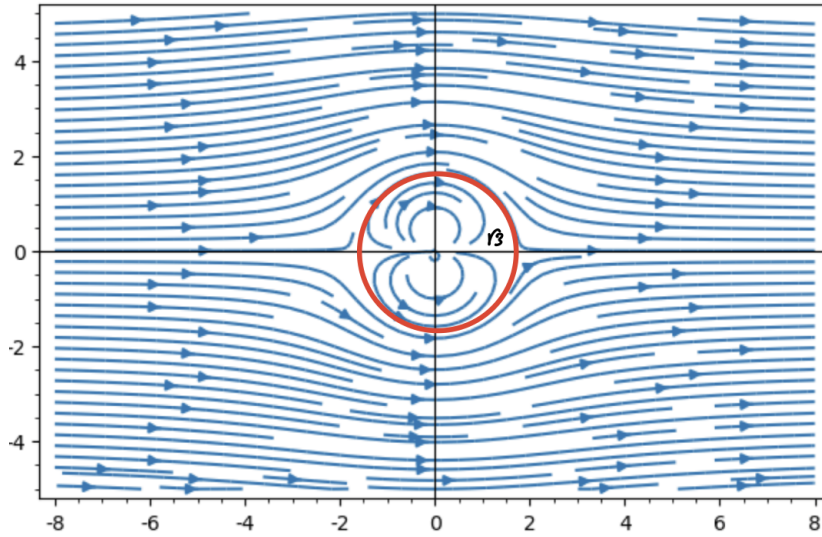


Figura 8.6.: Flux per $\Phi(z) = 3(z + 3/z)$.

◇

Teorema 8.7. Si f és un potencial complex definit a la regió exterior $|z| > R$, amb singularitats només en aquesta regió, aleshores

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}$$

8. Fluids

té $|z| = R$ com a línia de corrent i conserva, a l'exterior del cercle, les singularitats de f .

Recordem que si $f(z)$ és analítica en una regió Ω tal que $\bar{\Omega} = \Omega$ llavors $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ és analítica i $g'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$.

Demostració. Si $|z| = R$ llavors $\Phi(z) = f(z) + \overline{f(R^2 z / |z|^2)} = f(z) + \overline{f(\bar{z})} \in \mathbb{R}$. Llavors $\psi(z) = 0$ per tot z de la circumferència $|z| = R$, llavors aquesta circumferència és línia de flux. Sigui p un punt singular de f , per hipòtesi $|p| > R$, llavors $|R^2/\bar{z}| < R$ i p no és punt singular de $\overline{f(R^2/\bar{z})}$. Les singularitats de Φ fora de la circumferència són les que provenen de f i no de la part afegida. $\square$

Exercicis

8.3.1. Modifiquem el flux amb potencial donat per $f(z) = \log(z + 2)$ que és una font sortint des del punt $z = -2$ (vist en un exemple/exercici anterior). Per això considerem la modificació donada pel potencial

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \log(z + 2) + \log\left(\frac{1}{\bar{z}} + 2\right).$$

- Descomponeu Φ en fluxos coneguts.
- Calculeu $\Phi'(z)$ i confirmeu el que es demostra a l'apartat anterior.
- Vegeu que per z amb $|z|$ molt gran resulta $\Phi'(z) \approx \frac{1}{z + 2}$ i que lluny de $z = -2$ el flux associat a Φ és com una font sortint de $z = -2$.
- Mostreu amb un gràfic com eviten el disc unitari les línies de flux (feu servir `contour_plot` i `streamline_plot`). $\triangleleft$

8.4. Expressió general (recapitulació).

Proposició 8.8. Si $\Phi(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ aleshores

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_C V_t ds = \oint_C (V_1 dx + V_2 dy) = \oint_C d\varphi \\ Q &= \oint_C V_n ds = \oint_C (-V_2 dx + V_1 dy) = \oint_C d\psi\end{aligned}$$

i que llavors

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z) dz.$$

Si $\Phi'(z)$ està definida a l'interior de C i té un nombre finit de punts singulars $\{p_k\}$, aleshores

$$\Gamma + iQ = 2\pi i \sum_k \text{Res}(\Phi'(z), p_k).$$

8. Fluids

Demostració. Tenim que $\Phi'(z) = \varphi_x + i\psi_x = V_1 - iV_2 = \psi_y - i\varphi_y$. Aleshores

$$Q = \oint_C V_n ds = \oint_C (-V_2 dx + V_1 dy) = \oint_C \psi_x dx + \psi_y dy = \oint_C d\psi$$

i

$$\Gamma = \oint_C V_t ds = \oint_C (V_1 dx + V_2 dy) = \oint_C \varphi_x dx + \varphi_y dy = \oint_C d\varphi.$$

Ara bé

$$\begin{aligned} \Phi'(z)dz &= (\varphi_x + i\psi_x)(dx + idy) = \varphi_x dx - \psi_x dy + i(\psi_x dx + \varphi_x dy) = \\ &= \varphi_x dx + \varphi_y dy + i(\psi_x dx + \psi_y dy) = d\varphi + id\psi. \end{aligned}$$

i podem concloure que

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z)dz.$$

La darrera afirmació de l'exercici és conseqüència del teorema dels residus. $\square$

Proposició 8.9. Si a és un pol d'ordre finit de $\Phi'(z)$, per $\Phi(z)$ hi ha un entorn al voltant de a de manera que

$$\Phi(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z-a} + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log(z-a) + c_0 + c_1(z-a) + \cdots.$$

Demostració. Per tenir $\Phi'(z)$ un pol d'ordre finit integrant obtenim el resultat. $\square$

Llavors, segons el que hem vist al llarg del capítol, diem que

- $\Phi(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log(z-a)$ determina en a una *font-remolí* de potència Q i intensitat Γ , la denotem per $(a; Q, \Gamma)$. Quan $Q = 0$ és un remolí, i quan $\Gamma = 0$ és una font ($Q > 0$) o una pica ($Q < 0$).
- $\Phi(z) = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z-a}$ determina en a un *doblet* de moment p , el denotem per $(a; p)$ ($\bar{p}$ determina la direcció la direcció del doblet que passa per a).
- $\Phi(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ determina un *multiplet* d'ordre $2k$ en el punt a .²

²La notació i comportament a l' ∞ és similar, si $\Phi(z) = c_n z^n + \cdots + \frac{p}{2\pi} z + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log(z) + c_0 + \frac{c_1}{z} \cdots$ direm que el terme en $\log(z)$ determina una *font-remolí* de potència $-Q$ i intensitat $-\Gamma$, el terme en z un *doblet* de moment p i els de z^k *multiplets* d'ordre $2k$.

Exercicis

8.4.1. Pels z on $V(z) = \overline{\Phi'(z)} = 0$ diem que hi ha un punt estacionari del corrent (per exemple és aquell punt d'un riu on una fulla petita s'ha quedat aturada però que al seu voltant circula l'aigua).

- a) Per $\Phi(z) = z^n$ el 0 és un punt estacionari d'ordre $n - 1$. Feu un dibuix amb les línies de flux i les línies equipotencials superposades per $n = 2, 3, 4$.
- b) Podeu deduir experimentalment quin angle formen les línies equipotencials i les línies de flux?
- c) Proveu que si un punt estacionari a és un zero d'ordre $n-1$ llavors les línies equipotencials i de corrent ($\varphi = ct., \psi = ct.$) formen un angle $\pi/2n$ en el punt estacionari (feu-lo com a mínim pel cas $\Phi'(z) = Cz^{n-1}, C \in \mathbb{C}$). Quin angle formen una línia de corrent i una línia equipotencial quan es creuen en un punt no estacionari?

8.4.2. Discutir el moviment del fluid amb potencial complex igual a

a) $\Phi(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ on $a, b \in \mathbb{C}$ i $Q, \Gamma \in \mathbb{R}$.

b) $\Phi(z) = az + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log(z)$ on $a, \Gamma > 0$.

c) $\Phi(z) = az + \frac{Q}{2\pi} \log(z)$ on $a, Q > 0$.

d) $\Phi(z) = \frac{p}{2\pi z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log(z)$ on $p, \Gamma > 0$. ◁

8.4.3. Discutir el moviment del fluid amb potencial complex

$$\Phi(z) = V_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log(z), \text{ amb } \Gamma, V_0, R > 0.$$

Particularment estudieu els casos $\Gamma < 4\pi RV_0$, $\Gamma > 4\pi RV_0$ i $\Gamma = 4\pi RV_0$. Dibuixeu exemples de cadascun dels casos. ◁

8.4.4. Donar un potencial complex que té fonts-remolins $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k) : k = 1, \dots, n\}$ i velocitat $V_\infty = Ve^{i\alpha}$ a l'infinit. ◁

A. El teorema de l'aplicació de Riemann

Recordem l'enunciat del teorema que ens ocupa.

Teorema A.1 (Teorema de l'aplicació de Riemann). *Sigui $U \subsetneq \mathbb{C}$ un obert simplement connex. Llavors existeix una representació conforme $f : U \rightarrow \mathbb{D}$. A més, si escollim $z_0 \in U$ i demanem que $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) > 0$ (és a dir que $f'(z_0) \in \mathbb{R}_+$), aleshores f és única.*

La demostració de la unicitat és senzilla, vegeu la Secció 7.1. En aquest apèndix demostrarem l'existència de la representació conforme. Tot i que el teorema va ser enunciat per Riemann, la demostració completa s'atribueix a Koebe. És una demostració elegant que fa servir diverses de les eines que hem desenvolupat en aquests apunts. Addicionalment, però, necessitem també el concepte de família normal i el teorema de Montel¹, que enunciem a continuació.

Famílies normals i el teorema de Montel

Sigui $U \subset \mathbb{C}$ un obert del pla complex, i $\mathcal{F}$ una família de funcions holomorfes en U . Diem que $\mathcal{F}$ és una *família normal* si tota successió de funcions de $\mathcal{F}$ té una parcial que convergeix uniformement en compactes de U . Observem que pel teorema de Weierstrass (vegeu el teorema 4.37), el límit ha de ser una funció holomorfa, tot i que no necessàriament ha de ser membre de la família $\mathcal{F}$.

Comprovar si una família de funcions és normal acostuma a fer-se fent servir el teorema de Montel. La versió feble d'aquest resultat diu el següent:

Teorema A.2 (Teorema de Montel, versió feble). *Sigui $U \subset \mathbb{C}$ un obert i $\mathcal{F}$ una família de funcions holomorfes en U . Suposem que $\mathcal{F}$ és uniformement fitada, és a dir, que existeix $M > 0$ tal que*

$$|f(z)| \leq M, \quad \text{per a tota } f \in \mathcal{F} \text{ i tot } z \in U.$$

Aleshores, la família $\mathcal{F}$ és normal.

El lector interessat pot trobar una demostració a [SS10, Sect. 3].

Demostració del teorema de l'aplicació de Riemann

La demostració consta de tres passos diferents que farem per separat.

Pas 1. *Vegem primer que existeix un subconjunt $V \subset \mathbb{D}$ que conté l'origen i una representació conforme $F : U \rightarrow V$ amb $F(z_0) = 0$.*

¹Paul Montel, Niça, 1876–1975, https://ca.wikipedia.org/wiki/Paul_Montel

A. El teorema de l'aplicació de Riemann

Demostració. Per fer-ho, escollim un nombre $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha \notin U$ (existeix perquè U no és tot el pla). Aleshores $z - \alpha \neq 0$ a U i, per tant, donat que U és simplement connex, existeix una determinació del logaritme de $z - \alpha$ en U (vegeu el teorema 5.28). És a dir, existeix una funció holomorfa $\mathcal{L}(z)$ tal que $e^{\mathcal{L}(z)} = z - \alpha$. De l'equació veiem que $\mathcal{L}$ és necessàriament injectiva, però a més, veiem que

$$\mathcal{L}(z) \neq \mathcal{L}(z_0) + 2\pi i, \quad \text{per a tot } z \in U,$$

ja que, altrament, exponenciant aquesta expressió obtindríem $z = z_0$, que implicaria que $\mathcal{L}(z) = \mathcal{L}(z_0)$, una contradicció. De fet, $\mathcal{L}(U)$ omet tot un disc centrat en $\mathcal{L}(z_0) + 2\pi i$ ja que si no fos així, existiria una successió (z_n) en U tal que $\mathcal{L}(z_n) \rightarrow \mathcal{L}(z_0) + 2\pi i$. De nou, exponenciant aquesta expressió, i donat que l'exponencial és contínua, tindríem que $z_n \rightarrow z_0$ i, per tant, $\mathcal{L}(z_n) \rightarrow \mathcal{L}(z_0)$, una contradicció.

Així doncs hem vist que existeix un disc D centrat a $\mathcal{L}(z_0) + 2\pi i$ tal que $\mathcal{L}(U)$ no interseca D . Considerem ara l'homografia

$$T(w) = \frac{w - \mathcal{L}(z_0)}{w - (\mathcal{L}(z_0) + 2\pi i)},$$

que envia el punt $\mathcal{L}(z_0) + 2\pi i$ a l'infinit i $\mathcal{L}(z_0)$ a l'origen, i el disc D que l'envolta al complementari d'un disc.

Com que $\mathcal{L}$ és injectiva, $T \circ \mathcal{L}$ també ho és i, per tant, $T \circ \mathcal{L} : U \rightarrow T(\mathcal{L}(U))$ és una representació conforme. A més, per construcció, $T(\mathcal{L}(U))$ és un conjunt fitat. Només ens cal doncs compondre $T \circ \mathcal{L}$ amb una homotècia adequada, per obtenir una representació conforme de U en un subconjunt de $\mathbb{D}$ que conté l'origen i tal que $F(z_0) = 0$. $\square$

Del pas anterior deduïm que podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que U és un subconjunt obert de $\mathbb{D}$ i que $0 \in U$ és el punt que volem enviar a 0. Considerem la família $\mathcal{F}$ de funcions holomorfes i injectives d' U en D fixant l'origen, és a dir

$$\mathcal{F} = \{f : U \rightarrow \mathbb{D} \mid f \text{ injectiva, holomorfa i } f(0) = 0\}.$$

Observem que la identitat pertany a $\mathcal{F}$ i, per tant, $\mathcal{F}$ no és buida. A més, aquesta família és uniformement fitada per construcció, ja que totes les funcions van a parar al disc unitat. El teorema de Montel (vegeu el teorema A.2) ens diu, doncs, que $\mathcal{F}$ és una família normal.

Pas 2. Vegem que $\mathcal{F}$ conté una funció f que maximitza $|f'(0)| = s := \sup_{h \in \mathcal{F}} |h'(0)| \geq 1$.

Demostració. Observem primer que $|f'(0)|$ està uniformement acotada, per a $f \in \mathcal{F}$. Això es pot veure aplicant la desigualtat de Cauchy (vegeu el lema 4.27) a f' en un petit disc centrat a l'origen. En conseqüència, podem definir

$$s = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)| \geq 1,$$

on la desigualtat ve donada pel fet que la identitat pertany a $\mathcal{F}$. Escollim una successió $(f_n) \subset \mathcal{F}$ tal que $|f'_n(0)| \rightarrow s$, quan $n \rightarrow \infty$. Donat que $\mathcal{F}$ és normal, aquesta successió té una parcial que convergeix uniformement en compactes de U a una funció f . Pel teorema

A. El teorema de l'aplicació de Riemann

de Weierstrass (vegeu el teorema 4.37), f és holomorfa en U i $|f'(0)| = s \geq 1$. Això ens diu que f no és constant i, com que les funcions f_n són injectives, el teorema de Hurwitz (vegeu el teorema 6.34 i l'exercici 6.7.9) ens diu que f també és injectiva. Per continuïtat, també veiem que $|f(z)| \leq 1$ per a tot $z \in U$ i, pel principi del mòdul màxim (vegeu el teorema 4.50), se segueix que $|f(z)| < 1$ (ja que U és obert). Clarament també tenim que $f(0) = 0$, la qual cosa implica que $f \in \mathcal{F}$ i que $|f'(0)| = s$, tal i com volíem demostrar. $\square$

Pas 3. Vegem que, de fet, f és una representació conforme de U en $\mathbb{D}$.

Demostració. Ja sabem que f és holomorfa i injectiva, per tant només ens queda demostrar que és exhaustiva. La idea és veure que, si no fos així, podríem trobar una funció $F \in \mathcal{F}$ amb $|F'(0)| > |f'(0)| = s$, la qual cosa és una contradicció.

Suposem doncs que existeix $a \in \mathbb{D}$ tal que $f(z) \neq a$ per a tot $z \in U$. Considerem l'automorfisme de $\mathbb{D}$ que intercanvia els punts a i 0 (vegeu l'exercici 1.1.10)

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}.$$

Com que U és simplement connex, també ho és $(\varphi_a \circ f)(U)$ i, a més, no conté l'origen. Per tant, existeix una branca holomorfa de l'arrel quadrada (de la identitat) en $(\varphi_a \circ f)(U)$, vegeu l'exercici 5.4.2, i que és injectiva. Considerem ara la composició

$$F = \varphi_{g(a)} \circ g \circ \varphi_a \circ f,$$

i procedim a veure que $F \in \mathcal{F}$. Clarament F és holomorfa i $F(0) = 0$. Totes les funcions envien el disc unitat a ell mateix i, per tant, F també ho fa. De la mateixa manera, F és injectiva ja que totes les components ho són, i així concloem que $F \in \mathcal{F}$.

Considerem ara $h(u) = u^2$, la inversa de g , i escrivim

$$f = \varphi_a^{-1} \circ h \circ \varphi_{g(a)}^{-1} \circ F := \Phi \circ F.$$

Observem que Φ envia $\mathbb{D}$ a ell mateix (no injectivament), amb $\Phi(0) = 0$. Pel lema de Schwarz (vegeu el lema 4.53), es compleix que $|\Phi'(0)| \leq 1$. A més, la igualtat només podria passar si Φ fos una rotació. Però Φ no és injectiva, ja que conté el factor $h(u) = u^2$. Per tant,

$$|\Phi'(0)| < 1.$$

. Però aleshores, usant la regla de la cadena,

$$s = |f'(0)| = |\Phi'(0)F'(0)| < |F'(0)|$$

que contradiu la maximalitat de $|f'(0)|$ en $\mathcal{F}$. Deduïm doncs que f és exhaustiva i, per tant, una representació conforme de U en $\mathbb{D}$ fixant l'origen. $\square$

Multiplicant f per la constant $|f'(0)|/f'(0)$, de mòdul 1, obtenim $\tilde{f}$ amb les mateixes propietats i satisfent $\tilde{f}'(0) > 0$.

Per acabar, observem que en el pas 1, hem pogut escollir una translació que ens portés el punt $z_0 \in U$ escollit a l'origen. És aquesta composició final la que satisfarà les condicions del teorema. $\square$

Observacions sobre la unicitat

La manera com s'expressen les condicions d'unicitat a l'enunciat del teorema pot ser lleugerament obscura. Seria potser més aclaridor entendre-les de la següent manera:

Teorema. *Si $U \subsetneq \mathbb{C}$ és un obert simplement connex, aleshores existeix una representació conforme $f : U \rightarrow \mathbb{D}$. A més, f és única mòdul postcomposició per automorfismes de $\mathbb{D}$.*

En altres paraules, dues representacions conformes, f i g , de U en $\mathbb{D}$ han de complir que $f = T \circ g$, per un automorfisme T del disc unitat, és a dir

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

per algun $z_0 \in \mathbb{D}$ i algun $\theta \in \mathbb{R}$. Això ens diu que per escollir f tenim tres graus de llibertat reals que poden utilitzar-se, per exemple, per decidir la imatge d'algun punt (això són dos – parts real i imaginària), i l'argument d'alguna altra quantitat com la derivada en un punt (el tercer grau, que seria el que s'aconseguiria amb la rotació $e^{i\theta}$). La condició habitual de $f'(0) > 0$ és equivalent a demanar $\arg f'(0) = 0$, i pot aconseguir-se sempre multiplicant per una constant de mòdul 1, és a dir component amb una rotació.

Índex

- aïllament dels zeros, 114
- Abel
 - Niels Henrik, 29
 - teorema d', 53
 - uniforme, criteri d', 52
- absolutament convergent, 12
- acumulació de zeros, 115
- aerodinàmica, 201
- analítica real, 139
- analiticitat de les funcions holomorfes, 99
- angle, 14
- angle recte, 14
- antiholomorfa, funció, 138
- aplicació de Riemann, 143
 - teorema de l', 211
- aplicació oberta, teorema de l', 119
- arbre, la persona i el gos, teorema de l', 133
- arc-connex, 10
- arccosinus, 17
- arcsinus, 17
- arctangent, 17
 - funció, 76
- Argand
 - Jean-Robert, 10
 - pla d', 10
- argument, 23
 - principi de l', 173
 - principal, 20, 35
- arrel
 - quadrada, funció, 77
- arrel n -èsima, 25, 36
- arrel cúbica, funció, 77
- arrel, criteri de l', 13
- arrels n -èsimes de la unitat, 27
- associativa, propietat, 6
- automorfismes
 - de $\mathbb{C}$, 195
 - de $\mathbb{D}$, 194
- Bernoulli, Jacob, 126
- biholomorfa, funció, 181
- binomi de Newton, 101
- Bolzano, Bernard, 2
- Bombelli, Rafael, 1
- branca contínua, 35
- $\mathbb{C}$, 2
- $\mathbb{C}^*$, 20
- γ^* , 82
- $\mathbb{C}$ -derivable, 55
- càlcul geomètric de l'índex, 123
- cadena, 126
- camí, 82
- canvi de variables, 48
- caracterització de simplement connex, 137
- Cardano
 - equació de, 1, 38
 - Girolamo, 1
- Casorati
 - Weierstrass, teorema de, 155
 - Felice, 155
- Cauchy
 - Goursat, teorema de, 88
 - Hadamard, teorema de, 45
 - Pompeiu, fórmula de, 95
 - Riemann, equacions de, 62
 - Augustin Louis, 11
 - desigualtats de, 102
 - teorema de, 135, 136
 - global, teorema de, 128
 - per convexos, teorema de, 94
 - per un disc, teorema de, 92

ÍNDIX

- cercle generalitzat, 185
- cicle, 127
- cicle homòleg a 0, 128
- cicles homòlegs, 128
- circulació, 203
- circumferència generalitzada, 185
- classificació de singularitats, 155
- coloració del pla complex, 30
- commutativa, propietat, 6
- complex, nombre, 3
- comportament a la frontera, 50
- comptant multiplicitats, 27
- conforme, funció, 181
- conformement equivalent, 181
- conjugat, 6
- conjunt de zeros, 112
- connex, 10
- contínua, 30
- continuitat, 30
- contractible, 132
- convergència
 - de sèries, 11
 - de successions, 11
 - uniforme, 44
- convex, 94
- coordenades cartesianes enteres, 30
- corba, 82
 - C^1 a trossos, 82
 - de classe C^1 , 82
 - inversa, 82
 - simple, 82
 - tancada, 82
- corbes homòtopes, 132
- cos dels nombres complexos, 7
- cosinus, 14
 - funció, 75
 - hiperbòlic, 76
- criteri
 - de l'arrel, 13
 - del quocient, 13
- $\mathbb{D}$, 10
- de Moivre, Abraham, 19
- deformació, teorema de, 135
- del Ferro
 - Scipione, 1
 - Tartaglia, equació de, 1
- derivabilitat implica continuïtat, 57
- derivació d'una sèrie de potències, 71
- derivació sota el signe d'integració, 109
- derivada de la funció inversa, 57
- derivades de Wirtinger, 61
- desenvolupament en sèrie de potències, 99
- determinació, 35
 - de l'argument, 42
 - de l'arrel, 42, 137
 - del logaritme, 42, 121, 137
- diferencial, 61, 68
- dilatació complexa, 187
- dinàmica de fluids, 201
- Dirichlet
 - Peter Gustav Lejeune, 29, 143
 - uniforme, criteri de, 52
- disc de convergència, 45
- disc unitat, 10
- distributiva, propietat, 6
- divisió de complexos, 7
- domini, 10
- domini de definició, 29
- $D_r(a)$, 10
- el·lipse, 83
- efecte de la derivada, 63
- entera, funció, 55
- Escher
 - Maurits Cornelis, 195
- esfera de Riemann, 184
- espai
 - mètric, 10
 - normat, 10
 - topològic, 10
 - vectorial, 5, 9
- Euler
 - identitat d', 18, 19
 - Leonhard, 1
- existència de primitives, 136
- exponencial, funció, 17, 31, 75, 197
- expressió integral de l'índex, 124

ÍNDIX

- família normal, 211
- Ferrari, Lodovico, 1
- fluid incompressible, 202
- flux, 201, 202
 - amb circulació, 205
 - estacionari, 201
 - irrotacional, 201
 - potencial, 201
 - uniforme, 201, 204
- fonamental de l'àlgebra, teorema, 3, 27, 104
- font, 204
- fracció de complexos, 7
- funció
 - analítica, 71
 - de variable complexa, 29
 - inversa, derivada de la , 57
 - potencial, 203
- galeria de funcions, 76
- geomètrica de funcions, teoria, 182
- GFT, 182
- gir, 187
- Goursat, Édouard, 88
- gràfic de colors, 31
- Green
 - fórmula de, 88
 - George, 88
- Hadamard, Jacques, 45
- harmònica conjugada, 94, 140
- harmònica, funció, 94, 138
- Herglotz, Gustav, 141
- hidrodinàmica, 201
- Hilbert, David, 108
- holomorfa, funció, 55
- holomorfa de funcions analítiques, 71
- homòtopa a 0, 132
- homografia, 187
- homografies bàsiques, 187
- homologia, 128
- homotècia, 187
- homotopia, 132
- Hurwitz
 - Adolf, 178
 - teorema de, 178
- i , 2
- imaginari, eix, 10
- imatge de conjunts especials, 31
- independència de camí, teorema de la, 135
- independència del camí, 86
- index
 - índex d'un cicle, 127
 - índex d'una corba, 97, 122
- infinitèsim, 15
- integral
 - de camí, 84
 - de Cauchy, fórmula, 95, 102, 109, 129, 131
 - de funcions amb valors complexos, 83
 - de Poisson, fórmula, 141
- invers, element, 7
- inversa per la dreta, 38
- inversió, 187, 188
- jacobià i canvi de variables, 63
- Jukovski
 - funció de, 34, 77
 - Nikolai, 34
- Koebe, Paul, 181
- línies de corrent, 203
- línies equipotencials, 203
- límit d'una funció en un punt, 30
- límit superior, 12
- lacunar, sèrie, 49
- Laplace, Pierre-Simon, 108
- laplacià, 65, 138
- Laurent, Pierre Alphonse, 149
- Legendre, Adrien-Marie, 80
- lemniscata de Bernoulli, 126
- Liouville
 - Joseph, 81
 - teorema de, 104
- localment conforme, 63
- logaritme, 36

ÍNDIX

- derivada del, 58
- principal, 36
- longitud d'una corba, 14, 82
- M de Weierstrass, criteri, 45
- Möbius
 - August Ferdinand, 187
 - transformació de, 187
- mòdul, 6
- mòdul màxim, principi del, 117
- Machin, John, 24
- meromorfa, funció, 173
- Mertens
 - Franz, 12
 - teorema de, 12
- Montel, Paul, 211
- Morera
 - Giacinto, 81
 - teorema de, 105
- multiplicitat del zero, 113
- multivaluada, funció, 35
- número π , 14
- neutre, element, 6
- Newton, Isaac, 101
- norma, 10
- nucli
 - de Herglotz, 141
 - de Poisson, 140
- $\mathcal{O}(z)$, 56
- $o(z)$, 55
- obert, 10, 29
- operadors de Wirtinger, 61
- oposat, element, 6
- ordre
 - del pol, 155
 - del zero, 113
- part
 - imaginària, 4
 - real, 4
 - singular, 149
- pica, 204
- Picard
 - teorema gran de, 156
 - Émile, 156
- Pitàgores, 15
 - teorema de, 15
- Poincaré
 - Henry, 181
- Poisson, Siméon Denis, 140
- pol, 153
- polars, coordenades, 20
- polinomi, 8
 - de Legendre, 80
- Pompeiu, Dimitrie, 95
- potència
 - complexa, 40
 - funció, 32, 196
- potencial, 201
- potencial complex., 203
- primitiva holomorfa, 85
- problema de Dirichlet, 143
- producte de complexos, 4
- producte de funcions analítiques, 73
- prolongació analítica, principi de, 114, 115
- propietat de la mitjana, 98
- propietats de la funció índex, 124
- propietats de la integral, 83
- punt
 - d'estancament, 203
 - estacionari, 203
 - final, 82
 - inicial, 82
- $\mathcal{Q}$, 30
- quocient, criteri del, 13, 47
- raó doble, 193
- radi de convergència, 45
- rang, 29
- real, eix, 10
- recorregut, 29
- reflexió de Schwarz, principi de, 106
- regla
 - de Barrow, 85
 - de la cadena, 57, 68

ÍNDIX

- regles de derivació, 57
- remolí, 205
- reparametrització, 82
- representació conforme, 181
- representació de Herglotz, fórmula de, 142
- residu, 157
 - a l'infinit, 162
 - càlcul del, 157
- residus, teorema dels, 158
- Riemann, Bernhard, 55
- Rouché
 - teorema de, 176
- Rouché, Eugène, 176
- sèrie
 - de Laurent, 149
 - de potències, 44
 - derivada, 71
 - producte de Cauchy, 12
- Schwarz
 - Hermann, 106
 - lema de, 118
- simetria, 193
- simplement connex, 135
- singularitat, 152
 - aïllada, 152
 - essencial, 153
 - evitable, 153
- sinus, 14
 - funció, 75
 - hiperbòlic, 76
- Stone, Marshall H., 120
- suma de camins, 82
- suma de complexos, 4
- sumació per parts, fórmula de, 51
- Tales de Milet, 14
- tancat, 10, 29
- tangent, 14
 - funció, 76
- Tartaglia, Niccolò Fontana, 1
- topologia de $\mathbb{C}$, 10
- transformació conforme, 181
- transformada de Hilbert, 108
- transformada de Laplace, 108
- translació, 187
- triangular, desigualtat, 10
 - per integrals, 83
- trigonometria, 14
- univalent, funció, 181
- variable, 70
- velocitat de corrent, 203
- Weierstrass
 - Karl, 37
 - teorema de, 106
- Wirtinger, Wilhelm, 55

INDEX

Bibliografia

- [Ahl79] Lars Ahlfors. *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 3rd edition, 1979.
- [BC08] Joaquim Bruna and Julià Cufí. *Anàlisi complexa*, volume 49. Univ. Autònoma de Barcelona, 2008.
- [BC13] Joaquim Bruna and Julià Cufí. *Complex Analysis: Translated from the Catalan by Ignacio Monreal*. EMS Press, May 2013.
- [BG12] Carlos A Berenstein and Roger Gay. *Complex variables: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Bur12] R. Burckel. *An Introduction to Classical Complex Analysis: Vol. 1*, volume 64. Birkhäuser, 2012.
- [Con78] John B Conway. *Functions of One Complex Variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2nd edition, 1978.
- [D'A10] John P D'Angelo. *An introduction to complex analysis and geometry*, volume 12. American Mathematical Soc., 2010.
- [Gam03] Theodore Gamelin. *Complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [MH99] Jerrold E. Marsden and Michael J. Hoffman. *Basic complex analysis*, volume 72. Cambridge University Press, 3rd edition, 1999.
- [R⁺79] Walter Rudin et al. *Análisis real y complejo*. 1979.
- [SS10] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2. Princeton University Press, 2010.
- [VLA72] LI Volkovyski, G. Lunts, and I. Aramanovich. *Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja*. Mir Moscu, 1972.