

# Introducció a l'anàlisi complexa

v26.12

Carme Cascante\*, Núria Fagella, Eduardo Gallego<sup>†</sup>,  
Jordi Pau, Martí Prats

8 de setembre de 2026

\*CC: cascante@ub.edu, NF: nfagella@ub.edu, JP: jordi.pau@ub.edu:

*Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Catalonia*

<sup>†</sup>EG: Eduardo.Gallego@uab.cat MP: marti.prats@uab.cat:

*Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Catalonia*



# Índex

|                                                                                    |            |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Introducció</b>                                                                 | <b>iii</b> |
| <b>1. El cos dels nombres complexos</b>                                            | <b>1</b>   |
| 1.1. El cos dels nombres complexos . . . . .                                       | 3          |
| 1.2. Els nombres complexos com a espai vectorial . . . . .                         | 9          |
| 1.3. Repàs de trigonometria . . . . .                                              | 14         |
| 1.4. L'exponencial complexa . . . . .                                              | 17         |
| 1.5. Representació polar d'un nombre complex . . . . .                             | 20         |
| 1.6. Equacions amb exponencials . . . . .                                          | 24         |
| 1.7. Arrels $n$ -èsimes . . . . .                                                  | 25         |
| 1.8. Polinomis: enunciat del teorema fonamental de l'àlgebra . . . . .             | 26         |
| <b>2. Funcions de variable complexa</b>                                            | <b>29</b>  |
| 2.1. Funcions . . . . .                                                            | 29         |
| 2.2. Funcions multivaluades: logaritmes i arguments . . . . .                      | 35         |
| 2.3. Potències complexes . . . . .                                                 | 40         |
| 2.4. Determinacions de logaritmes i arrels de funcions . . . . .                   | 41         |
| 2.5. Sèries de potències de nombres complexos . . . . .                            | 44         |
| 2.6. Càlcul del radi de convergència . . . . .                                     | 47         |
| 2.7. Comportament a la frontera del disc de convergència . . . . .                 | 50         |
| <b>3. Derivació complexa i holomorfia</b>                                          | <b>55</b>  |
| 3.1. Funcions holomorfes . . . . .                                                 | 55         |
| 3.2. Les equacions de Cauchy-Riemann . . . . .                                     | 60         |
| 3.3. Càlcul de les derivades de Wirtinger . . . . .                                | 67         |
| 3.4. Funcions analítiques . . . . .                                                | 71         |
| 3.5. Algunes funcions holomorfes importants . . . . .                              | 75         |
| <b>4. Teoria local de Cauchy</b>                                                   | <b>81</b>  |
| 4.1. Corbes . . . . .                                                              | 82         |
| 4.2. Integració sobre corbes . . . . .                                             | 84         |
| 4.3. Teorema de Cauchy . . . . .                                                   | 88         |
| 4.4. Fórmula integral de Cauchy . . . . .                                          | 95         |
| 4.5. Sèries de potències . . . . .                                                 | 99         |
| 4.6. Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades i desigualtats de Cauchy    | 102        |
| 4.7. Teorema de Liouville i teorema fonamental de l'àlgebra . . . . .              | 104        |
| 4.8. Teorema de Morera . . . . .                                                   | 105        |
| 4.9. Derivació sota el signe integral i fórmula integral de Cauchy per derivades . | 108        |

|                                                                                  |            |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.10. Zeros de funcions holomorfes i principi de prolongació analítica . . . . . | 112        |
| 4.11. El principi del mòdul màxim . . . . .                                      | 117        |
| <b>5. Teoria global de Cauchy</b>                                                | <b>121</b> |
| 5.1. Índex d'una corba tancada respecte d'un punt . . . . .                      | 121        |
| 5.2. El teorema global de Cauchy . . . . .                                       | 126        |
| 5.3. Homotopia i teorema de Cauchy . . . . .                                     | 132        |
| 5.4. Dominis simplement connexos . . . . .                                       | 135        |
| 5.5. Funcions harmòniques . . . . .                                              | 138        |
| 5.6. El problema de Dirichlet . . . . .                                          | 144        |
| <b>6. Sèries de Laurent</b>                                                      | <b>149</b> |
| 6.1. Sèries de Laurent i singularitats . . . . .                                 | 149        |
| 6.2. Singularitats aïllades de funcions holomorfes . . . . .                     | 152        |
| 6.3. Teorema dels Residus . . . . .                                              | 157        |
| 6.4. Residu a l'infinit . . . . .                                                | 162        |
| 6.5. Aplicació al càlcul d'integrals . . . . .                                   | 163        |
| 6.6. Principi de l'argument . . . . .                                            | 172        |
| 6.7. Teorema de Rouché . . . . .                                                 | 176        |
| <b>7. Representació Conforme</b>                                                 | <b>181</b> |
| 7.1. El teorema de l'aplicació de Riemann . . . . .                              | 181        |
| 7.2. Projecció estereogràfica i circumferències generalitzades . . . . .         | 184        |
| 7.3. Transformacions de Möbius . . . . .                                         | 186        |
| 7.4. Raó doble i simetria . . . . .                                              | 193        |
| 7.5. Automorfismes . . . . .                                                     | 194        |
| 7.6. Altres transformacions conformes . . . . .                                  | 197        |
| <b>8. Fluids</b>                                                                 | <b>201</b> |
| 8.1. Qüestions generals. Escenari i notació. . . . .                             | 201        |
| 8.2. Fluxos bàsics. . . . .                                                      | 204        |
| 8.3. Obstacles . . . . .                                                         | 206        |
| 8.4. Expressió general (recapitulació). . . . .                                  | 208        |
| <b>A. El teorema de l'aplicació de Riemann</b>                                   | <b>211</b> |
| <b>Índex conceptual</b>                                                          | <b>215</b> |

# Introducció

Aquests apunts beuen de diverses fonts, però per sobre de tot són el resultat d'anys d'evolució de les assignatures d'anàlisi complexa dels graus en Matemàtiques de la UB i la UAB. Per tant, devem part dels continguts i exercicis aquí presentats a en Joaquim Bruna, en Josep Maria Burgués, en Juan Carlos Cantero, en Joan Josep Carmona, en Julià Cufí, en Juan Jesús Donaire, en Xavier Massaneda, en Joan Eugeni Mateu, en Joan Orobitg, en Quim Ortega i tants d'altres. A tots ells el nostre agraïment per la seva generositat.

L'objectiu d'aquest llibre és poder servir de material pels cursos d'anàlisi complexa dels graus en Matemàtiques de les universitats catalanes, així com d'algun altre grau on el contingut de la matèria superi el d'un receptari. Ens centrem, doncs, en fer un text amb un enfocament didàctic –però sempre rigorós–, mirant d'incloure el corpus bàsic de l'anàlisi complexa, i també amb pinzellades d'alguna aplicació pràctica i de teoremes avançats rellevants. La lectura inclou nombrosos exemples per il·lustrar els continguts i també exercicis per practicar, amb les solucions disponibles per mitjà electrònic.

## Bibliografia complementària

A [BC08] hi trobareu un manual d'anàlisi complexa completíssim i en català, i la seva traducció a l'anglès a [BC13].

Als llibres [Ahl79], [BG12], [Con78] [D'A10], [Bur12], [Gam03], [M<sup>+</sup>70], [R<sup>+</sup>79], [SS10] i [VLA72] podreu trobar aproximacions alternatives i llistes d'exercicis per complementar la vostra formació. El llibre [MH99] és una referència molt didàctica.

## Agraïments

Volem agrair la col·laboració dels alumnes de l'assignatura d'Anàlisi Complexa i de Fourier del grau en Matemàtica Computacional i Analítica de Dades (2023-26) i del grau en Matemàtiques (2024-26) de la UAB per la seva paciència amb les actualitzacions permanents dels apunts, i per la seva contribució en millorar-los, especialment als alumnes Pol Abadia Conejos, Rok Aladrovic Molina, Sergi Almendros Montoya, Guim Casadellà Cors, Marc Herrero Lázaro, Aïman Himi Ben Alilou, Lluís Panal Majó, Helena Pisa Escribano, Laia Querol Alturo, Adrià Rodríguez Estrada, Marc Roig Oliva, David Ruiz Caceres, Laia Alexandra Sjöberg Cerezo i Ariadna Solà Lara (MatCAD 24), Albert Caire Rodríguez, Lluís Gay Torné, Oriol Jiménez Asensi, Catalina Mascaró Català, Sergi Prats Molino, Alex Vega Tomas i Ferran Villarta Burés (MatCAD 25), Ainara Almendáriz Martínez, Carlos Baca Garcia, Sònia Blanes Molina, Roger Brusau Maimó, Marcel Duran Puig, Axel Espuela Alvarez, Nidia Esteve Gómez, Joel Fernández Laparra, Gina Gardeñes Farré, Bernat

Graugés Bellver, Pep Güell Rigall, Gabriel Guerra De Quadras, Adrià Jimeno Ruiz, Judith Lara Piqueras, Ana López Bruballa, Ada López Del Castillo Avilés, Marta Merino Sánchez, Judith More Bataller, Clara Mulet Ballesta, Katia Moreno Aspiroz, Marta Noguera Segura, Arnau Nuñez Martínez, Lara Angélica Olarte Bayani, Tomàs Planelles Alonso, Miguel Puelma Martínez, Martí Puig Sampera, Eric Recio Chorro, Álvaro Resa Asensio, Albert Ricart Quilez, Marina Rúbies Bedós, Adrià Saz Guerra, Drus Sentís Cahué, Héctor Serrano Asensio, Babaldeep Singh, Ainhoa Trillo Rodríguez, Clara Valls Moreso, Arnau Viladevall Ferré, Marta Vélchez García, Lluís Vivó Pons i David Xifré Palacios (Matemàtiques 25), Eric Benavente Carreira, Sara Chillón Domínguez, Daniel Genov Draganova, Emma Llado Viñals, Pau Lorenzo Pareja, Joan Serra Ortega i Daniel Solana Carretero (MatCAD 26), Abel Alvarez Rodriguez, Oriol Antoja Vandellós, Ana Aragón Lopo, Dex Balada Peña, Joan Doria Ribera, Carla Dux-Santoy Escorza, Miquel Ferrándiz Alvarez, Adrián Franco Morales, Jan Lopez Bocache, Edgar Luque Fernández, Mireia Marcos Cañal, Leyre Martínez De Albéniz Merino, Martina Miquel Folch, Martí Mota Llobet, Abel Portas Puigdemont, Blanca Ramos Baiget, Mireia Rizo Rovira, Rubén Rodríguez López, Martí Roé Castillo, Víctor Ruiz Aguilera, Pablo Ruiz De Angulo Ortega, Luis Ruiz Lopatey, Martí Ruiz Sabater, Cai Santamaria Brunet, Joan Villalba Rull, Maximilian Evert Wind Del Olmo i Laia Xifra Casas (Matemàtiques 26) per la seva excel·lent labor en la detecció d'errors matemàtics, tipogràfics, ortogràfics i gramaticals.

# 1. El cos dels nombres complexos

El naixement dels nombres complexos està intrínsecament lligat a una sèrie d'enfrontaments entre matemàtics italians del segle XVI, principalment Scipione del Ferro<sup>1</sup>, Niccolò Fontana Tartaglia<sup>2</sup>, Girolamo Cardano<sup>3</sup>, Lodovico Ferrari<sup>4</sup> i Rafael Bombelli<sup>5</sup>. Cardano fou el primer en publicar en el seu *Ars Magna* (1545) una solució de l'equació de tercer grau. Aquesta havia estat prèviament descoberta per Scipione del Ferro i redescoberta per Tartaglia, però, en mantenir-les secretes per usar-les en duels matemàtics, la seva publicació es va retardar uns quants anys fins que Cardano va fer el pas. En la resolució es fan servir nombres imaginaris (és a dir, arrels de nombres negatius) que Bombelli va descriure i sistematitzar al cap de poc en el seu tractat *Algebra* (1572). Finalment, Leonhard Euler<sup>6</sup> va estandarditzar-ne la notació que coneixem avui dia i va popularitzar-ne l'ús. D'aquesta forma es va donar per fi sortida a un coneixement que havia quedat aparcat fins aleshores.

El mètode de Cardano per resoldre una cúbica, emprant el llenguatge modern, diu que, donada una equació de tercer grau  $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ , la podem reescriure amb el canvi de variable  $y = x - a/3$  com l'*equació de Cardano* (o *equació de del Ferro-Tartaglia*):

$$x^3 + px + q = 0. \quad (1.1)$$

Aleshores creem dues noves variables  $u, v$  tals que

$$\begin{cases} x = u + v, \\ 3uv = -p. \end{cases} \quad (1.2)$$

Aquestes satisfan que

$$0 \stackrel{(1.1)}{=} u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + pu + pv + q = u^3 + v^3 + q,$$

de manera que ens queda el sistema

$$\begin{cases} u^3v^3 = \frac{-p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q. \end{cases}$$

Per tant,  $u^3$  i  $v^3$  són les solucions de l'equació de segon grau

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0,$$

---

<sup>1</sup>Bolonya, 1465 – 1526. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Scipione\\_del\\_Ferro](https://ca.wikipedia.org/wiki/Scipione_del_Ferro)

<sup>2</sup>Brescia, 1499 – Venècia, 1557. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Niccolo\\_Fontana\\_Tartaglia](https://ca.wikipedia.org/wiki/Niccolo_Fontana_Tartaglia)

<sup>3</sup>Pavia, 1501 – Roma, 1576. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Girolamo\\_Cardano](https://ca.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano)

<sup>4</sup>Bolonya, 1522 – 1565. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Lodovico\\_Ferrari](https://ca.wikipedia.org/wiki/Lodovico_Ferrari)

<sup>5</sup>Bolonya, 1526 – 1572. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Rafael\\_Bombelli](https://ca.wikipedia.org/wiki/Rafael_Bombelli)

<sup>6</sup>Basilea, 1707 – 1783. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Leonhard\\_Euler](https://ca.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler)

és a dir,

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right\}. \quad (1.3)$$

Usant (1.2) trobem que

$$x = u + v = \sqrt[3]{u^3} + \frac{-p}{3\sqrt[3]{u^3}}. \quad (1.4)$$

Si anomenem

$$C = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

aleshores

$$x = C - \frac{p}{3C}$$

és una solució de l'equació de Cardano (1.1).

Notem que els nombres  $u^3$  i  $v^3$  que apareixen a (1.3) poden no estar definits en els reals quan  $p$  és negatiu i de mòdul gran (respecte de  $q$ ), concretament si

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

Notem també que a (1.4) l'arrel cúbica d'un nombre real està unívocament determinada (a  $\mathbb{R}$ , és clar).

Si ens restringim als nombres reals i  $p, q \in \mathbb{R}$ , amb aquest mètode podem trobar una solució de la cúbica, sempre i quan  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$ . Sabem que sempre hi ha una solució (pel teorema de Bolzano<sup>7</sup>). Sabem que hi ha equacions amb tres solucions reals, i totes tres es poden intentar descompondre usant (1.2), però el mètode com a molt en dona una. Què està passant? Doncs que ens cal sortir de la recta real per tornar-hi a entrar!

Sigui  $\mathbb{R}$  el cos dels nombres reals. L'equació  $x^2 + 1 = 0$  no té solucions reals. Construïrem un cos més gran que  $\mathbb{R}$ , que anomenarem  $\mathbb{C}$ , on en tindrem les solucions. Per fer-ho, ens cal definir un element  $i$  tal que  $i^2 + 1 = 0$  per fer les combinacions  $\mathbb{R}$ -lineals de 1 i  $i$  (és a dir,  $a + bi$  amb  $a, b \in \mathbb{R}$ ). Aquest cos ens permetrà resoldre la cúbica en general.

Construïm, per exemple, una solució de  $x^3 - 7x + 6 = 0$  usant el mètode de Cardano. Estem en el cas  $p = -7$  i  $q = 6$ , així que (1.3) queda

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ -3 \pm \sqrt{9 - \frac{7^3}{27}} \right\} = \left\{ -3 \pm \frac{\sqrt{-100}}{3\sqrt{3}} \right\}.$$

Usant que  $i^2 = -1$ , i suposant que el producte és commutatiu, trobem que  $(10i)^2 = -100$ , així que ens atrevim a escriure l'expressió anterior com

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ -3 \pm \frac{10}{3\sqrt{3}}i \right\}.$$

<sup>7</sup>Bernard Bolzano, Praga, 1781 – 1848. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Bernard\\_Bolzano](https://ca.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano)

Si trobem un nombre  $u = a + bi$  tal que  $a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = u^3 = -3 + \frac{10}{3\sqrt{3}}i$  (ara hem suposat que  $\mathbb{C}$  és un anell), aleshores podem prendre de (1.2) l'altra solució  $v = 7/(3u)$ , i trobarem  $x$ . Ens cal resoldre, doncs,

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -3, \\ 3a^2b - b^3 = \frac{10}{3\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Més endavant veurem una manera ràpida de trobar aquestes arrels cúbiques. De moment conformem-nos amb observar que una possible solució és  $u = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}i$ , com es pot comprovar directament. Aleshores,  $v = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}i$ , i trobem

$$x = u + v = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}i + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}i = 2.$$

Efectivament,  $x = 2$  soluciona  $x^3 - 7x + 6 = 0$ , com també ho fan  $x = 1$  i  $x = -3$ .

De fet, tot polinomi de coeficients reals (i de coeficients complexos!) tindrà almenys una arrel, la qual cosa es coneix com a teorema fonamental de l'àlgebra. Diem que  $\mathbb{C}$  és un cos algebraicament tancat. Amb aquesta ampliació, seguiran havent-hi dues arrels quadrades per tot element del cos llevat del zero, i tres arrels cúbiques! Notem també que a (1.4) l'elecció de l'arrel quadrada no té importància (per conjugació...), però poden aparèixer tres solucions diferents, corresponents a les tres possibles eleccions de  $C$ , amb la precaució que cal prendre la mateixa arrel cúbica en les dues aparicions.

En aquest capítol introduïm el cos  $\mathbb{C}$  i veiem les seves propietats bàsiques. Explicarem la forma polar i com usar-la per fer operacions, però abans ens caldrà introduir l'exponencial complexa per donar rigor a aquest càlcul. Finalment, veurem com les equacions amb potències tenen múltiples solucions, ja siguin polinomials o exponencials, per acabar exposant el teorema fonamental de l'àlgebra, que demostrarem al capítol 4.

## 1.1. El cos dels nombres complexos

Si som capaços de definir  $i = \sqrt{-1}$ , aleshores  $i$  serà solució de  $x^2 + 1 = 0$ : efectivament,  $(\pm i)^2 + 1 = 0$ . Per tant, de la mateixa manera que si un polinomi té una arrel real  $a$ , aleshores es pot dividir per  $(x - a)$ , esperem poder escriure

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Però de moment la identitat anterior no té cap sentit. Necessitem definir el cos dels nombres complexos.

De moment tenim l'element  $i$  ideat: volem que sigui un nombre tal que  $i \cdot i = -1$ .

**Definició 1.1** (Nombre complex). Donats  $a, b \in \mathbb{R}$ , definim

$$a + bi$$

com un *nombre complex*. Diem, doncs, que, com a conjunt, tenim que

$$\mathbb{C} := \{a + bi : (a, b) \in \mathbb{R}^2\},$$

i anomenem nombres complexos els elements de  $\mathbb{C}$ . Anomenem respectivament part real i part imaginària els nombres

$$\operatorname{Re}(a + bi) = a \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}(a + bi) = b.$$

•

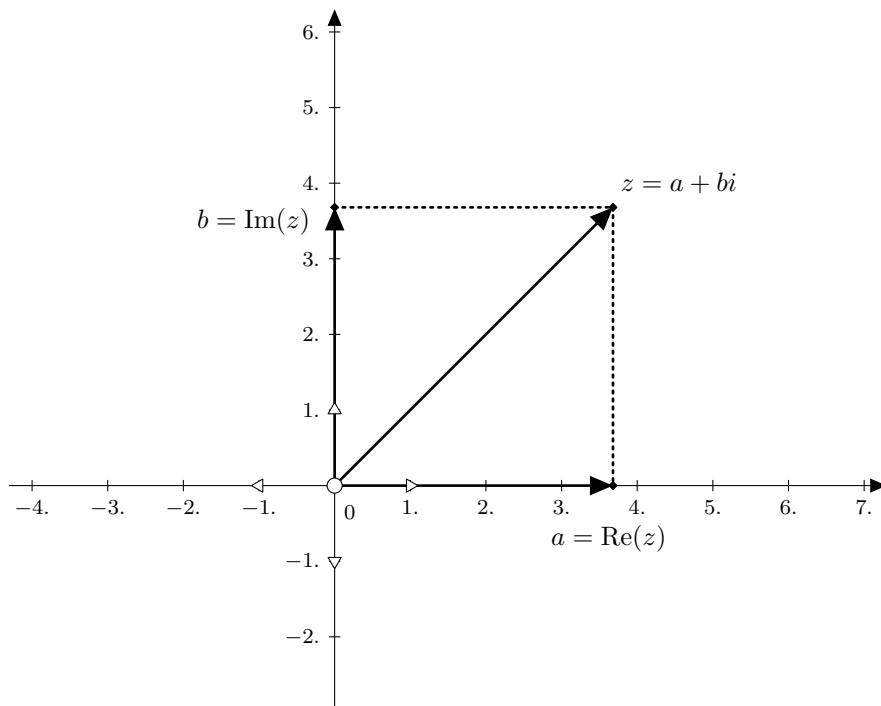


Figura 1.1.: Part real i imaginària d'un nombre complex. Marcarem els punts  $0$ ,  $1$ ,  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$  amb un cercle i quatre triangles respectivament en les figures del text.

Ara ens falta definir les operacions del conjunt per tal de tenir una estructura de cos. Notem de moment que  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ , on identifiquem  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  amb el nombre complex  $a + bi$ . La suma, doncs, serà heretada de l'estructura d'espai vectorial subjacent, però el producte és una operació nova que creem *ad hoc* per tal d'aconseguir el nostre propòsit:

**Definició 1.2** (Operacions de  $\mathbb{C}$ ). Si  $z = a + bi$  i  $w = c + di$  són dos nombres complexos, llavors definim la seva *suma* com

$$z + w = a + c + (b + d)i;$$

i el seu *producte* com

$$z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Sovint escriurem  $zw$  en lloc de  $z \cdot w$ .

•

Notem que amb aquesta definició, si  $a, c \in \mathbb{R}$ , aleshores, en identificar-los amb els nombres complexos  $a + 0i$  i  $c + 0i$  respectivament, trobem que la seva suma i el seu producte

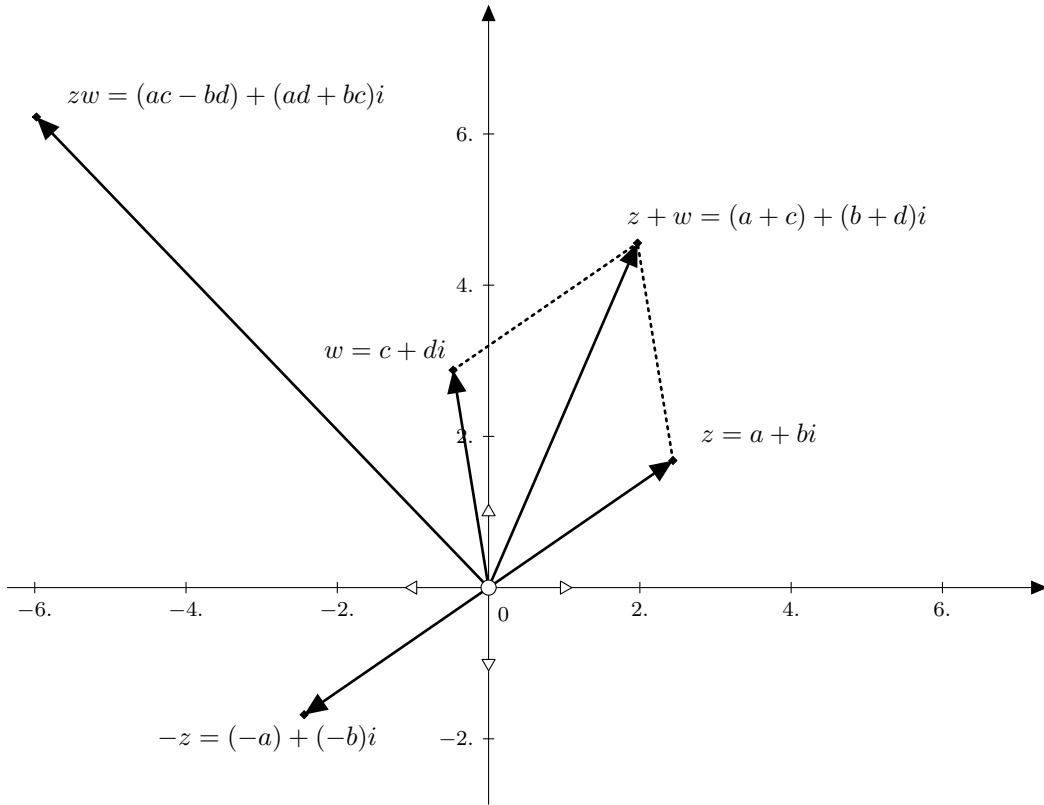


Figura 1.2.: Producte i suma de complexos, i oposat d'un nombre complex.

coincideixen amb els habituals:

$$(a + 0i) + (c + 0i) = a + c + 0i \equiv a + c,$$

$$(a + 0i) \cdot (c + 0i) = ac + 0i \equiv ac.$$

A més, efectivament, tenim que

$$i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1 + 0i = -1.$$

Per tant, amb aquesta definició hem creat un conjunt amb dues operacions (suma i producte) que *estén* els nombres reals amb les seves operacions habituals, i on el polinomi  $x^2 + 1$  té (almenys) dues arrels. Notem que la suma és compatible amb l'estructura d'*espai vectorial* de  $\mathbb{R}^2$ , però el producte de nombres complexos no coincideix amb el producte vectorial ni amb el producte escalar: és una operació que no existeix a l'espai vectorial tal com el definim habitualment.

**Exemple 1.3** (Càlcul del producte). Podem pensar l'operació producte en termes de la propietat distributiva com

$$(1 + 2i)(-3 + 2i) = -3 + 2i - 6i + 4i^2 = -3 - 4i - 4 = -7 - 4i.$$

Notem que el resultat coincideix amb la definició, i el procediment és més intuïtiu.  $\diamond$

Podem veure fàcilment que el conjunt  $\mathbb{C}$  equipat amb aquestes dues operacions satisfà les següents propietats, que es poden resumir amb la següent afirmació: els complexos tenen estructura d'anell commutatiu.

**Lema 1.4** (Els complexos com a anell). *Siguin  $z, w, v \in \mathbb{C}$ . Aleshores se satisfan les propietats respecte a la suma:*

*S1 Associativa de la suma:  $(z + w) + v = z + (w + v)$ .*

*S2 Commutativa de la suma:  $z + w = w + z$ .*

*S3 Element neutre per la suma: si escrivim  $0_{\mathbb{C}} := 0 + 0i$ , aleshores  $z + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z = z$ . Amb la identificació dels reals amb la inclusió dels reals en els complexos, escrivim  $0_{\mathbb{C}} = 0$ .*

*S4 Element oposat (de la suma): existeix un nombre complex  $u \in \mathbb{C}$  tal que  $u + z = z + u = 0$ , que anomenem nombre oposat a  $z$ , i que escrivim com  $(-z) := u$ .*

*També se satisfan les següents propietats respecte al producte:*

*P1 Associativa del producte:  $(zw)v = z(wv)$ .*

*P2 Commutativa del producte:  $zw = wz$ .*

*P3 Element neutre pel producte: si escrivim  $1_{\mathbb{C}} := 1 + 0i$ , aleshores  $z \cdot 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} \cdot z = z$ . Amb la identificació dels reals amb la inclusió dels reals en els complexos, escrivim  $1_{\mathbb{C}} = 1$ .*

*PS Distributiva del producte respecte a la suma:  $z(w + v) = zw + zv$ .*

De fet,  $\mathbb{C}$  és un cos (és a dir, tot element diferent de zero té invers respecte del producte). Per veure-ho, primer introduïm el concepte de conjugat.

**Definició 1.5** (Conjugat i mòdul d'un nombre complex). Si  $z = x + iy$ , el conjugat de  $z$  és

$$\bar{z} = x - iy.$$

i el seu mòdul és

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad \bullet$$

**Exemple 1.6.** De les definicions podem deduir que

$$\bullet \quad \overline{2 - 3i} = 2 + 3i.$$

$$\bullet \quad \bar{i} = -i.$$

$$\bullet \quad \overline{13} = 13. \quad \diamond$$

**Observació 1.7.** Clarament tenim que

$$\bullet \quad z = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.$$

- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|; \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{i} \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2.$

Les primeres són evidents, la darrera és també un simple càlcul:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad \bullet$$

Amb aquesta relació ja podem veure que  $\mathbb{C}$  és efectivament un cos:

**Lema 1.8** (Els complexos com a cos). *Sigui  $z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Aleshores se satisfà la següent propietat respecte del producte:*

*P4 Element invers (del producte): si  $z \in \mathbb{C}^*$ , aleshores existeix un nombre complex  $u \in \mathbb{C}$  tal que  $uz = zu = 1$ , que anomenem nombre invers de  $z$ , i que escrivim com  $z^{-1} := 1/z := u$ .*

Aquest nombre és

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{|z|^2} - \frac{y}{|z|^2}i = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}.$$

*Demostració.* Efectivament,  $(x + yi) \cdot \left(\frac{x}{|z|^2} - \frac{y}{|z|^2}i\right) = \frac{x^2 + y^2}{|z|^2} + \frac{xy - xy}{|z|^2}i = 1.$  □

Ara ja podem definir la *divisió* o *fracció* de dos nombres complexos  $z \in \mathbb{C}$ ,  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ :

$$\frac{z}{w} := z \cdot \frac{1}{w}.$$

Així, tenim que

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}.$$

És a dir, per calcular l'invers d'un nombre complex, només hem de multiplicar numerador i denominador pel seu conjugat.

**Exemple 1.9** (Més càlculs). Tenim

- $\frac{1}{3+10i} = \frac{3-10i}{(3+10i)(3-10i)} = \frac{3-10i}{9+100} = \frac{3}{109} - \frac{10}{109}i.$
- $\frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = -i.$

◇

**Lema 1.10** (Relació entre  $x, y$  i  $z, \bar{z}$ ). *Si  $z = x + iy$  i  $\bar{z} = x - iy$ , aleshores*

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{i} \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

*Demostració.* Es tracta de sumar i restar  $z$  amb  $\bar{z}$ , vegeu la figura 1.3. □

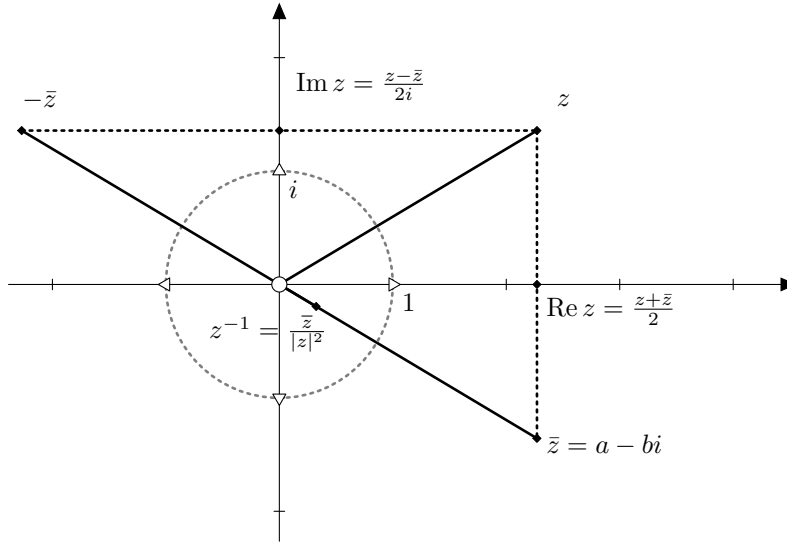


Figura 1.3.: Conjugat i invers d'un nombre complex.

**Observació 1.11** (Reinterpretació dels polinomis). Un polinomi en  $x, y$  és un polinomi en  $z, \bar{z}$  (amb coeficients complexos). Per exemple

$$\begin{aligned}
 x + y + xy + 1 &= \frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{(z - \bar{z})}{2i} + \frac{(z + \bar{z})}{2} \cdot \frac{(z - \bar{z})}{2i} + 1 \\
 &= z \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2i} \right) + \bar{z} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2i} \right) + 1 + z^2 \left( \frac{1}{4i} \right) - \bar{z}^2 \left( \frac{1}{4i} \right). \quad \square
 \end{aligned}$$

## Exercicis

**1.1.1.** Doneu en forma  $a + bi$ :

$$\begin{array}{lll}
 a) (-1 + i)^2, & c) \frac{-1+5i}{2+3i}, & e) \left( \frac{2+i}{6i-(1-2i)} \right)^2, \\
 b) \frac{8i-1}{i}, & d) \frac{(8+2i)-(1-i)}{(2+i)^2}, & f) ((3-i)^2 - 3)i.
 \end{array}$$

**1.1.2.** Demostreu o doneu un contraexemple:

$$a) \operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w, \quad b) \operatorname{Re}(zw) = (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Re} w), \quad c) \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Re} w}. \quad \triangleleft$$

**1.1.3.** Sigui  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Im}(z) > 0$ . Proveu que  $\operatorname{Im}(1/z) < 0$ .  $\triangleleft$

**1.1.4.** Si  $z = x + iy$  on  $x, y \in \mathbb{R}$ , trobeu les parts real i imaginària de:

- a)  $z^2$ , c)  $\frac{1}{z-3}$ , e)  $\frac{z+1}{2z-5}$ ,  
 b)  $z(z+1)$ , d)  $\frac{1}{z^2}$ , f)  $z^3$ . ◁

**1.1.5.** Sigui  $\frac{x+iy}{x-iy} = a+ib$  amb  $(x,y) \neq (0,0)$  i  $x,y,a,b \in \mathbb{R}$ . Proveu que  $a^2+b^2=1$ . ◁

**1.1.6.** Proveu que  $-1+i$  satisfà  $z^2+2z+2=0$ . ◁

**1.1.7.** Escriuiu l'equació complexa  $z^3+5z^2=z+3i$  com dues equacions reals. ◁

**1.1.8.** a) Si  $z_1, z_2$  són complexos amb  $z_1+z_2$  i  $z_1z_2$  reals negatius proveu que  $z_1, z_2$  són reals.

b) Proveu que el vector  $z_1 \neq 0$  és paral·lel al vector  $z_2 \neq 0$  si i només si  $\text{Im}(z_1\bar{z}_2)=0$ . ◁

**1.1.9.** Proveu analíticament i gràfica que  $|z-1|=|\bar{z}-1|$ . ◁

**1.1.10.** Demostreu que  $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$  si  $|a|=1$  o bé  $|b|=1$ . Quina excepció cal fer si  $|a|=|b|=1$ ?

Demostreu també que  $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$  si  $|a| < 1$  i  $|b| < 1$ .

Per acabar, si per  $a \in \mathbb{D}$  definim  $\varphi_a(z) := \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ , demostreu que  $\varphi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , que és bijectiva en  $\mathbb{D}$  i en  $\partial\mathbb{D}$  i doneu-ne la inversa. ◁

## 1.2. Els nombres complexos com a espai vectorial

A més de la seva estructura algebraica, el cos  $\mathbb{C}$  hereta, a través de la identificació amb  $\mathbb{R}^2$ , l'estructura geomètrica i topològica del pla.

Per tot nombre real  $\lambda \in \mathbb{R}$  i  $z = a+ib \in \mathbb{C}$ , definim  $\lambda z := (\lambda a) + (\lambda b)i$ , és a dir, identifiquem  $\lambda$  amb el nombre complex  $\lambda+0i$  i fem el producte de dos nombres complexos, tal com hem descrit a la secció anterior.

Aquesta multiplicació per un escalar real compleix les propietats:

E1. Compatibilitat del producte per escalar:  $(\lambda\mu)z = \lambda(\mu z)$ .

E2. El producte per l'element neutre és la identitat:  $1z = z$ .

E3. Distributiva respecte a la suma real:  $(\lambda + \mu)z = \lambda z + \mu z$ .

E4. Distributiva respecte a la suma complexa:  $\lambda(z+w) = \lambda z + \lambda w$ .

Aquí estem suposant que  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  i  $z, w \in \mathbb{C}$ .

Com que el pla complex també satisfà les propietats  $S1-S4$  descrites més amunt, diem que té estructura de  $\mathbb{R}$ -espai vectorial. Com a  $\mathbb{R}$ -espai vectorial,  $\mathbb{C}$  coincideix amb  $\mathbb{R}^2$ . L'eix de les  $x$  s'anomena *eix real*, i l'eix de les  $y$  s'anomena *eix imaginari*. El pla format per  $\mathbb{R}^2$  en identificar-se amb els complexos (i incorporar, per tant, l'operació producte de complexos) s'anomena *pla complex* o *pla d'Argand*<sup>8</sup>.

Per tant,  $\mathbb{C}$  hereta l'estructura de  $\mathbb{R}^2$ , i és un *espai normat* amb  $\|z\|_{\mathbb{C}} = |z|$ , és a dir,

$$N1. \|z\|_{\mathbb{C}} = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$N2. \|az\|_{\mathbb{C}} = |a| \|z\|_{\mathbb{C}}, \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ (de fet, } \forall a \in \mathbb{C});$$

$$N3. \|z + w\|_{\mathbb{C}} \leq \|z\|_{\mathbb{C}} + \|w\|_{\mathbb{C}} \text{ (desigualtat triangular).}$$

Donats  $z, w \in \mathbb{C}$ , definim

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Amb aquesta distància,  $\mathbb{C}$  és un espai mètric<sup>9</sup>, de manera que té una topologia.

**Definició 1.12** (Topologia de  $\mathbb{C}$ ). El pla complex hereta la topologia del pla. Per tant, el *disc obert* (o bola oberta) centrat en  $a$  i de radi  $r$  és el conjunt

$$D_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

El *disc unitat* normalment es denota  $\mathbb{D} := D_1(0)$ . El *disc tancat* és

$$\overline{D_r}(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}.$$

Diem que un conjunt  $A \subset \mathbb{C}$  és *obert* si per tot  $a \in A$  existeix  $r > 0$  tal que  $D_r(a) \subset A$ .

Diem que  $A$  és *tancat* si  $A^c = \mathbb{C} \setminus A$  és obert.

Diem que és *fitat* si existeix un  $r > 0$  tal que  $A \subset D_r(0)$ .

Diem que  $A$  és *connex* si no es pot obtenir com a unió de dos oberts relatius disjunts i no buits. Diem que és *arc-connex* si donats dos punts  $a, b \in A$  existeix un camí en  $A$  que els uneix, i.e., existeix una aplicació contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  de manera que  $\gamma(0) = a$  i  $\gamma(1) = b$ .

Diem que  $A$  és un *domini* si és obert i connex. •

**Observació 1.13.** Notem que  $\emptyset$  i  $\mathbb{C}$  són oberts i tancats, però no hi ha cap més conjunt que sigui obert i tancat alhora. •

<sup>8</sup>Jean-Robert Argand, Ginebra, 1768 – 1822. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Jean-Robert\\_Argand](https://ca.wikipedia.org/wiki/Jean-Robert_Argand)

<sup>9</sup>És a dir, que satisfà:

$$D1. d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w;$$

$$D2. d(z, w) = d(w, z) \text{ (simetria);}$$

$$D3. d(z, w) \leq d(z, v) + d(v, w) \text{ (desigualtat triangular).}$$

**Exemple 1.14** (Conjunt connex no arc-connex). Recordem que tot conjunt arc-connex és connex, i que tot obert connex és arc-connex. Però hi ha conjunts connexos que no són arc-connexos. Un cas paradigmàtic és la *pinta*: donada una successió  $\{x_n\} \subset (0, 1)$  tal que  $x_n \rightarrow 0$ , el conjunt  $A = [0, 1] \cup \bigcup_n x_n + (0, 1)i$  (podem anomenar-lo *pinta* per la seva forma) és arc-connex i, per tant, connex. Si afegim un punt límit no accessible, per exemple  $B = A \cup \{i\}$ , aleshores  $B$  no és arc-connex, ja que el punt afegit no pot ser connectat amb cap punt d' $A$ , però segueix sent connex, ja que aquest punt no pot ser separat de la resta per un obert.  $\diamond$

Com que tenim una mètrica (en aquest cas derivada d'una norma), podem parlar de convergència de successions:

**Definició 1.15** (Convergència de successions). Diem que una successió de nombres complexos  $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$  és *convergent* si existeix  $z \in \mathbb{C}$  tal que

$$|z_n - z| \rightarrow 0.$$

Diem que  $z_n$  tendeix a  $z$ , o que  $z$  és el límit de la successió, i ho escrivim com

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \quad \text{o bé} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

Sovint ometrem la notació  $n \rightarrow \infty$  en les expressions anteriors quan sigui clar pel context.  $\bullet$

A més,  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  és complet: tota successió de Cauchy<sup>10</sup> de nombres complexos és convergent.

També tenim que

$$z_n \rightarrow z \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z. \end{cases} \quad (1.5)$$

**Exemple 1.16.** La successió  $\frac{1}{n} + \frac{(n-1)}{n}i$  tendeix a  $i$ , ja que  $1/n \rightarrow 0$  i  $\frac{(n-1)}{n} \rightarrow 1$ .  $\diamond$

**Advertència 1.17.** No sempre és convenient passar a part real i part imaginària. Quan ja es té pràctica amb les relacions anteriors, la majoria de vegades és millor fer servir notació complexa, vegeu l'exercici 1.2.2 i el teorema següent.  $\bullet$

**Teorema 1.18** (Límits i funcions contínues). *Sigui  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , una funció contínua en  $a \in \mathbb{C}$ . Si  $a_n \rightarrow a$ , aleshores  $f(a_n) \rightarrow f(a)$ .*

*Demostració.* Es deriva del resultat a  $\mathbb{R}^2$  i la identificació de  $\mathbb{R}^2$  amb  $\mathbb{C}$ .  $\square$

Tot seguit discutim la convergència de sèries:

<sup>10</sup>Augustin Louis Cauchy, París, 1789 – 1857. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Augustin\\_Louis\\_Cauchy](https://ca.wikipedia.org/wiki/Augustin_Louis_Cauchy)

**Definició 1.19** (Convergència de sèries). Sigui  $\{z_k\} \subset \mathbb{C}$  una successió de nombres complexos. Aleshores, diem que  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  és *convergent* si  $\left\{ \sum_{k=1}^n z_k \right\}_n$  és una successió convergent. En tal cas, si el límit de la successió és  $z$ , escrivim

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z.$$

Diem que  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  és *absolutament convergent* si  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$ . •

**Observació 1.20** (Condicció necessària de convergència). Notem que si una sèrie de nombres complexos  $\sum_n c_n$  és convergent, aleshores  $|c_n| \rightarrow 0$ . •

**Observació 1.21** (Convergència absoluta implica convergència). Tota sèrie absolutament convergent de nombres reals és convergent. En el pla complex passa el mateix. En efecte, si  $\sum |z_k| < \infty$ , llavors  $\sum |\operatorname{Re} z_k| < \infty$  i també  $\sum |\operatorname{Im} z_k| < \infty$ , ja que  $|\operatorname{Re} z_k| \leq |z_k|$  i  $|\operatorname{Im} z_k| \leq |z_k|$  i, per tant,

$$\begin{cases} \sum \operatorname{Re} z_k & \text{és convergent, i} \\ \sum \operatorname{Im} z_k & \text{és convergent,} \end{cases}$$

de manera que  $\sum z_k$  és convergent per (1.5). •

**Teorema 1.22** (Teorema de Mertens<sup>11</sup>). Sigui  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$  i  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$  dues sèries de nombres complexos absolutament convergents. Llavors la sèrie producte de Cauchy de les sèries anteriors,  $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ , on  $\gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k}$ , és absolutament convergent i

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \right).$$

*Demostració.* Vegeu l'exercici 1.2.5. □

**Definició 1.23** (Límit superior). Donada una successió  $\{a_n\}$  de nombres reals, definim el seu *límit superior* com

$$\overline{\lim} a_n = \limsup a_n := \inf_k \left( \sup_{n \geq k} a_n \right).$$

També es compleix

$$\limsup a_n = \sup \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} : a_{n_k} \text{ és una subsuccessió de } a_n \right\}. \quad \bullet$$

**Exemple 1.24.** Fem un exemple de càlcul: si tenim la successió  $\{a_n\} = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$ , aleshores  $\liminf a_n = 0$  i  $\limsup a_n = 1$ . Si  $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$ , aleshores  $\liminf b_n = -1$ , i  $\limsup b_n = 1$ . ◇

<sup>11</sup>Franz Mertens, Środa Wielkopolska, 1840 – 1927. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Franz\\_Mertens](https://ca.wikipedia.org/wiki/Franz_Mertens)

Tot seguit recordem el criteri de l'arrel, que hauria d'haver estat introduït en cursos anteriors.

**Lema 1.25** (Criteri de l'arrel). *Considerem una successió de nombres reals  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ , i sigui  $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ . Aleshores,*

(i) *si  $\alpha < 1$ , la sèrie  $\sum_n a_n$  és convergent;*

(ii) *si  $\alpha > 1$ , la sèrie  $\sum_n a_n$  no convergeix.*

**Observació 1.26** (Criteri del quocient). Recordem que si existeix

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in [0, +\infty],$$

aleshores  $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$  existeix i també val  $\ell$ . Recordeu també que el recíproc no és cert: si  $a_n = r^{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ , aleshores  $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = r$ , però  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \cdot r^{(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$ , que no té límit. De fet, si  $0 < r < 1$ , tenim que  $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$  i  $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ , de manera que el *criteri del quocient* no és concloent respecte a la convergència, mentre que el criteri de l'arrel sí que ho és. •

## Exercicis

**1.2.1.** *Describeu els conjunts de punts del pla que satisfan:*

- a)  $1 < \operatorname{Im}(iz) < 2$ ,                      c)  $|z| = \operatorname{Re} z + 1$ ,                      e)  $|z - 2| > |z - 3|$ ,  
 b)  $\operatorname{Im} \frac{z-a}{z} = 0, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,                      d)  $|z - 1| = |z + i|$ ,                      f)  $|z - 1| + |z + 1| = 7$ .                      ◁

**1.2.2.** *Suposem que  $a_n \rightarrow a$  i  $b_n \rightarrow b$ . Demostreu que  $a_n + b_n \rightarrow a + b$  i  $a_n b_n \rightarrow ab$ , sabent que ambdues propietats són certes a la recta real.* ◁

**1.2.3.** *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

- a)  $i^n + \frac{1}{n+i}$ ,                      b)  $\frac{n+i}{n-i}$ ,                      c)  $\frac{3in^2}{n^2-2i}$ .                      ◁

**1.2.4.** *Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:*

- a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$ ,                      b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ .                      ◁

**1.2.5.** *Demostreu el teorema de Mertens.* ◁

**1.2.6.** *Vegeu que tota successió convergent  $\{z_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$  satisfà que  $|z_{n+1} - z_n| \rightarrow 0$ .* ◁

### 1.3. Repàs de trigonometria

En estudiar Càlcul en Diverses Variables, vam aprendre que podem calcular la *longitud* d'una corba diferenciable  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$L(\gamma) = \int_I |\gamma'(t)| dt.$$

Així, la corba

$$t \mapsto \gamma(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$$

envia l'interval  $[-1, 1]$  al semicercle unitat superior. Definim  $\pi$  com la longitud d'aquesta corba. Com que  $\gamma'(t) = (-1, -t/\sqrt{1-t^2})$ , la definició és equivalent a

$$\pi := \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

que és una integral impròpia convergent.

Notem que  $\gamma$  és injectiva i la longitud de  $\gamma([-1, t])$  és una funció creixent en  $t$  i contínua (de fet, derivable) en  $(0, \pi)$  pel teorema fonamental del càlcul; per tant, és exhaustiva en  $[0, \pi]$ . Així, associem a un nombre (que anomenem *angle*)  $\alpha \in [0, \pi]$  la semirecta oberta del pla amb extrem a l'origen de coordenades que passa pel punt  $\gamma(t)$  tal que  $\alpha = \text{longitud}(\gamma([-1, t])) = \int_{-1}^t \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$ . Per exemple, per  $\alpha = \pi$  prenem  $t = 1$  ja que  $\pi$  és la longitud del semicercle. L'angle  $\alpha = \pi/2$  (anomenat també *angle recte*) correspon a la meitat del semicercle per simetria, que correspon a  $t = 0$ , és a dir, que té associada la semirecta vertical  $\{(0, y) : y > 0\}$ .

Si  $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ , aleshores associem  $\alpha$  a la semirecta oposada a l'associada a  $\alpha - \pi$ .

Si  $\alpha \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$  amb  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ; aleshores associem  $\alpha$  a la semirecta associada a  $\alpha - 2k\pi$

**Definició 1.27** (Funcions trigonomètriques reals). Donat un angle  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definim el seu *sinus* com el quocient de la coordenada vertical entre el mòdul de qualsevol dels punts de la seva semirecta associada, (ben definit pel teorema de Tales<sup>12</sup>). Definim el *cosinus* com el quocient de la coordenada horitzontal entre el mòdul de qualsevol dels punts de la seva semirecta associada. I definim la *tangent* com el quocient entre sinus i cosinus. •

**Observació 1.28** (Angle nul, recte i pla). Tenim

$$\sin(\pi) = \cos(\pi/2) = \sin(0) = 0,$$

$$\sin(\pi/2) = \cos(0) = 1,$$

i

$$\cos(\pi) = -1.$$

Notem que, per definició, el sinus i el cosinus són funcions  $2\pi$ -periòdiques, mentre que la tangent és  $\pi$ -periòdica.

<sup>12</sup>Tales de Milet, Milet, 625 a.C. – ~545 a.C. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Tales\\_de\\_Milet](https://ca.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Milet)

**Lema 1.29** (Paritat de les funcions trigonomètriques). *Si  $x \in \mathbb{R}$ , aleshores*

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x), \quad \tan(-x) = -\tan(x).$$

*Demostració.* És conseqüència directa de la definició. □

**Lema 1.30** (Teorema de Pitàgores<sup>13</sup>). *Si  $x \in \mathbb{R}$ , aleshores*

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

*Demostració.* Això es deriva del fet que  $t^2 + \sqrt{1 - t^2}^2 = 1$ . □

**Lema 1.31** (Suma d'angles). *Donats  $x, y \in \mathbb{R}$ , tenim que*

$$\begin{cases} \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{cases}$$

*Idea.* Aquest lema es pot demostrar usant geometria elemental, vegeu la figura 1.4. □

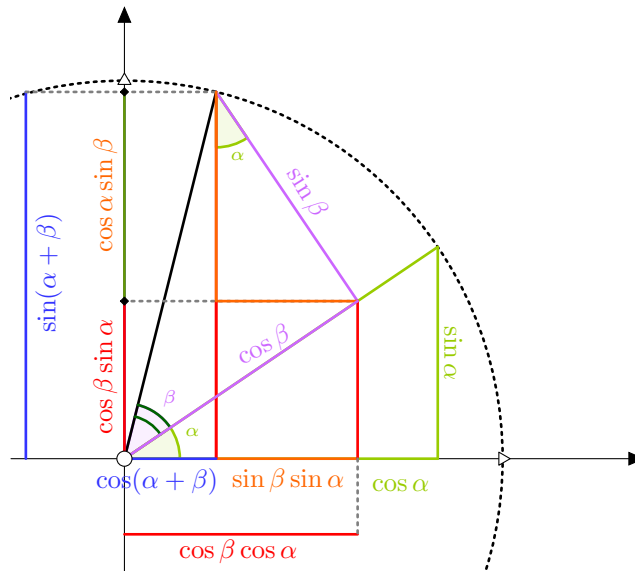


Figura 1.4.: Demostració visual de les fórmules trigonomètriques per la suma d'angles.

**Lema 1.32** (Angles complementaris, suplementaris i periodicitat). *Donat  $x \in \mathbb{R}$ , es compleixen les identitats (entenenent la tangent com a funció a la recta projectiva real, de manera que  $+\infty = -\infty$ ):*

$$\begin{aligned} \sin(\pi/2 - x) &= \cos(x), & \cos(\pi/2 - x) &= \sin(x), & \tan(\pi/2 - x) &= 1/\tan(x); \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x); \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x), & \cos(x + 2\pi) &= \cos(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x). \end{aligned}$$

<sup>13</sup>Pitàgores, Samos, 586 a.C. – ~490 a.C. <https://ca.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A0gores>

*Demostració.* Cal combinar la suma d'angles amb les simetries de les funcions trigonomètriques del lema 1.29 i els valors donats a l'observació 1.28.  $\square$

**Lema 1.33** (Infinitèsims). *Tenim*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad i \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

*Idea.* Notem que el segon és conseqüència del primer ja que

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{\text{L.1.30}}{=} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}.$$

Per veure el primer, n'hi ha prou amb justificar geomètricament que si  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , aleshores

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

i després fer pas al límit.  $\square$

**Teorema 1.34** (Propietats de derivabilitat). *Les funcions  $\sin(x)$  i  $\cos(x)$  són  $2\pi$ -periòdiques, infinitament derivables i*

$$(\sin(x))' = \cos(x) \quad i \quad (\cos(x))' = -\sin(x).$$

*A més, les seves sèries de Taylor són convergents a tot  $\mathbb{R}$  i trobem que*

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad i \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

*Idea.* Per veure la derivabilitat n'hi ha prou amb comprovar les dues derivades, que surten de

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \stackrel{\text{L.1.33}}{=} \cos(x).$$

L'altra es fa anàlogament. La convergència s'obté usant estimacions del residu de Taylor.  $\square$

**Definició 1.35** (Funcions trigonomètriques inverses). Es pot demostrar que la tangent és injectiva en  $(-\pi/2, \pi/2)$  i la seva imatge és  $\mathbb{R}$ . Per tant, podem definir l'*arctangent* d'un nombre  $x \in \mathbb{R}$  ( $\arctan x$ ), com l'únic nombre real  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$  tal que  $\tan \alpha = x$ . També pel sinus tenim injectivitat en  $[-\pi/2, \pi/2]$  i definim l'*arcsinus* d'un nombre  $x \in [-1, 1]$  ( $\arcsin x$ ), com l'únic nombre real  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$  tal que  $\sin \alpha = x$ . Finalment, el cosinus és injectiu a  $[0, \pi]$ , i definim l'*arccosinus* d'un nombre  $x \in [-1, 1]$  ( $\arccos x$ ), com l'únic nombre real  $\alpha \in [0, \pi]$  tal que  $\cos \alpha = x$ . Pel teorema de la funció inversa per funcions de variable real, sabem que les tres funcions són  $C^\infty$  a l'interior del seu domini.  $\bullet$

**Exercicis**

**1.3.1.** Demostreu tots els resultats de la secció. ◁

**1.3.2.** Definim el sinus i el cosinus hiperbòlics de  $x \in \mathbb{R}$  com

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Demostreu que se satisfan les següents identitats:

a)  $\sinh(0) = 0 \quad i \quad \cosh(0) = 1.$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty \quad i \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty.$

c)  $\sinh(-x) = -\sinh(x) \quad i \quad \cosh(-x) = \cosh(x).$

d)  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$

e)  $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$

f)  $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$

g)  $(\sinh x)' = \cosh x \quad i \quad (\cosh(x))' = \sinh(x).$  ◁

**1.4. L'exponencial complexa**

Per la fórmula de Taylor, tenim que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podem fer servir aquesta mateixa expressió per tal de definir  $e^z$  per  $z \in \mathbb{C}$ .

**Definició 1.36** (L'exponencial complexa). Per  $z \in \mathbb{C}$ , definim

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Aquesta sèrie de nombres complexos és absolutament convergent (ja que  $\sum \frac{|z|^n}{n!} < \infty$ ) i, per tant, convergent. Així doncs,  $e^z$  està ben definit per a tot  $z \in \mathbb{C}$ . •

Per  $x \in \mathbb{R}$ , tenim del teorema 1.34 que

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}); \quad \sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}).$$

Així doncs, tenim la *identitat d'Euler*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

i, usant el lema 1.10, deduïm la fórmula inversa d'Euler:

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{i} \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notem que la corba  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida per  $\gamma(x) = e^{ix}$  retorna valors de mòdul 1 pel teorema de Pitàgores:

$$|e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

Per tant, la corba  $\gamma$  “enrotlla” la recta real sobre la circumferència unitat, amb velocitat constant i periodicitat  $2\pi$ .

Podem definir els sinus i cosinus de nombres complexos anàlogament usant el teorema 1.34, però en aquest capítol només apareixen les funcions sinus i cosinus amb variable real.

**Proposició 1.37** (Conjugació de l'exponencial). *Per a tot  $z \in \mathbb{C}$ , es compleix que*

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$$

*Demostració.* Per definició, tenim que

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\sum_{n=0}^k \frac{z^n}{n!}}.$$

Com que l'aplicació conjugada és contínua, podem treure el límit a fora del conjugat (teorema 1.18) per obtenir

$$\overline{e^z} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \overline{\frac{z^n}{n!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{\bar{z}^n}{n!} = e^{\bar{z}}.$$

□

Com a propietat fonamental de l'exponencial real, tenim que

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

L'exponencial complexa  $e^z$  manté aquesta propietat.

**Proposició 1.38** (Productes i potències d'exponencials). *Donats  $z, w \in \mathbb{C}$ , tenim que*

$$e^z e^w = e^{z+w}.$$

*Si  $n \in \mathbb{N}$ , trobem per tant*

$$(e^z)^n = e^{nz}, \quad \text{i} \quad (e^z)^{-1} = e^{-z}. \quad (1.6)$$

En particular, tenim que

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

que generalitza la identitat d'Euler.

*Demostració de la proposició.* Per la definició de l'exponencial complexa, tenim que

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k w^{n-k}}{n!},$$

on hem aplicat la fórmula de la potència d'un binomi en la darrera identitat. Recordem també que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pel criteri del quocient (vegeu l'observació 1.26), tenim que  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  és absolutament convergent. Podem doncs aplicar el teorema de Mertens, i trobem que

$$e^z e^w = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} z^k w^{(n-k)} \right),$$

que coincideix amb l'expressió anterior.

Per veure 1.6, notem que és cert per  $n \in \{0, 1\}$ . Per  $n > 1$ , suposant que és cert per  $n-1$  com a hipòtesi inductiva, trobem que

$$e^{nz} = e^{(n-1)z+z} = e^{(n-1)z} e^z = (e^z)^{n-1} e^z = (e^z)^n.$$

Finalment,

$$1 = e^0 = e^z e^{-z} \implies e^{-z} = (e^z)^{-1}.$$

□

**Observació 1.39.** Una demostració alternativa de  $|e^{ix}| = 1$  per a tot  $x \in \mathbb{R}$ : Tenim

$$|e^{ix}|^2 = (e^{ix}) \overline{(e^{ix})} = e^{ix} e^{-ix} = e^0 = 1.$$

Definint les potències negatives de la manera habitual (és a dir,  $z^{-k} = (z^k)^{-1}$ ), aleshores 1.6 s'estén a tots els enters  $n \in \mathbb{Z}$ . •

Observem (vegeu l'observació 1.28 i el lema 1.32) que

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i; \quad e^{i\pi} = -1; \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

**Lema 1.40** (Fórmula de De Moivre<sup>14</sup>). Per tot  $n \in \mathbb{N}$  i  $\theta \in \mathbb{R}$ , tenim que

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re} \left( (e^{i\theta})^n \right) \quad i \quad \sin(n\theta) = \operatorname{Im} \left( (e^{i\theta})^n \right).$$

*Demostració.* Això és una reescriptura de  $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ , vegeu (1.6). □

Usant la identitat anterior, podem expressar  $\cos(n\theta)$  i  $\sin(n\theta)$  en termes de  $\sin \theta$  i  $\cos \theta$ . Vegem un exemple:

<sup>14</sup>Abraham de Moivre, Vitry-le-François, 1667–1754. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Abraham\\_de\\_Moivre](https://ca.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre)

**Exemple 1.41** (Fórmula de De Moivre per  $n = 3$ ). Com que

$$(e^{i\theta})^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta,$$

i

$$e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i \sin 3\theta,$$

obtenim la identitat  $\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$ .  $\diamond$

## Exercicis

**1.4.1.** Fent servir la fórmula de De Moivre, trobeu expressions de  $\sin 3\theta$  i  $\sin 4\theta$  en termes de  $\sin \theta$  i  $\cos \theta$ .  $\triangleleft$

**1.4.2.** Trobeu les arrels de  $z^4 + 1 = 0$  i feu-les servir per veure que  $z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$ .  $\triangleleft$

## 1.5. Representació polar d'un nombre complex

Tot nombre complex  $z \neq 0$ , el podem expressar en termes del seu mòdul  $r$  (on  $r = |z|$ ) i l'angle  $\theta$  que forma amb l'eix real. És a dir, podem fer un canvi de coordenades

$$z = x + iy \quad \rightarrow \quad r_\theta.$$

Aquest angle  $\theta$  quedarà completament determinat si imposem que es trobi en un interval de longitud  $2\pi$  fixat.

**Definició 1.42** (Coordenades polars). Donat  $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , s'anomena l'*argument principal*<sup>15</sup> de  $z$  i es denota per

$$\text{Arg } z$$

l'únic angle  $\theta$  que pren valors  $-\pi < \theta \leq \pi$  de manera que

$$\begin{cases} \text{Re } z = |z| \cos \theta, \\ \text{Im } z = |z| \sin \theta. \end{cases}$$

Aleshores tenim que

$$z = x + iy = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}.$$

Anomenem *coordenades polars* de  $z$  el parell  $(r, \theta)$  amb  $r = |z|$ .  $\bullet$

**Observació 1.43** (Càlcul de l'argument principal mitjançant l'arctangent). Per trobar l'argument principal de  $z = x + iy$ , podem calcular l'arctangent, vegeu la figura 1.6:  $\hat{\theta} := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ . Aleshores,

<sup>15</sup>Vegeu-ne la gràfica interactiva a <https://www.geogebra.org/3d/jg4nzfcw>.

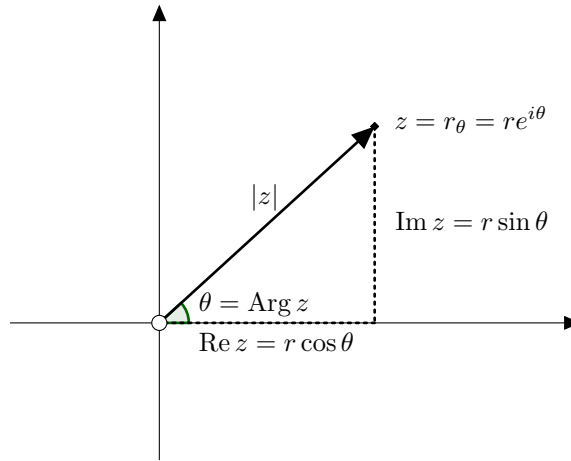


Figura 1.5.: Coordenades polars d'un nombre complex.

- si  $x > 0$  (primer i quart quadrants del pla complex), calculem  $\theta = \hat{\theta}$ ;
- si  $x < 0$  i  $y \geq 0$  (segon quadrant), tenim que  $-\pi/2 < \hat{\theta} \leq 0$ , així que per calcular-lo podem prendre  $\theta = \hat{\theta} + \pi$ ;
- si  $x < 0$  i  $y < 0$  (tercer quadrant), tenim que  $0 < \hat{\theta} < \pi/2$ , així que  $\theta = \hat{\theta} - \pi$ ;
- si  $x = 0$  i  $y > 0$  (semieix imaginari superior), prenem  $\theta = \pi/2$  i
- si  $x = 0$  i  $y < 0$  (semieix imaginari inferior), prenem  $\theta = -\pi/2$ .

D'aquesta manera, per tot  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , tenim que

$$\text{Arg } z = \theta \in (-\pi, \pi].$$

•

**Exemple 1.44** (Càlcul de coordenades polars).

1. La representació polar de  $i$  és

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

2. Calculem la representació polar de  $z = \sqrt{3} + i$ :

Tenim  $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ , de manera que

$$\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Com que  $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ , per la identitat d'Euler obtenim

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

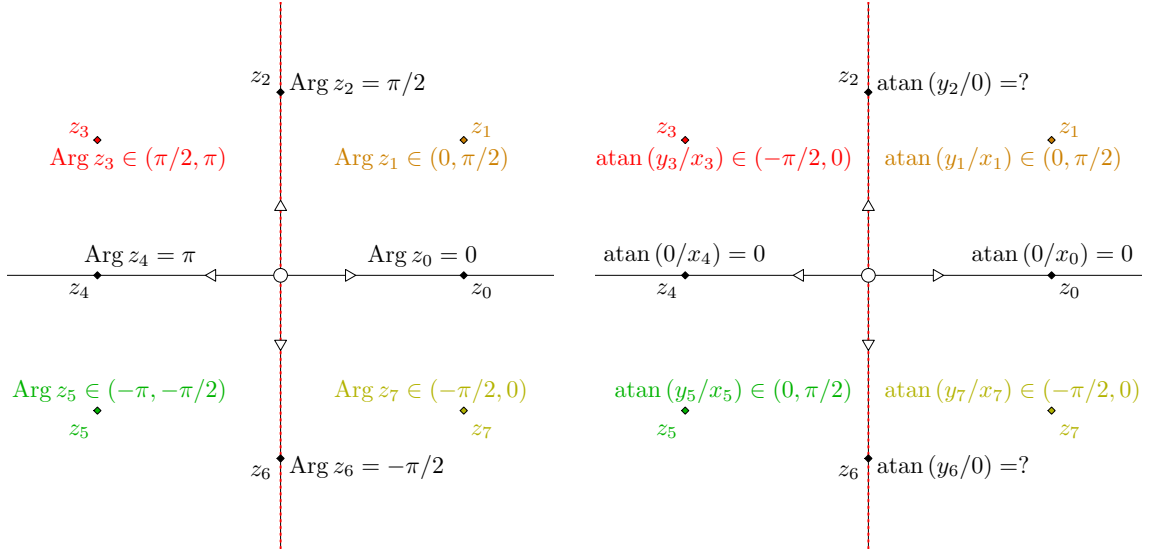


Figura 1.6.: Relació entre l'argument principal i l'arctangent del quocient de les parts imaginària i real.

de manera que  $\theta = \pi/6$ . Per tant, la representació polar és

$$\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

◇

**Proposició 1.45** (Periodicitat de l'exponencial). *Siguin  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Es compleix que  $e^{z_1} = e^{z_2}$  si i només si  $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$ .*

*En altres paraules, la funció exponencial complexa és una funció periòdica amb conjunt de períodes  $2\pi i\mathbb{Z}$  i és injectiva en franges horitzontals semiobertes d'amplada  $2\pi$ .*

*Demostració.* Suposem que per a un  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $z_1 = z_2 + 2\pi ik$ . Llavors

$$e^{z_1} = e^{z_2 + 2\pi ik} = e^{z_2} e^{2\pi ik} = e^{z_2}.$$

Recíprocament, si  $e^{z_1} = e^{z_2}$ , es compleix que  $e^{z_1 - z_2} = 1$ , de manera que  $e^{\text{Re } z_1 - \text{Re } z_2} = |e^{z_1 - z_2}| = 1$  i  $e^{i\text{Im}(z_1 - z_2)} = 1$ , és a dir,

$$\cos \text{Im}(z_1 - z_2) \stackrel{\text{Euler}}{=} 1.$$

Per tant,  $\text{Re } z_1 = \text{Re } z_2$  i  $\text{Im}(z_1 - z_2) = 2k\pi$ , o, equivalentment,  $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$ . □

Tornant a la definició 1.42, és clar que, fixant un altre interval de longitud  $2\pi$ , hi ha altres possibilitats amb l'angle  $\theta$  que ens dona la representació polar. De fet, aquí n'hem fixat una de concreta per fer de referència. Així doncs, hi ha infinits nombres reals  $\theta$  (s'anomenen arguments de  $z$ ) que compleixen la identitat

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Són

$$\text{Arg } z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Exemple 1.46.**

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{-i\frac{3\pi}{2}}. \quad \diamond$$

**Definició 1.47** (Arguments de  $z$ ). Un *argument* de  $z \neq 0$  és un nombre real  $\theta$  de manera que  $z = |z|e^{i\theta}$ .

$\arg z$  denota **tots** els possibles arguments de  $z$ . •

**Exemple 1.48** (Càlcul dels arguments). Sigui  $z = 1 - \sqrt{3}i$ . Llavors  $|z| = 2$ , de manera que

$$\frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\pi < \theta \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}.$$

Per tant,

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{3}; \quad \arg z = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \diamond$$

El producte, el quocient i la potència solen ser més fàcils de calcular en forma polar, tal com veurem al següent exemple.

**Exemple 1.49** (Càlcul de productes i potències en forma polar).

$$2e^{3i} \cdot \sqrt{3}e^{i\pi} = 2\sqrt{3}e^{i(3+\pi)}.$$

$$\frac{2e^{3i}}{\sqrt{3}e^{i\pi}} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i(3-\pi)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i(3-\pi)}.$$

$$\left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{25} = 2^{25}e^{i\frac{25\pi}{4}} = 2^{25}e^{i\frac{24\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{25}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Notem que en multiplicar un nombre  $z \in \mathbb{C}$  per  $re^{i\theta}$  el mòdul es multiplica per  $r$  i l'argument augmenta en  $\theta$ . És a dir, que en multiplicar dos nombres complexos trobem un nombre que té per mòdul el producte de mòduls i per argument, la suma d'arguments (per tenir l'argument principal potser he de sumar-hi o restar-hi  $2\pi$ ).  $\diamond$

**Exercicis**

**1.5.1.** Trobeu la forma polar dels nombres següents i dibuixeu-los.

$$a) 3(1 + \sqrt{3}i), \quad b) 2\sqrt{3} - 2i, \quad c) -2 + 2i, \quad d) -1 - i. \quad \triangleleft$$

**1.5.2.** Expresses en forma cartesiana  $(a + ib)$  els següents nombres:

$$\begin{array}{llll} a) (2 + 3i)(4 + i), & c) \frac{1}{4+i}, & e) (1 - 2i)^3, & g) (1 + i)^{100} + (1 - i)^{100}, \\ b) (4 + 2i)^2, & d) \frac{i}{2+i}, & f) \frac{1}{2+i} + \frac{4-2i}{3+i}, & h) \left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2. \end{array} \quad \triangleleft$$

**1.5.3.** Fent servir el producte  $(1+i)(5-i)^4$ , deduïu la fórmula de Machin<sup>16</sup>:  $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$ .  $\triangleleft$

**1.5.4.** Estudieu la convergència de  $\{z_0^n\}$  si  $|z_0| < 1$  o si  $|z_0| > 1$ .  $\triangleleft$

**1.5.5.** Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:

$$\begin{array}{lll} a) z_n = \frac{i}{n}, & c) z_n = \operatorname{Arg}(-1 + i/n), & e) z_n = \left(\frac{1-i}{4}\right)^n, \\ b) z_n = i(-1)^n, & d) z_n = \frac{n(2+i)}{n+1}, & f) z_n = \exp\left(\frac{2n\pi i}{5}\right). \end{array}$$

Aquí hem escrit  $\exp(z) = e^z$ .  $\triangleleft$

## 1.6. Equacions amb exponencials

**Exemple 1.50.** Solucionem l'equació

$$e^z = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tenim

$$1 = e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Com que  $|e^{iy}| = 1$ , igualant mòduls i arguments obtenim

$$1 = |e^z| = e^x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos y = 1 \\ \sin y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per tant,

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$\diamond$

Moltes de les equacions “exponencials” es redueixen a l'anterior. Per exemple

$$e^z = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{z-i\frac{\pi}{2}} = 1.$$

**Exemple 1.51.** Recordem que, donats  $z, w \in \mathbb{C}$ , per la proposició 1.45 tenim l'equivalència

$$e^z = e^w \iff z = w + 2k\pi i \text{ per algun } k \in \mathbb{Z}.$$

Sabent que  $1 = e^0$ , podem dir directament que

$$e^z = e^0 \iff z = 0 + 2k\pi i,$$

tal com hem vist pas a pas en l'exemple anterior.  $\diamond$

## Exercicis

**1.6.1.** Resoleu les següents equacions:

<sup>16</sup>John Machin (1706), podeu trobar més informació a [https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like\\_formula](https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula).

$$a) e^z = 1 + i;$$

$$b) e^{iz} = -1.$$

&lt;

## 1.7. Arrels $n$ -èsimes

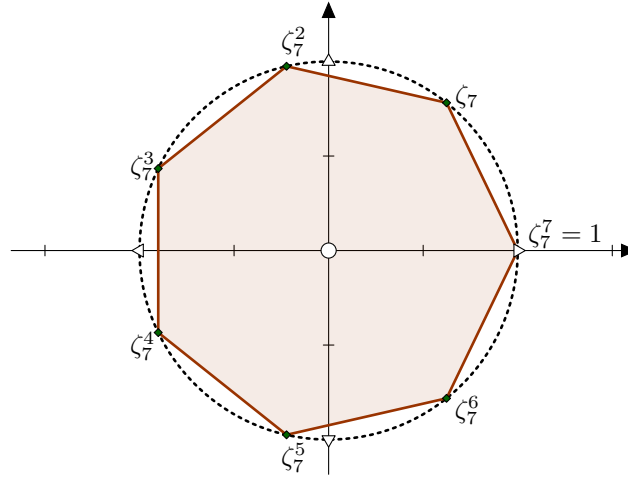


Figura 1.7.: Arrels setenes de la unitat.

Donat  $n \in \mathbb{N}$ , si definim  $\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , aleshores

$$\left(\zeta_n^k\right)^n = e^{2k\pi i} = 1.$$

Diem que  $\{\zeta_n^k\}_{k=0}^{n-1}$  són les  $n$  arrels  $n$ -èsimes de la unitat.

Sigui  $a \in \mathbb{C}$  amb  $a \neq 0$ . Per  $n \in \mathbb{N}$ , calculem els nombres complexos  $z \in \mathbb{C}$  de manera que

$$z^n = a.$$

(Aquí no és convenient passar a notació real i fer  $(x + iy)^n = a$ .) Posem  $z = re^{i\theta}$  amb  $-\pi < \theta \leq \pi$ . Llavors

$$r^n e^{in\theta} = |a| e^{i \operatorname{Arg} a}.$$

Igualant mòduls obtenim  $r^n = |a| \Rightarrow r = \sqrt[n]{|a|}$ . També

$$e^{in\theta} = e^{i \operatorname{Arg} a} \Leftrightarrow e^{i(n\theta - \operatorname{Arg} a)} = 1 \Rightarrow n\theta - \operatorname{Arg} a = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per tant, les solucions de  $z^n = a$  són

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{i\theta_k}, \quad \text{amb } \theta_k = \frac{\operatorname{Arg} a}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Tenim  $n$  solucions (amb  $k \geq n$  dona solucions repetides). Notem que

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\operatorname{Arg} a}{n}} e^{i \frac{2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\operatorname{Arg} a}{n}} \zeta_n^k,$$

i, com que  $z_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\text{Arg } a}{n}}$ , podem escriure les arrels  $n$ -èsimes de  $a$  com

$$z_k = \zeta_n^k z_0,$$

vegeu la figura 1.8.

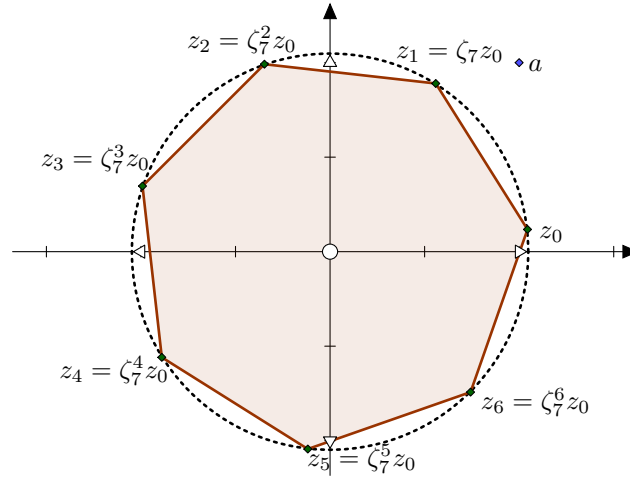


Figura 1.8.: Arrels setenes de  $a = 1 + i$ .

**Exemple 1.52.**  $\sqrt[4]{i} \rightarrow e^{i\pi/8}, e^{i5\pi/8}, e^{i9\pi/8}, e^{i13\pi/8}$ . Els quatre resultats satisfan que

$$z^4 = i. \quad \diamond$$

## Exercicis

**1.7.1.** Calculeu:

a)  $\sqrt[3]{-1}$ ,      b)  $3^{1/4}$ ,      c)  $\sqrt[4]{-i}$ ,      d)  $(-1 + \sqrt{3}i)^{1/2}$ ,      e)  $(3 + 4i)^{1/2}$ .      <

**1.7.2.** Donat  $a \in \mathbb{C}$ , quin és el màxim de  $|z^n + a|$  per a  $|z| \leq 1$ ?      <

**1.7.3.** Resoleu l'equació  $e^{z^2} = i$

## 1.8. Polinomis: enunciat del teorema fonamental de l'àlgebra

Per acabar aquest capítol, comentem un dels principals motius que fa dels complexos una eina imprescindible: tot polinomi de coeficients reals o complexos té sempre almenys una arrel complexa i, per tant, el grau del polinomi coincideix amb el seu nombre d'arrels comptant multiplicitats.

Acabem de comprovar que hi ha nombres complexos que són solució de certs polinomis. Per exemple, si  $0 \leq k < n$ , aleshores els nombres

$$e^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

són tots diferents i satisfan que

$$z^n = 1.$$

Hem trobat, doncs,  $n$  arrels diferents del polinomi  $z^n - 1$ , que anomenem *arrels  $n$ -èsimes de la unitat*.

En general, tot polinomi de grau  $n$  amb coeficients complexos  $p \in \mathbb{C}[x]$ , és a dir,

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k,$$

on  $a_k \in \mathbb{C}$  i  $a_n \neq 0$ , té exactament  $n$  arrels *comptant multiplicitats*. Aquest resultat es coneix com a *teorema fonamental de l'àlgebra*, vegeu el teorema 4.33. Dit d'una altra manera, existeixen  $n$  nombres  $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n-1} \subset \mathbb{C}$  (possiblement coincidents) de manera que

$$p(z) = a_n \prod_{k=0}^{n-1} (z - \alpha_k).$$

Diem que  $\alpha$  és una arrel de multiplicitat  $j$  si existeixen exactament  $j$  subíndexs  $k_1, \dots, k_j$  tals que  $\alpha = \alpha_{k_i}$ . Per exemple,

$$z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2 = (z + i)^2(z - i)^2$$

té dues arrels dobles, que són  $\pm i$ .

Notem també que el resultat es pot aplicar a polinomis de coeficients reals,  $p \in \mathbb{R}[x]$ : tot polinomi de grau  $n$  amb coeficients reals té  $n$  arrels complexes comptant multiplicitats. A més, com que  $\overline{a_k} = a_k$ , trobem que

$$p(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^n a_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \overline{p(z)}.$$

Per tant, si  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  és una arrel de  $p$ , el seu conjugat també ho és:

$$p(\bar{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0.$$

Treballant una mica es pot deduir que la multiplicitat de  $\alpha$  i la del seu conjugat coincideixen. Per tant, tot polinomi de grau  $n$  amb coeficients reals té  $j$  arrels de part imaginària positiva  $\alpha_k$ , en té  $j$  amb part imaginària negativa  $\bar{\alpha}_k$  i  $n - 2j$  arrels reals  $\beta_k$ , de manera que

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^j (z - \alpha_k)(z - \bar{\alpha}_k) \prod_{k=1}^{n-2j} (z - \beta_k) = a_n \prod_{k=1}^j (z^2 - (\alpha_k + \bar{\alpha}_k)z + \alpha_k \bar{\alpha}_k) \prod_{k=1}^{n-2j} (z - \beta_k),$$

és a dir,

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^j (z^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha_k)z + |\alpha_k|^2) \prod_{k=1}^{n-2j} (z - \beta_k).$$

En la darrera expressió, hem trobat una factorització amb coeficients reals on tots els factors són de grau 1 o 2.

**Exercicis**

**1.8.1.** *Resoleu  $(z + 1)^5 = z^5$ .*

&lt;

**1.8.2.** *Signi  $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$ . Considerant el polinomi  $(1 - z)P(z)$ , demostreu que tots els zeros de  $P(z)$  estan dins del disc unitat.*

&lt;