

2. Funcions de variable complexa

En aquest capítol introduïm els conceptes de funció de variable complexa (i parlarem de com representar aquestes funcions) i de funció multivaluada. Treballarem les determinacions contínues d'aquestes funcions multivaluades, centrant-nos en arguments, logaritmes i arrels. Finalment, treballarem amb les sèries de potències de nombres complexos. Veurem què és el radi de convergència i com calcular-lo i treballarem diferents tipus de convergència a l'interior del disc de convergència i a la frontera, concloent amb els criteris de Dirichlet¹ i d'Abel².

2.1. Funcions

Recordem diversos conceptes:

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ és obert si $\forall a \in \Omega$ hi ha $r > 0$ amb $D_r(a) \subset \Omega$, on $D_r(a)$ denota el disc obert

$$D_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

- F és tancat $\Leftrightarrow \mathbb{C} \setminus F$ és obert $\Leftrightarrow F$ és tancat per successions (és a dir, si $z_n \in F$ amb $z_n \rightarrow z$, aleshores $z \in F$).

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Una *funció de variable complexa* és

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}.$$

Podem posar $f(z) = u(z) + iv(z)$, on denotem

$$u = \operatorname{Re} f; \quad v = \operatorname{Im} f.$$

Donat $z \in \Omega$ i $w \in \mathbb{C}$ tals que $w = f(z)$, aleshores diem que w és la imatge de z per f . El conjunt Ω és el *domini de definició* de f . Si $B \subset \Omega$, $f(B) \subset \mathbb{C}$ és la seva imatge, és a dir

$$f(B) = \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in B \text{ tal que } f(z) = w\}.$$

Si prenem $B = \Omega$, diem que $f(\Omega)$ és el *rang* o *recorregut* de f .

Exemple 2.1. Si $f(z) = iz$ amb domini $\mathbb{C}$, la imatge de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ és $f(\mathbb{R}) = i\mathbb{R} = \{iy : y \in \mathbb{R}\}$. En general, f actua com una rotació de 90° al voltant de l'origen en sentit antihorari. $\diamond$

¹Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Düren, 1805–1859. https://ca.wikipedia.org/wiki/Johann_Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet

²Niels Henrik Abel, Finnøy, 1802–1829. https://ca.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel

Definició 2.2 (Límit d'una funció en un punt). Diem que $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \ell$ si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ (que pot dependre d' a) de manera que per a tot $z \in \Omega$,

$$0 < |z - a| < \delta \implies |f(z) - \ell| < \varepsilon. \quad \bullet$$

Definició 2.3 (Continuïtat). Una funció $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és *contínua* en Ω si és contínua en tot punt $a \in \Omega$.

$$f \text{ és contínua en } a \iff \lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a).$$

Es compleix que f és contínua en a si i només si $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ són contínues en a , i també si i només si, per a tota successió $\{z_n\}$ amb $z_n \rightarrow a$ se satisfà que $f(z_n) \rightarrow f(a)$. $\bullet$

Exemple 2.4. Els polinomis en z i $\bar{z}$ són continus. També e^z és contínua en tot punt de $\mathbb{C}$. $\diamond$

Advertència 2.5 (Discontinuitat de l'argument principal). $\operatorname{Arg} z$ és contínua en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ i NO és contínua en $(-\infty, 0]$.

En efecte, si ens acostem a la semirecta $(-\infty, 0)$ per dalt, llavors $\operatorname{Arg} z \rightarrow \pi$. En canvi, si ens hi acostem per baix, tendeix a $-\pi$, de manera que si $a \in (-\infty, 0]$, llavors

$$\text{no existeix } \lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Arg} z. \quad \bullet$$

Comentari 2.6 (Dibuixar una funció complexa). Recordem que per dibuixar una funció, entenem representar el conjunt

$$\operatorname{graf} f := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z) = w\}.$$

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es pot fer en el pla, però per una funció complexa necessitem quatre dimensions reals per fer aquesta representació. Dificilment podem arreglar-ho amb una bona perspectiva com solem fer amb les funcions de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Coses que podem fer:

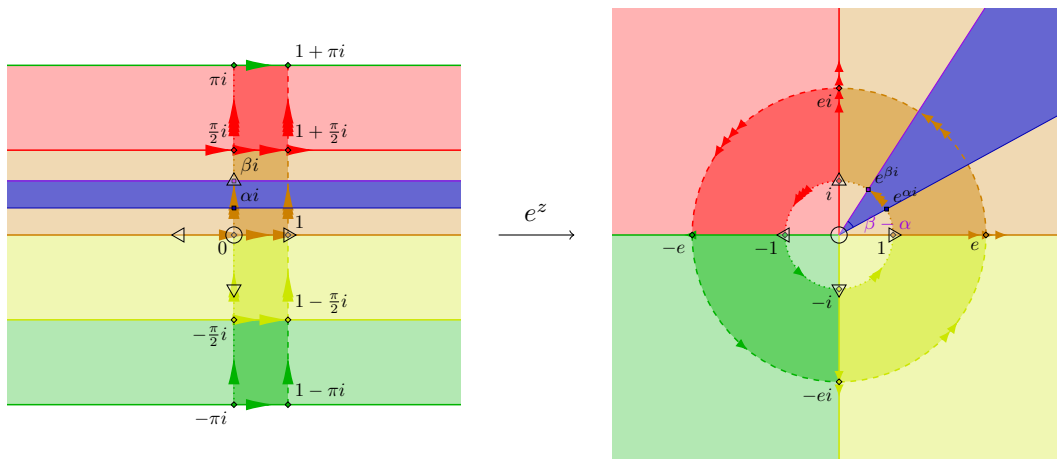


Figura 2.1.: Representació de la funció exponencial. Representem l'acció en bandes horitzontals i verticals i en rectangles paral·lels als eixos. Notem que té període $2k\pi i$, i que bandes horitzontals d'amplada γ van a sectors d'obertura γ .

- Estudiar la *imatge de conjunts especials* $\{x = c\}$, $\{y = c\}$, $\{r = c\}$ o $\{\theta = c\}$, vegeu la figura 2.1.
- Dibuixar $(x, y) \mapsto |f(x, y)|$ i $(x, y) \mapsto \text{Arg}(f(x, y))$, o bé $(x, y) \mapsto \text{Re } f(x, y)$ i $(x, y) \mapsto \text{Im } f(x, y)$.
- Fer un *gràfic de colors* (`complex_plot`). Es tracta d'assignar un color a cada píxel w (figura 2.2). I aleshores pintem el punt z en funció del color de $w = f(z)$, vegeu les figures 2.3, 2.4 i 2.5.

En el nostre cas usarem les coloracions de la figura 2.2. A l'esquerra de la figura podeu veure una *coloració del pla complex* amb la graella de *coordenades cartesianes enteres*, mentre que a la dreta, la graella marca els cercles de mòdul e^k , $k \in \mathbb{Z}$, i els eixos real i imaginari. Per la coloració, s'escull el color en funció de l'angle i la saturació en funció del logaritme del mòdul (empallideix amb mòduls grans). Dibuixem des de $-6 - 6i$ fins a $6 + 6i$. Aquí, i al llarg dels apunts, quan dibuixem en aquest domini, direm que dibuixem en $6Q$, i quan dibuixem en $-2 - 2i$ fins a $2 + 2i$ direm que és en $2Q$.

Pel que fa a les funcions, si ens fixem en la figura 2.3, a la imatge superior esquerra, la graella correspon als punts d'imatge amb una coordenada entera (vegeu la figura superior dreta), és a dir, són corbes de nivell de les parts real i imaginària. A la imatge inferior esquerra, correspon als d'imatge en els eixos o bé en els cercles de radi e^k (corbes de nivell del mòdul i dels arguments múltiples de $\pi/2$). Es tracta doncs de la preimatge de les graelles representades a la figura 2.2 per la funció exponencial. Observem, per exemple, que cada rectangle petit de la figura inferior esquerra és enviat a un quadrant d'un anell centrat a l'origen que té per radis interior i exterior dues potències consecutives de e . En properes figures obviarem la figura de la dreta.

•

Exemple 2.7 (La funció exponencial). Comencem amb les imatges de rectes verticals: sabem que a $\mathbb{C}$, la funció exponencial complexa és $2\pi i$ -periòdica. Per tant, el que passi en una banda horitzontal d'amplada 2π , passa en qualsevol altra.

Donat que per la fórmula d'Euler, $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, es compleix que si y varia de 0 a 2π , e^{iy} dona una volta al cercle unitat $\mathbb{T}$. Per tant, la imatge de tot segment vertical de longitud 2π i part real x_0 es transforma en un cercle al voltant del zero de radi e^{x_0} .

Anem a veure en què es transformen les rectes horitzontals. Recordem que l'exponencial real envia homeomòrficament $\mathbb{R}$ en la semirecta $(0, \infty)$. Per tant, si fixem $y_0 \in \mathbb{R}$ i considerem els punts de la forma $z = x + iy_0$, amb $x \in \mathbb{R}$, es compleix que els punts $e^z = e^x e^{iy_0}$ cobreixen la semirecta $\{e^x e^{iy_0} : x \in \mathbb{R}\}$. Vegeu les figures 2.1 i 2.3.

◇

Comentari 2.8 (Potències). Les potències d'exponent natural són funcions n a 1, és a dir, que cada imatge té n preimatges (llevat de l'origen). La funció z^3 , per exemple, fa que els mòduls menors que 1 decreixin, els majors a 1 creixin i la imatge d'una circumferència

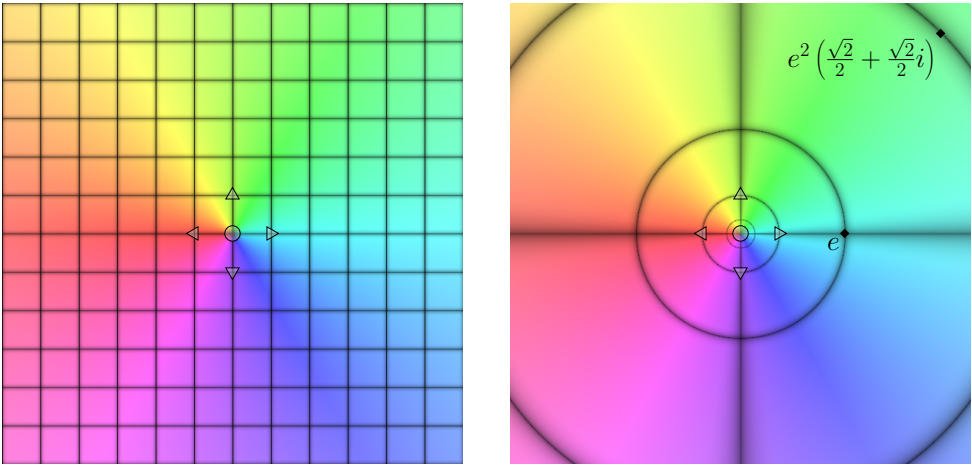


Figura 2.2.: Coloracions del pla complex, vegeu el comentari 2.6.

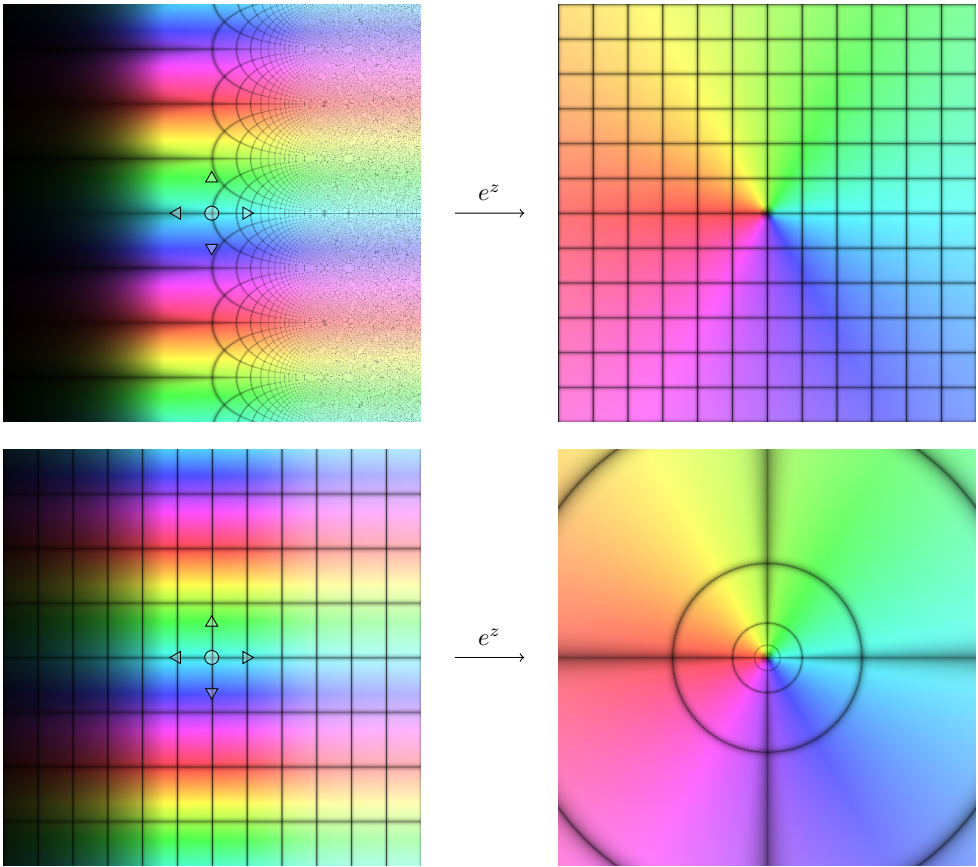


Figura 2.3.: Gràfic de colors de la funció exponencial en coordenades cartesianes i polars en $6Q$, vegeu el comentari 2.6.

centrada a l'origen doni tres voltes entorn de l'origen, vegeu la figura 2.4. Notem que si $w \neq 0$, aleshores té tres arrels cúbiques, que són els vèrtexs d'un triangle equilàter centrat a l'origen. A la figura, arrels cúbiques de $w = 5e^{i\frac{5\pi}{12}}$. •

Exercicis

2.1.1. *Escriure les següents funcions de la forma $u(x, y) + iv(x, y)$.*

$$a) f(z) = 1/z, \quad b) g(z) = \frac{2z^2 + 3}{|z - 1|}, \quad c) h(z) = e^z + e^{-z}. \quad \triangleleft$$

2.1.2. *Trobeu el rang de*

$$\begin{aligned} a) f(z) &= z^2 \text{ si } z \text{ està en el primer quadrant,} \\ b) g(z) &= 1/z \text{ per } 0 < |z| \leq 1, \\ c) h(z) &= -2z^3 \text{ per } z \text{ tal que } 0 < |z| < 1 \text{ i } \operatorname{Arg} z < \pi/2. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

2.1.3. *Digueu on són contínues les següents funcions*

$$\begin{aligned} a) \frac{1}{z - 2 + 3i}, \quad c) \frac{3z - 1}{z^2 + z + 4}, \\ b) \frac{iz^3 + 2z}{z^2 + 1}, \quad d) z^2(2z^2 - 3z + 1)^{-2}. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

2.1.4. *Proveu que la inversió $w = f(z) = 1/z$ transforma*

$$\begin{aligned} a) \text{ el cercle } \{|z| = r\} \text{ en el cercle } \{|w| = 1/r\}; \\ b) \text{ el raig } \{\operatorname{Arg} z = \theta_0\}, \text{ amb } -\pi < \theta_0 < \pi, \text{ en el raig } \{\operatorname{Arg} w = -\theta_0\}; \\ c) \text{ el cercle } \{|z - 1| = 1\} \text{ a la línia vertical } \{x = 1/2\}. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

2.1.5. *Trobeu una funció afí que transformi el cercle $\{|z| < 1\}$ en el cercle $\{|w - w_0| < R\}$ de manera que els centres es corresponguin i el diàmetre horitzontal es transformi en el diàmetre que forma un angle α amb l'eix real.* $\triangleleft$

2.1.6. *Per l'exponencial $f(z) = e^z$:*

$$\begin{aligned} a) \text{ Descriuiu-ne el domini i el rang.} \\ b) \text{ Proveu que } f(-z) = 1/f(z). \\ c) \text{ Descriuiu la imatge de } \{\operatorname{Re} z = 1\}. \end{aligned}$$

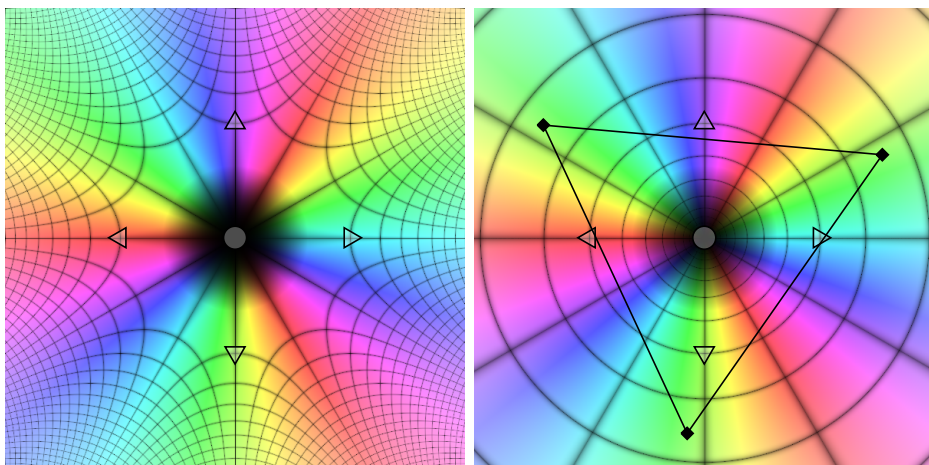


Figura 2.4.: El polinomi z^3 en $2\mathcal{Q}$ en coordenades cartesianes i polars.

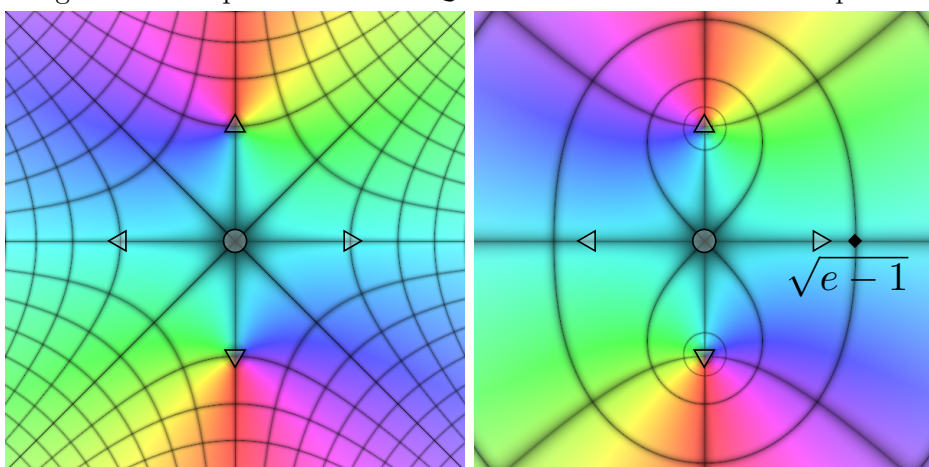


Figura 2.5.: Funció $f(z) = z^2 + 1$ en $2\mathcal{Q}$. Notem que $f(\pm i) = 0$.

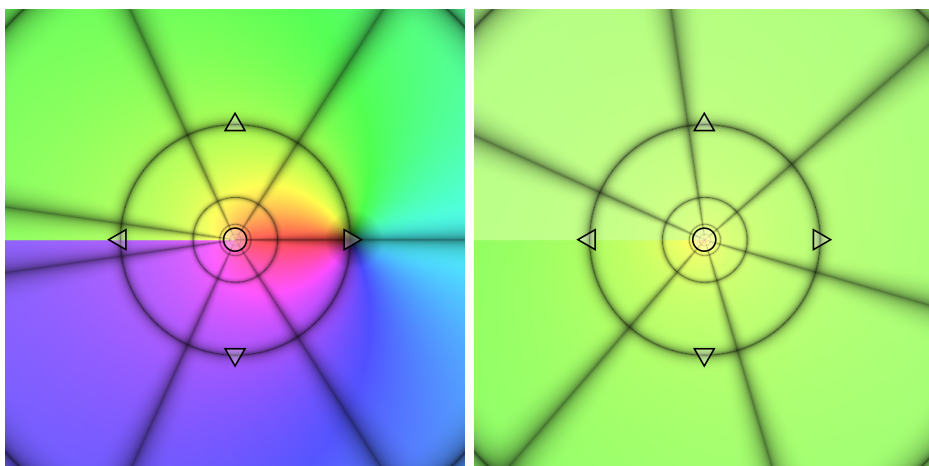


Figura 2.6.: A l'esquerra, la funció Log en $2\mathcal{Q}$, vegeu la definició 2.11. A la dreta, la branca $\mathcal{L} = \text{Log} + 2\pi i$ en el mateix domini. Ara només en cartesianes.

d) Descriu la imatge de $\{\operatorname{Im} z = \pi/4\}$.

e) Descriu la imatge de la banda $\{0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi/4\}$. $\triangleleft$

2.1.7. La funció de Jukovski³ és $w = J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, vegeu la figura 3.7. Proveu que

a) $J(z) = J(1/z)$,

b) J porta el cercle unitat $\{|z| = 1\}$ a l'interval real $[-1, 1]$,

c) J porta el cercle $\{|z| = r\}$ ($r > 0, \neq 1$) a l'el·lipse $\left\{ \frac{u^2}{\left[\frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \right]^2} = 1 \right\}$,
que té els focus a ± 1 . $\triangleleft$

2.1.8. Fent servir la comanda `contour_plot` de Sage dibuixeu les corbes de nivell de u i v si $f = u + iv$ és

a) z ,

d) $\sin(z)$,

g) e^z ,

b) z^2 ,

e) $1/z$,

h) $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$,

c) $\log(z)$,

f) $1/z^2$,

i) $\log(z-1) + \log(z+1)$. $\triangleleft$

2.2. Funcions multivaluades: logaritmes i arguments

Ja hem vist que hi ha funcions com ara l'argument que prenen múltiples valors:

$$\arg(i) = \left\{ \dots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \right\} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

També és el cas de les arrels n -èsimes:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ |z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg z}{n}} \right\} = \left\{ |z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\operatorname{Arg} z}{n}} e^{i \frac{2k\pi}{n}} : k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

Definició 2.9 (Branca contínua). Donada una funció multivaluada en A , diem que una funció $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ n'és una *branca contínua* (o *determinació*) en $B \subset A$ si $f(z)$ és una elecció d'entre les diferents opcions de manera que aquesta elecció sigui contínua en B .

Comentari 2.10. En la definició anterior, suposem implícitament que hi ha una distància en A , o bé, de manera més general, una topologia. Així podem parlar de continuïtat de funcions.

³Nikolai Jukovski, Orekhovo, 1847–1921. https://ca.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Jukovski

Per exemple, si $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, aleshores la funció *argument principal* $\operatorname{Arg} z$ és una branca contínua de l'argument en A . Qualsevol altra branca de l'argument $\mathcal{A} : A \rightarrow \mathbb{R}$ que escollim consistirà en fixar un $k \in \mathbb{Z}$ i tindrem $\mathcal{A}(z) = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$.

En canvi, si prenem $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, aleshores l'argument principal no és una branca contínua, ja que tindrem una discontinuïtat al llarg de la semirecta $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.

Si $x \in \mathbb{R}$ i $y > 0$, sabem que $e^x = y$ si i només si $x = \ln y$. Volem estudiar aquesta equació en $\mathbb{C}$. Ja sabem que l'exponencial complexa és periòdica i, per tant, no injectiva, ja que $e^{z+2k\pi i} = e^z$, per a tot $k \in \mathbb{Z}$, vegeu la proposició 1.45.

Recordem que per a cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existeix un únic $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que

$$e^{i\theta} = \frac{z}{|z|},$$

que s'anomena argument principal, i es denota $\operatorname{Arg}(z)$. Aleshores

$$e^{\ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)} = e^{\ln|z|} e^{i\operatorname{Arg}(z)} = |z| \frac{z}{|z|} = z.$$

Definició 2.11. El *logaritme principal* de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es defineix com

$$\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z).$$

Per tant $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi\}$. En general, un *logaritme* de z és un nombre $w \in \mathbb{C}$ amb $e^w = z$. Escrivim $\log z$ per anomenar el conjunt de tots els logaritmes de z , vegeu la figura ???. Observem com, en aquesta figura, les circumferències centrades a l'origen es transformen en rectes verticals. Veiem també com, en el logaritme principal, en arribar als reals negatius des del segon quadrant, trobem una discontinuïtat que es podria evitar prenent la determinació del logaritme representada a la dreta (pagant el preu de trobar la discontinuïtat més endavant).

Donat $n \in \mathbb{N}$, definim l'*arrel n-èsima* com la funció multivaluada $\sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n} \log z}$. •

Com hem vist a la proposició 1.45, el logaritme és doncs

$$w = \log z = \operatorname{Log} z + 2k\pi i = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z + 2k\pi i = \ln|z| + i\arg z; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En particular, a diferència del que passa a $\mathbb{R}$, hi ha infinits logaritmes. Escriurem “ln” pel logaritme neperià definit a la recta real, i “log” per la funció multivaluada del pla complex per distingir-los. Per altra banda, notem que l'arrel n -èsima pren n valors diferents.

Exemples 2.12 (Càlculs de logaritmes). 1. $\log 1 = \ln|1| + i0 + 2\pi ki = 2\pi ki; \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$2. \log(-1) = \ln 1 + i\pi + 2\pi ki; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \operatorname{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\operatorname{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

Els altres logaritmes serien $\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i.$

◇

Observació 2.13 (Argument i logaritme). Si considerem $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ i fixem una branca de l'argument $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, llavors

$$\mathcal{L}(z) := \ln |z| + i\mathcal{A}(z)$$

també ens dona una branca del logaritme $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Si la primera és contínua, la segona també, ja que $\ln |z|$ és contínua a $\mathbb{C}^*$. En particular, com que l'argument principal $\text{Arg } z$ és continu en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, deduïm que $\text{Log } z$ és contínua en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

A la inversa, si $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és una branca contínua del logaritme en Ω , aleshores $\mathcal{A} = \text{Im } \mathcal{L}$ ens dona una determinació de l'argument.

A més, en ambós casos podem definir la branca contínua de l'arrel n -èsima $\mathcal{S}(z) := e^{\frac{1}{n}\mathcal{L}(z)}$.

•

De fet, tenim el següent resultat:

Proposició 2.14 (Existència d'argument). *Existeix una branca contínua de l'argument de z en $\mathbb{C} \setminus r$, on r és qualsevol semirecta de $\mathbb{C}$ amb extrem en el 0.*

Per tant, també hi ha una branca contínua del logaritme (i de qualsevol arrel) de z en $\mathbb{C} \setminus r$.

Demostració. Posem

$$r = \{Re^{i\theta} : 0 \leq R < \infty\}.$$

Escollim $\mathcal{A}z$ la branca de l'argument de z que pren valors en $(\theta, \theta + 2\pi)$, i vegem que és contínua. Siguin $z_n, z_0 \in \mathbb{C} \setminus r$ amb $z_n \rightarrow z_0$. Volem veure que $\mathcal{A}z_n \rightarrow \mathcal{A}z_0$. Suposem el contrari. Llavors, substituint (si és necessari) la successió (z_n) per una subsuccessió, podem suposar que existeix $\varepsilon > 0$ tal que per a tot $n \geq 0$, $|\mathcal{A}z_n - \mathcal{A}z_0| > \varepsilon$. Donat que la funció $\mathcal{A}z$ pren valors en un interval fitat, aplicant el teorema de Bolzano-Weierstrass⁴, podem trobar una subsuccessió convergent. És a dir, hi ha z_{n_k} amb

$$\mathcal{A}z_{n_k} \rightarrow \alpha \neq \mathcal{A}z_0; \quad \alpha \in [\theta, \theta + 2\pi].$$

($\alpha \neq \mathcal{A}z_0$, ja que per a tot $n \geq 0$, $|\mathcal{A}z_n - \mathcal{A}z_0| > \varepsilon$).

Com que l'exponencial és contínua, $e^{i\mathcal{A}z_{n_k}} \rightarrow e^{i\alpha}$, però també

$$e^{i\mathcal{A}z_{n_k}} = \frac{z_{n_k}}{|z_{n_k}|} \rightarrow \frac{z_0}{|z_0|} = e^{i\mathcal{A}z_0}.$$

Per tant

$$e^{i\alpha} = e^{i\mathcal{A}z_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha - \mathcal{A}z_0 = 2k\pi$$

per algun $k \in \mathbb{Z}$, i això és absurd (l'única possibilitat és $k = 0$ i estem suposant que $\alpha \neq \mathcal{A}z_0$). $\square$

Proposició 2.15 (No-existència d'argument). *No hi ha cap branca contínua de l'argument de z en $\partial\mathbb{D}$.*

⁴Karl Weierstrass, Ostenfelde, 1815–1897. https://ca.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass

Demostració. Suposem que n'hi ha una de contínua, diguem-li $\mathcal{A}(z)$. Com que $|z| = 1$, tenim que si $z = e^{i\theta}$,

$$e^{i\mathcal{A}(z)} = \frac{z}{|z|} = z = e^{i\theta} \Rightarrow \exists k_\theta \in \mathbb{Z} : \mathcal{A}(e^{i\theta}) = \theta + 2k_\theta\pi.$$

Aleshores $k_\theta = (\mathcal{A}(e^{i\theta}) - \theta)/2\pi$ és una funció contínua que pren valors enters i, per tant, és constant. És a dir, $k_\theta = k$. Llavors

$$0 + 2k\pi = \mathcal{A}(e^{i0}) = \mathcal{A}(1) = \mathcal{A}(e^{i2\pi}) = 2\pi + 2k\pi,$$

fet absurd. □

Observació 2.16 (Propietats del logaritme).

(i) Si $\mathcal{L}$ és una branca contínua del logaritme en Ω , aleshores $e^{\mathcal{L}(z)} = z$ per $z \in \Omega$. Ara bé, $\mathcal{L}(e^z) = z$ no és cert en general, donat que per a $k \in \mathbb{Z}$, $e^z = e^{z+2k\pi i}$. Diem, doncs, que $\mathcal{L}$ és una *inversa per la dreta* de l'exponencial en Ω . Podem dir el mateix de les branques contínues d'arrels.

(ii) Per $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, com a conjunts de números, tenim que

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2.$$

Ara bé, fixada una branca $\mathcal{L}(z)$ del logaritme de z , pot passar que $\mathcal{L}(z_1 z_2) \neq \mathcal{L}(z_1) + \mathcal{L}(z_2)$ ja que la suma de dos arguments potser no pertany a la mateixa branca. •

Exemple 2.17 (El logaritme principal no és morfisme de grups). Considerem els punts $-1 - i$, $1 - i$. Llavors

$$\text{Log}((-1 - i)(1 - i)) = \text{Log}(-2) = \ln 2 + i\text{Arg}(-2) = \ln 2 + \pi i.$$

D'altra banda,

$$\text{Log}(-1 - i) + \text{Log}(1 - i) = (\ln \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i) + (\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i) = \ln 2 - \pi i. \quad \diamond$$

Exercicis

2.2.1. Donada l'equació de Cardano $z^3 + pz + q = 0$, comproveu que si $C = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$, aleshores $z_1 = C - \frac{p}{3C}$ és solució de la cúbica. Les tres arrels s'obtenen canviant l'elecció de l'arrel cúbica.

Tot seguit obriu GeoGebra⁵ i dibuixeu els punts $p = 1 + i$ i $q = 2 + 0i$; definiu $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, C mitjançant la fórmula anterior, i $z_1 = C - \frac{p}{3C}$, $z_2 = wC - \frac{p}{3wC}$ i $z_3 = w^2C - \frac{p}{3w^2C}$. Escolliu tres colors diferents per z_j , i activeu la seva traça. Deixant q fixat i movent p ,

⁵o entra a <https://www.geogebra.org/m/jbszj89u>

per exemple, comproveu que els tres punts són funció de p , i es poden determinar com a branques contínues localment de manera contínua, tot i que C presenta discontinuïtats de salt que fan que els tres z_j vagin permutant la seva posició. Per exemple, podeu fixar p en la circumferència de radi 4 amb la instrucció $p = \text{Punt}(\text{Circumferència}((0, 0), 4))$ i observar què ocorre, i comparar amb el radi 2 o 3. Podeu usar també la instrucció `lloc geomètric`. Quantes voltes cal que faci p a aquesta circumferència per tal que una arrel doni la volta a l'origen de manera contínua? $\triangleleft$

2.2.2. Calculeu els possibles valors de

a) $\log(1)$, b) $\log(-1)$, c) $\log(1+i)$, d) $\log(1-i\sqrt{3})$, e) $\log(i)$. $\triangleleft$

2.2.3. Escrivim $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ i $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$. Resoleu les equacions

a) $e^z = 2i$; c) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$; e) $\cos z = \sin z$. $\triangleleft$

b) $\text{Log}(z^2 - 1) = i\pi/2$; d) $\cos z = 2i$;

2.2.4. Determinar explícitament la inversa de $q(z) = 2e^z + e^{2z}$ en funció de logaritmes. Resoldre $q(z) = 3$, trobant totes les solucions.

2.2.5. Sigui $\mathcal{L}$ una determinació del logaritme en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ tal que $\mathcal{L}(1) = 2\pi i$. Proveu que la funció $f(z) = \mathcal{L}(z+3)$ és contínua en

$$D := \{z \in \mathbb{C}; \text{Re}(z) > -3\}.$$

Quant val $f(3i)$? $\triangleleft$

2.2.6. Una branca de l'argument $\mathcal{A}(z)$ (i la del logaritme $\mathcal{L}(z)$ corresponent, vegeu l'observació 2.13) queda fixada si donem el domini Ω on està definida i el valor de $\mathcal{A}(z)$ (o de $\mathcal{L}(z)$) d'un punt d' Ω . Considereu els dominis:

$$\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi}, r \geq 0\}; \quad \Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi/4}, r \geq 0\};$$

$$\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus (\{x \in [-1, 0]\} \cup \{-1 + iy, y \in [0, 1.5]\} \cup \{x + 1.5i, x \in [-1, \infty)\}).$$

Completeu la següent taula.

	Ω_1	Ω_2	Ω_3
$\mathcal{A}(1) = 0$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$ $\mathcal{L}(2i) =$
$\mathcal{A}(1) = -2\pi$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$ $\mathcal{L}(2i) =$
$\mathcal{A}(i) = -\frac{3\pi}{2}$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$ $\mathcal{L}(2i) =$

2.2.7. *Estudieu si existeix alguna determinació del logaritme en els conjunts següents i determineu els possibles conjunts imatge:*

$$a) \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}, \quad b) \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}, \quad c) \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}. \quad \triangleleft$$

2.2.8. *Feu un esbós del domini $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : z \neq e^{x+i2\pi x} \text{ per } x \in \mathbb{R}\}$. Sigui $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una determinació de l'argument en aquest domini i $\mathcal{L}$ la determinació del logaritme associada. Suposant que $\mathcal{A}(i) = \frac{-3\pi}{2}$, determineu $\mathcal{A}(-i)$ i $\mathcal{L}(e^{5/2})$.* $\triangleleft$

2.2.9. *Siguin $h_0(z), h_1(z)$ i $h_2(z)$ les determinacions de l'arrel cúbica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (és a dir, funcions contínues que satisfan que $h_j(z)^3 = z$ en Ω) tals que $h_0(1) = 1$, $h_1(1) = e^{2\pi i/3}$ i $h_2(1) = e^{4\pi i/3}$.*

i) *Describeu $h_j(\Omega)$ per $j = 0, 1, 2$.*

ii) *Per $j = 0, 1, 2$ relacioneu h_j amb Log i Arg .*

iii) *Usant les relacions anteriors, trobeu el valor de $h_j(i)$, per $j = 0, 1, 2$.* $\triangleleft$

2.3. Potències complexes

Definició 2.18 (Potències complexes). Sigui $z \in \mathbb{C}^*$ i $a \in \mathbb{C}$. Sabem que $z = e^{\mathcal{L}(z)}$ per a qualsevol branca del logaritme $\mathcal{L}$ i, per tant, per a $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = (e^{\mathcal{L}(z)})^n = e^{n\mathcal{L}(z)}$.

Llavors definim

$$z^a := e^{a \log z} = e^{a(\ln |z| + i \arg z)} = e^{a(\operatorname{Log} z + 2k\pi i)}. \quad \bullet$$

Advertència 2.19. L'anterior definició és un abús de notació en tota regla, i no l'aplicarem mai quan a la base escrivim el nombre e : sempre parlem de

$$e^a = e^{\operatorname{Re} a} e^{i \operatorname{Im} a}$$

i no de

$$e^a \neq e^{a \log e} = e^{a(1+2k\pi i)},$$

la desigualtat sent certa sempre que $a \notin \mathbb{Z}$. Notem que aquesta definició seria, en el fons, circular! $\bullet$

A priori, la potència z^a pren infinits valors com $\arg z$. Per exemple, donat que $\log i = \ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$,

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}; \quad k \in \mathbb{Z},$$

que pren infinits valors reals.

Hi ha casos en què pren un nombre finit de valors, com $i^{1/4}$ que pren 4 valors.

Observació 2.20 (Quantitat de valors). De fet es pot comprovar que si $z, a \in \mathbb{C}$ i $z \neq 0$,

- Si $a \in \mathbb{Q}$ aleshores $z^a = e^{a \operatorname{Log} z} e^{2k\pi i a}$ pren un nombre finit de valors.
- El valor és únic si i només si $a \in \mathbb{Z}$ (és a dir, no depèn de la branca del logaritme escollit). En aquest cas tenim una potència natural de z o de z^{-1} .
- Si $a = p/q \in \mathbb{Q}$, amb $q > 0$ i $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$, aleshores $z^{p/q}$ pren exactament q valors.
- Si a no és racional, z^a té infinits valors que difereixen en un factor $e^{2\pi i k a}$. •

Observació 2.21 (Relacions entre potències). Comparem $z^a z^b$ amb z^{a+b} . En l'observació assumim en general que $a, b, c \in \mathbb{C}$ i que les bases són no nul·les.

- $z^a z^b = e^{(a+b) \operatorname{Log} z + 2\pi i (ka+jb)}$, on $k, j \in \mathbb{Z}$,
- $z^{a+b} = e^{(a+b) \operatorname{Log} z + 2\pi i m(a+b)}$, on $m \in \mathbb{Z}$.

Per tant, com a conjunts, $z^{a+b} \subset z^a z^b$, amb igualtat quan $a \in \mathbb{Z}$ o $b \in \mathbb{Z}$.

Anàlogament

- $(z^a)^b = e^{ab \operatorname{Log} z + 2\pi i (ka+j)b}$, on $k, j \in \mathbb{Z}$,
- $z^{ab} = e^{ab \operatorname{Log} z + 2\pi i mab}$, on $m \in \mathbb{Z}$,

i tenim que $z^{ab} \subset (z^a)^b$, amb igualtat quan $b \in \mathbb{Z}$.

En canvi, com a conjunts de valors, sí que és cert que

$$(ab)^c = e^{c \log(ab)} = e^{c(\log a + \log b)} = a^c b^c. \quad \bullet$$

Exercicis

2.3.1. Trobeu l'error en el següent raonament de Bernoulli: $(-z)^2 = z^2$, llavors $2 \log(-z) = 2 \log z$. Per tant, $\log(-z) = \log(z)$. ◁

2.3.2. Calculeu els possibles valors de

$$a) i^i, \quad b) (\sqrt{3} + i)^{1-i}, \quad c) 2^{-i}, \quad d) (i^2)^i, \quad e) (i^i)^2. \quad \triangleleft$$

2.4. Determinacions de logaritmes i arrels de funcions

Recordem que $\mathcal{L}$ és una branca o determinació del logaritme de z en Ω si $\mathcal{L}$ és contínua en Ω i

$$e^{\mathcal{L}(z)} = z \quad \forall z \in \Omega.$$

Definim una determinació del logaritme (respectivament l'argument i l'arrel n -èsima) d'una funció contínua f com una branca contínua de $\log(f)$ (respectivament, $\arg(f)$ i $\sqrt[n]{f}$). La definició que segueix és una manera equivalent d'escriure-ho:

Definició 2.22 (Determinacions). Sigui X espai mètric (normalment $X = \Omega \subset \mathbb{C}$ obert o $X = [a, b]$ un interval). Sigui $f : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ contínua. Una *determinació del logaritme* de f en X és una funció $\mathcal{L}_f : X \rightarrow \mathbb{C}$ contínua tal que

$$e^{\mathcal{L}_f(x)} = f(x) \quad \forall x \in X.$$

Diem que $\mathcal{A}_f$ és una *determinació de l'argument* de f en X si $\mathcal{A}_f$ és contínua en X i

$$f(x) = |f(x)| e^{i\mathcal{A}_f(x)} \quad \forall x \in X.$$

Diem que $\mathcal{S}_f$ és una *determinació de l'arrel n -èsima* de f en X , $\sqrt[n]{f}$, si $\mathcal{S}_f$ és contínua en X i

$$\mathcal{S}_f(x)^n = f(x) \quad \forall x \in X. \quad \bullet$$

Observació 2.23. Si tenim una determinació $\mathcal{A}_f$ de l'argument de f , llavors també tenim una determinació del logaritme de f definint

$$\mathcal{L}_f(x) := \ln |f(x)| + i\mathcal{A}_f(x).$$

També, si $\mathcal{L}_f$ és una determinació del logaritme de f , llavors $\text{Im } \mathcal{L}_f$ és una determinació de l'argument de f . Resumint, hi ha determinació del logaritme si i només si, hi ha determinació de l'argument. •

Exemple 2.24. Si $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $f(z) = z$, llavors no existeix cap determinació de $\log f(z) = \log z$ en X . (Vàrem veure que no hi ha cap argument continu en $\partial\mathbb{D}$.) ◊

Exemple 2.25. Si $X = [0, 1]$ i $f(x) = e^{4\pi ix}$, llavors $\mathcal{L}_f(x) = 4\pi ix$ és una determinació de $\log f$ en X (altres serien $i(4\pi x + 2k\pi)$). ◊

Observació 2.26 (Relacions d'existència de determinacions). (i) Si hi ha una determinació $\mathcal{L}_f$ del logaritme de f , aleshores hi ha determinació de $\sqrt[n]{f}$.

Simplement definim $\mathcal{S}_f(x) = e^{\frac{1}{n}\mathcal{L}_f(x)}$.

(ii) Pot existir una determinació de l'arrel n -èsima $\sqrt[n]{f}$, encara que no n'hi hagi cap del logaritme.

Per exemple, sigui $f(z) = z^n$ per $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} =: \Omega$. La funció $\mathcal{S}_f(z) = z$ és una determinació de $\sqrt[n]{f}$ en Ω (ja que $\mathcal{S}_f(z)^n = f(z)$). Però la funció f no té determinació del logaritme en Ω .

Efectivament, suposem que existeix una determinació del logaritme de f , que anomenem $\mathcal{L}_f$ i arribarem a una contradicció: definim $\varphi(t) = e^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$. Llavors $h_0(t) = 2\pi int$ i $h_1(t) = \mathcal{L}_f(\varphi(t))$ són determinacions del logaritme de la funció φ^n en $[0, 1]$. En efecte,

$$e^{h_1(t)} = e^{\mathcal{L}_f(\varphi(t))} = e^{\mathcal{L}_f(e^{2\pi it})} = f(e^{2\pi it}) = (e^{2\pi it})^n = (\varphi(t))^n,$$

i, d'altra banda,

$$e^{h_0(t)} = e^{2\pi i n t} = \varphi(t)^n.$$

Per tant, per a tot $t \in [0, 1]$, $e^{h_0(t)} = e^{h_1(t)}$, de manera que existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que $h_1 = h_0 + 2k\pi i$, vegeu la proposició 2.28 més avall.

A més a més, com que $\varphi(0) = e^{2\pi i 0} = e^{2\pi i} = \varphi(1)$, es compleix que

$$h_1(0) = \mathcal{L}_f(\varphi(0)) = \mathcal{L}_f(\varphi(1)) = h_1(1).$$

Però,

$$0 = h_1(0) - h_1(1) = h_0(0) + 2\pi i k - (h_0(1) + 2\pi i k) = 2\pi i n \cdot 0 - 2\pi i n \cdot 1 \neq 0.$$

- (iii) Si existeix una determinació $\mathcal{L}$ del logaritme de z en la imatge $f(\Omega)$, aleshores hi ha determinació del logaritme de f en Ω .

Simplement, definim $\mathcal{L}_f(z) = \mathcal{L}(f(z))$.

Ara bé, el recíproc no és cert. Pot existir determinació del logaritme de f en Ω , encara que no hi hagi cap logaritme continu de z en $f(\Omega)$. N'hi ha prou amb prendre $f(z) = e^z$, $\mathcal{L}_f(z) = z$, $\Omega = \mathbb{C}$, $f(\Omega) = \mathbb{C}^*$. Vegeu també l'exemple 2.27. •

Exemple 2.27 (Logaritmes de camins). Sigui $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial\mathbb{D}$ contínua i $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{w_0} = \gamma(a)$. Llavors existeix una única determinació del logaritme de γ , $\mathcal{L}_\gamma$, tal que $\mathcal{L}_\gamma(a) = w_0$. Es demostra a la proposició 5.1. En canvi, no hi ha determinació del logaritme de $\partial\mathbb{D}$, vegeu la proposició 2.15. ◇

Proposició 2.28 (Unicitat de les determinacions). *Sigui X un espai mètric **connex**, i $f : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ contínua. Si $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ són dues determinacions del logaritme de f en X , llavors*

$$\mathcal{L}_1(x) = \mathcal{L}_2(x) + 2\pi k i; \quad x \in X$$

per un cert $k \in \mathbb{Z}$.

Demostració. Per $x \in X$, tenim que

$$e^{\mathcal{L}_1(x)} = f(x) = e^{\mathcal{L}_2(x)} \quad \Rightarrow \quad \exists k_x \in \mathbb{Z} : \mathcal{L}_1(x) - \mathcal{L}_2(x) = 2k_x \pi i.$$

Com que $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ són contínues en X , aleshores la funció $k : X \rightarrow \mathbb{Z}$ definida per

$$k(x) := k_x = \frac{\mathcal{L}_1(x) - \mathcal{L}_2(x)}{2\pi i}$$

és contínua en X . Com que X és connex, llavors $k(X)$ és un connex de $\mathbb{Z}$ i, per tant, és un punt, de manera que $k(x) = k$ per a tot $x \in X$. □

Exercicis

2.4.1. Sigui X un espai topològic connex. Demostreu que si $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ són dues determinacions de l'arrel n -èsima de $f : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ llavors existeix una arrel n -èsima de la unitat ζ tal que $\mathcal{S}_2(x) = \zeta \cdot \mathcal{S}_1(x)$, per a tot $x \in X$. $\triangleleft$

2.4.2. Determineu els dominis de continuïtat (és a dir l'obert maximal on una funció és contínua) de les funcions e^{z^2} , $e^{1/z}$, $1/e^z$, $1/(e^z - 1)$, de la branca principal de $\sqrt{1 - z}$ i de la branca principal de $\sqrt{1 + e^z}$. $\triangleleft$

2.4.3. Doneu una determinació de $f(z)$ que sigui contínua a la regió D donada.

a) $f_1(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

b) $f_2(z) = (z^2 + 4)^{1/2}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{iy \in \mathbb{C} : |y| < 2\}$,

c) $f_3(z) = (z^4 - 1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,

d) $f_4(z) = (z^3 - 1)^{1/3}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. $\triangleleft$

2.5. Sèries de potències de nombres complexos

Una sèrie de potències de nombres complexos és una expressió de la forma

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - b)^n,$$

on $\{a_n\}$ és una successió de nombres complexos i $b \in \mathbb{C}$.

Per tal d'estudiar sèries de potències de nombres complexos, primer ens cal recordar diversos conceptes i resultats.

Definició 2.29 (Convergència uniforme). Diem que $f_n \rightarrow f$ uniformement en A si

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0.$$

Dit d'una altra manera, per tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que per tot $n > n_\varepsilon$ i tot $z \in A$ es té $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$. També, una sèrie de funcions $\sum_{n \geq 0} f_n$ convergeix uniformement en A si la successió $\sum_{k=0}^n f_k$ convergeix uniformement en A . $\bullet$

Observació 2.30 (Convergència uniforme de Cauchy). Recordem que una successió $\{f_n\}$ és uniformement convergent si i només si és uniformement de Cauchy, i el mateix passa per una sèrie $\sum g_k$. És a dir, que per tot $\varepsilon > 0$ existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $m \geq n \geq n_0$ tenim que

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon, \quad \text{i} \quad \sup_{z \in A} \left| \sum_{k=n}^m g_k(z) \right| < \varepsilon \text{ respectivament.}$$

Recordem que si, a més a més, f_n són contínues, aleshores el seu límit uniforme és una funció contínua. $\bullet$

Teorema 2.31 (Criteri M de Weierstrass). *Si tenim una sèrie de funcions $\sum_n f_n$, on $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, de manera que $|f_n(z)| \leq M_n$ per a tot $z \in A$, amb $\sum_n M_n < \infty$, aleshores la sèrie $\sum_n f_n$ convergeix absolutament i uniforme en A .*

Demostració. És una aplicació immediata de l'observació 2.30. $\square$

Teorema 2.32 (Cauchy-Hadamard⁶). *Si $\sum_{n \geq 0} a_n(z-b)^n$ sèrie de potències de nombres complexos. Llavors existeix un únic $R \in [0, +\infty]$ de manera que*

- (a) *La sèrie convergeix absolutament per a tot $z \in \mathbb{C}$ amb $|z-b| < R$.*
- (b) *Per $z \in \mathbb{C}$ amb $|z-b| > R$, la sèrie és divergent.*
- (c) *Si $0 \leq r < R$, la sèrie convergeix absolutament i uniforme en $|z-b| \leq r$.*

A més, es té

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

R s'anomena radi de convergència de la sèrie de potències.

Observació 2.33 (Idea de convergència uniforme). Cal entendre bé el significat de convergència uniforme en el teorema anterior. Dir que per tot $r < R$ hi ha convergència uniforme en $\overline{D_r(b)}$ no significa que hi hagi convergència uniforme en el disc de convergència $D_R(b)$. El que significa és que per tot $\varepsilon > 0$ i tot $0 < r < R$ existeix $n_{\varepsilon, r}$ tal que per tot $n > n_{\varepsilon, r}$ i tot $z \in D_r(b)$ es té $|f(z) - \sum_{k=0}^n a_k(z-b)^k| \leq \varepsilon$. Pot passar que $n_{\varepsilon, r} \xrightarrow{r \rightarrow R} \infty$, de manera que no podem esperar convergència uniforme en tot el disc de convergència.

Dit d'una altra manera, la velocitat de convergència sol empitjorar a mesura que ens apropem a la vora del disc $D_R(b)$. Un exemple paradigmàtic d'aquest comportament és la funció $f_n(x) = x^n$, que convergeix a zero a l'interval $[0, 1)$ de manera uniforme en $[0, r]$ per $r < 1$, tot i que $\sup_{0 \leq x < 1} |f_n(x) - 0| = 1$.

Notem també que la funció límit, diguem-ne $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z-b)^n$, és contínua en $\overline{D_r(b)}$ per tot $r < R$ (vegeu l'observació 2.30) i, per tant, és contínua en $D_R(b)$. •

Abans de demostrar el teorema, vegem alguns exemples.

Exemples 2.34. 1. El radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n \geq 0} z^n$ és $R = 1$.

Aquí aprofitem per recordar que, si $0 < r < 1$, llavors $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$. De la mateixa manera, també tenim que

$$\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Aquesta identitat és molt útil per calcular el valor de la suma d'algunes sèries de potències.

⁶Jacques Hadamard, Versailles, 1865–1963. https://ca.wikipedia.org/wiki/Jacques_Hadamard

2. Calculem el radi de convergència de la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 0} 2^n z^n.$$

Tenim

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Per tant, el radi de convergència és $R = 1/2$, de manera que la sèrie convergeix si $|z| < 1/2$ i és divergent si $|z| > 1/2$.

3. El radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n \geq 1} n^n z^n$ és $R = 0$. $\diamond$

Prova del teorema. Clarament (c) implica (a), de manera que només ens cal demostrar (c) i (b).

(c) Si $R = 0$ no hi ha res a demostrar. En cas contrari, prenem ρ amb $|z - b| \leq r < \rho < R$. Llavors

$$\frac{1}{\rho} > \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_k \sup_{n \geq k} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Per tant, existeix un $k \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}, \quad n \geq k.$$

Per veure la convergència uniforme en $|z - b| \leq r$, aplicarem el criteri M de Weierstrass. Tenim que

$$|a_n(z - b)^n| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \quad |z - b| \leq r; \quad n \geq k.$$

Com que $r/\rho < 1$, la sèrie $\sum_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ és convergent, de manera que pel criteri M de Weierstrass, la nostra sèrie de potències convergeix absolutament i uniforme en $|z - b| \leq r$.

(b) Sigui $z \in \mathbb{C}$ amb $|z - b| > R$. Prenem $\rho > R$ amb $|z - b| > \rho$. Tenim que

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

De la definició de límit superior, veiem que hi ha infinits n_k de manera que $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1/\rho$. Aleshores

$$|a_{n_k}(z - b)^{n_k}| > \frac{|z - b|^{n_k}}{\rho^{n_k}} > 1,$$

de manera que la sèrie és divergent ja que el terme general no tendeix a zero. $\square$

Com veiem, el càlcul del radi de convergència R ens determina tota la regió de convergència de la sèrie (un disc obert de radi R , d'aquí que R s'anomeni radi de convergència), excepte els punts z amb $|z - b| = R$, és a dir, els punts de la frontera del disc de convergència. Per aquests punts, la sèrie tant pot ser convergent com divergent, i s'ha d'estudiar a part (ho farem més endavant).

Exercicis

2.5.1. Considereu la sèrie de potències $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$. Digueu si són certes les següents afirmacions.

a) $S(z)$ pot ser divergent en $z = 0$ i convergent en $z = -i$ simultàniament.

b) $S(z)$ pot ser convergent en $z = 1 + i$ i en $z = 2 + i$ simultàniament.

c) Si $S(z)$ és convergent en $z = 1 + i$, aleshores també ho és en $z = 2i$.

d) Si $S(z)$ és divergent en $z = 2i$, aleshores també ho és en $z = 2 + i$. ◁

2.5.2. Sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una sèrie convergent en el disc $D = D_R(0)$. Demostreu que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \quad \text{si } 0 < r < R. \quad \triangleleft$$

2.5.3. Sigui $S_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ i $S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$. Demostreu que S_1 és convergent en z si i només si ho és S_2 . En cas afirmatiu, tenim que $S_1(z) = zS_2(z)$. ◁

2.6. Càlcul del radi de convergència

Pel criteri del quocient, vegeu l'observació 1.26, tenim una altra manera de calcular el radi de convergència d'una sèrie de potències, que en alguns casos pot ser més convenient que aplicar el criteri de l'arrel.

Lema 2.35 (Criteri del quocient). Podem calcular el radi de convergència de la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z-b)^n$$

amb la fórmula

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

sempre que aquest límit existeixi.

Exemples 2.36 (Aplicació del criteri del quocient). Calculem el radi de convergència R de les següents sèries de potències:

(1) $\sum_{n \geq 1} n z^n$. Apliquem el criteri del quocient. Tenim que

$$R = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$

(2) $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{(n+1)!}$. Aplicant el criteri del quocient, tenim que

$$R = \lim_n \frac{1/(n+1)!}{1/(n+2)!} = \lim_n \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \lim_n (n+2) = +\infty.$$

El criteri del quocient sol ser més simple per fer els càlculs, especialment quan apareixen factorials. $\diamond$

Advertència 2.37. El fet que existeixi el límit superior

$$\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

no implica que aquest coincideixi amb $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, vegeu l'Observació 1.26. $\bullet$

Exemple 2.38 (Alguns coeficients nuls). Tenint en compte l'observació anterior, per calcular el radi de convergència R de la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 1} n 2^n z^{2n}$$

no podem aplicar directament el criteri del quocient. Per tal de calcular R en aquest cas, ho podem fer:

(i) Aplicant la definició de R amb la fórmula $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. En el nostre cas, tenim que $a_{2n} = n 2^n$ i a_n val zero si n és senar. Llavors

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim \sqrt[2n]{n 2^n} = \sqrt{2} \lim \sqrt[n]{n} = \sqrt{2},$$

de manera que $R = 1/\sqrt{2}$.

(ii) Fent el *canvi de variables* $w = z^2$ obtenim la sèrie de potències $\sum_{n \geq 1} n 2^n w^n$. Apliquem el criteri del quocient per calcular el radi de convergència R' d'aquesta nova sèrie:

$$R' = \lim_n \frac{n 2^n}{(n+1) 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_n \frac{n}{n+1} = 1/2.$$

Aleshores la sèrie és convergent si $|w| < 1/2$ i divergent si $|w| > 1/2$. És a dir, la nostra sèrie inicial és convergent si $|z^2| < 1/2 \Leftrightarrow |z| < 1/\sqrt{2}$, i és divergent si $|z^2| > 1/2 \Leftrightarrow |z| > 1/\sqrt{2}$. Així també obtenim que $R = 1/\sqrt{2}$. $\diamond$

Exemple 2.39 (Sèrie lacunar). Calculem el radi de convergència R de la sèrie de potències lacunar⁷

$$\sum_{n \geq 1} 2^{-n} z^{2^n}.$$

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Lacunary_function

Aquí no tenim cap canvi de variable que ens permeti aplicar el criteri del quocient. Aleshores hem de fer servir la definició

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ara observem que a_n sempre val zero excepte quan $n = 2^k$, que tenim que $a_{2^k} = 2^{-k}$. Llavors

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[2^k]{|a_{2^k}|} = \lim_k \sqrt[2^k]{2^{-k}} = \lim_k 2^{-\frac{k}{2^k}} = 2^0 = 1,$$

de manera que $R = 1$. $\diamond$

Fins ara, només hem vist exemples de càlcul quan els coeficients són reals. No hi ha diferència si els coeficients són complexos, ja que sempre estem treballant amb el mòdul dels coeficients.

Exemples 2.40 (Coeficients complexos). Calculem el radi de convergència de la sèrie de potències

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+i} z^n.$$

En aquest cas, tenim que $a_n = \frac{1}{n+i}$, de manera que $|a_n| = \frac{1}{|n+i|} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Per tant

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = 1. \quad \diamond$$

Per veure un altre exemple, calculem el radi de convergència R de la sèrie de potències

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n(1-i)}{1+i} \right) z^n.$$

En aquest cas, tenim que

$$a_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n(1-i)}{1+i} \right) = \left(\frac{1}{n} + (-1)^{n+1} i \right)$$

ja que

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{|1+i|^2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Llavors

$$|a_n| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n},$$

de manera que

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{\sqrt{1+n^2}}{n} \cdot \frac{(n+1)}{\sqrt{(n+1)^2+1}} = 1. \quad \diamond$$

$\diamond$

Exercicis

2.6.1. Calculeu el radi de convergència de les següents sèries de potències

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n; \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{n}};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n} z^n;$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} (z-2)^{n(n+1)};$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2^n}}{n^n};$$

$$h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2^n};$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n} (z-1)^n;$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (3z-2)^n;$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} (z+1)^n, \text{ per } a \in (0, 1);$$

$$j) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n)^n z^{2^n}.$$

<

2.7. Comportament a la frontera del disc de convergència

Quan estudiem la convergència d'una sèrie de potències de nombres complexos

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z-b)^n,$$

amb radi de convergència R , sabem que la sèrie convergeix per $|z-b| < R$, i que la sèrie és divergent quan $|z-b| > R$. Què passa pels punts z amb $|z-b| = R$? Llavors pot convergir o no. Per exemple, la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$$

té radi de convergència $R = 1$. Per $z = 1$, la sèrie és divergent, i per $z = -1$ la sèrie és alternada i, per tant, convergent (aquí quedaria estudiar els altres punts del cercle $|z| = 1$).

En la frontera del disc de convergència, tenim que $z-b = Re^{it}$, així que la sèrie a estudiar queda

$$\sum_{n \geq 0} a_n R^n e^{int}.$$

Per tal d'estudiar la convergència per t fixat, el primer que hem de fer és mirar si el terme general tendeix a zero o no. És a dir, mirem si

$$\left| a_n R^n e^{int} \right| \rightarrow 0 \quad \text{quan } n \rightarrow \infty.$$

En cas que no tendeixi a zero, llavors ja sabem que la sèrie és divergent. En cas que tendeixi a zero, ens cal estudiar-ho millor.

Si no hem tret cap conclusió del primer pas, el següent pas natural sol ser comprovar si la sèrie decreix prou ràpidament, de manera que tinguem convergència absoluta a la frontera, és a dir si

$$\sum |a_n R^n| < +\infty.$$

Aleshores pel criteri M de Weierstrass la sèrie convergeix uniformement i absoluta en el disc tancat $\overline{D_R(b)}$.

Si no es compleix cap de les dues situacions anteriors, és a dir, si la sèrie no convergeix absolutament en cap punt de la frontera del disc de convergència però no podem garantir la divergència arreu, aleshores ens caldrà filar més prim.

Lema 2.41 (Fórmula de sumació per parts). *Siguin $\{a_n\}, \{b_n\}$ successions de nombres complexos, i posem $A_n = a_0 + \dots + a_n$. Llavors*

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=0}^n A_k (b_{k+1} - b_k).$$

Demostració. Posant $A_{-1} = 0$, tenim que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=0}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}. \end{aligned} \quad \square$$

Com a cas particular, estudiem les cues $\sum_{j=n}^m a_k b_k$ amb $m > n$. En tal cas podem definir $\tilde{a}_k = a_{n+k}$, $\tilde{b}_k = b_{n+k}$ i $\tilde{A}_k = \sum_{j=0}^k \tilde{a}_j = \sum_{j=n}^{n+k} a_j$. Aplicant la fórmula de sumació per parts, tenim que

$$\sum_{k=0}^{m-n} \tilde{a}_k \tilde{b}_k = \tilde{A}_{m-n} \tilde{b}_{m-n+1} - \sum_{k=0}^{m-n} \tilde{A}_k (\tilde{b}_{k+1} - \tilde{b}_k).$$

Deduïm doncs la següent identitat:

$$\sum_{k=n}^m a_k b_k = A_{n,m} b_{m+1} + \sum_{k=n}^m A_{n,k} (b_k - b_{k+1}), \quad (2.1)$$

on ara $A_{n,k} = \sum_{j=n}^k a_j$.

D'altra banda, notem que per tota constant $A \in \mathbb{C}$ tenim que

$$A b_{m+1} - A b_n + \sum_{k=n}^m A (b_k - b_{k+1}) = 0.$$

Com que $A_k = \sum_{j=0}^k a_j = A_{n,k} + A_{n-1}$ (per tot $k \geq n$), prenent $A = A_{n-1}$, de (2.1) en deduïm que

$$\sum_{k=n}^m a_k b_k = A_m b_{m+1} - A_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^m A_k (b_k - b_{k+1}). \quad (2.2)$$

Teorema 2.42 (Criteri de Dirichlet-Abel uniforme). *Siguin X, Y dos conjunts. Siguin $\{a_n\}_{n \geq 1}$, una successió de funcions $a_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ i $\{b_n\}_{n \geq 1}$ una successió de funcions $b_n : Y \rightarrow \mathbb{R}$. Supposeu que es verifica alguna de les següents dues condicions:*

1. (criteri de Dirichlet) Existeix $M > 0$ pel qual

$$\left| \sum_{k=1}^N a_k(x) \right| \leq M,$$

per a tot $x \in X$ i $N \geq 1$.

La successió $\{b_n\}_{n \geq 1}$ és no negativa i decreix cap a 0 uniformement en Y (i.e. $b_{n+1}(y) \leq b_n(y)$ per a tot $n > 0$ i per a tot $y \in Y$, i $b_n(y) \rightarrow 0$ uniformement en Y).

2. (criteri d'Abel) La sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ convergeix uniformement en X .

La successió (b_n) és una successió monòtona de funcions reals fitada uniformement en Y .

Aleshores, la sèrie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(y)$ convergeix uniformement en $X \times Y$.

Demostració. Demostrem el criteri de Dirichlet. Posem $S_{n,m}(x, y) = \sum_{k=n}^m a_k(x)b_k(y)$, i sigui $\varepsilon > 0$. Pel criteri de Cauchy uniforme (vegeu l'observació 2.30), ens cal veure que hi ha $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a tot $x \in X$, $y \in Y$,

$$|S_{n,m}(x, y)| < \varepsilon, \quad m > n \geq n_0.$$

Per la versió (2.2) de la fórmula de sumació per parts (amb $a_0 = 0$), tenim que

$$\begin{aligned} |S_{n,m}(x, y)| &= \left| \sum_{k=n}^m a_k(x)b_k(y) \right| \\ &= \left| \sum_{k=n}^m A_k(x)(b_k(y) - b_{k+1}(y)) + A_m(x)b_{m+1}(y) - A_{n-1}(x)b_n(y) \right|, \end{aligned}$$

on $A_k(x) = \sum_{j=1}^k a_j(x)$, que per hipòtesi estan uniformement fitades per M .

Com que $b_n \rightarrow 0$ uniformement en Y , podem trobar $n_0 \in \mathbb{N}$, de manera que $2Mb_{n_0}(y) < \varepsilon$ per a tot $y \in Y$. Siguin $m \geq n \geq n_0$. Donat que també es compleix que la successió $\{b_k(y)\}$ és decreixent, i no-negativa, obtenim que per a tot $x \in X$, $y \in Y$,

$$\begin{aligned} |S_{n,m}(x, y)| &\leq M \sum_{k=n}^m |b_k(y) - b_{k+1}(y)| + M(|b_{m+1}(y)| + |b_n(y)|) \\ &= M \left(\sum_{k=n}^m (b_k(y) - b_{k+1}(y)) + (b_{m+1}(y) + b_n(y)) \right) = 2Mb_n(y) \\ &\leq 2Mb_{n_0}(y) < \varepsilon. \end{aligned}$$

De manera similar es pot demostrar el criteri d'Abel, usant la fórmula de sumació per parts (2.1). $\square$

Com a conseqüència del criteri d'Abel, tenim el següent resultat que no demostrarem, vegeu l'exercici 2.7.2.

Teorema 2.43 (Teorema d'Abel). *Si la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ convergeix uniformement en un conjunt $A \subset \mathbb{C}$, llavors també convergeix uniformement en el con*

$$C(A, b) = b + \bigcup_{0 \leq t \leq 1} t(A - b).$$

En particular, si la sèrie convergeix en z_0 amb $|z_0 - b| = R$, llavors

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} a_n r^n (z_0 - b)^n = \sum_{n \geq 0} a_n (z_0 - b)^n.$$

Exemple 2.44 (Aplicació dels criteris de convergència). Considerem la sèrie de potències $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Mètode 1: El radi de convergència és $R = 1$. Vegem com és comporta en $|z| = 1$. Clarament, la sèrie $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ és convergent pel criteri de Dirichlet. Ara bé, el criteri de Dirichlet ens serveix també per estudiar la convergència de la sèrie $\sum_n \frac{1}{n} e^{int}$. Tenim que

$$\sum_{k=1}^n e^{ikt} = e^{it} \frac{(1 - e^{int})}{1 - e^{it}} = e^{i \frac{(n+1)t}{2}} \frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})},$$

on hem fet servir que

$$1 - e^{it} = e^{i \frac{t}{2}} (e^{-i \frac{t}{2}} - e^{i \frac{t}{2}}) = -2ie^{i \frac{t}{2}} \sin \frac{t}{2},$$

i de la mateixa manera,

$$1 - e^{int} = -2ie^{i \frac{nt}{2}} \sin \frac{nt}{2}.$$

Com que $\left| e^{i \frac{(n+1)t}{2}} \right| = 1$, i $|\sin(\frac{nt}{2})| \leq 1$, obtenim

$$\left| \sum_{k=1}^n e^{ikt} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{t}{2})|} \leq \frac{C}{|\varepsilon|} \quad \text{si } t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

Com que $\frac{1}{n} \searrow 0$, aplicant el criteri de Dirichlet, obtenim que la sèrie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} e^{int} \quad \text{convergeix uniformement en } [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

O equivalentment, en tot arc I tancat del cercle unitat que no contingui a $z = 1$.

Per tant, aplicant el teorema d'Abel, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ és uniformement convergent en el con $\{re^{it}; 0 \leq r \leq 1, t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]\}$. Per Cauchy-Hadamard, també tenim convergència uniforme en $\overline{D}_r(0)$ si $r < 1$ i, per tant, en tenim a tot compacte contingut en $\mathbb{D} \setminus \{1\}$ (sempre el podem recobrir per la unió d'un con i un disc de radi $r < 1$).

Si $t = 0$ ens queda la sèrie $\sum \frac{1}{n}$ que ja sabem que és divergent.

Mètode 2: Treballem directament amb $z \in A \subset \overline{\mathbb{D}}$. Volem caracteritzar els conjunts A de manera que hi tinguem convergència uniforme. Primer mirem que hi puguem aplicar el criteri de Dirichlet. Si $z = 1$ la sèrie és divergent. Si ens situem a distància major que ε , és a dir $z \in A_\varepsilon := \overline{\mathbb{D}} \setminus D_\varepsilon(1)$, aleshores

$$\left| \sum_{k=1}^n z^k \right| = \left| z \frac{(1 - z^n)}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|} \leq \frac{2}{\varepsilon},$$

que és uniforme en A_ε i en n . Com que $\frac{1}{n} \searrow 0$, podem aplicar el criteri de Dirichlet i concloem directament que S convergeix uniformement en A_ε i, per tant en tenim a tot compacte contingut en $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$. Ens hem estalviat els teoremes d'Abel i Cauchy-Hadamard.

Més endavant (a l'exercici 3.4.5) veurem $S(z) = -\text{Log}(1 - z)$, així que quan $z \rightarrow 1$ tenim que $|S(z)| \geq |\ln(1 - z)| \rightarrow \infty$, i no podem tenir convergència uniforme en cap conjunt que s'acumuli en $z = 1$. Per tant, tot conjunt on hi hagi convergència uniforme, de fet, està contingut en A_ε per ε prou petit. $\diamond$

Exercicis

2.7.1. *Estudieu la convergència de les següents sèries de potències:*

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, & c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}, & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}. \\ b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)}, & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n, & \end{array} \quad \triangleleft$$

2.7.2. *Demostreu el criteri d'Abel i el teorema d'Abel. Indicació: Vegeu [BC13, teorema 2.20] per un cas més general en regions no tangencials (angles de Stolz).* $\triangleleft$