

3. Derivació complexa i holomorfia

En aquest capítol definim la derivació complexa i el concepte de funció holomorfa. Veurem les propietats d'aquesta forma de derivació i ho relacionarem amb les equacions de Cauchy-Riemann¹. Treballarem també la notació de Wirtinger² que permet fer un càlcul de derivades complex més eficient. Finalment, veurem que les sèries de potències estudiades al capítol anterior són holomorfes. Per acabar el capítol, farem una introducció de funcions holomorfes importants, centrant-nos en les funcions trigonomètriques i en les branques de les seves funcions inverses.

3.1. Funcions holomorfes

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert; $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, i $z_0 \in \Omega$.

Definició 3.1 (Derivabilitat i holomorfia). Diem que f és $\mathbb{C}$ -*derivable* en z_0 si existeix el límit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En aquest cas posem

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Diem que f és holomorfa en Ω , i posem $f \in H(\Omega)$, si és $\mathbb{C}$ -derivable en tot punt $z_0 \in \Omega$. Una funció holomorfa en $\mathbb{C}$ es diu que és una *funció entera*. •

Observació 3.2 (Holomorfia en compactes). Només hem definit funcions holomorfes en un obert, però es poden definir per altres conjunts. Per exemple, f és holomorfa en un compacte K si hi ha un obert Ω amb $K \subset \Omega$ de manera que podem estendre f a tot l'obert de manera que $f \in H(\Omega)$. •

Observació 3.3 (O gran i o petita). La derivada $f'(z_0)$ es pot descriure també com l'únic nombre complex tal que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0),$$

on usem la notació

$$g(z) = o(h(z)) \quad \text{si} \quad \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{h(z)} = 0.$$

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann, Breselenz, 1826 – 1866. https://ca.wikipedia.org/wiki/Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann

²Wilhelm Wirtinger, Ybbs an der Donau, 1865 – 1945. https://ca.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Wirtinger

Aquí a sol ser evident pel context (altrament escriuríem $g(z) = o_{z \rightarrow a}(h(z))$), i esperem que $\lim_{z \rightarrow a} h(z) = 0$, tot i que a vegades també s'aplica a $h(z) = 1$. Usarem també la notació

$$g(z) = \mathcal{O}(h(z)) \quad \text{si} \quad \limsup_{z \rightarrow a} \frac{|g(z)|}{|h(z)|} < +\infty.$$

Es pot veure fàcilment que si $g(z) = \mathcal{O}(z^n)$, aleshores $g(z) = o(z^{n-1})$, i que $g(z^2) = \mathcal{O}(z^{2n})$, per exemple. •

Exemple 3.4 (Funcions enteres). 1. $f(z) = z$ és holomorfa a tot $\mathbb{C}$.

2. $f(z) = z^2$ és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ amb $f'(z) = 2z$. En efecte, tenim que

$$\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = 2z + h \rightarrow 2z \quad \text{si } h \rightarrow 0.$$

3. $f(z) = z^n \in H(\mathbb{C})$ amb $f'(z) = nz^{n-1}$.

4. $f(z) = e^z \in H(\mathbb{C})$ amb $f'(z) = e^z$. En efecte, tenim que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \cdot \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow e^z \quad \text{si } h \rightarrow 0,$$

ja que

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} = 1 + o(h) \rightarrow 1 \quad \text{quan } h \rightarrow 0.$$

En aquestes igualtats hem usat primer la definició de l'exponencial, en segon lloc, que es pot treure z de factor comú en una sèrie sense alterar-ne la sumabilitat (vegeu l'exercici 2.5.3) i, en tercer lloc, que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{(n+1)!}$ convergeix a una funció contínua T amb $T(0) = 0$ en un entorn de l'origen per l'observació 2.30, ja que té radi de convergència positiu (de fet és infinit). ◇

Exemple 3.5 (Funcions no holomorfes).

1. $f(z) = \bar{z}$ no és $\mathbb{C}$ -derivable en cap punt. En efecte, tenim que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}.$$

Si $h = x \in \mathbb{R}$, llavors $\frac{\bar{h}}{h} = 1$, però si $h = iy$, tenim que $\frac{\bar{h}}{h} = -1$ i el límit anterior no existeix.

2. $f(z) = \bar{z}^n$ no és holomorfa.

3. $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$ no són holomorfes. ◇

Ja podem començar a veure que una funció holomorfa essencialment només depèn de z (no té dependència de $\bar{z}$, vegeu l'observació 1.11). Donarem un sentit rigorós a aquesta afirmació a la proposició 3.27

Observació 3.6 (Propietats bàsiques de les funcions $\mathbb{C}$ -derivables). Amb les mateixes proves que per $\mathbb{R}$, s'obté el següent:

1. Si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 , llavors f és contínua en z_0 .
2. Si f, g són $\mathbb{C}$ -derivables en z_0 , llavors $f + g$ i $f \cdot g$ també ho són, amb les regles habituals de derivació.
3. Si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 amb $f(z_0) \neq 0$, llavors $1/f$ és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 amb

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}.$$

4. *Regla de la cadena*: siguin $\Omega, G \subset \mathbb{C}$ oberts; $f : G \rightarrow \Omega$ i $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 i g és $\mathbb{C}$ -derivable en $f(z_0)$, aleshores la composició $g \circ f$ és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 amb

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0). \quad \bullet$$

Exemple 3.7 (Més exemples de funcions holomorfes).

1. Donat que $f(z) = z$ és una funció entera, es compleix que tots els polinomis

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad (a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \geq 0)$$

són funcions enteres.

2. Les funcions racionals (quocients de polinomis en z) són holomorfes en

$$\mathbb{C} \setminus \{\text{zeros del denominador}\}. \quad \diamond$$

Proposició 3.8 (Derivada de la inversa). *Siguin $g : \Omega \rightarrow G$ i $f : G \rightarrow \Omega$ funcions contínues de manera que*

$$f(g(z)) = z.$$

Si f és holomorfa en G i $f'(g(z)) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$, aleshores g és holomorfa en Ω amb

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}.$$

Demostració. Notem que g és injectiva, és a dir, que $g(z) = g(z_0)$ implica que $z = z_0$. Efectivament, tenim que

$$g(z) = g(z_0) \quad \Rightarrow \quad z = f(g(z)) = f(g(z_0)) = z_0.$$

Per tant, per $z \neq z_0$, tenim que $g(z) \neq g(z_0)$ i llavors

$$1 = \frac{z - z_0}{z - z_0} = \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} \cdot \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}.$$

Com que g és contínua, tenim que $w = g(z) \rightarrow w_0 = g(z_0)$ si $z \rightarrow z_0$, de manera que, com que f és holomorfa, obtenim

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\left(\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} \right)} = \frac{1}{\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0}} = \frac{1}{f'(w_0)} = \frac{1}{f'(g(z_0))}.$$

□

Corol·lari 3.9 (Derivada del logaritme). *Qualsevol branca contínua del logaritme $\mathcal{L}$ és holomorfa amb*

$$\mathcal{L}'(z) = \frac{1}{z}.$$

Observació 3.10 (Biholomorfia de l'exponencial). Si, donat $\alpha \in \mathbb{R}$, considerem la banda horitzontal oberta

$$B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \alpha - \pi < \operatorname{Im} z < \alpha + \pi\},$$

llavors la funció exponencial complexa és biholomorfa (és a dir, que es tracta d'un difeomorfisme holomorf) entre B_α i $\mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}(-\infty, 0]$. •

Finalment, vegem que tot logaritme continu en Ω d'una funció holomorfa, és també holomorf.

Proposició 3.11 (Holomorfia de les determinacions de logaritmes). *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorfa. Si $\mathcal{L}_f$ una determinació del logaritme de f en Ω . Llavors $\mathcal{L}_f$ és holomorfa en Ω amb*

$$\mathcal{L}'_f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in \Omega.$$

Demostració. Fixem $z_0 \in \Omega$. Com que f és holomorfa, en particular és contínua, de manera que hi ha $\delta > 0$ de manera que

$$f(D_\delta(z_0)) \subset D\left(f(z_0), \frac{1}{2}|f(z_0)|\right) =: D_1.$$

Com que $f(z_0) \neq 0$, llavors D_1 evita alguna semirecta amb origen el 0 i, per tant, existeix una determinació $\mathcal{L}(w)$ del logaritme de w en D_1 , que sabem que ha de ser holomorfa. Definim

$$h(z) = \mathcal{L}(f(z)), \quad z \in D_0 := D_\delta(z_0).$$

Com que f és holomorfa, llavors h és holomorfa en D_0 amb

$$h'(z_0) = \mathcal{L}'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}.$$

També h és una determinació del logaritme de f en D_0 . Com que D_0 és connex i $\mathcal{L}_f$ també és una determinació del logaritme de f en D_0 , aplicant la proposició 2.28, tenim que hi ha $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $\mathcal{L}_f = h + 2k\pi i$ en D_0 , i en deduïm que $\mathcal{L}_f$ és holomorfa en D_0 amb

$$\mathcal{L}'_f(z_0) = h'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}.$$

□

Exercicis

3.1.1. a) Demostreu la regla del producte per la derivació.

b) Proveu que si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 llavors és contínua en aquest punt.

c) Proveu que si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 , llavors

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \lambda(z)(z - z_0)$$

on $\lambda(z) \rightarrow 0$ si $z \rightarrow z_0$.

◁

3.1.2. Siguin $f(z)$ i $g(z)$ funcions enteres. Decidiu si les següents funcions són enteres:

a) $f(z)^3$, c) $f(z)/g(z)$, e) $f(1/z)$,

b) $f(z)g(z)$, d) $5f(z) + ig(z)$, f) $f(g(z))$.

◁

3.1.3. Proveu que $g(z) = 3x^2 + 2x - 3y^2 - 1 + i(6xy + 2y)$ és entera. Escriuiu g com a funció de z .³

◁

3.1.4. Existeix alguna funció f holomorfa en el disc unitat $\mathbb{D}$ tal que per a tot $n = 2, 3, \dots$

a) $f\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$? c) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{\ln(n+1)}$?

b) $f\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$? d) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{n}{n+1}$?

◁

3.1.5. Doneu una branca de $\log(z^2 + 2z + 3)$ que sigui holomorfa en (un entorn de) $z = -1$. Calculeu la seva derivada en aquest punt. En quin domini és holomorfa la branca que heu definit?

◁

3.1.6. Sigui f una funció holomorfa en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ que satisfà $|f(z) - i| < 1$ per a tot $z \in \Omega$. Demostreu que la funció g definida per

$$g(z) = \frac{1 - i + f(z)}{1 + i - f(z)}$$

té logaritme holomorf en Ω .

◁

³Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ és holomorfa en un domini Ω tallat per la recta real i u, v són holomorfes en dues variables, llavors es pot provar que $f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$, vegeu l'exercici 4.10.9.

3.1.7. *Sigui $f(z) = z^3 + 1$ i $z_1 = (-1 + \sqrt{3}i)/2$, $z_2 = (-1 - \sqrt{3}i)/2$. Provar que no existeix cap punt w en el segment que uneix z_1 i z_2 de manera que $f(z_2) - f(z_1) = f'(w)(z_2 - z_1)$. Que es pot dir del teorema del valor mitjà per funcions complexes?* $\triangleleft$

3.2. Les equacions de Cauchy-Riemann

Les equacions de Cauchy-Riemann ens donen una relació entre la $\mathbb{C}$ -derivabilitat i la $\mathbb{R}$ -diferenciabilitat de f (pensada com una funció de dues variables). Una funció $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la podem pensar com una funció

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)). \end{aligned}$$

Recordem que $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ és $\mathbb{R}$ -diferenciable en (x_0, y_0) , si i només si, existeix una aplicació lineal

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de manera que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\left\| f(x, y) - f(x_0, y_0) - L \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0. \quad (3.1)$$

A més, aquesta aplicació és única. Notem que aquí estem identificant el nombre complex z amb el vector $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$, és a dir amb la matriu columna $\begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z \end{pmatrix}$.

En cas que f sigui diferenciable, es compleix que

$$Df_{(x_0, y_0)} = L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

on u_x, u_y, v_x, v_y denoten les derivades parcials de u i de v respectivament.

Vegem com actua L en un nombre complex:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Així, amb la identificació $z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, trobem

$$Lz = x(a + ic) + y(b + id).$$

Escrivint $\alpha = a + ic$ i $\beta = b + id$, trobem

$$Lz = \alpha x + \beta y = \alpha \frac{z + \bar{z}}{2} + \beta \frac{z - \bar{z}}{2i} = \lambda z + \mu \bar{z}, \quad (3.2)$$

on $\lambda = \frac{\alpha - i\beta}{2}$ i $\mu = \frac{\alpha + i\beta}{2}$. Per tant, tota aplicació $\mathbb{R}$ -lineal L es pot expressar com a suma d'una aplicació $\mathbb{C}$ -lineal en z i una $\mathbb{C}$ -lineal en $\bar{z}$.

Tornant a la diferencial $Df_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$, trobem $\alpha = u_x + iv_x = f_x$ i $\beta = u_y + iv_y = f_y$ i en tal cas ens queda

$$\lambda = \frac{f_x - if_y}{2} =: \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \mu = \frac{f_x + if_y}{2} =: \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \quad (3.3)$$

Definició 3.12 (Derivades de Wirtinger). Posem $z = x + iy$, les *derivades de Wirtinger* (o *operadors de Wirtinger*) són els operadors diferencials:

$$1. \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right);$$

$$2. \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

A vegades, per abreviar escrivim $\partial f := \partial_z f := \frac{\partial f}{\partial z}$ i $\bar{\partial} f := \partial_{\bar{z}} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. •

Per tot el que hem vist en aquesta secció, tenim que

$$Df_{z_0}(z) = \partial f(z_0)z + \bar{\partial} f(z_0)\bar{z}.$$

Resumint, seguint la discussió anterior, podem concloure (vegeu l'exercici 3.2.13) que si f és diferenciable en z_0 aleshores la diferencial és $\mathbb{C}$ -lineal si i només si $\bar{\partial} f(z_0) = 0$, si i només si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 , ja que al límit (3.1) podem usar la descomposició (3.2) posant $\mu = 0$ i $\lambda = f'(z_0)$.

Notem també que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} (u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)) = \frac{1}{2} ((u_x - v_y) + i(v_x + u_y)),$$

i se n'extreu que

$$\bar{\partial} f = 0 \iff \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x, \end{cases} \quad \text{i}$$

és a dir, les funcions holomorfes compleixen les equacions de Cauchy-Riemann que enunciem a continuació.

Teorema 3.13 (Equacions de Cauchy-Riemann). *Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, i $z_0 = x_0 + iy_0$, amb*

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Són equivalents:

(a) f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 amb $f'(z_0) = a + ic$;

(b) f pensada com a funció de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}$ -diferenciable en (x_0, y_0) amb

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

És a dir, f compleix les equacions de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

que es poden escriure també com

$$\bar{\partial}f(z_0) = 0.$$

En tal cas, notem que (a) implica que $f' = u_x + iv_x = f_x \stackrel{CR}{=} \partial f$.

Observem que per ser holomorfa en un obert, a part de complir les equacions de Cauchy-Riemann, la funció ha de ser $\mathbb{R}$ -diferenciable en tot l'obert.

Proposició 3.14 (Unicitat de la primitiva mòdul constant). *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert **connex**. Si $f \in H(\Omega)$ amb $f'(z) = 0$ per a tot $z \in \Omega$, llavors f és constant.*

Observem que el resultat no té per què ser cert si Ω no és connex, encara que sí que la funció seria constant en cada component connexa.

Demostració. Només cal observar que la hipòtesi $f' \equiv 0$ implica que la diferencial de f en cada punt d' Ω és zero i, per tant, el resultat és conseqüència del corresponent resultat per a funcions diferenciables. $\square$

Exemple 3.15 (Aplicació de les equacions de Cauchy-Riemann).

1. Considerem $f(z) = \bar{z}$ que és diferenciable a tot $\mathbb{R}^2$ amb la identificació habitual de $\mathbb{C}$ amb $\mathbb{R}^2$. Si posem $f(x + iy) = x - iy$, llavors $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ i, per tant, $u_x = 1 \neq -1 = v_y$ i f no compleix les equacions de Cauchy-Riemann en cap punt.
2. Si $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, llavors f és diferenciable a $\mathbb{R}^2$. Es compleix que $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$ i, per tant, $u_x = 2x$, $u_y = 2y$ i $v_x = v_y = 0$. Per tant, les equacions de Cauchy-Riemann només es compleixen per $x = y = 0$ i f és només $\mathbb{C}$ -derivable a l'origen. (Aquesta situació no la tractarem en aquests apunts, ja que si f és només $\mathbb{C}$ -derivable en un punt, no es compleixen les propietats fonamentals de la teoria de Cauchy).
3. Ara comprovarem que la funció

$$x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

defineix una funció entera.

En efecte, la funció és clarament $\mathbb{R}$ -diferenciable. Notem que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, i $v(x, y) = 3x^2y - y^3$. Aleshores només ens cal comprovar que es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y \\ u_y = -6xy = -v_x, \end{cases}$$

i, per tant, f defineix una funció entera (és a dir, holomorfa a tot $\mathbb{C}$). $\diamond$

Observació 3.16 (Efecte de la derivada). Suposem f $\mathbb{C}$ -derivable a z_0 amb $f'(z_0) \neq 0$. Observem que

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \langle (u_x, u_y), (v_x, v_y) \rangle = 0.$$

Per tant, com que ∇u i ∇v són diferents de zero (es pot veure usant les equacions de Cauchy-Riemann), concloem que les corbes de nivell de u i v són ortogonals, vegeu la figura 3.1.

De fet, podem extreure encara més informació de l'existència del límit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

que es pot escriure com

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

Concretament, per a z a prop de z_0 l'aplicació $w - w_0$ amb $w = f(z)$ i $w_0 = f(z_0)$ es comporta com l'aplicació lineal

$$w - w_0 \approx f'(z_0)(z - z_0).$$

Podem dir doncs que l'aplicació $f(z)$, en un entorn *infinitesimal* de z_0 *dilata* les distàncies en un factor de $|f'(z_0)|$:

$$|w - w_0| \approx |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|,$$

i que *gira* els vectors que surten de z_0 en un angle $\arg f'(z_0)$:

$$\arg(w - w_0) \approx \arg(z - z_0) + \arg f'(z_0),$$

vegeu la figura 3.1.

Una funció és conforme si l'angle entre dues corbes γ_1, γ_2 que coincideixen en un punt es preserva (orientació inclosa). Diem, doncs, que una funció holomorfa és *localment conforme* allà on $f'(z) \neq 0$: si suposem $\gamma_j(0) = z_0$ i $\gamma'_j(0) \neq 0$ per $j \in \{1, 2\}$, aleshores podem justificar (exercici) que $(f \circ \gamma_j)'(0) = f'(z_0)\gamma'_j(0)$ i tenim que

$$\arg((f \circ \gamma_1)'(0)) - \arg((f \circ \gamma_2)'(0)) = \arg \frac{f'(z_0)\gamma'_1(0)}{f'(z_0)\gamma'_2(0)} = \arg \gamma'_1(0) - \arg \gamma'_2(0).$$

D'altra banda, usant la representació de matrius que preserven angles (és a dir les isometries de determinant 1, anomenades $SO(2, \mathbb{R})$, i els seus múltiples) donada a (3.2), podem veure que la preservació dels angles de funcions amb diferencial no nul·la en un punt donat implica la $\mathbb{C}$ -derivabilitat en aquest punt, deixem els detalls pel lector. $\bullet$

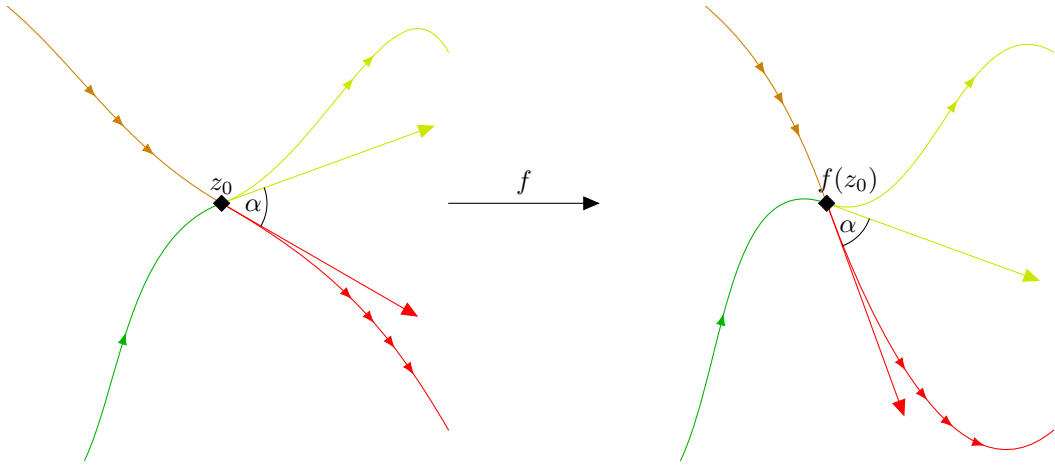


Figura 3.1.: Efecte d'una funció holomorfa en dues corbes.

Observació 3.17 (Jacobià i canvi de variables). Observem que com que $f' = f_x = u_x + iv_x$, tenim que

$$|f'|^2 = (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_x)^2 + (v_x)^2 = u_x v_y - u_y v_x,$$

que coincideix amb el jacobià de l'aplicació $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Efectivament,

$$J(u, v) = \det(D(u, v)) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x.$$

Per tant, per la regla del canvi de variable, si g és contínua i f és un difeomorfisme entre un obert U i $f(U)$, tenim que

$$\int_U g \circ f(z) |f'(z)|^2 dm(z) = \int_U g \circ f(z) |Jf(z)| dm(z) = \int_{f(U)} g dm(w),$$

on dm indica la integral de superfície, sovint denotada $dx dy$ (la identitat funciona amb la integral en el sentit de Lebesgue si g és mesurable, per exemple) i si prenem $g(w) = 1$, trobem

$$\int_U |f'(z)|^2 dm(z) = \int_{f(U)} dm(w) = m(f(U)),$$

és a dir, que podem calcular la mesura de Lebesgue del conjunt imatge integrant el quadrat del mòdul de la derivada. •

Exercicis

3.2.1. Representem la identitat al pla complex amb la coloració habitual i amb la graella entera. Per exemple, la identitat sobre el quadrat $2\mathcal{Q} = \{x + iy : x, y \in (-2, 2)\}$ és la primera imatge de la figura 3.2. Una de les següents funcions, les diferencials de les quals no s'anul·len en $2\mathcal{Q}$, representa una funció holomorfa en $2\mathcal{Q}$. Quina és?

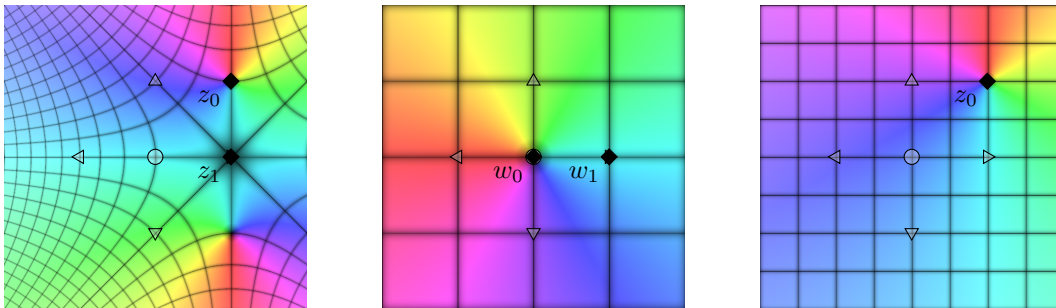
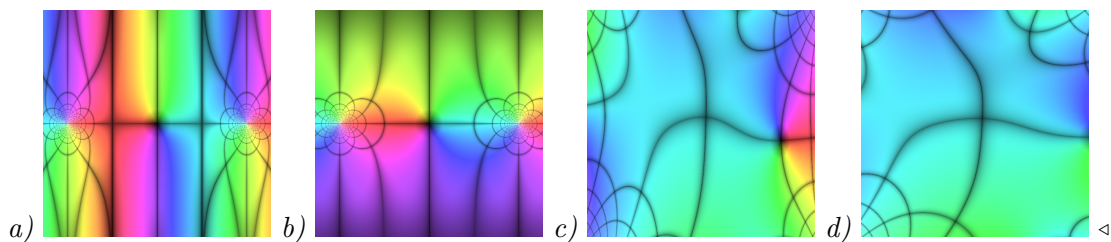


Figura 3.2.: En la imatge central, trobem la graella en el pla complex en $2Q$. La primera representa $f(z) = z^2 - 2z + 2$ en el mateix domini amb un gràfic de colors en coordenades cartesianes (vegeu la secció 2.1). Recordem que es representa la preimatge de la graella per la funció f . Prenem $z_0 = 1 + i$, $w_0 = f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) = 2i$. La tercera imatge és l'aproximació lineal $w_0 + f'(z_0)(z - z_0)$, que envia z_0 a w_0 i produeix, infinitesimalment, una rotació de $\frac{\pi}{2}$ i una dilatació de raó 2 entorn de z_0 . En general, veiem que els angles de la graella es preserven llevat del punt $z_1 = 1 + 0i$, on s'anul·la la derivada, i l'aproximació (en aquest cas igualtat) és de grau 2: $w = f(z_1) + \frac{f''(z_1)}{2}(z - z_1)^2$.



3.2.2. Trobeu els valors de les constants a, b, c de manera que f sigui holomorfa i expresseu-la en termes de z .

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + i \sin x(\cosh y + b \sinh y)$.

3.2.3. Sigui $f = u + iv$ holomorfa i dues vegades diferenciable en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Proveu que les funcions u i v són harmòniques. (Una funció $f(x, y)$ és harmònica si les seves segones derivades parcials són contínues i el seu laplacà $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 0$, vegeu la secció 5.5.)

3.2.4. Considerem $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$

a) Proveu que u és harmònica.

b) Trobeu una v de manera que $f = u + iv$ sigui holomorfa (s'anomena harmònica conjugada de u).

c) Trobeu una expressió compacta de $f(z)$. ◁

3.2.5. Trobeu els polinomis harmònics de la forma $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. Trobeu la funció harmònica conjugada i la funció holomorfa corresponent. ◁

3.2.6. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (és a dir, un obert connex) i f una funció holomorfa en Ω .

1. Proveu que si f només pren valors imaginaris purs, aleshores f és constant.
2. Proveu que si $|f|$ és constant, aleshores f també és constant. Equivalentment si f només pren valors en una circumferència, llavors f és constant. ◁

3.2.7. Doneu una descripció de les funcions enteres de la forma $f(x+iy) = u(x) + iv(x, y)$. ◁

3.2.8. (a) Determineu els nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ pels quals

$$v_\lambda(x, y) = 2 \sin x \sinh y + x^3 - \lambda xy^2 + y$$

és la part imaginària d'una funció entera f_λ i calculeu f_λ .

(b) Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre determinat en a). És

$$g_\lambda = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - i \frac{\partial v_\lambda}{\partial y}$$

una funció entera? Quina relació hi ha entre g_λ i f_λ ? ◁

3.2.9. Decidiu on són holomorfes les funcions següents

$$\text{a) } \frac{1}{z-2+3i}, \quad \text{b) } \frac{iz^3+2z}{z^2+1}, \quad \text{c) } \frac{3z-1}{z^2+z+4}, \quad \text{d) } \frac{z^2}{(2z^2-3z+1)^2}. \quad \triangleleft$$

3.2.10. Sigui

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Demostreu que

a) $f(z)$ satisfà les equacions de Cauchy-Riemann a tot punt $z \in \mathbb{C}$.

b) f no és contínua al 0 i, per tant, f no és holomorfa a un entorn del 0. ◁

3.2.11. Si u i v s'expressen respecte a les coordenades polars (r, θ) , proveu que les equacions de Cauchy-Riemann es poden expressar de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Indicació: estudeu el límit incremental seguint $\arg z = \theta_0$ i $|z| = r_0$. ◁

3.2.12. Quina part del pla es contreu i quina part es dilata si la transformació es realitza mitjançant la funció:

- a) $w = z^2$; c) $w = \frac{1}{z}$; d) $w = e^z$;
 b) $w = z^2 + 2z$; e) $w = \log(z - 1)$. ◁

3.2.13. *Demostreu que, si f és diferenciable en z_0 , aleshores la diferencial és $\mathbb{C}$ -lineal si i només si $\bar{\partial}f(z_0) = 0$, si i només si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 .* ◁

3.3. Càlcul de les derivades de Wirtinger

Ja hem vist la definició de funció holomorfa, i hem vist com aquesta condició és equivalent a ser una funció diferenciable que satisfà les equacions de Cauchy-Riemann. Tornem ara a visitar els operadors de Wirtinger per mirar d'arribar a unes regles de càlcul senzilles.

Exemple 3.18 (Derivades elementals). Les derivades de $f(z) = z$ són

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(1 - i \cdot i) = 1 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(1 + i \cdot i) = 0.$$

Les derivades de $g(z) = \bar{z}$ són

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 1. \quad \diamond$$

Observació 3.19 (Derivades del producte). Es pot comprovar que tot parell de funcions diferenciables satisfà

1. $\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g + f \cdot \partial g$;
2. $\bar{\partial}(f \cdot g) = \bar{\partial}f \cdot g + f \cdot \bar{\partial}g$. •

Exemple 3.20 (Derivades de monomis). Per inducció, les derivades de $f(z) = z^n$ són

$$\partial f = n z^{n-1}, \quad \text{i} \quad \bar{\partial} f = 0.$$

Igualment, les derivades de $g(z) = (\bar{z})^m$ són

$$\partial g = 0 \quad \text{i} \quad \bar{\partial} g = m(\bar{z})^{m-1}.$$

Combinant, per $h(z) = z^n(\bar{z})^m$ trobem

$$\partial h = n z^{n-1}(\bar{z})^m \quad \text{i} \quad \bar{\partial} h = m z^n(\bar{z})^{m-1}. \quad \triangleleft$$

Lema 3.21 (Unicitat dels coeficients). *Siguin $P(z) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}: n+m \leq N} a_{n,m} z^n(\bar{z})^m$ i $Q(z) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}: n+m \leq N} b_{n,m} z^n(\bar{z})^m$ dos polinomis en variables z i $\bar{z}$. Aleshores $P = Q$ si i només si $a_{n,m} = b_{n,m}$ per a tot n i m .*

Demostració. Suposem que $P \equiv Q$. Per l'exemple anterior, tenim que

$$n!m!a_{n,m} = \partial^n \bar{\partial}^m P(0) = \partial^n \bar{\partial}^m Q(0) = n!m!b_{n,m}.$$

La implicació contrària és trivial. $\square$

Recordem com s'escriu la diferencial del producte i la regla de la cadena amb els operadors de Wirtinger.

Lema 3.22. *Sigui $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriu de coeficients reals, i f_A l'aplicació lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ associada definida per $f_A(z) = f_A(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ per $z = x + iy$. Si escrivim les columnes d' A usant notació complexa, és a dir $\alpha = a + ic$ i $\beta = b + id$, aleshores trobem que per tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escrivint $z = x + iy \in \mathbb{C}$, tenim que*

$$f_A(x, y) = \frac{1}{2} [(\alpha - i\beta)z + (\alpha + i\beta)\bar{z}].$$

A més, aquesta és l'única manera d'escriure $f_A(z) = w_1 z + w_2 \bar{z}$ amb $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$.

Demostració. A (3.3) hem vist que efectivament $f_A(x, y) = \frac{1}{2} [(\alpha - i\beta)z + (\alpha + i\beta)\bar{z}]$. La unicitat es deriva del lema anterior. $\square$

Observació 3.23 (Diferencial en notació complexa). Pel lema 3.22, donada una aplicació $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable, aleshores en tot punt z_0 del domini i per tot vector $z \in \mathbb{C}$ tenim que

$$Df_{z_0}(z) = \partial f(z_0) \cdot z + \bar{\partial} f(z_0) \cdot \bar{z}. \quad \bullet$$

Lema 3.24 (Regla de la cadena). *Si f i g són diferenciables en un obert, aleshores*

1. $\partial(f \circ g) = (\partial f) \circ g \cdot \partial g + (\bar{\partial} f) \circ g \cdot \bar{\partial} g;$
2. $\bar{\partial}(f \circ g) = (\partial f) \circ g \cdot \bar{\partial} g + (\bar{\partial} f) \circ g \cdot \partial g.$

Sovint escrivim abreujadament

1. $\partial(f \circ g) = \partial f \partial g + \bar{\partial} f \bar{\partial} g,$ i
2. $\bar{\partial}(f \circ g) = \partial f \bar{\partial} g + \bar{\partial} f \partial g,$

entenent que si avaluem $\partial(f \circ g)$ en un punt z del seu domini, aleshores ∂f i $\bar{\partial} f$ s'avaluen en $g(z)$.

Demostració del lema 3.24. Per la regla de la cadena, tenim que

$$D(f \circ g)_{z_0}(z) = Df_{g(z_0)} \circ Dg_{z_0}(z) = Df_{g(z_0)}(Dg_{z_0}(z)).$$

Usant el lema 3.22 i l'observació 3.23, trobem que per tot z tenim que

$$\begin{aligned} \partial(f \circ g)(z_0) \cdot z + \bar{\partial}(f \circ g)(z_0) \cdot \bar{z} \\ = \partial f(g(z_0)) \cdot (\partial g(z_0) \cdot z + \bar{\partial} g(z_0) \cdot \bar{z}) + \bar{\partial} f(g(z_0)) \cdot \overline{(\partial g(z_0) \cdot z + \bar{\partial} g(z_0) \cdot \bar{z})}. \end{aligned}$$

Per la unicitat del lema 3.22, trobem les igualtats dels coeficients que acompanyen z i dels que acompanyen $\bar{z}$, és a dir 1 i 2. $\square$

Observació 3.25 (Regla de les tres barres). En particular, prenent $f(z) = \bar{z}$ i combinant el lema anterior amb l'exemple 3.18, trobem que

1. $\partial \bar{g} = \overline{\bar{\partial} g}$; •
2. $\bar{\partial} \bar{g} = \overline{\partial g}$;

Lema 3.26 (Regla de la cadena a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$). *Siguin $g = (g_1, g_2) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ i $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funcions diferenciables. Si escrivim*

$$\begin{aligned} \partial_z f &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} - i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right], & \partial_{\bar{z}} f &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f}{\partial x_2} \right], \\ \partial_w f &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_3} - i \frac{\partial f}{\partial x_4} \right] & i \quad \partial_{\bar{w}} f &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_3} + i \frac{\partial f}{\partial x_4} \right], \end{aligned}$$

on identifiquem $(z, w) = (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4) \sim (x_1, x_2, x_3, x_4)$, aleshores

1. $\partial(f \circ g) = \partial_z f \partial g_1 + \partial_w f \partial g_2 + \partial_{\bar{z}} f \overline{\partial g_1} + \partial_{\bar{w}} f \overline{\partial g_2}$;
2. $\bar{\partial}(f \circ g) = \partial_z f \bar{\partial} g_1 + \partial_w f \bar{\partial} g_2 + \partial_{\bar{z}} f \overline{\partial g_1} + \partial_{\bar{w}} f \overline{\partial g_2}$.

Demostració. La demostració és anàloga a la del lema 3.24, tenint en compte que com a aplicacions a l'espai euclidià, la matriu que correspon a $Df \circ Dg$ es pot descompondre com

$$\left(\frac{\partial(u_f, v_f)}{\partial(x_1, x_2)} \right) \cdot \left(\frac{\partial(u_{g_1}, v_{g_1})}{\partial(x_1, x_2)} \right) + \left(\frac{\partial(u_f, v_f)}{\partial(x_3, x_4)} \right) \cdot \left(\frac{\partial(u_{g_2}, v_{g_2})}{\partial(x_1, x_2)} \right),$$

on $f = u_f + iv_f$, $g_j = u_{g_j} + iv_{g_j}$. A cada sumand apliquem el mateix raonament que en el lema anterior. $\square$

Proposició 3.27 (Càlcul de les derivades). *Si $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es pot expressar com $F(z) = f(z, \bar{z})$ on f és una funció diferenciable que és $\mathbb{C}$ -derivable respecte a les dues variables, és a dir*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto f(z, w) \end{aligned}$$

amb $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ i $\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \equiv 0$, aleshores

$$\partial F(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z, \bar{z}) \quad i \quad \bar{\partial} F(z) = \frac{\partial f}{\partial w}(z, \bar{z}),$$

i les derivades $\frac{\partial f}{\partial z}$ i $\frac{\partial f}{\partial w}$ es poden calcular pels mètodes habituals.

Demostració. Prenem $g(z) = (g_1(z), g_2(z)) = (z, \bar{z})$, que satisfà que $\partial g_1 = 1$, $\partial g_2 = 0$, $\bar{\partial} g_1 = 0$, $\bar{\partial} g_2 = 1$, vegeu l'exemple 3.18. A part, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial w}(z, \bar{z}) = 0$. Així, pel lema 3.26, trobem que

$$1. \partial F = \partial_z f \cdot 1 + \partial_w f \cdot 0 + 0 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{1};$$

$$2. \bar{\partial} F = \partial_z f \cdot 0 + \partial_w f \cdot 1 + 0 \cdot \bar{1} + 0 \cdot \bar{0},$$

i la proposició se segueix. $\square$

Exemples 3.28 (Càlcul efectiu de les derivades de Wirtinger). El lema anterior ens diu que si expressem una funció com a producte, composició, etcètera, de funcions holomorfes en z i $\bar{z}$, aleshores només ens cal derivar independentment cada una de les parts tal com faríem amb un polinomi, amb l'altra *variable* actuant com una constant (malgrat no ser-ho!). Així, per exemple,

- Si $f(z) = z^2 + \bar{z}z^3 + z\bar{z}^2$, aleshores $\partial f(z) = 2z + 3\bar{z}z^2 + \bar{z}^2$, i $\bar{\partial} f(z) = z^3 + 2z\bar{z}$.

- Si $f(z) = e^{z+\cos(\bar{z})}$, aleshores $\partial f(z) = e^{z+\cos(\bar{z})}$ i $\bar{\partial} f(z) = e^{z+\cos(\bar{z})} \cdot (-\sin(\bar{z}))$. $\diamond$

Exercicis

3.3.1. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i f una funció holomorfa en Ω . Definim $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Omega\}$ i $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$ donada per $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Proveu que f^* és holomorfa en Ω^* . $\triangleleft$

3.3.2. Trobeu els punts on la funció f té derivada complexa (i calculeu-la si escau) en els següents casos. (Podeu fer servir si cal que $f' = f_x$.)

a) $f(z) = |z|^4$;

e) $f(z) = |z|$;

b) $f(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$;

f) $f(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$;

c) $f(z) = z + \frac{1}{z}$;

g) $f(z) = \cos |z|^2$;

d) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$;

h) $f(z) = z + z\bar{z}$. $\triangleleft$

3.3.3. Donat un polinomi de dues variables reals $P(x, y)$, demostreu que identificant $z = x + iy$ són equivalents:

1. P es pot expressar com un polinomi en z .

2. P és una funció entera.

3. $\bar{\partial} P = 0$ en $\mathbb{C}$. $\triangleleft$

3.4. Funcions analítiques

Definició 3.29 (Funció analítica). Si Ω és un obert, una funció $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és una *funció analítica* en Ω si per a cada punt $a \in \Omega$, existeix un disc $D_r(a) \subset \Omega$, tal que f és la suma d'una sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ en $D_r(a)$. •

A continuació veurem que tota funció analítica és holomorfa.

Teorema 3.30 (Derivació d'una sèrie de potències). *Si $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z-b)^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència $R > 0$. Llavors la sèrie derivada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-b)^{n-1}$$

té el mateix radi de convergència. A més, S és holomorfa en $|z-b| < R$ amb

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-b)^{n-1}, \quad |z-b| < R.$$

Observació 3.31. Iterant el resultat del teorema, obtenim que tota sèrie de potències és infinitament derivable en $|z-b| < R$, i totes les seves derivades són holomorfes en $|z-b| < R$.

Per inducció, iterant la fórmula anterior es verifica que

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n (z-b)^{n-k} \quad z \in D_R(b),$$

i, en particular,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}, \quad k \geq 0.$$

•

Prova del teorema 3.30. Prenent $h(z) = S(z+b)$, podem suposar que $b = 0$, i ens queda la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

El radi de convergència de $\sum_n n a_n z^{n-1}$ és el mateix que el de $\sum n a_n z^n$ (ja que el producte per un número no canvia el radi de convergència, vegeu l'exercici 2.5.3) que, com que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, és

$$\frac{1}{R'} := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{n} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Dit d'una altra manera, les dues sèries tenen el mateix radi de convergència.

Posem

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad |z| < R.$$

Fixem z_0 amb $|z_0| < R$, i volem provar que S és holomorfa en z_0 amb $S'(z_0) = g(z_0)$. Cal provar doncs que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| = 0.$$

Notem que les sèries convergeixen uniformement en $z, z_0 \in D_\rho(0)$ per $\rho < R$, però en dividir per $z - z_0$ podríem perdre la convergència uniforme i, per tant, no podem permutar límit i suma a la lleugera.

Si $z \in D_R(0) \setminus \{z_0\}$, llavors,

$$\frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_n,$$

on $A_1 = 0$ i per a $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{m=0}^{n-1} z_0^{n-1-m} z^m - n z_0^{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} (z_0^{n-1-m} z^m - z_0^{n-1}) = \sum_{m=0}^{n-1} z_0^{n-1-m} (z^m - z_0^m) \\ &= (z - z_0) \sum_{m=1}^{n-1} z_0^{n-1-m} \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{m-1-k} z^k = (z - z_0) \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{n-2-k} z^k. \end{aligned}$$

Per tant, si triem $|z_0| \leq \rho < R$, per a $|z| \leq \rho$ i $n \geq 2$, es compleix que

$$\begin{aligned} |A_n| &\leq |z - z_0| \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} |z_0|^{n-2-k} |z|^k \leq |z - z_0| \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \rho^{n-2} \\ &= |z - z_0| \left(\sum_{m=1}^{n-1} m \right) \rho^{n-2} = |z - z_0| \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2} \leq |z - z_0| n^2 \rho^{n-2}. \end{aligned}$$

Tot plegat ens dona que si $|z| \leq \rho$,

$$\left| \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| \leq |z - z_0| \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \rho^{n-2}.$$

Però les sèries de potències $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| z^{n-2}$ i $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| z^n$ tenen el mateix radi de convergència, i el radi d'aquesta darrera sèrie és

$$\frac{1}{\limsup_n (n^2 |a_n|)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup_n (|a_n|)^{\frac{1}{n}}} = R > \rho.$$

Així doncs, $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \rho^{n-2} = C < \infty$ i, per tant,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| \leq \lim_{z \rightarrow z_0} C |z - z_0| = 0,$$

com volíem demostrar. □

A partir del teorema acabat de provar, sabem que tota sèrie de potències és holomorfa en el seu disc de convergència i que es deriva fent-ho terme a terme. Amb això, podem calcular el valor de la suma de diverses sèries. Per exemple, sabem que

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

Derivant, obtenim

$$-\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1}, \quad |z| < 1.$$

Per tant,

$$-\frac{z}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^n, \quad |z| < 1.$$

Observem que la classe de funcions analítiques en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ és trivialment tancada per la suma. És compleix que també és tancada respecte al producte, com a conseqüència del teorema de Mertens:

Teorema 3.32 (Producte de Cauchy). *Siguin f i g les sumes de les sèries de potències $\sum_{n \geq 0} a_n(z-a)^n$ i $\sum_{n \geq 0} b_n(z-a)^n$ en $D_r(a)$, respectivament, amb r menor que ambdós radis de convergència.*

Llavors la sèrie producte de Cauchy d'aquestes dues,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z-a)^n$$

convergeix absolutament en $D_r(a)$ i la seva suma és $f \cdot g$ en $D_r(a)$.

En particular, el producte de dues funcions analítiques en un obert de $\mathbb{C}$ és analític en aquest obert.

Exercicis

3.4.1. Discutir l'analiticitat de

a) $8\bar{z} + i$,

e) $x^2 + y^2 + y - 2 + ix$,

b) $\frac{z}{\bar{z} + 2}$,

f) $\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$,

c) $\frac{z^3 + 2z + i}{z - 1}$ (vegeu la figura 3.7),

g) $|z|^2 + 2z$,

d) $x^2 - y^2 + 2xyi$,

h) $\frac{|z|^2 + z}{2}$.

◁

3.4.2. Trobeu la suma de les sèries

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^n}{n!}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \text{ si } |z| < 1. \quad \triangleleft$$

3.4.3. Sigui $f(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ per $|z| < R$ on R és el radi de convergència de la sèrie. Demostreu que si $f(z_k) = 0$ per una successió $(z_k)_k$ tal que $z_k \neq 0$ i $z_k \rightarrow 0$ quan $k \rightarrow \infty$, aleshores $f(z) \equiv 0$ (i.e. $c_n = 0$ per a tot $n \geq 0$). Indicació: Calculeu $f(0)$ i considereu la sèrie $f(z)/z$. $\triangleleft$

3.4.4. Demostreu que si dues sèries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ i $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ són convergents i tenen la mateixa suma per a una successió $(z_k)_k$ tal que $z_k \neq 0$ i $z_k \rightarrow 0$ quan $k \rightarrow \infty$ aleshores $a_n = b_n$ per a tot $n \geq 0$. $\triangleleft$

3.4.5. Calculeu la suma de les sèries de potències de l'exercici 2.7.1. $\triangleleft$

3.4.6. Considereu la sèrie

$$S(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n-1}}{2n}.$$

a) Estudieu-ne la convergència puntual i uniforme sobre compactes.

b) Calculeu quant val la suma per tot z del disc de convergència.

c) Doneu el valor de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n9^n}. \quad \triangleleft$$

3.4.7. Considereu la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 1} n(n+1)z^n.$$

a) Estudieu la seva convergència.

b) Calculeu la seva suma.

c) Quant val $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}$? $\triangleleft$

3.4.8. Considereu la sèrie de potències

$$S(z) = 2\pi i + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (2z+1)^n}{n}.$$

(a) Calculeu la seva suma i el seu domini de convergència, especificant amb precisió totes les funcions involucrades. Indicació: Per especificar un logaritme, cal donar un domini de definició i la imatge d'un punt.

(b) Calcula la solució (si existeix) de l'equació $S(z) = e$. $\triangleleft$