

3.5. Algunes funcions holomorfes importants

L'exponencial complexa: ja havíem vist que ve definida per

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

La sèrie té radi de convergència $R = +\infty$ i, per tant, e^z defineix una funció entera amb

$$(e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

La identitat

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w; \quad z, w \in \mathbb{C}$$

també es pot veure de la següent manera:

Per $a \in \mathbb{C}$, considerem la funció $f_a(z) = e^z e^{a-z}$. Com que és producte de funcions enteres, la funció f_a és entera amb

$$f'_a(z) = e^z e^{a-z} + e^z (-e^{a-z}) = 0.$$

Per tant f_a és constant en $\mathbb{C}$, és a dir, que $f_a(z) = f_a(a) = e^a$, així que

$$e^z e^{a-z} = e^a.$$

Posant $a = z + w$ obtenim el resultat.

De la identitat anterior, tenim que $e^z e^{-z} = 1$, i deduïm que $e^z \neq 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$, i també

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

Recordem també que

$$(i) \quad \overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \text{ per a tot } z \in \mathbb{C}.$$

$$(ii) \quad |e^{it}| = 1 \text{ per a tot } t \in \mathbb{R}.$$

Definició 3.33 (Funcions trigonomètriques). Per $z \in \mathbb{C}$, definim

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

vegeu la figura 3.3. Fent servir el desenvolupament en sèrie de potències de e^z , tenim que

$$\sin z = \sum_{n \geq 0} \frac{(i^n - (-i)^n)}{2i} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

També

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Per tant, $\sin z$ i $\cos z$ estenen les corresponents funcions $\sin x$ i $\cos x$ de $\mathbb{R}$ a tot el pla complex. •

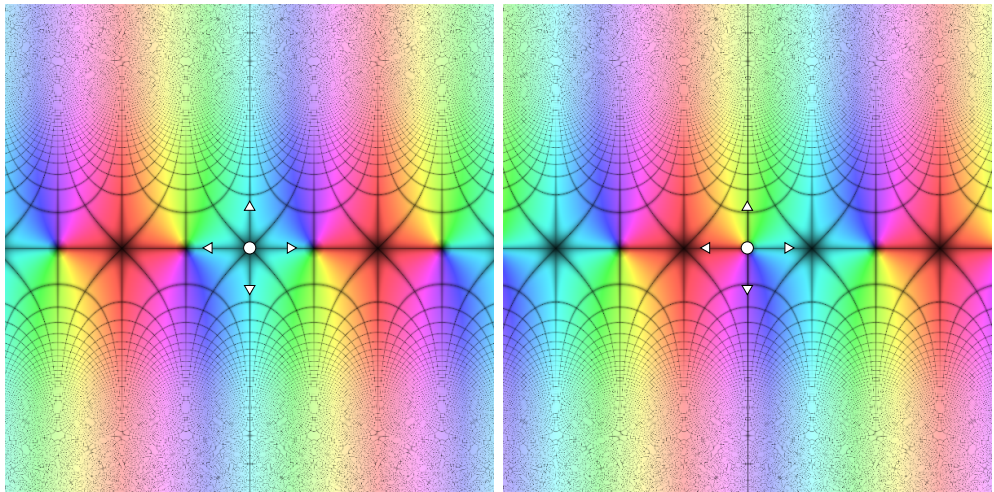


Figura 3.3.: A l'esquerra, la funció cosinus, a la dreta el sinus en $6Q$.

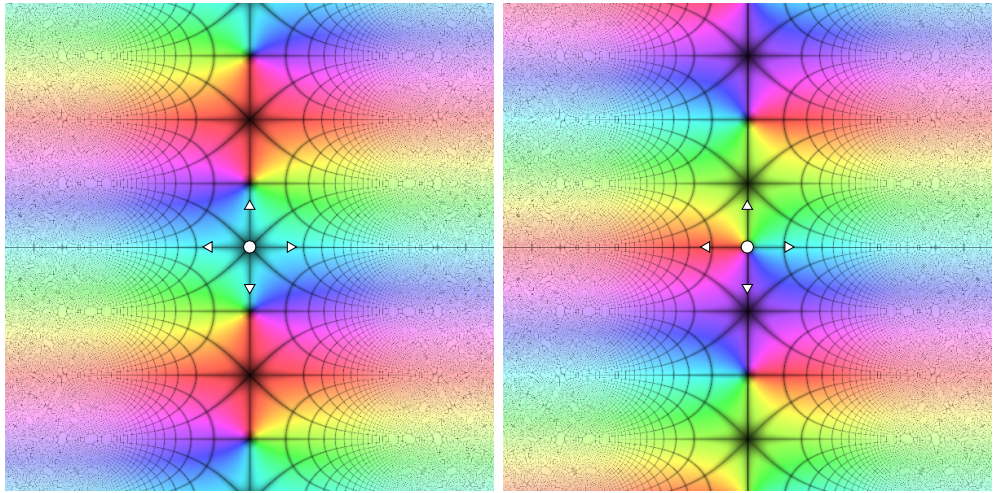


Figura 3.4.: Cosinus hiperbòlic i sinus hiperbòlic en $6Q$.

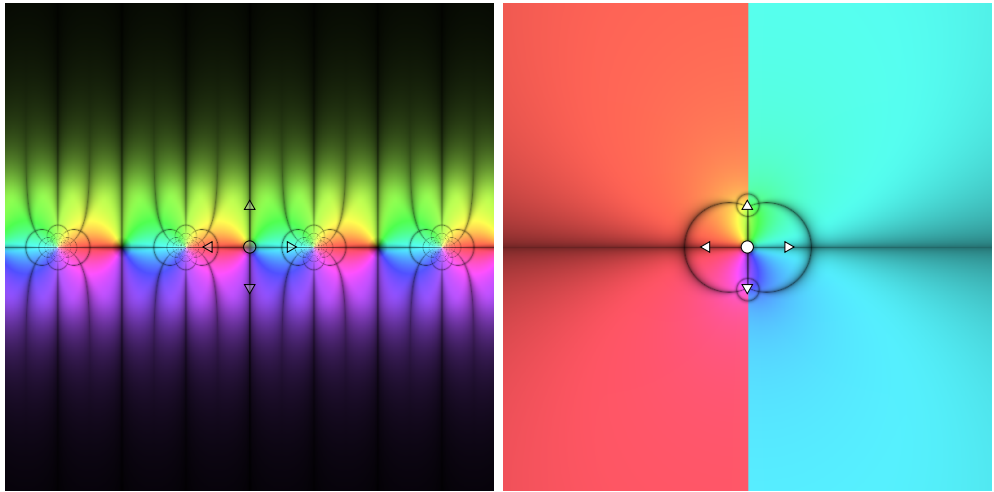


Figura 3.5.: Tangent i branca principal de l'arctangent en $6Q$, vegeu l'exercici 3.5.5.

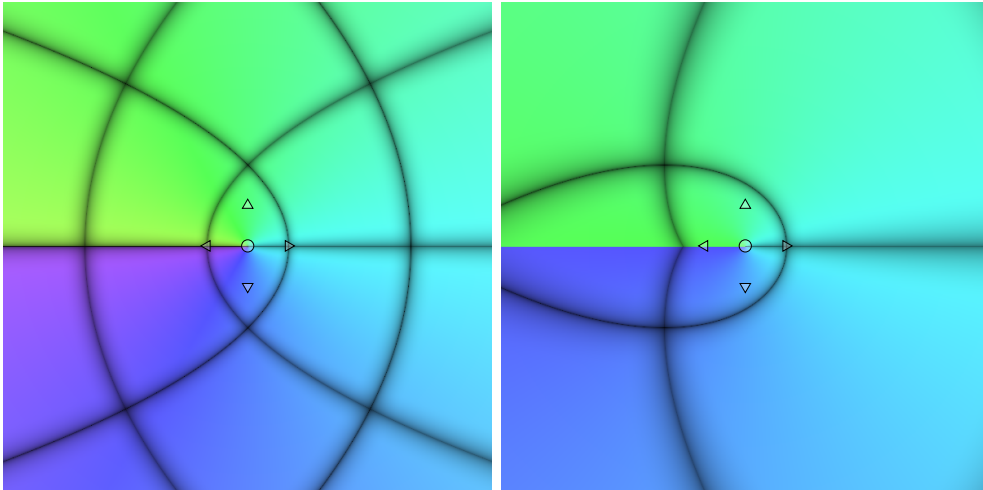


Figura 3.6.: Arrel quadrada principal i arrel cúbica principal en $6\mathcal{Q}$.

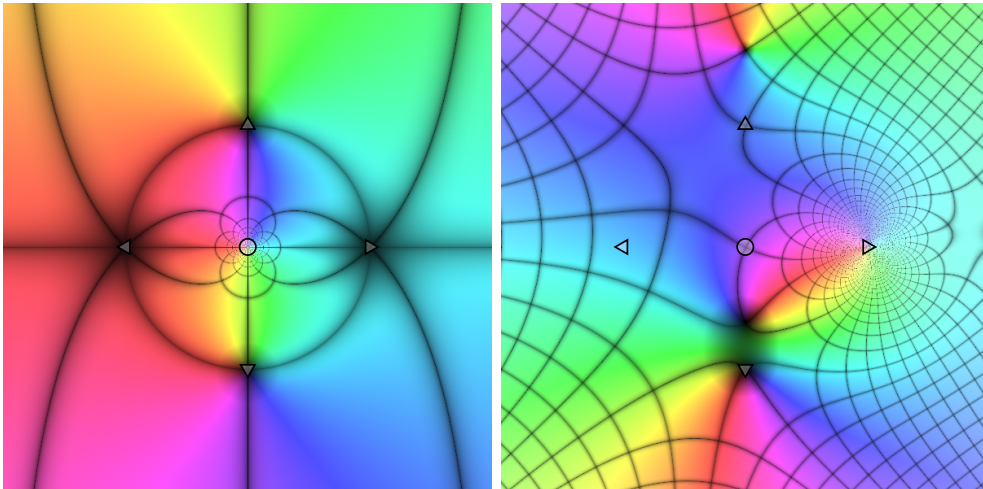


Figura 3.7.: $\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ i $\frac{z^3 + 2z + i}{z - 1}$ en $2\mathcal{Q}$, presenten singularitats, vegeu l'exercici 2.1.7.

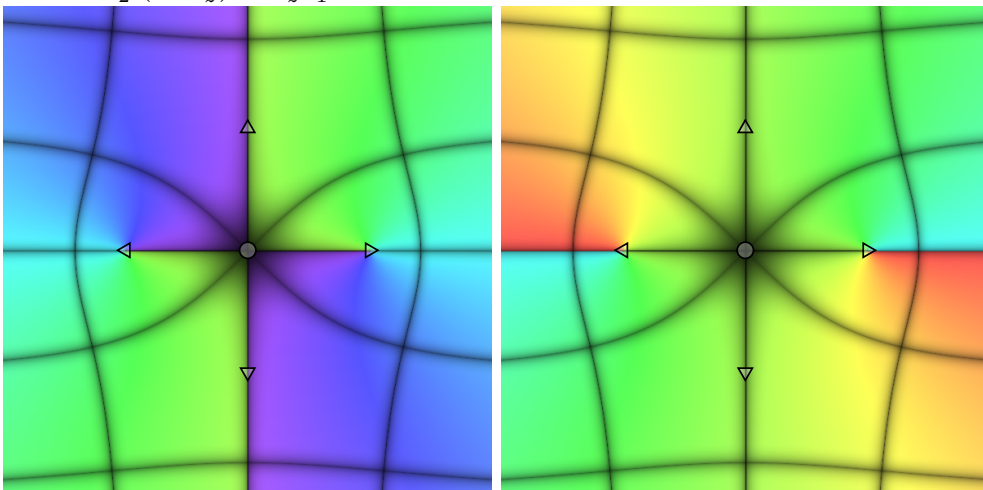


Figura 3.8.: Determinació principal de $\sqrt{z^2 - 1}$ i de $i\sqrt{1 - z^2}$ en $2\mathcal{Q}$, vegeu l'exercici 2.4.3.

Advertència 3.34. Ara $\sin z$ i $\cos z$ no són fitades! Per exemple

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^t}{2i} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\sin(it)| = +\infty.$$

•

Exercicis

3.5.1. *Demostreu que:*

(i) $\sin z$ i $\cos z$ són funcions enteres amb

$$(\sin z)' = \cos z; \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

(ii) $\cos(-z) = \cos z$, i també $\sin(-z) = -\sin z$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(iv) Per a tot $z, w \in \mathbb{C}$, $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$. ◁

3.5.2. *Resoleu les següents equacions:*

a) $\sin z = 4$

b) $\cos z = i$. ◁

3.5.3. a) *Proveu que $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$ i que $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$.*

b) *Trobeu tots els zeros de les funcions sinus i cosinus.*

c) *Deduïu de (b) que, per a $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, es verifica:*

i) $\cos z_1 = \cos z_2$ si, i només si, $z_2 \pm z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

ii) $\sin z_1 = \sin z_2$ si, i només si, $z_2 - z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$ o bé $z_2 + z_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

d) *Proveu que per a tot $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se satisfà:*

i) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ (vegeu l'exercici 1.3.2).

ii) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

iii) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

iv) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

e) *Sobre quines rectes està fitada la funció sinus? I la funció cosinus?* ◁

3.5.4. (a) Proveu que per a cada $w \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, l'equació $\tan z = w$ té infinites solucions, que són la funció multivaluada

$$\arctan w := \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i-w}{i+w} \right).$$

Vegeu també que per a $w = \pm i$ l'equació no té cap solució.

(b) Vegeu que dues determinacions contínues de $\arctan w$ en un conjunt connex $E \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ difereixen de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Vegeu que no hi ha cap determinació contínua de $\arctan w$ als anells $\{r < |w-i| < R\}$, $\{r < |w+i| < R\}$, $0 < r < R < 2$, però que sí que n'hi ha si $2 < r < R < +\infty$. $\triangleleft$

3.5.5. Demostreu que el domini de continuïtat de la branca principal de l'arctangent

$$\operatorname{Arctan} w := \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{i-w}{i+w} \right)$$

és $\mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)\}$. $\triangleleft$

3.5.6. a) Sigui $\mathcal{L}$ la determinació del logaritme en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ que compleix que $\mathcal{L}(1) = 4\pi i$. Definim $f(z) := -\mathcal{L}(2-2z)$. Demostreu que f és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Calculeu $f(0)$ i $f(-i)$.

b) Considereu la sèrie de potències

$$S(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(2z-1)^n}{n}.$$

Demostreu que $S(z) = -\operatorname{Log}(2-2z)$, per tot $z \in D := D_{1/2}(1/2)$, on Log és la determinació principal del logaritme.

c) Quina relació hi ha entre $S(z)$ i $f(z)$? Indicació: Relacioneu primer $\mathcal{L}(z)$ amb $\operatorname{Log}(z)$ per $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. $\triangleleft$

3.5.7. Sigui $\sqrt{\cdot}$ la determinació de l'arrel quadrada en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ que compleix que $\sqrt{-1} = i$ i sigui $f(z) = \sqrt{3z+2}$.

1. Expresseu $\sqrt{\cdot}$ en termes d'una determinació del logaritme i argument.

Recordem que

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2} (\ln |z| + i \arg z)}.$$

2. Quina és la regió més gran on f és holomorfa? Quina és la imatge? Existeix z tal que $f(z) = -i$?

3. Què val $f(\frac{i-2}{3})$? $\triangleleft$

3.5.8. Els polinomis de Legendre⁴ $P_j(\zeta)$ són els coeficients de z^j en el desenvolupament de Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta z + z^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\zeta) z^j.$$

Provar que $P_j(\zeta)$ és un polinomi de grau j i calcular P_0, P_1, P_2 i P_3 . ◁

⁴Adrien-Marie Legendre, París, 1752 – 1833. https://ca.wikipedia.org/wiki/Adrien-Marie_Legendre