

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

En aquest capítol expliquem com la integració del càlcul en diverses variables es pot aplicar al pla complex. Veurem en particular com integrar sobre corbes amb notació complexa, el teorema fonamental del càlcul per funcions amb primitives holomorfes, i una extensió d'aquest resultat anomenat teorema de Cauchy, on l'holomorfia es demana ja no a la primitiva sinó a la pròpia funció a integrar, i a més es pot relaxar la hipòtesi de $\mathbb{C}$ -derivabilitat en un punt aïllat del domini per demanar-hi tan sols continuïtat. Aquest resultat ens portarà a la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w-z_0} dw, \quad \text{per a tot } z_0 \in D_r(a).$$

la pedra angular de la teoria local de l'anàlisi complexa, coneguda com a teoria local de Cauchy.

Un cop demostrada la fórmula integral de Cauchy, deduirem un munt de propietats de les funcions holomorfes $f \in H(\Omega)$:

- Propietat de la mitjana: l'avaluació $f(z)$ coincideix amb la mitjana de la funció en una bola centrada en z .
- Analicitat: podem expressar f localment com a sèrie de potències.
- Desigualtats de Cauchy: $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$, $n \geq 0$.
- Teorema de Liouville¹: si $f \in H(\mathbb{C})$ és fitada, és constant.
- Teorema fonamental de l'àlgebra: tot polinomi de coeficients complexos té almenys una arrel.
- Teorema de Morera²: si $g \in C(\Omega)$ integra 0 en vores de triangles, aleshores és holomorfa.
- Fórmula integral de Cauchy per derivades

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad \text{per a tot } z_0 \in D_r(a).$$

- Ordre dels zeros: si $f(a) = 0$ aleshores $f(z) = g(z)(z-a)^n$ amb g holomorfa i $g(a) \neq 0$.

¹Joseph Liouville, Saint-Omer, 1809–1882. https://ca.wikipedia.org/wiki/Joseph_Liouville

²Giacinto Morera, Novara, 1856–1909. https://ca.wikipedia.org/wiki/Giacinto_Morera

- Principi de prolongació analítica: si els zeros de f tenen un punt d'acumulació en Ω , aleshores $f \equiv 0$.
- Principi del mòdul màxim: si el màxim absolut de $|f|$ en $\overline{\Omega}$ s'assoleix a l'interior, aleshores f és constant.

Algunes d'aquestes propietats, com ara la de la mitjana, les desigualtats de Cauchy o el teorema de Liouville, de fet, es compleixen per tota funció harmònica (vegeu l'exercici 3.2.3) i es poden estendre a $\mathbb{R}^d$ amb $d \geq 3$, però les demostracions aquí presentades es poden aplicar només en el cas de variable complexa.

4.1. Corbes

Definició 4.1 (Corbes i camins). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Una *corba* en Ω és una aplicació $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ contínua.

La imatge (recorregut) de γ és $\gamma^* = \gamma([a, b]) \subset \Omega$. Observeu que podria tenir interseccions. El punt $\gamma(a)$ s'anomena *punt inicial*, i $\gamma(b)$ *punt final*.

Diem que és una *corba tancada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Diem que és una *corba simple* si γ és injectiva (és a dir, no té interseccions).

Diem que $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ és una *corba de classe C^1* si $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, amb $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([a, b])$ (en particular és derivable per la dreta en a i per l'esquerra en b). En aquest cas, definim

$$\gamma'(t) = \gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t).$$

Diem que és una *corba C^1 a trossos* si hi ha una partició de l'interval $[a, b]$, diguem $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, de manera que $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ és de classe C^1 per $k = 1, \dots, n$. Farem servir el nom de *camí* per indicar una corba C^1 a trossos. •

Definició 4.2 (Reparametritzacions). Una *reparametrització* de γ és una corba $\eta : [c, d] \rightarrow \Omega$ de manera que $\eta = \gamma \circ \varphi$, on $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ és un homeomorfisme. En aquest cas, els recorreguts coincideixen, és a dir, $\eta^* = \gamma^*$, només canvia la velocitat en què la recorrem. Per exemple, una reparametrització de la corba $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ és $\eta(t) = e^{2it}$, $t \in [0, \pi]$.

En el cas de camins, les reparametritzacions són a més a més, de classe C^1 a trossos, i demanarem que φ i φ^{-1} també siguin C^1 a trossos.

La *corba inversa* de γ és la corba $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \Omega$ definida per $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$ (és a dir, recorre la imatge en sentit contrari). •

Definició 4.3 (Suma de camins). La *suma de camins* (o, més en general, de corbes) $\gamma \vee \eta$ es defineix per

$$\gamma \vee \eta(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } a \leq t \leq b; \\ \eta(t - b + c) & \text{si } b \leq t \leq b + d - c, \end{cases}$$

és a dir, recorrem primer γ i després η . La suma de camins $\gamma \vee \eta$ és un camí sempre que $\gamma(b) = \eta(c)$. •

Definició 4.4 (Longitud d'una corba). Si $\gamma \in C^1$, la longitud de γ és

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Si γ és un camí (corba C^1 a trossos), llavors, seguint la notació de la Definició 4.1, definim

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt. \quad \bullet$$

Definició 4.5 (Integrals de funcions amb valors complexos). Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrable (en sentit de Riemann o de Lebesgue). Definim

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt. \quad \bullet$$

Lema 4.6 (Propietats de la integral). Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ són integrables, aleshores:

(i) la integral és $\mathbb{C}$ -lineal: si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, llavors

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt,$$

(ii) se satisfà la desigualtat triangular per integrals:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Demostració. Deixem la primera propietat com a exercici pel lector.

Per $A \in \mathbb{C}$, podem posar $|A| = e^{i\theta} A$, és a dir, $-\theta \in \arg(A)$. Llavors, prenent $A = \int_a^b f(t) dt$ i aplicant (i), tenim que

$$0 \leq \left| \int_a^b f(t) dt \right| = e^{i\theta} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{i\theta} f(t) dt.$$

Com que

$$\int_a^b e^{i\theta} f(t) dt \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b e^{i\theta} f(t) dt = \operatorname{Re} \left(\int_a^b e^{i\theta} f(t) dt \right),$$

de manera que, fent servir la definició de la integral d'una funció amb valors complexos, veiem que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \operatorname{Re} \left(\int_a^b e^{i\theta} f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} f(t) \right) dt.$$

Com que $\operatorname{Re} \left(e^{i\theta} f(t) \right) \leq |e^{i\theta} f(t)| = |f(t)|$, obtenim el resultat. $\square$

Exercicis

4.1.1. Proveu que l'el·lipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ és una corba diferenciable (és a dir, existeix una parametrització $z(t)$, $t \in I$ que el seu rang és l'el·lipse, és diferenciable, $z'(t) \neq 0$ i z és corba simple. Diem que $z(t)$ és una parametrització admissible o regular). $\triangleleft$

4.1.2. Parametritzeu el contorn format pel perímetre del quadrat amb vèrtexs $-1 - i$, $1 - i$, $1 + i$, $-1 + i$, seguint aquest ordre. Quina és la seva longitud? $\triangleleft$

4.2. Integració sobre corbes

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínua, i $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una corba de classe C^1 . Definim les *integrals de camí*

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad \text{i} \quad \int_{\gamma} f(z) |dz| := \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

En cas que γ sigui un camí (corba C^1 a trossos), ho partim a trossos:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad \text{i} \quad \int_{\gamma} f(z) |dz| = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Exemple 4.7 (Exemple de dificultat de càlcul). Sigui $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, i sigui $f(z) = e^z$. Llavors

$$\int_{\gamma} e^z dz = \int_0^{2\pi} e^{e^{it}} i e^{it} dt = ?$$

Més endavant, al Corol·lari 4.10, veurem que aquesta integral dona zero. Fer el càlcul directe d'aquest tipus d'integrals pot ser una tasca difícil, encara que de vegades es pot calcular fàcilment. Per exemple, si $\gamma(t) = a + e^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$ i $k \in \mathbb{Z}$ (donem k voltes al cercle de radi 1 centrat en el punt a : si $k > 0$ anem en sentit contrari a les agulles del rellotge, i al revés si $k < 0$), llavors

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = \int_0^{2\pi} \frac{ik e^{ikt}}{e^{ikt}} dt = 2\pi ik. \quad \triangleleft$$

Proposició 4.8 (Propietats de la integral de camí).

1. Donat un camí γ , tenim que

$$\int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. Si recorrem la corba en sentit invers, el signe canvia, és a dir,

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

3. Si γ és C^1 a trossos (camí), llavors

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt.$$

En particular, si $|f| \leq M$ per a tot $z \in \gamma^*$, llavors $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq M L(\gamma)$.

4. Si η és una reparametrització C^1 de γ , llavors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \pm \int_{\eta} f(z) dz,$$

on el signe és positiu si la reparametrització preserva el sentit i negatiu en cas contrari.

Demostració. 1. Exercici.

2. Tenim que $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$. Llavors

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma^-(t)) (\gamma^-)'(t) dt = - \int_a^b f(\gamma(a + b - t)) \gamma'(a + b - t) dt.$$

Fent el canvi de variable $s = a + b - t$, obtenim

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_b^a f(\gamma(s)) \gamma'(s) (-ds) = - \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

3. Directe a partir de la definició de la integral sobre una corba i la propietat (ii) del lema 4.6.

4. Tenim que $\eta = \gamma \circ \varphi$, i com que estem treballant amb corbes C^1 , l'aplicació bijectiva $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ també ha de ser de classe C^1 . Si $\varphi(c) = a$ (la reparametrització preserva el sentit), llavors

$$\int_{\eta} f(z) dz = \int_c^d f(\eta(t)) \eta'(t) dt = \int_c^d f(\gamma(\varphi(t))) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Llavors, fent el canvi de variable $s = \varphi(t)$, obtenim

$$\int_{\eta} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Si, en canvi, la reparametrització no preserva el sentit, és a dir, si $\varphi(c) = b$, aleshores podem combinar aquesta demostració amb l'apartat 2 per obtenir el signe canviat. $\square$

El següent resultat correspondria a una versió de la *regla de Barrow* del càlcul per integrals sobre corbes.

Teorema 4.9 (Regla de Barrow). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i f contínua en Ω . Supposem que existeix F primitiva holomorfa de f (és a dir, $F' = f$). Aleshores, per a tot camí γ en Ω , es compleix*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Demostració. Tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Si posem $g(t) = u(t) + iv(t) := F(\gamma(t))$, com que $(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t)) \gamma'(t)$, es compleix que $(F \circ \gamma)'(t) = g'(t) = u'(t) + iv'(t)$, de manera que, aplicant la regla de Barrow usual a $\mathbb{R}$, obtenim

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F \circ \gamma)'(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt + i \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} v'(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n (u(t_k) - u(t_{k-1})) + i \sum_{k=1}^n (v(t_k) - v(t_{k-1})) \\ &= u(b) - u(a) + i(v(b) - v(a)) = g(b) - g(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad \square \end{aligned}$$

Corol·lari 4.10 (Conseqüències).

- Si γ és un camí tancat en Ω i f té primitiva holomorfa en Ω , aleshores

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

- Si f té primitiva holomorfa en Ω , llavors $\int_{\gamma} f(z) dz$ no depèn del camí $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$. Només depèn dels punts inicial i final (no cal ni parametritzar el camí).

Per exemple, si $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, llavors $\int_{\gamma} e^z dz = 0$. Si, en canvi, γ és un camí que va de 1 a $2i$, aleshores

$$\int_{\gamma} z^3 dz = \left[\frac{z^4}{4} \right]_1^{2i} = \left(\frac{(2i)^4}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{15}{4}.$$

Exercicis

4.2.1. Sigui $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el cercle unitat amb l'orientació habitual. Avalueu, per a tots els $m \in \mathbb{Z}$:

$$a) \int_{\gamma} \frac{dz}{z^m}; \quad b) \int_{\gamma} \frac{|dz|}{z^m}; \quad c) \int_{\gamma} \frac{dz}{|z^m|}; \quad d) \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z^m|}. \quad \triangleleft$$

4.2.2. Sigui $\gamma = \partial D_r(0)$ recorreguda un cop amb l'orientació estàndard.. Calculeu, per a $n \in \mathbb{Z}$, $\int_{\gamma} z^n dz$. $\triangleleft$

4.2.3. Sigui $\gamma = [i + 1, -i]$. Avalueu les següents integrals de línia:

$$a) \int_{\gamma} \sin(2z) dz, \quad b) \int_{|z|=1} z e^{z^2} dz, \quad c) \int_{|z-2|=1} \frac{1}{z} dz. \quad \triangleleft$$

4.2.4. Avalueu les següents integrals.

a) $\int_{\gamma} \left(\frac{6}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + 1 - 3(z-i)^2 \right) dz$ si γ és $\{|z-i|=4\}$ recorreguda un cop amb l'orientació estàndard.

b) $\int_{\gamma} (x - 2xyi) dz$ al llarg del contorn $\gamma(t) = t + it^2$ amb $t \in [0, 1]$.

c) $\int_{\gamma} (|z-1+i|^2 - z) dz$ al llarg de la semicircumferència $\gamma(t) = 1 - i + e^{it}$ on $t \in [0, \pi]$.

d) La funció no analítica $f(z) = x^2 + iy$ (per què?) al llarg de $\{|z|=1\}$ recorreguda un cop en sentit antihorari. $\triangleleft$

4.2.5. Calculeu les següents integrals al llarg del camí γ que s'indica.

a) $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ per qualsevol contorn en el semiplà dret que va de $-3i$ a $3i$. Quin problema tenim si seguim un contorn pel semiplà esquerre? Indicació: considereu la determinació principal del logaritme en la qual el logaritme no està definit si $y = 0, x \leq 0$.

b) $\int_{\gamma} e^z \cos z dz$ per un camí d'origen $a = i$ i final $b = \pi$.

c) $\int_{\gamma} z^{1/2} dz$ per la branca principal de $z^{1/2}$ per un camí d'origen $a = i$ i final $b = \pi$ que no talli la semirecta $(-\infty, 0]$. $\triangleleft$

4.2.6. Considerem la determinació de l'arrel $\sqrt{z^2-1}$ que és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ i positiva a $(1, \infty)$.

(a) Vegeu que $z + \sqrt{z^2-1}$ omet l'eix real negatiu si $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$, de manera que la determinació principal $\text{Log}(z + \sqrt{z^2-1})$ està definida a Ω .

(b) Vegeu que $\text{Log}(z + \sqrt{z^2-1})$ és una primitiva de $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ a Ω .

(c) Avalueu $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$, on γ és el tros de cercle $|z-1| = \sqrt{2}$ que va de i a $-i$ passant pel semiplà de la dreta ($\text{Re } z > 0$).

Indicació: comproveu que $\sqrt{z^2-1} = e^{\frac{1}{2}(\text{Log}(z-1) + \text{Log}(z+1))}$ s'estén a $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ de manera contínua. $\triangleleft$

4.2.7. Siguin $\gamma_1 := \{|z|=1 : \text{Im } z \geq 0\}$ i $\gamma_2 := \{|z|=2 : \text{Re } z, \text{Im } z \geq 0\}$. Demostreu que:

$$a) \left| \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2 + 2} \right| \leq \pi,$$

$$c) \left| \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz \right| \leq 2\pi e,$$

$$b) \left| \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3},$$

$$d) \left| \int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{z^2} dz \right| \leq \pi e^2. \quad \triangleleft$$

4.2.8. (a) *Sigui γ un camí en $\mathbb{C}$. Proveu que si f és una funció contínua en γ^* llavors*

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})} dz.$$

(b) *Deduïu que si f és una funció contínua en el cercle unitat llavors*

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z) dz} = - \int_{|z|=1} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}. \quad \triangleleft$$

4.3. Teorema de Cauchy

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert, $U \subset \Omega$ és un obert fitat prou regular (per exemple amb frontera C^1) i tal que $\bar{U} \subset \Omega$, i tenim dues funcions $f, g \in C^1(\Omega)$, pel teorema de Green³ (vegeu l'exercici 4.3.5) se satisfà la fórmula de Green en variable complexa:

$$\int_U (\partial f + \bar{\partial} g) dm = \frac{i}{2} \int_{\partial U} (f d\bar{z} - g dz). \quad (4.1)$$

Aquí, entenem que $\int_{\partial U} f d\bar{z} = \int_a^b f(\gamma(t)) \overline{\gamma'(t)} dt = \int_{\gamma} f(dx - idy)$ per alguna corba γ que parametritzi ∂U en sentit antihorari, on, identificant $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, indiquem $\int_{\gamma} F_1 dx = \int_a^b F_1(\gamma(t)) \gamma_1'(t) dt$ i anàlogament per $\int_{\gamma} F_2 dy$. Així doncs, prenent $f = 0$, podem deduir que si $g \in H(\Omega)$, aleshores

$$\int_{\partial U} g(z) dz = 0.$$

A continuació obtindrem un resultat lleugerament més general sense fer ús de la fórmula de Green. El primer resultat, anomenat teorema de Cauchy-Goursat⁴ o també teorema de Cauchy per triangles, és un resultat clau per tal de provar el teorema de Cauchy per un disc o per oberts convexos. Aquests resultats seran suficients per a veure la fórmula integral de Cauchy i les conseqüències de la teoria local.

³George Green, Nottingham, 1793–1841. https://ca.wikipedia.org/wiki/George_Green

⁴Édouard Jean-Baptiste Goursat, París, 1858–1936. https://ca.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Goursat

Teorema 4.11 (Cauchy-Goursat per triangles). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $p \in \Omega$ i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{p\})$. Llavors*

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

per a tot triangle $T \subset \Omega$.

Observació 4.12 (Interpretació dels Cauchy-Goursat).

1. Ens cal tenir tot el triangle ple T dins d' Ω . És a dir, si la frontera del triangle ∂T envolta un forat d' Ω , llavors no s'aplica.
2. En cas que f sigui holomorfa a tot Ω excepte un punt p , però f no és contínua en p , tampoc s'aplica. •

Comentari 4.13 (Atribució dels resultats). Aquest enunciat és una versió local, o per triangles, del teorema de Cauchy-Goursat. La forma que sovint s'anomena simplement *teorema (integral) de Cauchy* afirma que la integral de f sobre qualsevol camí tancat del domini s'anulla, però això requereix hipòtesis addicionals sobre el domini, per exemple que sigui un disc, un obert convex o, més endavant, un domini simplement connex (vegeu els teoremes 4.15, 4.17 i 5.26). En un obert amb forats, el resultat pot fallar, com mostra la integral de $1/z$ sobre la circumferència unitat, i caldrà tenir en compte les propietats topològiques del camí respecte al domini, vegeu el teorema 5.22.

Històricament, les formulacions clàssiques del teorema integral de Cauchy es demostraven amb hipòtesis de regularitat més fortes, com ara la continuïtat de la derivada. Goursat va observar que aquesta hipòtesi es pot eliminar: la $\mathbb{C}$ -derivabilitat ja és suficient. •

Demostrem abans un cas particular:

Proposició 4.14 (Cauchy-Goursat per triangles, versió holomorfa). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Llavors $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ per a tot triangle $T \subset \Omega$.*

Demostració. Tenim orientada la frontera ∂T del nostre triangle en sentit contrari a les agulles del rellotge. Fent servir els punts mitjos de cada segment, partim el nostre triangle T en 4 triangles T_1, T_2, T_3, T_4 , vegeu la figura 4.1. Totes les fronteres ∂T_i d'aquests triangles venen orientades en sentit contrari a les agulles del rellotge, de manera que el triangle del mig té els costats orientats en sentit contrari als costats comuns dels altres triangles (així quan es fa la suma de les integrals sobre la frontera d'aquests 4 triangles, les integrals en els segments del mig es cancel·len, al calcular-se'n una en un sentit, i l'altra en sentit contrari). Vegeu la figura 4.1. Llavors

$$\int_{\partial T} f = \int_{\partial T_1} f + \int_{\partial T_2} f + \int_{\partial T_3} f + \int_{\partial T_4} f.$$

Observem que

$$L(\partial T_j) = \frac{1}{2} L(\partial T); \quad \text{diam}(T_j) = \frac{1}{2} \text{diam}(T), \quad 1 \leq j \leq 4.$$

Anomenem $T^{(1)} := T_{j_1}$ un triangle dels 4 que maximitzi el valor absolut de la integral de camí:

$$\left| \int_{\partial T^{(1)}} f \right| \geq \left| \int_{\partial T_j} f \right|, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

Llavors

$$\left| \int_{\partial T} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T^{(1)}} f \right|.$$

Repetim el procés amb $T^{(1)}$ per tal d'obtenir un altre triangle $T^{(2)}$ amb propietats anàlogues. De manera inductiva, obtenim una successió $\{T^{(k)}\}$ de triangles que satisfan

$$(i) \quad T^{(1)} \supset T^{(2)} \supset \dots \supset T^{(k)} \supset \dots;$$

(ii)

$$\left| \int_{\partial T^{(k)}} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T^{(k+1)}} f \right|;$$

$$(iii) \quad L(\partial T^{(k+1)}) = \frac{1}{2} L(\partial T^{(k)}) \text{ i també } \text{diam}(T^{(k+1)}) = \frac{1}{2} \text{diam}(T^{(k)}).$$

Tot això implica que

(a)

$$\left| \int_{\partial T} f \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T^{(n)}} f \right|;$$

$$(b) \quad L(\partial T^{(n)}) = 2^{-n} L(\partial T) \text{ i també } \text{diam}(T^{(n)}) = 2^{-n} \text{diam}(T).$$

De (b) se segueix que $\text{diam}(T^{(n)}) \rightarrow 0$, així que juntament amb (i), tenim una successió decreixent de compactes en un espai mètric complet amb diàmetres que tendeixen a zero.

Llavors

$$\bigcap_k T^{(k)} = \{z_0\},$$

vegeu la figura 4.2. Aquest resultat es dedueix del teorema dels intervals encaixats, i se sol veure en assignatures anteriors del grau en Matemàtiques.

Fixem $\varepsilon > 0$. Com que f és holomorfa en z_0 , existeix $\delta > 0$ de manera que $D_\delta(z_0) \subset \Omega$ i

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon, \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

En altres paraules, tenim que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|, \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \quad (4.2)$$

Prenem n prou gran de manera que $\text{diam}(T^{(n)}) = 2^{-n} \text{diam}(T) < \delta$. Com que $z_0 \in T^{(n)}$, se segueix que $T^{(n)} \subset D_\delta(z_0)$.

Com que la funció $g_0(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ té primitiva holomorfa (ja que és un polinomi holomorf), tenim que

$$\int_{\partial T^{(n)}} g_0(z) dz = 0$$

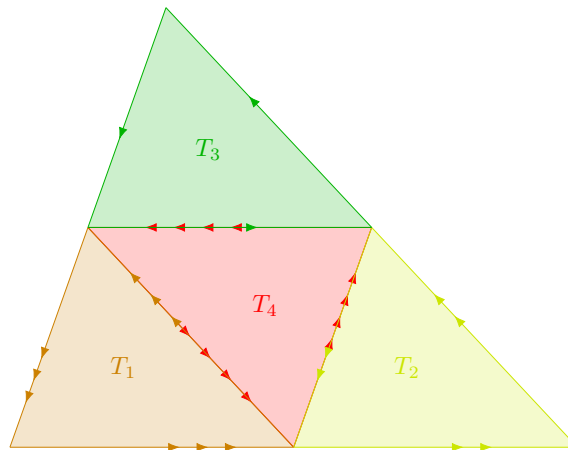


Figura 4.1.: Subdivisió d'un triangle en quatre triangles mitjançant els punts mitjos. Les integrals sobre els costats interiors es cancel·len en sumar les quatre vores orientades.

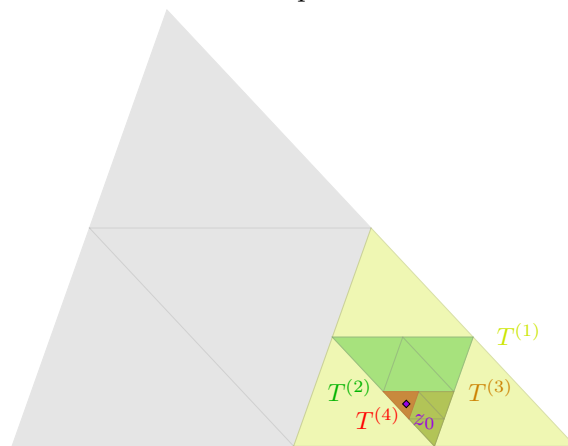


Figura 4.2.: Triangles encaixats $T^{(k)}$. Els diàmetres tendeixen a zero i la intersecció queda reduïda a un punt z_0 .

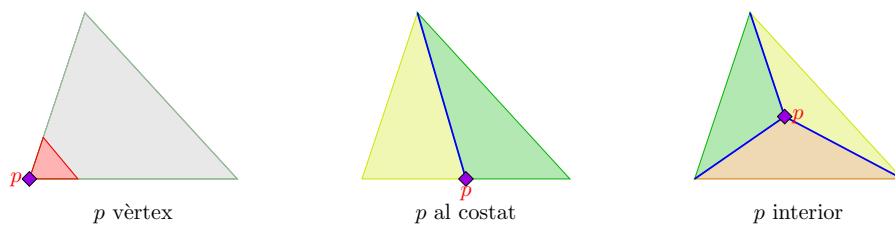


Figura 4.3.: Reducció dels casos en la prova de Cauchy-Goursat quan hi ha un punt excepcional p .

i, per tant,

$$\left| \int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial T^{(n)}} (f(z) - g_0(z)) dz \right| = \left| \int_{\partial T^{(n)}} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right|.$$

Aplicant (4.2) obtenim

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right| &< \varepsilon \int_{\partial T^{(n)}} |z - z_0| |dz| \leq \varepsilon \operatorname{diam}(T^{(n)}) L(\partial T^{(n)}) \\ &= \varepsilon 4^{-n} \operatorname{diam}(T) L(\partial T). \end{aligned}$$

Per tant, per (a), veiem que

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| < \varepsilon \operatorname{diam}(T) L(\partial T).$$

Com que $\varepsilon > 0$ és arbitrari i $\operatorname{diam}(T)$ i $L(\partial T)$ són fixes, se segueix que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0,$$

tal com volíem veure. □

Demostració del teorema de Cauchy-Goursat. En cas que el punt p , on no sabem si f és $\mathbb{C}$ -derivable, es trobi fora del triangle ple T , considerem $\Omega' = \Omega \setminus \{p\}$, de manera que $T \subset \Omega'$. Com que $f \in H(\Omega')$, aplicant la proposició 4.14 obtenim $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$.

En cas que el punt p es trobi en el triangle ple T , sempre ens reduïrem al cas que p sigui un dels vèrtexs del triangle. Anem doncs a fer aquest cas primer.

Si p és un dels vèrtexs del triangle, fixem $\varepsilon > 0$, i partim el triangle T en dues parts, vegeu la figura 4.3. Una que sigui un petit triangle T_ε de diàmetre més petit que ε amb vèrtex p , i l'altra part quedaria un trapezi Z . Com que el trapezi el podem partir en dos triangles, i el punt p queda fora dels dos triangles plens, aplicant el cas anterior tenim que

$$\int_{\partial Z} f(z) dz = 0.$$

Llavors

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{\partial Z} f(z) dz + \int_{\partial T_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial T_\varepsilon} f(z) dz.$$

Com que f és contínua en Ω , en particular és contínua en el compacte T , així que hi ha una constant positiva M de manera que $|f(z)| \leq M$ per a tot $z \in T$. En particular, $|f(z)| \leq M$ per a tot $z \in T_\varepsilon$, i M no depèn de ε . Llavors

$$\left| \int_{\partial T_\varepsilon} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial T_\varepsilon} |f(z)| |dz| \leq M L(\partial T_\varepsilon) < 3M \varepsilon.$$

Com que ε és arbitrari, deduïm que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

Si p es troba en ∂T , llavors ajuntem p amb el vèrtex del triangle que no es troba en el segment que conté p , per formar dos triangles, i pel cas anterior obtenim que $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$, vegeu la figura 4.3.

Si p es troba a l'interior del triangle T , ajuntem aquest punt amb tots els vèrtexs del triangle formant tres triangles, i aplicant el cas anterior veiem que $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$, vegeu la figura 4.3. $\square$

Teorema 4.15 (Teorema de Cauchy per un disc). *Sigui D un disc obert i $f \in C(D)$. Si $f \in H(D \setminus \{p\})$ amb $p \in D$, llavors f té primitiva holomorfa en D , i*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

per a tot camí tancat γ en D .

Demostració. Pel teorema 4.9, només cal provar que f té primitiva holomorfa en D . Fixem $a \in D$, i definim

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)dw, \quad z \in D,$$

on $[a, z]$ és el segment que uneix a amb z .

Sigui $z_0 \in D$ i anem a provar que F és holomorfa en z_0 amb $F'(z_0) = f(z_0)$. Ens cal provar que

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| = 0.$$

Considerem el triangle T amb vèrtexs a , $z_0 + h$, z_0 amb $|h|$ prou petit per tal que $z_0 + h \in D$. Com que tot el triangle ple T es troba dins del disc D , aplicant el teorema de Cauchy-Goursat, obtenim que

$$\int_{\partial T} f(w)dw = 0.$$

És a dir,

$$\int_{[a, z_0+h]} f(w)dw + \int_{[z_0+h, z_0]} f(w)dw - \int_{[a, z_0]} f(w)dw = 0,$$

així que, tenint en compte la definició de F , tenim que

$$F(z_0 + h) - F(z_0) = - \int_{[z_0+h, z_0]} f(w)dw = \int_{[z_0, z_0+h]} f(w)dw.$$

Per tant, com que $f(z_0) = \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} f(z_0)dw$, arribem a la desigualtat

$$\left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{[z_0, z_0+h]} |f(w) - f(z_0)| |dw|.$$

Fixem $\varepsilon > 0$. Com que f és contínua en z_0 , existeix $\delta > 0$ de manera que $|f(w) - f(z_0)| < \varepsilon$ si $|w - z_0| < \delta$. Prenent doncs h amb $|h| < \delta$, obtenim

$$\left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{|h|} L([z_0, z_0 + h]) = \varepsilon,$$

ja que la longitud del segment $[z_0, z_0 + h]$ és $|h|$. $\square$

Observació 4.16. Per tal de poder fer aquesta prova, ha estat clau el fet que podem triar h de manera que el triangle amb vèrtexs a , $z_0 + h$, z_0 es trobi dins de D . Això mateix ho podem fer si agafem un obert convex. Recordem que un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ es diu *convex* si per tot parell de punts $a, b \in \Omega$ el segment $[a, b] \subset \Omega$. Aleshores, la mateixa prova ens serveix canviant el disc obert D , per qualsevol obert convex Ω , de manera que obtenim el següent resultat. •

Teorema 4.17 (Teorema de Cauchy per oberts convexas). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert convex, i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{p\})$ amb $p \in \Omega$. Llavors f té primitiva holomorfa en Ω , i*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

per a tot camí tancat γ en Ω .

Observació 4.18 (Teorema de Cauchy per oberts estrellats). Un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ es diu *estrellat* respecte al punt a si per tot punt $b \in \Omega$ el segment $[a, b] \subset \Omega$. El teorema anterior també aplica per oberts estrellats sense massa dificultats, vegeu l'exercici 4.3.1: sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert estrellat, i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{p\})$ amb $p \in \Omega$. Llavors f té primitiva holomorfa en Ω , i $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ per a tot camí tancat γ en Ω . •

Exercicis

4.3.1. Demostreu el teorema de Cauchy per oberts estrellats. ◁

4.3.2. Recordeu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(a) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = \sqrt{\pi}$ per a tot $a > 0$. Indicació: Apliqueu el teorema de Cauchy al rectangle $[-R, R] \times [0, a]$.

(b) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(nx) dx = \sqrt{2\pi} e^{-n^2/2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ◁

4.3.3. Determineu el domini d'holomorfia de les funcions f donades i digueu per què $\int_{|z|=2} f(z) dz = 0$.

a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - 6z + 10}$;

b) $f(z) = \text{Log}(z + 3)$. ◁

4.3.4. Sigui $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funció harmònica en un disc D , és a dir, tal que $\Delta u = 4\partial\bar{\partial}u = 0$. Demostreu que existeix una funció $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmònica tal que $(u + iv)$ és holomorfa. L'anomenem harmònica conjugada. Indicació: Demostreu que les equacions de Cauchy-Riemann per $F = U + iV$ es poden escriure com $\partial F = 2\partial U$ o com $\bar{\partial} \bar{U} = -i\bar{\partial} V$. Indicació: Vegeu la secció 5.5. ◁

4.3.5. El teorema de Green diu que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert i $U \subset \Omega$ és un obert fitat prou regular (per exemple amb frontera C^1) i tal que $\overline{U} \subset \Omega$, aleshores tot camp vectorial $F = (F_1, F_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ amb $F \in C^1(\Omega)$ satisfà que

$$\int_U (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) \, dm = \int_{\partial U} (F_1 \, dx + F_2 \, dy).$$

Demostreu la fórmula de Green en variable complexa (4.1). ◁

4.3.6. Continuant amb l'exercici 4.3.5, demostreu la fórmula de Cauchy generalitzada, coneguda com a fórmula de Cauchy-Pompeiu⁵, que diu que si $\phi \in C^1(\Omega)$ i $z_0 \in U$, aleshores

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\phi(z)}{z - z_0} \, dz - \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} \, dm(z).$$

Notem que el cas particular $\phi \in C_c^1(U)$ ens diu $\phi = \mathcal{C}(\bar{\partial}\phi)$, on $\mathcal{C}$ indica la transformada de Cauchy

$$\mathcal{C}\psi(z_0) := -\frac{1}{\pi} \int_U \frac{\psi(z)}{z - z_0} \, dm(z). \quad \triangleleft$$

4.4. Fórmula integral de Cauchy

Hem vist les versions locals del teorema de Cauchy, provant el teorema de Cauchy per a un triangle i el teorema de Cauchy en oberts convexos. El proper resultat és la fórmula integral de Cauchy, un dels punts centrals de l'anàlisi complexa: transforma una hipòtesi local, l'holomorfia, en una representació integral que determina completament la funció a l'interior d'un disc a partir dels seus valors a la frontera. N'obtidrem les conseqüències més importants de la teoria local de Cauchy: desenvolupament en sèries de potències d'una funció holomorfa, zeros de funcions holomorfes (factorització local), principi de prolongació analítica, desigualtats de Cauchy, teorema de Liouville, teorema fonamental de l'àlgebra, teorema de l'aplicació oberta i principi del mòdul màxim.

Teorema 4.19 (Fórmula integral de Cauchy (versió local)). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Supposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz, \quad |z_0 - a| < r,$$

on $\gamma_r(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Observació 4.20. Ens cal tenir tot el disc tancat $\overline{D_r(a)}$ dins d' Ω . Aleshores, el resultat no s'aplicaria necessàriament si, per exemple, $\Omega = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ i $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. El teorema, ara com ara, exclouria fins i tot el cas que f fos contínua en $\overline{\mathbb{D}}$ (ens caldria tenir f holomorfa en un obert que contingui $\overline{\mathbb{D}}$), tot i que aquest cas es pot demostrar per pas al límit. •

⁵Dimitrie Pompeiu, Broscăuți, 1873–1954. https://ca.wikipedia.org/wiki/Dimitrie_Pompeiu

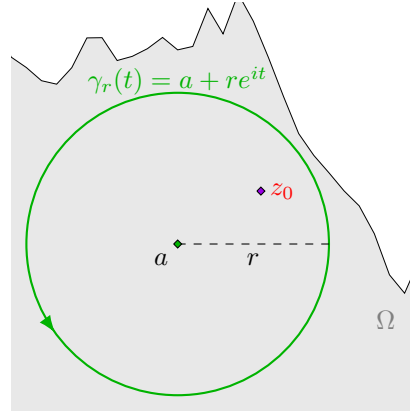


Figura 4.4.: Si $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$ i $z_0 \in D_r(a)$, el valor $f(z_0)$ queda determinat pels valors de f a la circumferència.

Observació 4.21. Moltes vegades al llarg del text, farem ús de la notació $\int_{|z-a|=r} f(z) dz$ per indicar que estem integrant sobre la corba $\sigma_a(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (fent només una volta al cercle). Així, la fórmula integral de Cauchy es pot escriure com

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad |z_0 - a| < r.$$

•

Demostració. Com que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$, existeix $r_1 > r$ de manera que $\overline{D_r(a)} \subset D := D_{r_1}(a) \subset \Omega$. Fixem $z_0 \in D_r(a)$, i definim la funció

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \in D \setminus \{z_0\} \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

Clarament g és holomorfa en $D \setminus \{z_0\}$. Vegem que g és també contínua en z_0 , ja que en ser f holomorfa, aleshores

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = g(z_0).$$

Així doncs, tenim que $g \in C(D) \cap H(D \setminus \{z_0\})$. Com que $\gamma_r \subset D$, pel teorema de Cauchy per un disc se segueix que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} g(z) dz = 0.$$

És a dir,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$

Per tant,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} \right).$$

Per acabar la prova, ens cal veure que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} = 1, \quad z_0 \in D_r(a). \quad (4.3)$$

Recordem que si $z_0 = a$ i $\gamma_r(t) = a + re^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$, aleshores (4.3) es compleix, vegeu l'exemple 4.7. Volem veure que això segueix sent cert per a qualsevol altre punt de $D_r(a)$. Observem primer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it} dt}{re^{it} + (a - z_0)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + (a - z_0)}{re^{it} + (a - z_0)} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a - z_0) dt}{re^{it} + (a - z_0)} \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a - z_0) dt}{re^{it} + (a - z_0)}. \end{aligned}$$

Per tant, només cal provar que

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{(a - z_0) dt}{re^{it} + (a - z_0)} = 0.$$

Si $z_0 = a$, no hi ha res a provar. Llavors suposem que $z_0 \neq a$. Si $\eta(t) = e^{-it}$, amb $t \in [0, 2\pi]$, tenim $\eta^* = \partial\mathbb{D}$ i $\eta'(t) = -ie^{-it}$. Aleshores,

$$I = (a - z_0) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{it}(r + (a - z_0)e^{-it})} = -\frac{(a - z_0)}{i} \int_{\eta} \frac{dw}{r + (a - z_0)w}.$$

Ara, posant $h(w) = (r + (a - z_0)w)^{-1}$, només ens cal provar que

$$\int_{|w|=1} h(w) dw = 0,$$

seguint la notació introduïda a l'observació 4.21, i això ens ho dona el teorema de Cauchy per un disc, si podem veure que h és holomorfa en un disc centrat al 0 de radi $R > 1$. Ara bé, h és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ excepte en el punt $w_0 = \frac{r}{z_0 - a}$, i com que $|w_0| > 1$, podem trobar tal R , així que ja hem provat el que es demanava. Podeu trobar una demostració alternativa de (4.3) a l'exercici 4.4.6. $\square$

Observació 4.22 (Índex i fórmula integral de Cauchy). Aplicant el teorema de Cauchy per oberts convexos, fent servir la mateixa prova, podem demostrar el següent resultat:

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert convex, γ camí tancat d' Ω i $f \in H(\Omega)$. Aleshores

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \operatorname{Ind}(\gamma, z_0), \quad z_0 \notin \gamma^*,$$

on

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

és l'índex de γ respecte al punt z_0 . Més endavant, veurem la interpretació geomètrica de l'índex com també algunes propietats (essencialment compta el número de voltes que fa γ al voltant del punt z_0). •

Fins al final del capítol, estudiem les conseqüències directes de la fórmula integral de Cauchy. Comencem per la propietat de la mitjana.

Lema 4.23 (Propietat de la mitjana). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$ i suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Demostració. Per la fórmula integral de Cauchy, tenim que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Parametritzant la corba per $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, ens queda

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

□

Exercicis

4.4.1. Avalueu, usant la fórmula integral de Cauchy, les següents integrals:

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\int_{ z =2} \frac{z^2}{z-1} dz;$ | d) $\int_{ z =2} \frac{dz}{z^2+z+1};$ | g) $\int_{ z =3} \frac{3z-2}{z^2-z} dz;$ |
| b) $\int_{ z =1} \frac{\sin(e^z)}{z} dz;$ | e) $\int_{ z =2} \frac{dz}{z^2+2z-3};$ | h) $\int_{ z+1 =1} \frac{1}{z^2-1} dz.$ |
| c) $\int_{ z =2} \frac{dz}{z^2-1};$ | f) $\int_{ z-2 =\frac{3}{2}} \frac{\cos(z)}{z^2(z^2-\pi^2)} dz;$ | |

4.4.2. Resoleu els següent exercicis relacionats amb la fórmula integral de Cauchy.⁶

- a) Calculeu $\oint_C \frac{z^2}{z^4-1} dz$ sobre la circumferència de radi 3 centrada en 0.

⁶De vegades es fa servir la notació $\oint$ per indicar que la integral és sobre un camí tancat.

b) És cert que $\oint_C \frac{e^z}{z} dz = 0$ si C és tancada i simple? ◁

4.4.3. Sigui p un polinomi de grau n , amb tots els seus zeros continguts en $D_R(0)$. Demostreu que

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n. \quad \triangleleft$$

4.4.4. Sigui $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Calculeu la integral de línia $\int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz$. Deduïu que

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2) dt}{1+r^2-2r \cos(\theta-t)} = 2\pi, \quad \text{per a tot } 0 \leq r < 1 \text{ i } \theta \in \mathbb{R}. \quad \triangleleft$$

4.4.5. Siguin $f, g \in H(\Omega)$, on Ω és un domini tal que $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Donat $a \in \mathbb{C}$ amb $|a| \neq 1$, calculeu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{ag(w)}{aw-1} \right) dw. \quad \triangleleft$$

4.4.6. Demostreu (4.3) usant la fórmula integral de Cauchy centrada i el teorema de Cauchy en convexos. ◁

4.5. Sèries de potències

Teorema 4.24 (Desenvolupament local en sèrie de potències). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Tota funció holomorfa en Ω és localment una sèrie de potències. Concretament, si $R_a = \text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, aleshores*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad \text{per tot } |z-a| < R_a,$$

amb

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad \text{per a tot } r < R_a,$$

i el radi de convergència de la sèrie és major o igual a R_a .

Combinant aquest resultat amb el teorema 3.30, veiem que f és holomorfa en Ω si i només si f hi és analítica.

Demostració. Per $0 < r < R_a$, tenim que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Aplicant la fórmula integral de Cauchy obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad |z-a| < r.$$

Volem escriure aquesta integral com una sèrie de potències. Tenim que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a) - (z-a)} = \frac{1}{(w-a) \left(1 - \frac{z-a}{w-a}\right)}.$$

Ara, observem que per w amb $|w-a| = r$, tenim que

$$\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = \frac{|z-a|}{r} < 1$$

i, per tant,

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z-a}{w-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n.$$

Llavors

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Introduint aquesta expressió en la fórmula integral de Cauchy, obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right) dw.$$

Ara volem intercanviar l'ordre d'integració amb el sumatori. Això ho podem fer si la sèrie de funcions $\sum_{n \geq 0} f_n$ convergeix uniformement en $\{|w-a| = r\}$, on

$$f_n(w) = f(w) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Per w amb $|w-a| = r$, tenim que

$$|f_n(w)| \leq \left(\max_{w: |w-a|=r} |f(w)| \right) \frac{|z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} \leq \frac{C_r}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n.$$

Com que $|z-a| < r$, llavors $\sum_n \left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n < \infty$, així que aplicant el criteri M de Weierstrass, se segueix que la sèrie $\sum_{n \geq 0} f_n$ convergeix uniformement en $\{|w-a| = r\}$. Intercanviant doncs la integració amb el sumatori, tenim que per $|z-a| < r$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n. \quad \square$$

Corol·lari 4.25. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Aleshores $f \in C^\infty(\Omega)$ i totes les seves derivades són holomorfes.*

Demostració. Com que això ja ho sabem per sèries de potències, és conseqüència del resultat anterior. $\square$

Exercicis

4.5.1. Desenvolpeu en sèrie de potències al voltant del punt a i doneu el radi de convergència de:

- a) $1/z$, $a = 1$; c) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $a = 0$; e) $\frac{e^z}{1-z}$, $a = 0$;
 b) $z^2 e^z$, $a = 0$; d) $\frac{1}{(1-z)^3}$, $a = 0$; f) $\frac{1}{1+e^z}$, $a = 0$.

(en (e) i (f) només cal calcular els 3 primers termes). ◁

4.5.2. Sigui $\alpha \in \mathbb{C}$, provar que si $(1+z)^\alpha$ es pensa com $e^{\alpha \text{Log}(1+z)}$ llavors per $|z| < 1$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots$$

(binomi de Newton⁷). ◁

4.5.3. Trobeu els desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt a de les següents funcions:

- a) $f(z) = \cos^2 z$, $a = 0$; b) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$, $a = 1$; c) $\sqrt[3]{z}$, $a = 1$.

Aquí $\sqrt[3]{\cdot}$ és la determinació de l'arrel cúbica en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ que val $(-1 + i\sqrt{3})/2$ en $z = 1$. ◁

4.5.4. Considereu la funció $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+i)z}$ i el punt $a = -1$.

1. "Sense fer cap càlcul", raoneu quin és el disc de convergència de la sèrie de potències de f al voltant del punt a .

2. Calculeu la sèrie de potències de f al voltant de a . ◁

4.5.5. a) Es pot desenvolupar $\sqrt{z}$ en sèrie de potències en un entorn de l'origen?

b) Quin és el disc màxim centrat a 0 on es pot desenvolupar $\cos(1/(z-1))$ en sèrie de potències?

c) I la funció $\frac{1}{2-z} + \frac{z}{3-z}$? ◁

4.5.6. Determineu com a mínim els coeficients a_1, a_2, a_3, a_4 de la sèrie de Taylor de $1/(1+z+z^4)$ centrada a l'origen. Expliqueu perquè el radi de convergència és com a mínim $2/3$. ◁

4.5.7. Vegem com el teorema 4.24 és propi de l'anàlisi complexa. Una funció de variable real f és analítica en un interval obert $I \subset \mathbb{R}$ si es pot expressar localment com a sèrie de potències amb coeficients reals. Demostreu que si f és analítica en I aleshores hi és derivable. Trobeu una funció infinites vegades derivable en $\mathbb{R}$ que no hi sigui analítica. Trobeu una funció f analítica en $\mathbb{R}$ que tingui radi de convergència 1. ◁

⁷Isaac Newton, Woolsthorpe-by-Colsterworth, Lincolnshire, 1642 – 1727. https://ca.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

4.6. Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades i desigualtats de Cauchy

Com que també sabem que $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ (vegeu l'observació 3.31), obtenim el següent resultat.

Lema 4.26 (Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$ i sigui $a \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Notem que el requisit que la circumferència estigui centrada en a serà relaxat en el corollari 4.40.

Exemple 4.27. Calculem

$$I = \int_{|z-1|=1} \frac{ze^z}{(z-1)^2} dz.$$

La funció $f(z) = ze^z$ és entera. Llavors, per la fórmula integral de Cauchy per derivades, tenim que

$$I = \int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1) = 4\pi i e.$$

◇

Lema 4.28 (Desigualtats de Cauchy). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$, i sigui $a \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M_r}{r^n}, \quad n \geq 0,$$

on $M_r = \sup_{|z-a|=r} |f(z)| = \max_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Observació 4.29. En particular, tenim que $|f(a)| \leq \max_{|z-a|=r} |f(z)|$. •

Demostració. Aplicant la fórmula integral de Cauchy per derivades, tenim que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Per tant

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|w-a|=r} \frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}} |dw| = \frac{n!}{2\pi r^{n+1}} \int_{|w-a|=r} |f(w)| |dw| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi r^{n+1}} M_r L(\{|w-a|=r\}) = \frac{n! M_r}{r^n}. \end{aligned}$$

□

Observació 4.30. La desigualtat no es pot millorar. Per exemple, sigui $f(z) = z^n$, $a = 0$ i $r = 1$. En aquest cas, $M = M_1 = \max_{|z|=1} |f(z)| = 1$, i també tenim que $f^{(n)}(0) = n!$, així que $|f^{(n)}(0)| = n! M$. •

Exercicis

4.6.1. Donat $r > 0$ i $a \in \mathbb{C}$, calculeu

$$I = \int_{|z-a|=r} \frac{e^{2z}}{(z-a)^3} dz. \quad \triangleleft$$

4.6.2. Siguin $0 \leq m \leq n$ enters. Calculeu

$$\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{m+1}} dz. \quad \triangleleft$$

4.6.3. Intentarem calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ fent servir la fórmula integral de Cauchy per derivades.

a) Considereu la semicircumferència C en el semiplà superior centrada a 0 amb radi R i tancada pel segment de l'eix OX . Calculeu $\int_C \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$.

b) Descomponeu $C = C_1 \cup C_2$ on C_1 és el segment de $-R$ a R i C_2 la part restant de C . Doneu una fita superior de $\left| \int_{C_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \right|$ fent servir la desigualtat triangular per integrals.

c) Fent servir els apartats anteriors calculeu $\int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$. Que passa si R tendeix a infinit? $\triangleleft$

4.6.4. Siguin $\alpha > 0$ i $f \in H(\mathbb{D})$ tal que existeix $c > 0$ i per a tot $|z| < 1$, $(1-|z|)^\alpha |f(z)| \leq c$. Demostreu que per a tot $n \geq 0$, $|f^{(n)}(0)| \leq cn! \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha (n+\alpha)^\alpha$. $\triangleleft$

4.6.5. Siguin f una funció entera de manera que existeixen constants $C, M > 0$ tals que $|f(z)|e^{-C|z|} \leq M$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Demostreu que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leq CM$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.
Indicació: Apliqueu la desigualtat de Cauchy al cercle centrat a z i de radi r per provar que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leq \frac{M}{r} e^{Cr}$ per a tot $r > 0$ i $z \in \mathbb{C}$. Avalueu a $r = 1/C$. $\triangleleft$

4.6.6. (a) Supposem que una funció f entera satisfà que $|f(z)| \leq M_R$ si $|z| = R$. Demostreu que els coeficients c_k de la seva sèrie de Taylor centrada a $a = 0$ compleixen

$$|c_k| \leq \frac{M_R}{R^k}.$$

(b) Supposem que el mòdul d'un polinomi $P(z)$ està fitat per 1 pels z al disc unitat. Demostreu que tots els coeficients de P tenen mòdul fitat per 1. $\triangleleft$

4.6.7. Proveu que si $f \in H(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \leq |e^{iz}|$ per a tot $z \in \mathbb{D}$, aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! e. \quad \triangleleft$$

4.7. Teorema de Liouville i teorema fonamental de l'àlgebra

Teorema 4.31 (Teorema de Liouville). *Tota funció entera i fitada és constant.*

Demostració. Sigui $z \in \mathbb{C}$. Per a tot $R > 0$, tenim que $\overline{D_R(z)} \subset \Omega = \mathbb{C}$ i $f \in H(\mathbb{C})$. Com que $|f(w)| \leq M$ per a tot $w \in \mathbb{C}$, aplicant les desigualtats de Cauchy amb $n = 1$, obtenim

$$|f'(z)| \leq \frac{1!M}{R} \rightarrow 0$$

quan $R \rightarrow \infty$, ja que M no depèn de R . Per tant $f'(z) = 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$, i f és constant. $\square$

Corol·lari 4.32. *Si f és entera amb $\operatorname{Re} f \geq 0$, llavors f és constant.*

Demostració. En efecte, considerem la funció entera $g(z) = e^{-f(z)}$. Llavors

$$|g(z)| = e^{-\operatorname{Re} f(z)} \leq e^0 = 1,$$

de manera que g és entera i fitada. Pel teorema de Liouville, g és constant. Com que g és constant i $g = e^{-f}$ no s'anul·la, derivant obtenim

$$0 = g' = -f'e^{-f},$$

i per tant $f' \equiv 0$. Així f és constant. $\square$

El teorema fonamental de l'àlgebra ja havia aparegut al capítol inicial com una de les grans motivacions per introduir els nombres complexos. Ara en podem donar una demostració curta i elegant a partir del teorema de Liouville, mostrant com una propietat analítica de les funcions enteres implica un resultat algebraic fonamental.

Teorema 4.33 (Teorema fonamental de l'àlgebra). *Donat un polinomi (holomorf) no constant P , existeix $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.*

Demostració. Suposem que $P(z) \neq 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Aleshores la funció $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ és entera. Si veiem que és fitada, aplicant el teorema de Liouville arribarem a contradicció. Si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ amb $a_n \neq 0$, llavors

$$|P(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \rightarrow +\infty$$

quan $|z| \rightarrow +\infty$, així que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$, fet que implica que f és fitada pel teorema de Weierstrass de Càlcul en Diverses Variables. Com que f és entera i fitada, pel teorema de Liouville, f ha de ser constant, de manera que P és constant! $\square$

Corol·lari 4.34 (Teorema fonamental de l'àlgebra, versió 2). *Tot polinomi de grau n té exactament n arrels complexes (comptant multiplicitats).*

Demostració. Sabem que P té un zero, diem α_1 . Llavors $P(z) = (z - \alpha_1)P_1(z)$, on P_1 és un polinomi de grau $n - 1$, que també té un zero si $n \geq 2$. Iterant aquest procés obtenim el resultat. $\square$

Exercicis

4.7.1. La funció $f(z) = 1/z^2$ tendeix a 0 quan $z \rightarrow \infty$ però no és una funció constant. Contradiu això el teorema de Liouville? $\triangleleft$

4.7.2. Sigui f una funció entera. Usant el teorema de Liouville proveu que

(a) Si $|f| \geq 1$, llavors f és constant.

(b) Si $\operatorname{Re} f \geq 0$, llavors f és constant.

(c) Si $\operatorname{Im} f \leq 1$, llavors f és constant. $\triangleleft$

(d) Si $\operatorname{Re} f$ no té zeros, llavors f és constant.

4.7.3. Caracteritzeu les funcions enteres f tals que $|f'(z)| \leq |z|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. $\triangleleft$

4.7.4. Suposem que f és entera. Provar que si $f^{(4)}(z)$ és fitada en el pla llavors f és un polinomi de grau 4 com a màxim. $\triangleleft$

4.7.5. Sigui f una funció entera. Per a $|a| < R$ i $|b| < R$ calculeu

$$I = \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

Useu el resultat per demostrar el teorema de Liouville. $\triangleleft$

4.7.6. Sigui f una funció entera tal que $|f(z)| \leq Ce^{\operatorname{Re} z}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$, on $C > 0$ és una constant. Què es pot dir de f ? $\triangleleft$

4.7.7. Sigui f una funció entera tal que $|f'(z)| < |f(z)|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Què podem dir de f ? $\triangleleft$

4.8. Teorema de Morera

El teorema de Morera es pot veure com una mena de recíproc del teorema de Cauchy-Goursat: si una funció contínua té integrals nul·les sobre tots els triangles, aleshores necessàriament és holomorfa.

Teorema 4.35 (Teorema de Morera). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in C(\Omega)$. Si per a tot triangle $T \subset \Omega$, es té

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0,$$

llavors f és holomorfa en Ω .

Demostració. Si resseguim la prova del teorema de Cauchy per un disc, veurem que hem provat que si $D \subset \Omega$ és un disc obert, $f \in C(D)$ i $\int_{\partial T} f = 0$ per a tot triangle $T \subset D$, llavors f té primitiva holomorfa en D .

Fixem $z_0 \in \Omega$, i prenem $r > 0$ de manera que $D_r(z_0) \subset \Omega$. Llavors f té primitiva F holomorfa en $D_r(z_0)$, així que $f = F'$ és holomorfa en z_0 pel corollari 4.25. $\square$

Corollari 4.36 (Evitabilitat d'un punt). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{p\})$. Llavors $f \in H(\Omega)$.*

Demostració. Pel teorema de Cauchy-Goursat, tenim que $\int_{\partial T} f = 0$ per a tot triangle $T \subset \Omega$, i aplicant el teorema de Morera, se segueix que f és holomorfa en Ω . $\square$

Teorema 4.37 (Principi de reflexió de Schwarz⁸). *Sigui Ω un domini simètric respecte de l'eix real, i anomenem $\Omega_+ = \Omega \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ i $\Omega_- = \Omega \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$. Sigui $g \in H(\Omega_+)$ tal que per tot $x \in \mathbb{R} \cap \Omega$ existeix $g(x) := \lim_{\Omega_+ \ni z \rightarrow x} g(z)$ i $g(x) \in \mathbb{R}$. Aleshores la funció*

$$f(z) := \begin{cases} g(z) & \text{si } z \in \Omega_+ \\ g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \cap \Omega \\ \overline{g(\bar{z})} & \text{si } z \in \Omega_- \end{cases}$$

satisfà que $f \in H(\Omega)$.

Demostració. Que $f \in C(\Omega)$ és un exercici (vegeu l'exercici 4.8.1). Per veure que f és holomorfa n'hi ha prou amb veure que integra zero en triangles, en el sentit del teorema de Morera.

Notem que $f \in H(\Omega_-)$ per la regla de la cadena (vegeu l'observació 3.25, el lema 3.24 i l'exemple 3.18), ja que per $z \in \Omega_-$ tenim que

$$\bar{\partial} f(z) = \overline{\partial \bar{f}(z)} = \overline{\partial g(\bar{\cdot})(z)} = \overline{\partial g(\bar{z}) \cdot 1} = 0.$$

Per veure que la integral

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

s'anul·la en triangles que intersequin amb la recta real, n'hi ha prou amb veure que s'anul·la en rectangles continguts en $\Omega_- \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$ o en $\Omega_+ \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$ i amb un costat contingut en la recta real, així com per triangles amb només un vèrtex sobre la recta real, vegeu la figura 4.5. Ara, aquesta integral s'anul·la en quadrilàters continguts en Ω_- o en Ω_+ per l'holomorfia de f en aquests dos dominis (i de Cauchy-Goursat), i per pas al límit obtenim el mateix per aquests casos. Deixem els detalls pel lector. $\square$

Teorema 4.38 (Teorema de Weierstrass (d'anàlisi complexa)). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i sigui $\{f_n\}$ una successió de funcions de $H(\Omega)$ de manera que $f_n \rightarrow f$ uniformement sobre els compactes d' Ω . Llavors $f \in H(\Omega)$, i $f'_n \rightarrow f'$ uniformement sobre els compactes d' Ω .*

⁸Karl Hermann Amandus Schwarz, Sobieszów, 1843–1921. https://ca.wikipedia.org/wiki/Hermann_Schwarz

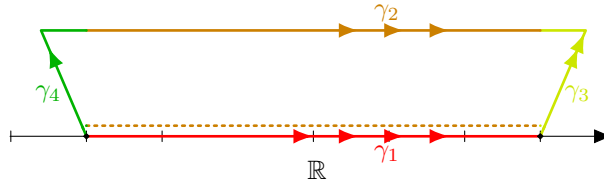


Figura 4.5.: Per acabar la demostració del principi de reflexió de Schwarz, només cal veure que $\int_{\gamma_2} f(z) dz \rightarrow \int_{\gamma_1} f(z) dz$ i $\int_{\gamma_j} |f(z)| |dz| \rightarrow 0$ per $j \in \{3, 4\}$ quan fem petita la component vertical de γ_2 .

Demostració. Com que $f_n \in H(\Omega) \subset C(\Omega)$ i $f_n \rightarrow f$ uniformement sobre compactes, se segueix que $f \in C(\Omega)$. Llavors, pel teorema de Morera, per provar que $f \in H(\Omega)$, ens cal veure que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

per a tot triangle $T \subset \Omega$. Fixem $T \subset \Omega$ triangle. Com que $f_n \rightarrow f$ uniformement en el compacte ∂T , podem passar el límit a fora de la integral en el càlcul que segueix,

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{\partial T} \lim_n f_n(z) dz = \lim_n \int_{\partial T} f_n(z) dz = 0,$$

ja que, en ser f_n holomorfs en Ω , aplicant el teorema de Cauchy-Goursat, tenim que

$$\int_{\partial T} f_n(z) dz = 0.$$

Finalment, per veure que $f' = \lim_n f'_n$ i que la convergència és uniforme en compactes, n'hi ha prou amb veure que ho és en $K_\varepsilon = \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \Omega^c) \geq \varepsilon\} \cap \overline{D_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)}$ per $\varepsilon > 0$. Aleshores (sempre que $K_\varepsilon \neq \emptyset$), usem la fórmula integral de Cauchy per a derivades amb radi $r = \varepsilon/2$, i obtenim

$$\sup_{z_0 \in K_\varepsilon} |f'(z_0) - f'_n(z_0)| \stackrel{\text{L. 4.26}}{=} \sup_{z_0 \in K_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) - f_n(z)}{(z-z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{r} \sup_{K_{\varepsilon/2}} |f - f_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

suposant que ε és prou petit (fa falta ja que quan $z \in \partial D_r(z_0)$ tenim que $|z| \leq |z_0| + r \leq \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{2}{\varepsilon}$ i, per tant, $z \in K_{\varepsilon/2}$ si, per exemple $\varepsilon < 1$). $\square$

Exercicis

4.8.1. Demostreu la continuïtat de f en el principi de reflexió de Schwarz. $\triangleleft$

4.8.2. Sigui $f(z) = 1/z^2$. Comproveu que $\int_\gamma f(z) dz = 0$ per a tot camí tancat γ que no passi per 0, però f no és analítica en 0. Contradiu això el corollari 4.36 del teorema de Morera? $\triangleleft$

4.8.3. (a) Sigui h una funció contínua a $\mathbb{R}$ amb suport compacte (és a dir, existeix $K \subset \mathbb{R}$ compacte tal que $h(x) = 0$ si $x \notin K$) i sigui

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-itz} dt.$$

(Quan ens restringim a $z \in \mathbb{R}$, H s'anomena transformada de Fourier de h ; si prenem iz en el lloc de z , H s'anomena transformada de Laplace⁹ bilateral de h .) Proveu que H és una funció entera amb creixement exponencial: existeixen $A, C > 0$ tals que $|H(z)| \leq Ce^{A|\operatorname{Im} z|}$.

(b) Sigui h una funció contínua a $[0, 1]$. Demostreu que la seva transformada de Hilbert¹⁰

$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z} dt$$

és analítica per a $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$. ◁

4.8.4. Sigui f holomorfa en un obert Ω , i sigui $z_0 \in \Omega$ amb $f'(z_0) \neq 0$. Demostreu que existeix $r_0 > 0$ de manera que, per $0 < \varepsilon < r_0$, es compleix la identitat

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

Indicació: proveu primer que la funció G definida per

$$G(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

és holomorfa en Ω . ◁

4.9. Derivació sota el signe integral i fórmula integral de Cauchy per derivades

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors, per la fórmula integral de Cauchy, tenim que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz, \quad |z_0-a| < r.$$

També tenim la fórmula integral de Cauchy per derivades,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

⁹Pierre-Simon Laplace, Beaumont-en-Auge, 1749–1827. https://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace

¹⁰David Hilbert, Königsberg, 1862–1943. https://ca.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

Observem aquí una diferència: podem aplicar la fórmula integral de Cauchy per a tot $z_0 \in D_r(a)$; i en canvi en la versió per derivades només tenim l'enunciat per a $z_0 = a$, que és el centre del disc. Així doncs, una qüestió que ens apareix de manera natural és si en la fórmula integral de Cauchy per derivades, també podem agafar $z_0 \in D_r(a)$ igual que en la fórmula de Cauchy. La resposta és que sí, i l'obtindrem com a conseqüència del següent resultat, que té interès per si sol i que usarem per les demostracions de la teoria global de Cauchy. Notem que la fórmula integral de Cauchy per derivades no centrada també es pot obtenir usant la fórmula integral de Cauchy per derivades centrada i el teorema de Cauchy en convexos, vegeu l'exercici 4.9.2.

Teorema 4.39 (Derivació sota el signe d'integració). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, sigui $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camí i sigui $F : \Omega \times \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ una funció contínua. Si $F(\cdot, z)$ és holomorfa en Ω per a cada $z \in \gamma^* := \gamma([a, b])$, llavors la funció definida per*

$$f(w) = \int_{\gamma} F(w, z) dz, \quad w \in \Omega$$

és holomorfa en Ω amb

$$f'(w) = \int_{\gamma} \frac{\partial F}{\partial w}(w, z) dz, \quad w \in \Omega.$$

Abans de passar a la prova d'aquest teorema, apliquem-lo per provar la versió desitjada de la fórmula integral de Cauchy per derivades.

Corol·lari 4.40 (Fórmula integral de Cauchy per derivades). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors, per $n \in \mathbb{N}$,*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad \text{sempre que } |z_0 - a| < r.$$

Demostració. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors, com que f és holomorfa en Ω , per la fórmula integral de Cauchy tenim que

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{|z-a|=r} F(w, z) dz, \quad w \in D_r(a),$$

on

$$F(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-w)}.$$

Passarem a aplicar el teorema de derivació sota el signe integral amb $\Omega = D_r(a)$ i la corba $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Tenim que $\gamma^* = \gamma([0, 2\pi]) = \{z : |z - a| = r\}$. Com que $w \in D_r(a)$ i $|z - a| = r$, llavors F és contínua en $D_r(a) \times \gamma^*$. A més, per $z \in \gamma^*$ fixat, la funció $F_z(w) = F(w, z)$ és holomorfa en w . Així doncs, aplicant el teorema de derivació sota el signe integral, se segueix que

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz, \quad w \in D_r(a).$$

Iterant aquest raonament, obtenim que

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz, \quad |w-a| < r. \quad \square$$

Per provar el teorema 4.39, és suficient demostrar el següent cas particular.

Proposició 4.41. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $F : \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua. Si $F(w, s)$ és holomorfa en w per a tot $s \in [a, b]$, llavors la funció*

$$f(w) = \int_a^b F(w, s) ds$$

és holomorfa en Ω amb

$$f'(w) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial w}(w, s) ds, \quad w \in \Omega.$$

Demostrem ara el teorema de derivació sota el signe integral a partir de la proposició anterior.

Demostració del teorema 4.39. Podem suposar que γ és de classe C^1 . Llavors

$$\int_{\gamma} F(w, z) dz = \int_a^b F(w, \gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_a^b G(w, s) ds,$$

on $G(w, s) = F(w, \gamma(s)) \gamma'(s)$ que és clarament contínua en $\Omega \times [a, b]$ degut a la hipòtesi sobre F . També G és holomorfa en w per a tot $s \in [a, b]$. Per tant, aplicant la proposició, se segueix que f és holomorfa en Ω amb

$$f'(w) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial w}(w, s) ds = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial w}(w, \gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} \frac{\partial F}{\partial w}(w, z) dz. \quad \square$$

Demostració de la proposició. Podem suposar $a = 0$ i $b = 1$. Per $n \geq 1$, considerem la suma finita de funcions

$$f_n(w) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(w, \frac{k}{n}\right), \quad w \in \Omega.$$

Com que, per hipòtesi, les funcions $F\left(w, \frac{k}{n}\right)$ són holomorfes en w i en tenim una suma finita, se segueix que les funcions f_n són holomorfes en Ω .

Per veure que f és holomorfa en Ω , provarem que $f_n \rightarrow f$ uniformement sobre els compactes d' Ω , així que aplicant el teorema de Weierstrass (vegeu el teorema 4.38), obtindrem que $f \in H(\Omega)$, amb $f'(w) = \lim_n f'_n(w)$.

Sigui $K \subset \Omega$ compacte. Recordem que, si una funció és contínua en un compacte, aleshores hi és uniformement contínua. Per tant, en ser F contínua en el compacte $K \times [0, 1]$, donat $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ de manera que

$$\sup_{w \in K} \left| F(w, s_1) - F(w, s_2) \right| < \varepsilon, \quad \text{si } |s_1 - s_2| < \delta. \quad (4.4)$$

Observem que, com que $\frac{1}{n} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}$, tenim que

$$f_n(w) = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F\left(w, \frac{k}{n}\right) ds.$$

També

$$f(w) = \int_0^1 F(w, s) ds = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F(w, s) ds.$$

Aleshores, si $n > 1/\delta$ i $w \in K$,

$$\begin{aligned} |f_n(w) - f(w)| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(F\left(w, \frac{k}{n}\right) - F(w, s) \right) ds \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| F\left(w, \frac{k}{n}\right) - F(w, s) \right| ds \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) = \varepsilon, \end{aligned}$$

on hem aplicat (4.4), ja que per $s \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Obtenim $|s - \frac{k}{n}| < \frac{1}{n} < \delta$, ja que hem triat $n > 1/\delta$. Per tant,

$$\sup_{w \in K} |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon, \quad n > 1/\delta,$$

provant que $f_n \rightarrow f$ uniformement en compactes d' Ω i, per tant, f és holomorfa en Ω pel teorema de Weierstrass.

Fixem ara $w \in \Omega$ i prenem $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(w)} \subset \Omega$. Per la fórmula integral de Cauchy per derivades (la versió on prenem el centre del disc, que ja tenim provada), tenim que

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \left(\int_0^1 \frac{F(z, s)}{(z-w)^2} ds \right) dz,$$

i pel teorema de Fubini,

$$f'(w) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{F(z, s)}{(z-w)^2} dz \right) ds.$$

Ara, per tot $s \in [0, 1]$, la funció $F_s(w) = F(w, s)$ és holomorfa, i per la fórmula integral de Cauchy per la derivada, tenim que

$$\frac{\partial F}{\partial w}(w, s) = F'_s(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{F_s(z)}{(z-w)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{F(z, s)}{(z-w)^2} dz.$$

Per tant,

$$f'(w) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial w}(w, s) ds,$$

tal com volíem veure.

Per tal de justificar l'aplicació del teorema de Fubini, cal provar que

$$J := \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|z-w|=r} \frac{|F(z, s)|}{|z-w|^2} |dz| \right) ds < \infty.$$

Com que F és contínua en $\Omega \times [0, 1]$, en particular és contínua en el compacte $\partial D_r(w) \times [0, 1]$ i, per tant, fitada en aquest compacte. Llavors hi ha una constant $M > 0$ de manera que $|F(z, s)| \leq M$ per a tot z amb $|z - w| = r$ i tot $s \in [0, 1]$. Llavors

$$J = \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^1 \int_{|z-w|=r} |F(z, s)| |dz| ds \leq \frac{M}{2\pi r^2} \int_0^1 2\pi r ds < \infty. \quad \square$$

Exercicis

4.9.1. Avalueu, usant la fórmula de Cauchy per a les derivades

$$a) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z - 1/2)^2} dz. \quad b) \int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{(3z - 2)^4} dz. \quad c) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} e^{e^{i\theta}} d\theta. \quad \triangleleft$$

4.9.2. Demostreu la fórmula integral de Cauchy per derivades no centrada usant la fórmula integral de Cauchy per derivades centrada i el teorema de Cauchy en convexos. $\triangleleft$

4.10. Zeros de funcions holomorfes i principi de prolongació analítica

Tot seguit estudiem el conjunt de punts on una funció holomorfa donada val zero, l'anomenat *conjunt de zeros* de la funció. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in H(\Omega)$, i escrivim

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

Proposició 4.42. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si existeix $a \in \Omega$ de manera que $f^{(n)}(a) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, llavors $f \equiv 0$.

Demostració. Sigui

$$A = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0 \text{ per a tot } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Tenim que A és no buit ja que $a \in A$. Vegem que A és relativament tancat en Ω . Donada una successió $\{b_k\} \subset A$ amb $b_k \rightarrow b \in \Omega$, volem provar que $b \in A$. Com que cada $f^{(n)}$ és contínua i $b_k \in A$, tenim que

$$f^{(n)}(b) = f^{(n)}(\lim_k b_k) = \lim_k f^{(n)}(b_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad b \in A.$$

Per tant A és tancat en Ω . Vegem que A és obert. Sigui $b \in A$. Com que tota funció holomorfa és localment una sèrie de potències, podem trobar $r > 0$ amb $\overline{D_r(b)} \subset \Omega$ i

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n = 0, \quad z \in D_r(b).$$

Com que $f(z) = 0$ per a tot $z \in D_r(b)$, se segueix que $D_r(b) \subset A$ així que A també és obert.

Com que Ω és connex, i A és no buit, i obert i tancat en Ω a la vegada, se segueix que $A = \Omega$ i $f \equiv 0$ en Ω . $\square$

Teorema 4.43 (Ordre dels zeros). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$ amb $f \not\equiv 0$. Per a tot $z_0 \in Z(f)$ hi ha un únic $m \in \mathbb{N}$ (anomenat l'ordre o multiplicitat del zero z_0) de manera que*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad z \in \Omega,$$

on $g \in H(\Omega)$ amb $g(z_0) \neq 0$.

Demostració. Com que tota funció holomorfa és localment una sèrie de potències, podem trobar $r > 0$ amb $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$ i tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in D_r(z_0).$$

Sabem que $a_0 = f(z_0) = 0$. Sigui m el mínim nombre natural amb $a_m \neq 0$ (aquest mínim existeix per la proposició anterior, ja que $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$). Tenim que

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m h(z), \quad z \in D_r(z_0),$$

amb

$$h(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{k \geq 0} a_{m+k}(z - z_0)^k, \quad z \in D_r(z_0),$$

que és holomorfa en $D_r(z_0)$ amb $h(z_0) \neq 0$. Finalment, definint

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} & \text{si } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ h(z_0) & \text{si } z = z_0, \end{cases}$$

tenim que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = a_m = h(z_0) \neq 0$, g és holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$ i g és contínua en z_0 i, per tant, holomorfa en tot Ω , vegeu el corollari 4.36. $\square$

Exemple 4.44. Trobem la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció

$$f(z) = 6 \sin(z^3) + z^9 - 6z^3.$$

Tenim que

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \mathcal{O}(z^7),$$

vegeu l'observació 3.3. Per tant,

$$\sin(z^3) = z^3 - \frac{z^9}{6} + \frac{z^{15}}{5!} + \mathcal{O}(z^{21}),$$

així que

$$f(z) = 6 \sin(z^3) + z^9 - 6z^3 = \frac{6z^{15}}{5!} + o(z^{20})$$

i, per tant, $z = 0$ té ordre o multiplicitat 15, vegeu la figura 4.6.

◇

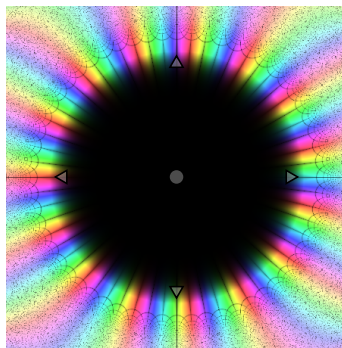


Figura 4.6.: Representació del zero d'ordre 15 de $f(z) = 6 \sin(z^3) + z^9 - 6z^3$, vegeu l'exemple 4.44.

Corol·lari 4.45 (Aïllament dels zeros). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$ amb $f \not\equiv 0$. Llavors els zeros de f són aïllats.*

Demostració. Sigui $z_0 \in Z(f)$. Pel teorema anterior existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ amb $g \in H(\Omega)$ i $g(z_0) \neq 0$. Per continuïtat, existeix $\varepsilon > 0$ de manera que $g(z) \neq 0$ per $z \in D_\varepsilon(z_0)$, així que $f(z) \neq 0$ si $z \in D_\varepsilon(z_0)$ amb $z \neq z_0$. □

Recordem que z_0 és un punt d'acumulació d'un conjunt A si hi ha una successió $(z_n)_n \subset A \setminus \{z_0\}$ amb $z_n \rightarrow z_0$.

Teorema 4.46 (Principi de prolongació analítica). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si $Z(f)$ té un punt d'acumulació en Ω , aleshores $f \equiv 0$ en Ω .*

Demostració. Sigui $z_0 \in \Omega$ punt d'acumulació de $Z(f)$, és a dir, hi ha $z_n \in Z(f)$ amb $z_n \rightarrow z_0$. Com que f és contínua, llavors $f(z_0) = \lim_n f(z_n) = 0$, i $z_0 \in Z(f)$, pel que z_0 és un zero de f que no és aïllat. Com que sabem que els zeros d'una funció holomorfa no idènticament nul·la són aïllats, això implica que $f \equiv 0$. □

Corol·lari 4.47 (Numerabilitat dels zeros). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa, no idènticament zero. Llavors el conjunt de zeros de f és un conjunt finit o numerable.*

Demostració. Podem escriure $\Omega = \bigcup_n K_n$, on $K_n := \{z \in \mathbb{C}; d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\} \cap \overline{D_n(0)}$. Llavors, per a cada n , K_n és compacte (tancat i fitat a $\mathbb{C}$). Donat que f no és idènticament zero, els zeros són aïllats, i es compleix en particular que $Z(f) \cap K_n$ és finit (si no hi hauria un punt d'acumulació), així que

$$Z(f) = \bigcup_n (Z(f) \cap K_n)$$

és finit o numerable en ser unió numerable de conjunts finits. $\square$

Observació 4.48. En cas que f tingui un número infinit de zeros, aquests s'han d'acumular a la frontera d' Ω . Si f és entera, llavors els zeros s'acumulen a $\{\infty\}$. Per exemple, els zeros de $f(z) = \sin z$ són $k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. •

El principi de prolongació analítica s'aplica moltes vegades en la forma següent:

Corol·lari 4.49 (Principi de prolongació analítica, versió 2). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f, g \in H(\Omega)$. Si $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ té un punt d'acumulació en Ω , aleshores $f \equiv g$ en Ω .*

Demostració. Apliquem el principi de prolongació analítica a la funció holomorfa $h = f - g$, i obtenim el resultat, ja que $Z(h) = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$. $\square$

En particular, si Ω és connex i $f, g \in H(\Omega)$ coincideixen en, per exemple, un obert, o bé un arc, o una recta, o un cercle, o un segment; llavors $f \equiv g$ en Ω .

Exemple 4.50. Cerquem totes les funcions $f \in H(\mathbb{D})$ amb $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2+1}$, per a tot $n \in \mathbb{N}$ amb $n > 1$. Observem que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}.$$

Llavors la funció $g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ és holomorfa en $\mathbb{D}$ i compleix que $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2+1}$, i deduïm que $f, g \in H(\mathbb{D})$ amb $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$. Com que $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \in \mathbb{D}$ i $\mathbb{D}$ és connex, llavors aplicant el principi de prolongació analítica, obtenim que

$$f(z) = g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad \diamond$$

Exercicis

4.10.1. Trobeu els zeros, amb l'ordre corresponent, de les següents funcions:

$$a) \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}; \quad b) z^2 \sin z; \quad c) \frac{1}{z} + \frac{1}{z^5}. \quad \triangleleft$$

4.10.2. Trobeu la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció entera $f(z) = 2 \cos z^3 + z^6 - 2$. $\triangleleft$

4.10.3. Trobeu tots els zeros de les següents funcions holomorfes i calculeu-ne les seves multiplicitats:

$$a) f(z) = z^2(e^{z^2} - 1); \quad b) f(z) = \frac{z^2 - \pi^2}{z} \sin z; \quad c) f(z) = (\sqrt{z} - 2)^3.$$

Aquí $\sqrt{\cdot}$ és la determinació de l'arrel quadrada en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ que val -1 en $z = 1$. $\triangleleft$

4.10.4. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini. Demostreu que l'anell de funcions holomorfes $H(\Omega)$ és un domini d'integritat, és a dir, si $f, g \in H(\Omega)$ amb $fg \equiv 0$ aleshores $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$. $\triangleleft$

4.10.5. Sigui $\{a_n\}_n$ una successió estrictament decreixent de nombres reals $a_n \in (0, 1)$ i tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}$. Demostreu que:

(a) Si $f(a_n) \in \mathbb{R}$ per a tot n , aleshores $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ per a tot $z \in \mathbb{D}$.

(b) Si a més $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$ per a tot n , aleshores f és constant. $\triangleleft$

4.10.6. Trobeu totes les funcions holomorfes a $\mathbb{D}$ tals que:

(a) $|f(1/n)| \leq 1/2^n$, per a tot nombre natural $n \geq 2$.

(b) $f(1/n) = \ln(1 + n^3) - 3 \ln n$ per a $n > 1$. $\triangleleft$

4.10.7. Trobeu totes les funcions f holomorfes en el disc $D_2(0)$ tals que $f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ per a tot $\theta \in [0, 2\pi)$, i a més $f(0) = 0$. $\triangleleft$

4.10.8. (a) Sigui f una funció entera tal que existeixen constants $n \in \mathbb{N}$, $C > 0$ i $R > 0$ tals que $|f(z)| \leq C|z|^n$, per a $|z| \geq R$. Demostreu que f és un polinomi de grau més petit o igual que n .

(b) Deduïu que si f és una funció entera amb $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$, llavors f és un polinomi.

Indicació: Demostreu que f només té un nombre finit de zeros $a_1, \dots, a_n$ (comptant multiplicitats) i apliqueu l'apartat (a) a la funció $F = P/f$, on $P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$. $\triangleleft$

4.10.9. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (obert connex) tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Suposem que tenim $f, g, h \in H(\Omega)$ i $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tals que per $x + iy \in \Omega$ tenim

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

i per $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$ tenim

$$u(x, 0) = g(x) \quad v(x, 0) = h(x).$$

Demostreu que

$$f(z) = g(z) + ih(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

◁

4.11. El principi del mòdul màxim

Una característica de les funcions holomorfes és que no poden tenir màxims absoluts en el seu domini de definició. Podem observar el contrast amb l'anàleg real: existeixen moltes funcions derivables amb màxims absoluts en l'interior del domini de definició com, per exemple, la funció $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 1 - x^2$ que té un màxim absolut en $x = 0$.

Teorema 4.51 (Principi del mòdul màxim). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ té un màxim absolut en Ω , llavors f és constant.

Demostració. Sigui $z_0 \in \Omega$ amb $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ per a tot $z \in \Omega$. Posem

$$A = \{z \in \Omega : |f(z)| = |f(z_0)|\}.$$

Es compleix que A és no buit ja que $z_0 \in A$. Com que Ω és connex, si veiem que A és obert i tancat en Ω , tindrem que $A = \Omega$, que implica que $|f|$ és constant i, per l'exercici 3.2.6, també f és constant. Ja sabem que A és tancat en Ω , ja que $|f|$ és contínua i $A = (|f|)^{-1}(x_0)$ amb $x_0 = |f(z_0)|$.

Vegem que A és obert. Donat $a \in A$, volem trobar $r > 0$ de manera que $D_r(a) \subset A$. Sigui $r > 0$ tal que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Per la propietat de la mitjana, es compleix llavors que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + se^{it}) dt, \quad 0 < s \leq r.$$

Per tant, com que $a \in A$, obtenim

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + se^{it})| dt \leq |f(z_0)| = |f(a)|, \quad 0 < s \leq r.$$

Com que $|f|$ és contínua i $|f(a + se^{it})| \leq |f(a)|$ per a tot $t \in [0, 2\pi]$, es verifica que

$$|f(a)| = |f(a + se^{it})|, \quad \forall t \in [0, 2\pi], \quad 0 < s \leq r.$$

És a dir, $D_r(a) \subset A$.

□

Passem ara a veure algunes conseqüències, que quan les apliquem, seguirem dient que apliquem el principi del mòdul màxim.

Corol·lari 4.52 (Principi del mòdul màxim, versió 2). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert fitat, i $f \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Llavors el màxim de $|f|$ s'assoleix a la frontera $\partial\Omega$.*

Demostració. Com que Ω és fitat, llavors $\overline{\Omega}$ és un tancat i fitat de $\mathbb{C}$ i, per tant, compacte. Com que $|f|$ és contínua en el compacte $\overline{\Omega}$, llavors $|f|$ té un màxim absolut en un punt a de $\overline{\Omega}$. En cas que $a \in \partial\Omega$, ja hem acabat. Si, en canvi, $a \in \Omega$, pel principi del mòdul màxim, llavors f és constant, així que, $|f(z)| = |f(a)|$ en Ω i, per continuïtat, $|f|$ assoleix el màxim en tot punt de la frontera. $\square$

Corol·lari 4.53 (Principi del mòdul màxim, versió 3). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ té un màxim local en Ω , llavors f és constant.*

Demostració. Per hipòtesi, hi ha $a \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $|f(z)| \leq |f(a)|$ per a tot $z \in D_r(a)$. Com que $f \in H(D_r(a))$ i $|f|$ té un màxim absolut en $D_r(a)$, pel principi del mòdul màxim, se segueix que f és constant en $D_r(a)$ i, en ser Ω connex, aplicant el principi de prolongació analítica obtenim que f és constant en Ω . $\square$

Lema 4.54 (Lema de Schwarz). *Sigui $f : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ una funció holomorfa tal que $f(0) = 0$. Aleshores*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{per tot } z \in \mathbb{D},$$

i $|f'(0)| \leq 1$. Si es compleix la igualtat $|f(z_0)| = |z_0|$ en algun punt $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ o bé la igualtat $|f'(0)| = 1$, aleshores $f(z) = \lambda z$ per algun $\lambda \in \partial\mathbb{D}$.

Demostració. Suposem $f \not\equiv 0$. Sabem que $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ és analítica, i $|g(z)| \leq \frac{1}{|z|}$. Pel principi del mòdul màxim,

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r} \quad \text{en } D_r(0).$$

Fent $r \rightarrow 1$ deduïm la primera desigualtat. A més, $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

Si es produeix alguna igualtat $|f(z_0)| = |z_0|$ amb $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ (respectivament $|f'(0)| = 1$), aleshores g assoleix un extrem del mòdul en z_0 (respectivament en 0) i, per tant, g és constant. $\square$

Exemple 4.55. Vegem que, per a tot polinomi holomorf P , tenim que

$$\sup_{|z|=1} \left| P(z) - \frac{1}{z} \right| \geq 1.$$

Aquest resultat ens diu que la funció $\frac{1}{z}$ no es pot aproximar uniformement per polinomis holomorfs en el compacte $S^1 = \{|z| = 1\}$.

Observem primer que

$$\sup_{|z|=1} \left| P(z) - \frac{1}{z} \right| = \sup_{|z|=1} \frac{|zP(z) - 1|}{|z|} = \sup_{|z|=1} |zP(z) - 1|.$$

En ser la funció $h(z) = zP(z) - 1$ entera, pel principi del mòdul màxim

$$1 = |h(0)| \leq \sup_{|z|=1} |h(z)| = \sup_{|z|=1} \left| P(z) - \frac{1}{z} \right|. \quad \diamond$$

Una altra propietat rellevant de les funcions holomorfes (no constants) és que envien oberts a oberts. Aquesta propietat no val per a funcions de variable real (tan regulars com vulguem). Per exemple, la imatge de la funció $f(x) = x^2$ de l'interval obert $(-1, 1)$ és $[0, 1)$ que no és obert.

Teorema 4.56 (Teorema de l'aplicació oberta). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$ no constant. Aleshores f és oberta. És a dir, si U és un obert d' Ω , llavors $f(U)$ és obert.*

Demostració. Sigui $U \subset \Omega$ obert, i $z_0 \in U$. Per veure que $f(U)$ és obert, volem trobar un entorn de $w_0 := f(z_0)$ dins de $f(U)$. Considerem la funció

$$g(z) = f(z) - w_0, \quad z \in \Omega.$$

Com que $g(z_0) = 0$ i els zeros de les funcions holomorfes són aïllats, en ser f no constant, podem trobar $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ amb $g(z) \neq 0$ per a tot $z \in \overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$.

Sigui $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ amb $0 \leq t \leq 2\pi$, de manera que $\gamma^* = \partial D_r(z_0)$. Llavors $0 \notin (g \circ \gamma)^*$, on $g \circ \gamma$ denota la imatge per g de la corba γ . Per tant

$$\delta = \inf_{z \in \gamma^*} |g(z)| > 0.$$

És a dir,

$$|g(z)| \geq \delta, \quad |z - z_0| = r.$$

Passarem a provar que $D_{\delta/2}(w_0) \subset f(U)$.

Suposem que $w \in D_{\delta}(w_0) \setminus f(U)$. Això implica que la funció

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w} \quad (4.5)$$

és holomorfa en U . Pel principi del mòdul màxim, tenim que

$$|h(z_0)| \leq \sup_{z \in \gamma^*} |h(z)|. \quad (4.6)$$

(Aquesta desigualtat també es pot obtenir fent servir la propietat de la mitjana, per exemple). Com que $|g(z)| \geq \delta > |w - w_0|$ per $z \in \gamma^*$, tenim que

$$\begin{aligned} |h(z)| &= \frac{1}{|f(z) - w|} = \frac{1}{|f(z) - w_0 + (w_0 - w)|} \leq \frac{1}{|g(z)| - |w - w_0|} \\ &\leq \frac{1}{\delta - |w - w_0|}, \quad z \in \gamma^*. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\frac{1}{|w - w_0|} \stackrel{(4.5)}{=} |h(z_0)| \stackrel{(4.6)}{\leq} \frac{1}{\delta - |w - w_0|} \Rightarrow |w - w_0| \geq \frac{\delta}{2},$$

és a dir, $w \notin D_{\delta/2}(w_0)$. Concloem doncs que $D_{\delta/2}(w_0) \subset f(U)$ i, com que w_0 és un punt arbitrari de $f(U)$ i $U \subset \Omega$ un obert arbitrari, f és oberta. $\square$

Exercicis

4.11.1. Cerqueu l'enunciat del teorema de Stone¹¹-Weierstrass i compareu-lo amb l'exemple 4.55. ◁

4.11.2. Trobeu el màxim de:

a) $|\cos z|$ i $|\sin z|$ a $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

b) $|e^z|$ i $|e^{z^2}|$ a $|z| \leq 1$. ◁

4.11.3. Trobeu totes les funcions holomorfes en $\mathbb{D}$ tals que $f(1/2) = 3$ i $|f(z)| \leq 3$ si $|z| < 1$. ◁

4.11.4. Considereu $f(z) = e^{\cos(z)} z^2$ i el disc D de radi 2 centrat a 5. Proveu que $f(z)$ assoleix el valor màxim i mínim del mòdul en $\overline{D}$ a la frontera. Indicació: considereu $1/f(z)$. ◁

4.11.5. Sigui f una funció holomorfa en el disc $D_R(0)$, $R > 0$. Definim

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < R.$$

Demostreu que si f no és constant, aleshores $M(r)$ és estrictament creixent a $[0, R)$. ◁

4.11.6. Sigui f una funció holomorfa en un obert connex Ω i D un disc obert tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Supposeu que $|f(z)| = c$ per tot $z \in \partial D$, on c és una constant. Proveu que f té almenys un zero en D o bé f és constant en Ω . Indicació: Distingiu segons si $c = 0$ o $c > 0$. En el segon cas, proveu que si f no té zeros en D , aleshores f és constant en D . ◁

4.11.7. Sigui f una funció holomorfa i no constant en un obert connex $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supposeu que existeix $a \in \Omega$ tal que $|f(a)| \leq |f(z)|$ per a tot $z \in \Omega$. Proveu que aleshores $f(a) = 0$. ◁

4.11.8. Sigui $f \in H(\Omega)$ en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $f \circ f = f$. Demostreu que o bé f és constant, o bé és la identitat. ◁

4.11.9. Sigui $f \in H(\mathbb{C})$ no constant. Demostreu que, per a tot $c > 0$,

$$\overline{\{z; |f(z)| < c\}} = \{z; |f(z)| \leq c\}. \quad \triangleleft$$

¹¹Marshall Harvey Stone, New York City, 1903–1989. https://en.wikipedia.org/wiki/Marshall_H._Stone