

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Un cop hem estudiat la teoria local de Cauchy, el proper objectiu és estudiar propietats globals de les funcions holomorfes. Mitjançant la versió global del teorema de Cauchy, estudiarem la relació entre l'holomorfia d'una funció i la topologia del domini on està definida. Per a donar aquesta versió global, cal estudiar un concepte topològic, el de cicle homòleg a zero. Al següent capítol veurem aplicacions importants de la teoria global, entre les quals es troben el teorema dels residus, que ens permetrà calcular molts tipus d'integrals, o el principi de l'argument i teorema de Rouché que controlen els zeros de les funcions holomorfes.

5.1. Índex d'una corba tancada respecte d'un punt

Comencem amb la noció d'índex d'una corba tancada γ respecte d'un punt z_0 , $\text{Ind}(\gamma, z_0)$. Intuïtivament, $\text{Ind}(\gamma, z_0)$ compta el nombre de voltes que ha de donar sobre si mateix un observador col·locat en el punt z_0 per a resseguir la corba, vegeu la figura 5.1.

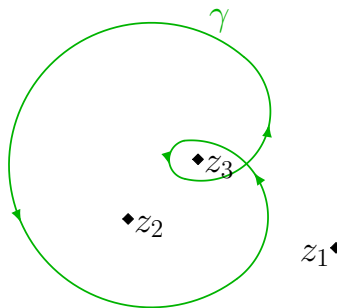


Figura 5.1.: Tenim $\text{Ind}(\gamma, z_1) = 0$, ja que des de z_1 podem observar tot el camí sense haver de “girar” sobre nosaltres mateixos. En canvi, $\text{Ind}(\gamma, z_2) = 1$ perquè ens cal fer una volta si som a z_2 , i $\text{Ind}(\gamma, z_3) = 2$ perquè ens cal fer dues voltes per resseguir el camí amb la mirada si ens situem a z_3 . Vegeu l'observació 5.3.

Abans de donar la definició, necessitem el següent resultat:

Proposició 5.1. 1. *Siguin $a, w_0 \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ tals que $D_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sigui $z_0 \in D_r(a)$ tal que $e^{w_0} = z_0$. Llavors existeix una única determinació del logaritme en $D_r(a)$, $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{L}(z_0) = w_0$.*

2. Sigui $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ contínua i $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{w_0} = \gamma(a)$. Llavors existeix una única determinació del logaritme de γ , $\hat{\gamma}$, tal que $\hat{\gamma}(a) = w_0$. A més, si γ és diferenciable, aleshores $\hat{\gamma}$ també ho és i $\hat{\gamma}'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$.

Demostració. Provem 1. La unicitat és immediata, ja que dues determinacions del logaritme només poden diferir en un múltiple de $2\pi i$ per la proposició 2.28. Per veure l'existència, sigui $a = |a|e^{i\alpha}$. Llavors $D_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}(-\infty, 0]$ i si ℓ és una determinació del logaritme a $\mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}(-\infty, 0]$, llavors $\ell|_{D_r(a)}$ és una determinació del logaritme a $D_r(a)$. Es compleix, doncs, que si denotem $k = \frac{w_0 - \ell(z_0)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$, la funció $\mathcal{L}(z) := \ell(z) + 2\pi i k$ és una determinació del logaritme en $D_r(a)$ tal que $\mathcal{L}(z_0) = w_0$.

Provem ara 2. Com abans, la unicitat és evident. Per demostrar l'existència, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $a = 0$ i $b = 1$. Sigui $\varepsilon = \frac{1}{2} \inf_{t \in [0, 1]} |\gamma(t)| > 0$. Donat que γ és uniformement contínua en $[0, 1]$, existeix $\delta > 0$ tal que $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon$ per a tot $s, t \in [0, 1]$ tal que $|t - s| \leq \delta$.

Sigui $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$ i sigui $z_k = \gamma\left(\frac{k}{n}\right)$, per a $k = 0, 1, \dots, n$. Llavors per a $k = 0, 1, \dots, n-1$, tenim $|z_k - z_{k+1}| < \varepsilon$ i

$$\gamma\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subset D_\varepsilon(z_k) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Aplicant l'apartat 1, sigui $\mathcal{L}_0$ l'única determinació del logaritme en $D_\varepsilon(z_0)$ tal que $\mathcal{L}_0(z_0) = w_0$. I, recurrentment, per a $k = 1, \dots, n-1$, sigui $\mathcal{L}_k$ l'única determinació del logaritme en $D_\varepsilon(z_k)$ tal que $\mathcal{L}_k(z_k) = \mathcal{L}_{k-1}(z_k)$.

Llavors si $k = 1, \dots, n-1$, les determinacions $\mathcal{L}_{k-1}$ i $\mathcal{L}_k$ coincideixen en $D_\varepsilon(z_k) \cap D_\varepsilon(z_{k-1})$, ja que dues determinacions del logaritme en un domini connex difereixen en una constant de la forma $2\pi im$. Per tant, la funció $\hat{\gamma}(t) = \mathcal{L}_k(\gamma(t))$, si $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$, és la determinació del logaritme de γ que compleix que $\hat{\gamma}(0) = w_0$.

Finalment, si γ és diferenciable, com a conseqüència de la construcció de $\hat{\gamma}$ i del fet que les determinacions del logaritme són holomorfes, es verifica que $\hat{\gamma}$ és $\mathbb{R}$ -derivable i si $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$, llavors $\hat{\gamma}'(t) = \mathcal{L}'_k(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$. $\square$

Definició 5.2 (Índex d'una corba tancada respecte a un punt). Sigui $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una corba tancada en $\mathbb{C}$ i $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Llavors, l'índex de γ respecte a z es defineix per:

$$\text{Ind}(\gamma, z) := \frac{\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)}{2\pi i},$$

on $\hat{\gamma}_z$ és qualsevol determinació del logaritme de $\gamma_z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, definida per $\gamma_z(t) = \gamma(t) - z$, vegeu la figura 5.2. $\bullet$

Observació 5.3. 1. Donat que dues determinacions del logaritme de γ_z difereixen en un múltiple de $2\pi i$, l'índex està ben definit.

2. L'índex $\text{Ind}(\gamma, z)$ és un nombre enter. En efecte, donat que γ és una corba tancada, γ_z també ho és i, per tant, $e^{\hat{\gamma}_z(b)} = \gamma_z(b) = \gamma_z(a) = e^{\hat{\gamma}_z(a)}$. Llavors,

$$\text{Ind}(\gamma, z) := \frac{\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}.$$

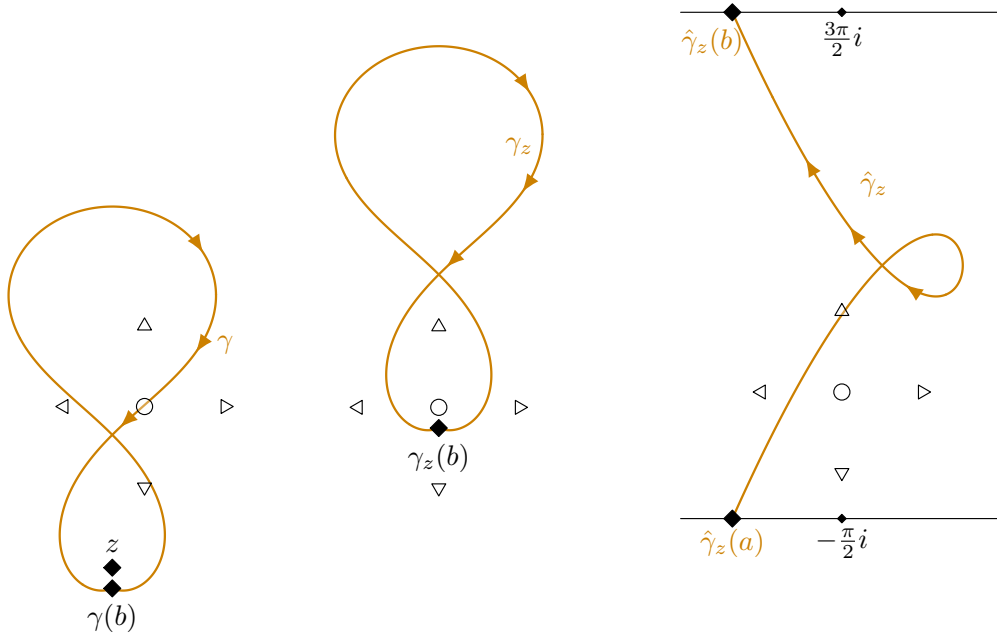


Figura 5.2.: Construcció de $\hat{\gamma}_z$ com a logaritme de $\gamma_z = \gamma - z$. Notem que en aquest cas tenim $\text{Ind}(\gamma, z) = 1$, ja que $\hat{\gamma}_z$ augmenta en $2\pi i$ en recórrer el camí, és a dir, que l'argument de $\gamma(t) - z$ augmenta en 2π en recórrer el camí γ .

Aquest valor, doncs, pot ser positiu, negatiu o zero: una volta és positiva si es realitza en el sentit contrari a les agulles del rellotge i és negativa si es fa en el sentit de gir de les agulles del rellotge, vegeu la figura 5.3. •

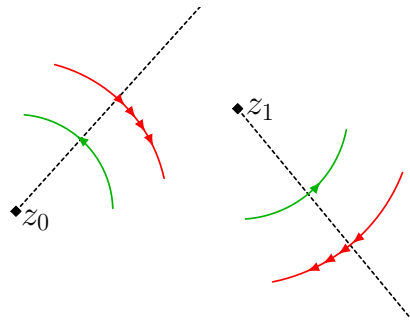


Figura 5.3.: Podem observar els camins verds que intersequen en sentit positiu o antihorari i els vermells en negatiu o horari, vegeu l'observació 5.4.

Observació 5.4 (Càlcul geomètric de l'índex). Fixem una semirecta L amb origen z_0 que no travessi punts on el camí té interseccions. Per cada vegada que el camí γ passa per L en sentit positiu, li sumem 1, i si passa en sentit negatiu, li restem 1. Vegeu figures 5.3–5.5. •

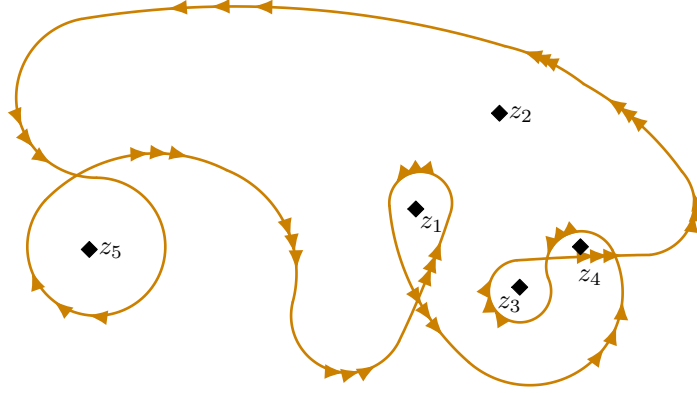


Figura 5.4.: Per a calcular l'índex de γ respecte a z_j , tracem una semirecta partint del punt i sumem interseccions amb la corba en sentit positiu i restem les de sentit negatiu, tal com il·lustra la figura 5.3, vegeu la figura 5.5.

Proposició 5.5 (Expressió integral de l'índex). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, γ un camí tancat en Ω i $z_0 \notin \gamma^*$. L'índex de γ respecte a z_0 ve definit com*

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

En particular, si γ^- denota el camí invers de γ (és a dir, recorregut en sentit invers), tenim que

$$\text{Ind}(\gamma^-, z) = -\text{Ind}(\gamma, z), \quad z \notin \gamma^*.$$

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que γ és de classe $\mathcal{C}^1$ ja que, altrament, descompondríem el camí i la integral en un nombre finit de trossos. Llavors si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ i $\hat{\gamma}_z$ és una determinació del logaritme de $\gamma_z = \gamma - z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es verifica que

$$\text{Ind}(\gamma, z) = \frac{\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b (\hat{\gamma}_z)'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \quad \square$$

A continuació ens mirem l'índex $\text{Ind}(\gamma, z)$ com una funció de z .

Proposició 5.6 (Propietats de la funció índex). *Sigui γ un camí tancat. Llavors:*

- a) *La funció $\text{Ind}(\gamma, z) : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$ és contínua;*
- b) *$\text{Ind}(\gamma, z)$ és constant en cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$;*
- c) *$\text{Ind}(\gamma, z) = 0$ si z pertany a la component no fitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

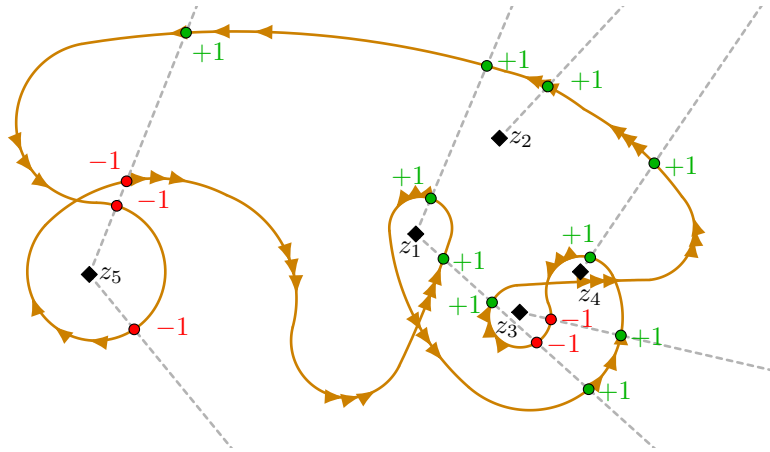


Figura 5.5.: Trobem $\text{Ind}(\gamma, z_1) = 1+1 = 1+1-1+1 = 2$ per dues semirectes diferents. Així mateix calculem $\text{Ind}(\gamma, z_2) = 1$, $\text{Ind}(\gamma, z_3) = 0$, $\text{Ind}(\gamma, z_4) = 2$ i $\text{Ind}(\gamma, z_5) = -1$.

Demostració. (a) Per $z, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, tenim que

$$\begin{aligned} |\text{Ind}(\gamma, z) - \text{Ind}(\gamma, z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0} \right) dw \right| \\ &= \frac{|z-z_0|}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{dw}{(w-z)(w-z_0)} \right|. \end{aligned}$$

Volem veure que aquesta quantitat tendeix a zero quan $z \rightarrow z_0$. Sigui

$$\delta := \frac{1}{2} \text{dist}(z_0, \gamma^*).$$

Clarament tenim que $|w-z_0| \geq 2\delta$ si $w \in \gamma^*$. Llavors, per $|z-z_0| < \delta$, tenim també

$$|w-z| \geq |w-z_0| - |z-z_0| \geq 2\delta - \delta = \delta, \quad w \in \gamma^*.$$

Per tant, si $|z-z_0| < \delta$, tenim que

$$|\text{Ind}(\gamma, z) - \text{Ind}(\gamma, z_0)| \leq \frac{|z-z_0|}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|dw|}{|w-z||w-z_0|} \leq \frac{|z-z_0|}{4\pi\delta^2} L(\gamma).$$

Com que aquesta quantitat tendeix a zero quan $z \rightarrow z_0$, ja hem provat la continuïtat de la nostra funció.

(b) Com que la funció $\text{Ind}(\gamma, z)$ és contínua i pren valors en $\mathbb{Z}$, és constant en cada component connexa.

(c) Sabem que és constant en aquesta component. Prenem $R > 0$ prou gran de manera que $\gamma^* \subset D_R(0)$ i també $R > L(\gamma)$ on $L(\gamma)$ és la longitud de γ . Si $|z| > 2R$, llavors $|w-z| \geq |z| - |w| \geq 2R - R = R$ per $w \in \gamma^*$ i, per tant,

$$|\text{Ind}(\gamma, z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|dw|}{|w-z|} \leq \frac{1}{2\pi R} L(\gamma) < \frac{1}{2\pi}.$$

Com que $\text{Ind}(\gamma, z)$ ha de ser un enter, l'única possibilitat és que valgui 0, i com que l'índex és constant en aquesta component, val zero en tot punt d'aquesta. $\square$

Exercicis

5.1.1. Considerem el camí $\gamma(t) = 4e^{it} \cos \frac{2}{3}t$, $(0 \leq t \leq 6\pi)$. Calculeu $\text{Ind}(\gamma, 3)$ i $\text{Ind}(\gamma, 1)$. $\triangleleft$

5.1.2. Considerem el camí $\gamma(t) = (1 + e^{it} + e^{-it})e^{it}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Esbosseu el dibuix de la corba i calculeu-ne l'índex en cada component connexa del complementari de la seva imatge. Calculeu

$$\int_{\gamma} \frac{3z - 3}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} dz. \quad \triangleleft$$

5.2. El teorema global de Cauchy

Recordem la fórmula integral de Cauchy per oberts convexos: Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert convex i sigui $f \in H(\Omega)$. Llavors

$$f(z_0) \text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad z_0 \notin \gamma^*$$

per a tot camí tancat γ en Ω , vegeu el teorema 4.19 i l'observació 4.22.

Exemple 5.7. Sigui γ la corba en forma d'infinít o “ulleres”, anomenada lemniscata de Bernoulli¹ (vegeu la figura 5.6), amb $-1/2$ i $1/2$ un a dins de cada part. Com que la funció $f(z) = \cos(\frac{\pi}{2}z)$ és entera (holomorfa a tot $\mathbb{C}$), tenim que

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w + 1/2} dw = 2\pi i \cos(-\pi/4) \text{Ind}(\gamma, -1/2) = 2\pi i \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi i,$$

i també

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - 1/2} dw = 2\pi i \cos(\pi/4) \text{Ind}(\gamma, 1/2) = 2\pi i \frac{\sqrt{2}}{2} (-1) = -\sqrt{2}\pi i. \quad \diamond$$

Volem obtenir versions més generals tant del teorema de Cauchy com de la fórmula integral de Cauchy, que siguin vàlides per oberts no necessàriament convexos, com també per unions de camins.

Definició 5.8 (Cadenes i cicles). Una *cadena* és una combinació lineal de camins

$$\Gamma = \sum_{i=1}^k n_i \gamma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z},$$

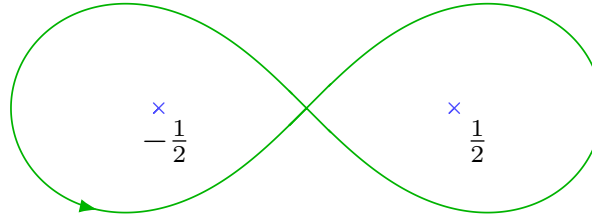
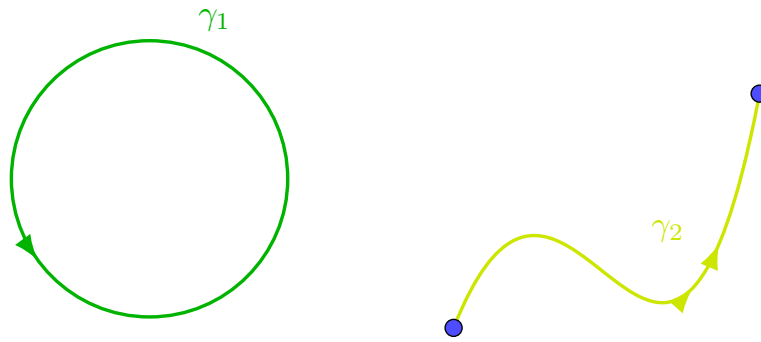


Figura 5.6.: Lemniscata de Bernoulli.



$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

Figura 5.7.: Una cadena formada per dos camins.

on γ_i és un camí per a tot $1 \leq i \leq k$. Vegeu la figura 5.7 per exemples de cadenes.

La imatge o recorregut de Γ és $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \dots \cup \gamma_k^*$.

Si $f \in C(\Gamma^*)$, definim la integral per linealitat

$$\int_{\Gamma} f dz = n_1 \int_{\gamma_1} f dz + \dots + n_k \int_{\gamma_k} f dz.$$

Diem que Γ és un *cicle* si γ_i és un camí tancat per a tot $1 \leq i \leq k$.

L'índex d'un cicle Γ respecte d'un punt $z_0 \notin \Gamma^*$ és

$$\text{Ind}(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{i=1}^k n_i \text{Ind}(\gamma_i, z_0). \quad \bullet$$

Degut a la definició, aquest índex té les mateixes propietats que l'índex d'una corba: és un enter, és constant en cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, i val zero a la component no fitada.

¹Jacob Bernoulli, Basilea, 1654–1705. https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli

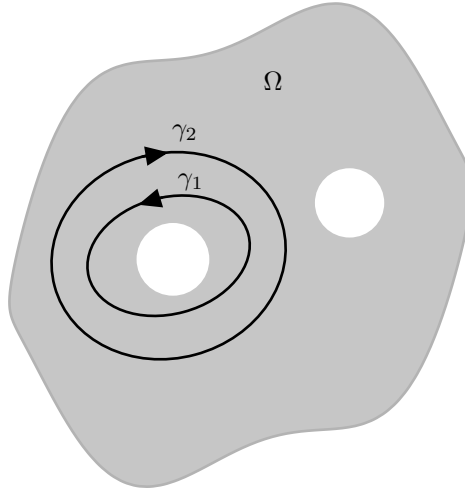


Figura 5.8.: Vegeu l'exemple 5.11.

Exemple 5.9. Considerem les corbes $\gamma_1(t) = 4e^{it}$ i $\gamma_2(t) = e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$. Formem el cicle

$$\Gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2) = \gamma_1 - \gamma_2.$$

Tenim $\text{Ind}(\Gamma, 6i) = 0$, ja que estem a la component no fitada. També

$$\text{Ind}(\Gamma, 2) = \text{Ind}(\gamma_1, 2) - \text{Ind}(\gamma_2, 2) = 1 - 0 = 1.$$

$$\text{Ind}(\Gamma, 0) = \text{Ind}(\gamma_1, 0) - \text{Ind}(\gamma_2, 0) = 1 - 1 = 0. \quad \diamond$$

Definició 5.10 (Homologia). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i Γ un cicle en Ω . Diem que Γ és homòleg a 0 en Ω si

$$\text{Ind}(\Gamma, a) = 0 \quad \forall a \notin \Omega.$$

Posem $\Gamma \approx 0$ en Ω per indicar que Γ és homòleg a 0 en Ω . •

Exemple 5.11. En la figura 5.8, els camins γ_1 i γ_2 **no** són homòlegs a 0 en Ω . En canvi, el cicle $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ **sí** que ho és. $\diamond$

Definició 5.12. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i siguin Γ_1 i Γ_2 cicles en Ω . Diem que Γ_1 és homòleg a Γ_2 en Ω si $\Gamma_1 - \Gamma_2$ és homòleg a 0 en Ω . En aquest cas, fem servir la notació $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ en Ω . •

Teorema 5.13 (Teorema de Cauchy global). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i sigui Γ un cicle en Ω . Llavors, les següents afirmacions són equivalents:

(a) Γ és homòleg a 0 en Ω .

(b) Es compleix la fórmula integral de Cauchy global: per tota $f \in H(\Omega)$,

$$f(z) \operatorname{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*.$$

(c) Per tota $f \in H(\Omega)$,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Per ser precisos, sovint s'anomena *teorema de Cauchy global* la implicació $(a) \Rightarrow (c)$; la resta de l'enunciat incorpora també la fórmula integral de Cauchy global.

Prova de $(c) \Rightarrow (a)$. Si tenim un cicle Γ en Ω de manera que $\int_{\Gamma} f = 0$ per a tota $f \in H(\Omega)$, llavors si prenem un punt $a \notin \Omega$, la funció $f_a(z) = \frac{1}{z-a}$ és holomorfa en Ω , i

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f_a(z) = 0, \quad \forall a \notin \Omega.$$

Prova de $(b) \Rightarrow (c)$. Fixem $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$, i definim la funció $F(z) = (z - a)f(z)$, que és holomorfa en Ω . Aplicant la fórmula integral de Cauchy, com que $F(a) = 0$, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z)}{z - a} dz \stackrel{\text{b)}}{=} F(a) \operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 0.$$

Prova de $(a) \Rightarrow (b)$. Considerem la funció $F : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida per

$$F(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } z \neq w \\ f'(z) & \text{si } z = w. \end{cases}$$

Llavors F és contínua en $\Omega \times \Omega$ (vegeu la demostració al final de la prova), i per a tot $w \in \Omega$, la funció $F_w(z) := F(z, w)$ és holomorfa en Ω (clarament és holomorfa en $\Omega \setminus \{w\}$ i contínua en Ω , i sabem que aquestes dues condicions, aplicant el corollari 4.36, impliquen que és holomorfa a tot Ω). Pel teorema 4.39 de derivació sota el signe integral, la funció

$$g(z) = \int_{\Gamma} F(z, w) dw, \quad z \in \Omega$$

és holomorfa en Ω .

Ara volem estendre aquesta funció a tot $\mathbb{C}$, per tal d'obtenir una funció entera. Considerem l'obert no buit

$$U = \{w \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \operatorname{Ind}(\Gamma, w) = 0\}.$$

Observeu que donat que hem vist que $\operatorname{Ind}(\Gamma, \cdot)$ és constant en cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, U és la unió d'algunes d'aquestes components connexes que són obertes, i entre elles hi ha la component connexa no fitada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. A més, com que Γ és homòleg a 0 en Ω , tenim que $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 0$ per a tot $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, de manera que $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset U$ i, per tant,

$$\Omega \cup U = \mathbb{C}.$$

Definim

$$\tilde{g}(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in U.$$

Per $z \in U \cap \Omega$, fent servir la definició d'índex obtenim que

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z} \\ &= \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) \text{Ind}(\Gamma, z) = \tilde{g}(z), \end{aligned}$$

ja que $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per $z \in U$. Per tant, la funció $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida per

$$G(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } z \in \Omega \\ \tilde{g}(z) & \text{si } z \in U \end{cases}$$

està ben definida a tot $\mathbb{C}$ i és entera.

Vegem que és fitada. Prenem $R > 0$ prou gran de manera que $\Gamma^* \subset \{|z| \leq R\}$. Observem que, si $|z| > 2R$, llavors z pertany a la component no fitada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, així que $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$, que implica que $z \in U$. Per tant, si $|z| > 2R$, tenim que

$$|G(z)| = |\tilde{g}(z)| \leq \int_{\Gamma} \frac{|f(w)|}{|w-z|} |dw| \leq M \frac{L(\Gamma)}{|z| - R}, \quad (5.1)$$

on $M = \sup_{w \in \Gamma^*} |f(w)|$ i $L(\Gamma) = \sum |n_i| L(\gamma_i)$. Per tant, G és fitada en $\{|z| > 2R\}$. Com que G és contínua, G també és fitada en el compacte $\overline{D_{2R}(0)}$, de manera que G és una funció entera i fitada. Pel teorema de Liouville, G és constant. Ara bé, (5.1) també ens diu que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} G(z) = 0$ que, en ser G constant, implica que $G \equiv 0$.

Així doncs, per $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$, tenim que

$$0 = \frac{G(z)}{2\pi i} = \frac{g(z)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \text{Ind}(\Gamma, z). \quad \square$$

Demostració de la continuïtat de F . Comprovem que la funció $F : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida per

$$F(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} & \text{si } z \neq w \\ f'(z) & \text{si } z = w, \end{cases}$$

és contínua en $\Omega \times \Omega$.

En efecte, sigui $\Delta = \{(z, w) \in \Omega \times \Omega; z = w\}$ la diagonal, que és un tancat relatiu en $\Omega \times \Omega$. Llavors, F és contínua en $(\Omega \times \Omega) \setminus \Delta$ i ens queda comprovar que F és també contínua en els punts de la diagonal.

Fixem un punt $a \in \Omega$ i considerem un disc $D_r(a) \subset \Omega$. Sigui $z \neq w \in D_r(a)$. Llavors es verifica

$$\begin{aligned} |F(z, w) - F(a, a)| &= \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(a) \right| = \left| \frac{f(z) - f'(a)z - (f(w) - f'(a)w)}{z - w} \right| \\ &= \frac{1}{|z - w|} \left| \int_{[w, z]} (f'(\zeta) - f'(a)) d\zeta \right| \leq \frac{|z - w|}{|z - w|} \sup_{\zeta \in [w, z]} |f'(\zeta) - f'(a)|. \end{aligned}$$

Observeu que donat que $F(z, z) = f'(z)$, aquesta desigualtat s'estén al cas $z = w$. Tenint en compte que f' és contínua en a (ja que, per la teoria local de Cauchy, les funcions holomorfes són analítiques i, en particular, tenen derivada contínua) i, per tant,

$$\lim_{(z, w) \rightarrow (a, a)} \sup_{\zeta \in [w, z]} |f'(\zeta) - f'(a)| = 0,$$

obtenim que

$$\lim_{(z, w) \rightarrow (a, a)} F(z, w) = F(a, a) = f'(a). \quad \square$$

Vegem ara una aplicació immediata del teorema anterior.

Corol·lari 5.14 (Integració en cicles homòlegs). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i $f \in H(\Omega)$. Sigui Γ_1 i Γ_2 cicles en Ω . Si $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ en Ω , llavors*

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Demostració. Com que el cicle $\Gamma_1 - \Gamma_2$ és homòleg a 0 en Ω , aplicant el teorema de Cauchy global, tenim que

$$0 = \int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz. \quad \square$$

Exemple 5.15. Considerem l'anell

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}.$$

Per r_1, r_2 amb $r < r_1 < r_2 < R$, considerem els cercles $\gamma_1(t) = r_1 e^{it}$ i $\gamma_2(t) = r_2 e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$. Com que $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2 \approx 0$, tenim que γ_1 i γ_2 són corbes homòlogues en Ω i, per tant,

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

per a tota funció f holomorfa en Ω . ◇

Corol·lari 5.16 (Fórmula integral de Cauchy per derivades-versió global). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$, i sigui Γ un cicle en Ω homòleg a 0. Llavors*

$$f^{(n)}(z) \text{Ind}(\Gamma, z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw, \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*.$$

Demostració. Com que l'índex és constant en cada component connexa d' $\Omega \setminus \Gamma^*$, només cal aplicar la versió global de la fórmula integral de Cauchy, i derivar sota el signe integral. □

Exercicis

5.2.1. Considerem el camí $\gamma(t) = (2\sin(2t - \frac{\pi}{3}), 2\sin(3t))$, amb $t \in [0, 2\pi]$. Esbosseu el camí, calculeu l'índex de la corba en cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, i trobeu el valor de

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2+1} dz. \quad \triangleleft$$

5.3. Homotopia i teorema de Cauchy

Definició 5.17 (Homotopia). Siguin $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ corbes tancades. Diem que γ_0 i γ_1 són *homòtopes* en Ω (posem $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω) si existeix una aplicació contínua $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ de manera que

- (i) $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ per a tot $t \in [a, b]$;
- (ii) $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ per a tot $t \in [a, b]$;
- (iii) $H(a, s) = H(b, s)$ per a tot $s \in [0, 1]$. •

Observem que la condició (iii) ens diu que les corbes $\gamma_s(t) := H(t, s)$ són tancades per a tot $s \in [0, 1]$.

Essencialment, si $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω , llavors la corba γ_0 s'ha de poder deformar contínuament cap a la corba γ_1 sense passar per cap punt que no sigui d' Ω (vegeu l'exemple de la Figura 5.9).

Definició 5.18 (Corba homòtopa a 0 o contractible). Diem que una corba γ és *homòtopa a 0* en Ω o *contractible* en Ω (posem $\gamma \sim 0$ en Ω) si γ és homòtopa a una corba constant (és a dir, a un punt). •

Observació 5.19 (Homotopia amb extrems fixats). Evidentment, el concepte de corbes homòtopes també té sentit per corbes que no siguin tancades però tinguin els mateixos extrems. Quan es parla d'homotopia de corbes no tancades d'extrems fixats, se sol imposar que l'homotopia sigui contínua, compleixi (i) i (ii) de la definició 5.17, però que en lloc de la condició (iii) compleixi que les corbes $\gamma_s(t) := H(t, s)$ tinguin el mateix punt inicial i final que γ_0 i γ_1 , és a dir, $\gamma_s(a) = \gamma_0(a)$ i $\gamma_s(b) = \gamma_0(b)$ per a tot $s \in [0, 1]$.

Es pot veure fàcilment que dues corbes d'extrems fixats γ_0 i γ_1 són homòtopes en Ω si i només si $\gamma_0 \vee \gamma_1^-$ és homòtopa a 0 en Ω , vegeu la definició 4.3. •

Proposició 5.20. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i siguin $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ dues corbes tancades en Ω de manera que $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω . Llavors

$$\text{Ind}(\gamma_0, z) = \text{Ind}(\gamma_1, z) \quad \forall z \notin \Omega.$$

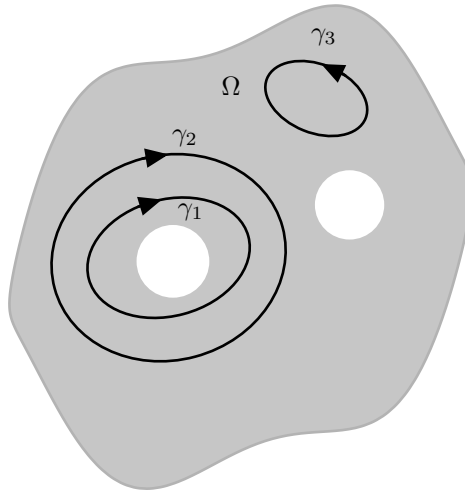


Figura 5.9.: Tenim $\gamma_1 \sim \gamma_2$, $\gamma_3 \sim 0$. Tenim en canvi que $\gamma_1 \not\sim \gamma_3$, $\gamma_1 \not\sim 0$ i $\gamma_2 \not\sim 0$.

És a dir, si $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω , aleshores γ_0 és homòloga a γ_1 en Ω . En particular, $\gamma \sim 0$ en Ω implica que γ és homòloga a 0 en Ω . Ara bé, el recíproc no és cert (veure la figura 5.10 per un exemple d'una corba en un obert Ω homòloga a 0, però no homòtopa a 0 en Ω).

Demostrem primer un resultat d'invariància de l'índex sota pertorbacions, conegut informalment com el *teorema de l'arbre, la persona i el gos*.

Lema 5.21 (Teorema de l'arbre, la persona i el gos). *Siguin $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dues corbes tancades i sigui $z \in \mathbb{C}$. Si*

$$|\gamma(t) - \eta(t)| < |z - \gamma(t)| \quad \forall t \in [a, b],$$

llavors $\text{Ind}(\gamma, z) = \text{Ind}(\eta, z)$.

Demostració. Observem que la hipòtesi implica que $z \notin \gamma^* = \gamma([a, b])$. També tenim que $z \notin \eta^*$. A més a més, per a $t \in [a, b]$, escrivint $\gamma_z(t) = \gamma(t) - z$ i $\eta_z(t) = \eta(t) - z$ tenim que

$$|\gamma_z(t) - \eta_z(t)| < |\gamma_z(t)|.$$

Tot plegat ens dona que $0 \notin \gamma_z^*$ i la corba tancada $\alpha_z = \frac{\eta_z}{\gamma_z}$ verifica

$$|1 - \alpha_z(t)| < 1 \quad \forall t \in [a, b].$$

Sigui $\hat{\gamma}_z$ una determinació del logaritme de γ_z i $\mathcal{L}$ una determinació del logaritme en $D_1(1)$. Llavors, $\hat{\alpha}_z := \mathcal{L} \circ \alpha_z$ és una determinació del logaritme d' α_z i, per tant, $\hat{\eta}_z := \hat{\gamma}_z + \hat{\alpha}_z$ és una determinació del logaritme de η_z . En conseqüència,

$$\begin{aligned} 2\pi i \text{Ind}(\eta, z) &= \hat{\eta}_z(b) - \hat{\eta}_z(a) = (\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)) + (\hat{\alpha}_z(b) - \hat{\alpha}_z(a)) \\ &= \hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a) = 2\pi i \text{Ind}(\gamma, z). \end{aligned}$$

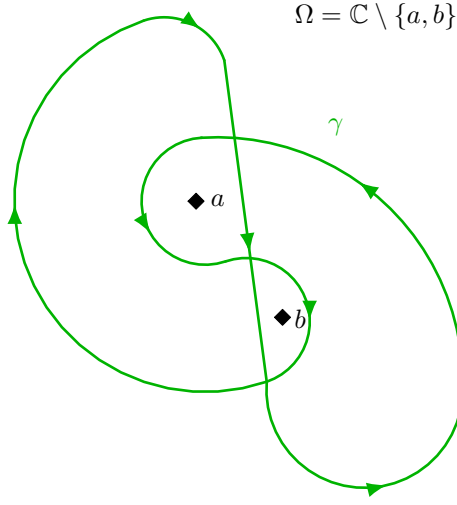


Figura 5.10.: El camí γ és homòleg a 0 en Ω ja que $\text{Ind}(\gamma, a) = 0 = \text{Ind}(\gamma, b)$, però $\gamma \not\sim 0$ en Ω , ja que no és contractible.

Aquí hem usat que, com que η i γ són corbes tancades, també ho és α_z i, en particular,

$$\hat{\alpha}_z(b) = \mathcal{L}(\alpha_z(b)) = \mathcal{L}(\alpha_z(a)) = \hat{\alpha}_z(a). \quad \square$$

Demostració de la proposició 5.20. Sigui H una homotopia entre γ_0 i γ_1 , i sigui $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Volem veure que $\text{Ind}(\gamma_0, z) = \text{Ind}(\gamma_1, z)$. Com que $[a, b] \times [0, 1]$ és compacte, $H([a, b] \times [0, 1])$ també i H és uniformement contínua. Per tant,

- (1) $\varepsilon = d(z, H([a, b] \times [0, 1])) = \inf_{(t,s) \in [a,b] \times [0,1]} |z - H(t, s)| > 0$.
- (2) Existeix $n \geq 1$ tal que per a tot $t \in [a, b]$ i tots $s_1, s_2 \in [0, 1]$ tals que $|s_1 - s_2| \leq \frac{1}{n}$,

$$|H(t, s_1) - H(t, s_2)| < \varepsilon.$$

Per a cada $s \in [0, 1]$, considerem la corba tancada γ_s en Ω definida per $\gamma_s(t) = H(t, s)$, si $t \in [a, b]$. Llavors, (1) i (2) ens donen que per a tot $t \in [a, b]$, i tot $s_1, s_2 \in [0, 1]$ amb $|s_1 - s_2| \leq \frac{1}{n}$,

$$|\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)| < |z - \gamma_{s_1}(t)|.$$

Aplicant el lema anterior, deduïm que $\text{Ind}(\gamma_{s_1}, z) = \text{Ind}(\gamma_{s_2}, z)$, per a tot $s_1, s_2 \in [0, 1]$ amb $|s_1 - s_2| \leq \frac{1}{n}$. En particular,

$$\text{Ind}(\gamma_{\frac{k-1}{n}}, z) = \text{Ind}(\gamma_{\frac{k}{n}}, z),$$

per a $k = 1, \dots, n$. Per tant,

$$\text{Ind}(\gamma_0, z) = \text{Ind}(\gamma_1, z). \quad \square$$

Com que tota corba homòtopa a zero en Ω és homòloga a zero en Ω , a partir del teorema de Cauchy global, obtenim la següent versió homotòpica.

Teorema 5.22 (Versió homotòpica del teorema de Cauchy). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i γ un camí tancat en Ω homòtop a 0 en Ω . Si $f \in H(\Omega)$, aleshores*

$$(a) \int_{\gamma} f(z) dz = 0;$$

(b)

$$f(z) \operatorname{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall z \in \Omega \setminus \gamma^*.$$

Com a culminació de la teoria, tenim els següents corollaris, amb gran quantitat d'aplicacions, com veurem en els capítols següents.

Teorema 5.23 (Teorema de deformació). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$, i siguin γ_0, γ_1 camins tancats homòtops en Ω . Llavors*

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Demostració. Tenim que $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1$ és un cicle en Ω . Si $z \notin \Omega$, per la proposició 5.20 tenim que $\operatorname{Ind}(\gamma_0, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, z)$, així que $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per a tot $z \notin \Omega$ i, per tant, el cicle Γ és homòleg a 0 en Ω . Pel teorema de Cauchy global obtenim que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz. \quad \square$$

Corol·lari 5.24 (Teorema de la independència del camí). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i siguin γ_0, γ_1 camins amb extrems fixos i homòtops en Ω (vegeu l'observació 5.19). Si $f \in H(\Omega)$, aleshores*

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Demostració. El camí $\gamma := \gamma_0 \vee \gamma_1^-$ és tancat (ull: en aquest cas, estem considerant el camí que primer recorre γ_0 i després la corba γ_1 en sentit contrari) i homòtop a 0 en Ω , vegeu l'observació 5.19. Aleshores el resultat és conseqüència del teorema anterior. $\square$

5.4. Dominis simplement connexos

Com ja hem mencionat en seccions anteriors, un domini simplement connex és intuïtivament un obert connex del pla “sense forats”. En aquests tipus de dominis, tota la teoria anterior pren una forma especial ja que, per exemple, totes les corbes tancades són contractibles, una propietat que, de fet, es pot prendre com a definició.

Definició 5.25. Un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ és *simplement connex* si és connex i tota corba tancada en Ω és homòtopa a 0 en Ω . •

De fet, si $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ i Ω és connex en $\mathbb{C}$, aleshores són equivalents:

- Ω és simplement connex,
- tot cicle en Ω és homòleg a 0 en Ω , i
- $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ és connex.

La proposició 5.20 ens diu que la primera implica la segona. Vegeu [BC13, proposició 6.4], per exemple, on la definició de partida és la tercera, per veure la resta d'implícacions. Per exemple, sabem que $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ és connex, però no simplement connex. Aquí tenim $\mathbb{C} \setminus \Omega = \{0\}$ que és connex. En canvi $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega = \{0\} \cup \{\infty\}$ que no és connex. Notem que la definició de simplement connex en dimensions superiors o en espais arc-connexos sol ser anàloga a la segona de les anteriors.

Teorema 5.26 (Teorema de Cauchy per dominis simplement connexos). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, $f \in H(\Omega)$ i γ un camí tancat en Ω . Llavors $\int_\gamma f(z)dz = 0$ i també val la fórmula integral de Cauchy.*

Demostració. Com que Ω és simplement connex, podem usar directament la versió homotòpica del teorema de Cauchy. $\square$

Proposició 5.27 (Existència de primitives en dominis simplement connexos). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, i $f \in H(\Omega)$. Llavors f té primitiva holomorfa en Ω .*

Demostració. Fixem un punt $a \in \Omega$. Com que Ω és un obert connex, llavors és arc-connex, de manera que donat $z \in \Omega$, hi ha una corba que uneix a amb z en Ω ³. Com que volem que sigui derivable a trossos, podem suposar que es tracta d'una poligonal $L_{a,z} \subset \Omega$. Definim

$$F(z) = \int_{L_{a,z}} f(w) dw, \quad z \in \Omega.$$

Aquesta definició no depèn de la poligonal escollida: si L_1 i L_2 són dues poligonals de a a z , aleshores $L_1 \vee L_2^-$ és un camí tancat en Ω i, pel teorema de Cauchy en dominis simplement connexos,

$$\int_{L_1} f(w) dw - \int_{L_2} f(w) dw = 0.$$

Donat h amb $|h|$ prou petit, considerem el camí tancat γ format per la poligonal $L_{a,z}$, el segment $[z, z+h]$ i la poligonal $L_{a,z+h}$ (recorreguda en sentit contrari). Com que Ω és simplement connex, pel teorema de Cauchy tenim que

$$0 = \int_\gamma f(w) dw = F(z) + \int_{[z,z+h]} f(w) dw - F(z+h).$$

A partir d'aquí acabem la prova, veient que F és holomorfa amb $F'(z) = f(z)$, igual com vam fer en el teorema de Cauchy per un disc, vegeu el teorema 4.15. $\square$

³Recordem que no és cert en general que un conjunt connex sigui arc-connex.

Proposició 5.28 (Determinació del logaritme en dominis simplement connexos). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, i $f \in H(\Omega)$ amb $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Llavors existeix $g \in H(\Omega)$ amb*

$$e^{g(z)} = f(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

A més, si $z_0 \in \Omega$ i tenim que $e^{w_0} = f(z_0)$, podem escollir g de manera que $g(z_0) = w_0$.

Demostració. Com que $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$, llavors la funció f'/f és holomorfa en Ω . Per la proposició anterior, té primitiva holomorfa G . Considerem la funció $H(z) = e^{G(z)} \in H(\Omega)$ amb $H(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Llavors la funció f/H és holomorfa en Ω amb derivada donada per

$$(f/H)' = \frac{f'H - fH'}{H^2}.$$

Però $H' = HG' = Hf'/f$ així que $f'H - fH' = 0$. Per tant f/H és igual a una constant $c \neq 0$ en Ω . És a dir,

$$f(z) = ce^{G(z)} = e^{G(z)+c'}$$

per alguna constant c' . Agafant $g(z) = G(z) + c' + 2k\pi i$ per un $k \in \mathbb{Z}$ apropiat, tenim que $g(z_0) = w_0$ i la proposició queda provada. $\square$

Com a exemple, notem que en la regió $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$, on E és una espiral que surt del 0 fins a l'infinit (vegeu l'exercici 2.2.8), hi ha determinació holomorfa del logaritme de z (ja que Ω és simplement connex, la funció $f(z) = z \in H(\Omega)$, i $f(z) \neq 0$ en Ω).

Comentari 5.29. El fet que tota funció holomorfa tingui primitiva en Ω , o que tota funció holomorfa sense zeros en Ω tingui determinació del seu logaritme en Ω , caracteritza els dominis simplement connexos (vegeu [BC13, teorema 6.22]), encara que quan tenim un obert connex Ω , la millor manera de comprovar si és simplement connex és mirar si $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ és connex o no. $\bullet$

Exercicis

5.4.1. *Siguin $f, g \in H(\mathbb{C})$ tals que $f^2 + g^2 \equiv 1$. Demostreu que existeix $h \in H(\mathbb{C})$ tal que $f = \cos(h)$ i $g = \sin(h)$.* $\triangleleft$

5.4.2. *[Determinació de l'arrel en dominis simplement connexos] Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, i $f \in H(\Omega)$ amb $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Vegeu que existeix $g \in H(\Omega)$ amb*

$$g(z)^2 = f(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

A més, si $z_0 \in \Omega$ i tenim que $w_0^2 = f(z_0)$, podem escollir g de manera que $g(z_0) = w_0$. $\triangleleft$

5.5. Funcions harmòniques

Les funcions harmòniques apareixen de manera natural en nombrosos problemes físics, com ara la conducció estacionària de calor, l'electrostàtica o la mecànica de fluids. En anàlisi complexa tenen un paper central perquè constitueixen les parts real i imaginària de les funcions holomorfes. En aquesta secció veurem aquesta relació. Farem servir la notació introduïda a la secció 3.2.

Definició 5.30 (Funció harmònica). Donat un obert Ω , diem que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és una *funció harmònica* en Ω si $f \in C^2(\Omega)$ i el seu *laplacà*

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

Diem que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és una *funció antiholomorfa* si $f \in C^1(\Omega)$ i

$$\partial f = 0. \quad \bullet$$

Exemple 5.31. Les funcions lineals $f(x + iy) = x + y$ són evidentment harmòniques. Però hi ha altres polinomis harmònics. Per exemple, $f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z^2)$ i $f(z) = 2xy = \operatorname{Im}(z^2)$. $\diamond$

Observació 5.32 (Càlcul del laplacà amb les derivades de Wirtinger). Notem que si $f \in C^2(\Omega)$, aleshores

$$4\bar{\partial}\partial f = 2\bar{\partial}(f_x - if_y) = f_{xx} + if_{xy} - if_{yx} - i^2 f_{yy} = \Delta f,$$

on hem usat el teorema d'igualtat de les derivades creuades de Schwarz per cancel·lar els termes amb derivades respecte a les dues variables. Anàlogament trobem que

$$4\partial\bar{\partial}f = \Delta f. \quad \bullet$$

En particular, hem demostrat el següent resultat.

Lema 5.33 (Holomorfia implica harmonicitat). *Una funció $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és harmònica si i només si $f \in C^2(\Omega)$ i*

$$\bar{\partial}\partial f \equiv 0,$$

si i només si $f \in C^2(\Omega)$ i

$$\partial\bar{\partial}f \equiv 0.$$

En particular, f és harmònica si i només si $f \in C^2(\Omega)$ i $\partial f \in H(\Omega)$.

Lema 5.34. *Si $f \in H(\Omega)$. Aleshores les seves parts real i imaginària són harmòniques.*

Demostració. Notem que $\partial\bar{\partial}f = 0$. Per tant, pel lema 5.33, la funció f és harmònica. Però $\Delta f = 0$ si i només si $\Delta u = 0$ i $\Delta v = 0$, on $u = \operatorname{Re} f$ i $v = \operatorname{Im} f$. $\square$

Ara veurem com podem obtenir el resultat en direcció contrària, suposant Ω simplement connex. Evidentment, no és suficient que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ i $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ siguin harmòniques per tal que $u + iv$ sigui holomorfa, ja que si no serien condicions equivalents. Però per tota u harmònica i de valors reals sí que podem trobar v tal que $u + iv$ sigui holomorfa. Comencem per veure en primer lloc que podem descompondre tota funció harmònica com a suma de la seva part holomorfa i la seva part antiholomorfa en dominis simplement connexos.

Lema 5.35 (Descomposició en parts holomorfa i antiholomorfa). *Segui Ω un domini simplement connex, i sigui $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funció harmònica. Aleshores existeixen dues funcions $F, G \in H(\Omega)$ tals que*

$$f = F + \overline{G}.$$

A més, la descomposició és única mòdul constants additives.

Demostració. Pel lema 5.33 tenim que $\partial f \in H(\Omega)$. Per la proposició 5.27 podem trobar una primitiva holomorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, és a dir tal que

$$\bar{\partial}F = 0 \quad \text{i} \quad \partial F = \partial f.$$

Anomenem $G := \overline{f - F}$. Aleshores

$$\bar{\partial}G \stackrel{\text{O.3.25}}{=} \bar{\partial}\overline{G} = \overline{\partial(f - F)} = 0,$$

així que $f = F + \overline{G}$ amb $F, G \in H(\Omega)$.

Per veure la unicitat, notem que si $f = \tilde{F} + \overline{\tilde{G}} = F + \overline{G}$ amb $F, G, \tilde{F}, \tilde{G} \in H(\Omega)$, aleshores tenim que

$$\partial\overline{G} = \overline{\partial G} = 0 = \overline{\partial\tilde{G}} = \partial\tilde{G}$$

i, per tant,

$$(F - \tilde{F})' = \partial(F - \tilde{F}) = \partial(F + \overline{G} - \tilde{F} - \overline{\tilde{G}}) = \partial(f - f) = 0.$$

La proposició 3.14 ens permet concloure que $F - \tilde{F} = c \in \mathbb{C}$. A més,

$$G - \tilde{G} = \overline{(f - F) - (f - \tilde{F})} = -\bar{c}. \quad \square$$

Vegem a continuació que, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és harmònica, aleshores és *analítica real*, és a dir, per tot $z_0 = a + ib \in \Omega$ existeixen coeficients $a_{n,m} \in \mathbb{C}$ i un radi r tals que

$$f(x + iy) = \sum_{n,m \geq 0} a_{n,m} (x - a)^n (y - b)^m \quad \text{per } (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2.$$

De fet, donarem una forma més concreta, i és que els polinomis aproximadors són harmònics i, per tant, en expressar el polinomi en termes de z i $\bar{z}$ no poden aparèixer termes creuats tipus $(z - z_0)^n (\overline{z - z_0})^m$ amb $n, m > 0$:

Lema 5.36 (Expressió en sèries de potències). *Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és harmònica, llavors per cada $z_0 \in \Omega$ existeixen coeficients $a_n, b_m \in \mathbb{C}$ tals que, si $R := \text{dist}(z_0, \Omega^c)$, aleshores*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m \geq 1} b_m (\overline{z - z_0})^m \quad \text{per } |z - z_0| < R.$$

La convergència és uniforme i absoluta en compactes de $D_R(z_0)$.

Demostració. Notem que f és harmònica en $D_R(z_0)$. Pel lema 5.35, existeixen $F, G \in H(D_R(z_0))$ tals que $f = F + \bar{G}$. Pel teorema 4.24, F i G es poden expressar en forma de sèries de potències amb radi de convergència major o igual a R . Absorbint els termes independents en $a_0 = F(z_0) + \overline{G(z_0)}$, obtenim el resultat. $\square$

Teorema 5.37 (Existència de l'harmònica conjugada). *Sigui Ω un domini simplement connex, i sigui $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funció harmònica. Aleshores existeix una funció harmònica $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que anomenem harmònica conjugada de u tal que*

$$u + iv \in H(\Omega).$$

A més, v és única mòdul una constant real additiva.

Demostració. Pel lema 5.35, existeixen $F, G \in H(\Omega)$ tals que $u = F + \bar{G}$. En particular, com que u pren valors reals, tenim que

$$V := \text{Im } F = \text{Im } G,$$

i escrivim $U = \text{Re } F$ i $\tilde{U} = \text{Re } G$.

En primer lloc vegem que $U = \tilde{U} + c$. Efectivament, com que U i $\tilde{U}$ prenen valors reals, tenim que $U = \bar{U}$ i el mateix passa amb $\tilde{U}$, així que

$$F - G = U + iV - \tilde{U} - iV = U - \tilde{U} \in \mathbb{R},$$

de manera que

$$F - G = \overline{F - G},$$

així que

$$(F - G)' = \partial(F - G) = \partial(\overline{F - G}) \stackrel{\text{O.3.25}}{=} \overline{\partial(F - G)} = 0.$$

La proposició 3.14 ens permet concloure que $U - \tilde{U} = F - G = c \in \mathbb{R}$.

Definim ara $v = 2V$. Com que $U = \tilde{U} + c$, trobem $u = F + \bar{G} = U + \tilde{U} = 2U - c$ i $u + iv = 2F - c \in H(\Omega)$.

Per veure la unicitat, n'hi ha prou amb observar que si tinguéssim dues solucions v i $\tilde{v}$, aleshores la seva diferència seria holomorfa en un obert connex i tindria valors reals, de manera que ha de ser constant pel primer apartat de l'exercici 3.2.6 aplicat a la funció $f = i(v - \tilde{v})$. $\square$

Tenint en compte el lema 5.34, obtenim el següent resultat.

Corol·lari 5.38 (Caracterització de les funcions harmòniques). *Sigui Ω un domini simplement connex, i sigui $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. La funció u és harmònica si i només si és la part real d'una funció holomorfa.*

Per acabar aquesta pinzellada de funcions harmòniques, ens interessem per com queda la fórmula integral de Cauchy en aquest context. Per simplificar les expressions estudiarem el cas $a = 0$, és a dir, que treballem amb discs centrats a l'origen.

Definició 5.39. El *nucli de Poisson*⁴ és la funció

$$P(z, z_0) = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2}, \quad \text{per a } z \neq z_0.$$

El *nucli de Herglotz*⁵ és la funció

$$H(z, z_0) = \frac{z + z_0}{z - z_0}, \quad \text{per a } z \neq z_0. \quad \bullet$$

Notem que els dos nuclis estan relacionats per la fórmula

$$\operatorname{Re} H(z, z_0) = \operatorname{Re} \left(\frac{(z + z_0)\overline{(z - z_0)}}{|z - z_0|^2} \right) = P(z, z_0). \quad (5.2)$$

Teorema 5.40 (Fórmula integral de Poisson). *Sigui $f : D_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$ una funció harmònica, i sigui $r < R$. Aleshores per tot $z_0 \in D_r(a)$ tenim que*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} f(z) P(z - a, z_0 - a) |dz|.$$

Demostració. Comencem per comprovar que aquesta fórmula val per funcions holomorfes en $D_R(0)$ amb $a = 0$. Efectivament, la fórmula integral de Cauchy diu que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

D'altra banda, com que $\frac{f(z)}{r^2 - z\bar{z}_0}$ és holomorfa en $z \in \overline{D_r(0)}$ ja que el denominador no s'hi anul·la, pel teorema de Cauchy per un disc tenim que

$$\int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{z(\bar{z} - \bar{z}_0)} dz = \int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{r^2 - \bar{z}_0 z} dz = 0.$$

Per tant,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \left(\frac{f(z)}{z - z_0} + \frac{f(z)\bar{z}_0}{z(\bar{z} - \bar{z}_0)} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} f(z) \left(\frac{z}{z - z_0} + \frac{\bar{z}_0}{(\bar{z} - \bar{z}_0)} \right) \frac{dz}{z}.$$

⁴Siméon Denis Poisson, Pithiviers, 1781–1840. https://ca.wikipedia.org/wiki/Sim%C3%A9on_Denis_Poisson

⁵Gustav Herglotz, Wallern, 1881–1953, https://ca.wikipedia.org/wiki/Gustav_Herglotz

Notem que

$$\frac{z}{z - z_0} + \frac{\overline{z_0}}{(\overline{z} - \overline{z_0})} = \frac{z(\overline{z} - \overline{z_0}) + \overline{z_0}(z - z_0)}{|z - z_0|^2} = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2} = P(z, z_0).$$

Deduïm que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) P(re^{it}, z_0) \frac{ire^{it} dt}{re^{it}} = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(0)} f(z) P(z, z_0) |dz|,$$

tal com volíem veure.

Si f és harmònica, aleshores considerem la descomposició $f(z+a) = F(z) + \overline{G(z)}$ donada en $D_R(0)$ pel lema 5.35. Trobem que

$$\begin{aligned} f(z_0) &= F(z_0 - a) + \overline{G(z_0 - a)} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(0)} F(z) P(z, z_0 - a) |dz| + \overline{\frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(0)} G(z) P(z, z_0 - a) |dz|} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(0)} (F(z) + \overline{G(z)}) P(z, z_0 - a) |dz|, \end{aligned}$$

i concloem la demostració amb el canvi de variable $z = w - a$. □

Vegem com podem recuperar el valor d'una funció holomorfa en termes de la seva part imaginària a la frontera (es pot obtenir una expressió anàloga també amb la part real) com a conseqüència del teorema anterior.

Corol·lari 5.41 (Fórmula de representació de Herglotz). *Donada una funció $f \in H(\Omega)$, si $v = \operatorname{Im} f$, aleshores per tot $r < \operatorname{dist}(a, \Omega^c)$ tenim que*

$$f(z_0) = \operatorname{Re} f(a) + \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) H(z - a, z_0 - a) |dz| \quad \text{per a tot } z_0 \in D_r(a).$$

Demostració. Pel teorema 4.39 de derivació sota el signe d'integració, trobem que tota funció contínua $f \in C(\partial D_r(a))$ dona lloc a una funció holomorfa en el disc $D_r(a)$ en integrar contra el nucli de Herglotz. En particular, si definim per $w \in D_r(a)$ la funció

$$g(w) := \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) H(z - a, w - a) |dz|,$$

aquesta és holomorfa en $D_r(a)$. Per $z_0 \in D_r(a)$ trobem doncs que

$$\operatorname{Im} g(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} \operatorname{Re} (v(z) H(z - a, z_0 - a)) |dz| \stackrel{(5.2)}{=} \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) P(z - a, z_0 - a) |dz|,$$

i per la fórmula integral de Poisson (vegeu el teorema 5.40) tenim que

$$\operatorname{Im} g = v \quad \text{en } D_r(a).$$

Com que l'harmònica conjugada de v és única llevat d'una constant additiva, trobem que $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} g + c$ amb $c \in \mathbb{R}$ i, per tant, $f = g + c$. En particular, avaluant en a tenim que

$$\begin{aligned} c = f(a) - g(a) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} f(z) P(z-a, 0) |dz| - \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) H(z-a, 0) |dz| \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} (\operatorname{Re} f(z) + iv(z) - iv(z)) |dz| = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} \operatorname{Re} f(z) |dz| = \operatorname{Re} f(a), \end{aligned}$$

usant que $P(z-a, 0) = 1 = H(z-a, 0)$. $\square$

Observació 5.42. En la demostració anterior, hem vist una expressió equivalent a

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_r(a)} v(z) H(z-a, z_0-a) \frac{dz}{z-a},$$

on $v = \operatorname{Im} f$. Per tant, utilitzant el teorema 4.39 de derivació sota el signe integral, obtenim

$$g'(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_r(a)} v(z) \partial_{z_0} H(z-a, z_0-a) \frac{dz}{z-a} = \frac{i}{2\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) \partial_{z_0} H(z-a, z_0-a) |dz|.$$

Per tant,

$$g'(z_0) = \frac{i}{\pi r} \int_{\partial D_r(a)} v(z) \frac{z-a}{(z-z_0)^2} |dz|. \quad \bullet$$

Exercicis

5.5.1. Demostreu el lema 5.34 usant les equacions de Cauchy-Riemann directament. $\triangleleft$

5.5.2. Demostreu que la funció $u(z) = \frac{1}{2} \ln(z\bar{z})$ és harmònica, però no té harmònica conjugada a $\mathbb{C}^*$. $\triangleleft$

5.5.3. Si f és analítica, són harmòniques $|f(z)|$, $\operatorname{Arg} f(z)$ i $\ln |f(z)|$? $\triangleleft$

5.5.4. Proveu el principi del màxim per funcions harmòniques: sigui u harmònica al domini Ω llavors

- a) si $z_0 \in \Omega$ i u té un màxim o un mínim relatiu a z_0 llavors u és constant en algun disc centrat a z_0 .
- b) Si el domini Ω és fitat, connex i $u \in C(\bar{\Omega})$, llavors el màxim i el mínim absoluts de u s'asoleixen a $\partial\Omega$.

Indicació: seguiu la demostració del principi del màxim per $|f|$ amb f analítica fet en capítols anteriors. $\triangleleft$

5.5.5. Determineu quines de les següents funcions u són harmòniques. Per cadascuna d'elles trobeu una conjugada harmònica v i expresseu la funció analítica $f(z) = u + iv$ com a funció de z .

a) $3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$

c) $xe^x \cos y - ye^x \sin y$

b) $2xy + 3xy^2 - 2y^3$

d) $e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2).$

<

5.5.6. Calculeu per $n = 1, 2, 3, 4$ els polinomis harmònics $p_n(x, y), q_n(x, y)$ definits per la igualtat $z^n = p_n + iq_n$. Trobar la forma general de p_n, q_n en coordenades polars (r, θ) . <

5.5.7. Sigui Ω un domini simplement connex, i sigui $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ una aplicació de Riemann, és a dir un homeomorfisme holomorf entre $\mathbb{D}$ i Ω amb inversa holomorfa, vegeu el teorema 7.6. Suposem que φ s'estén contínuament a $\partial\mathbb{D}$, que φ^{-1} s'estén contínuament a $\partial\Omega$ i que les seves derivades s'estenen contínuament a $\partial\mathbb{D}$ i a $\partial\Omega$ respectivament (sense anul·lar-s'hi). Demostreu que existeixen determinacions del logaritme i l'argument de manera que

$$\mathcal{L}_{\varphi'}(z_0) = \operatorname{Re} \mathcal{L}_{\varphi'}(0) + \frac{i}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{A}_{\varphi'}(z) H(z, z_0) |dz|. \quad <$$

5.6. El problema de Dirichlet

Donada una funció $f \in C(\partial\mathbb{D})$, el problema de Dirichlet consisteix a trobar una solució $u \in C(\mathbb{D}) \cap C^2(\mathbb{D})$ de l'equació

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0 & \text{per a tot } z \in \mathbb{D}, \\ u(\xi) = f(\xi) & \text{per a tot } \xi \in \partial\mathbb{D}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Aquest problema apareix naturalment en electrostàtica, teoria del potencial i transmissió de calor. La funció harmònica buscada representa l'estat estacionari determinat per unes dades imposades a la frontera.

Definim

$$u_f(z_0) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z) P(z, z_0) |dz|.$$

Teorema 5.43. Donada $f \in C(\partial\mathbb{D})$, u_f soluciona el problema de Dirichlet (5.3) i, de fet, la solució és única.

Demostració. Deixem la unicitat de la solució com a exercici, vegeu l'exercici 5.6.2.

Suposarem f de valors reals per simplificar l'argument, i el cas general se'n segueix per linearitat. Tenim doncs

$$u_f(z_0) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z) H(z, z_0) |dz|.$$

Com que u_f és la part real d'una funció holomorfa (vegeu el teorema de derivació sota el signe integral), inferim que u_f és harmònica mitjançant el lema 5.34. Per veure que, de fet, soluciona (5.3), ens cal veure que el límit quan z_0 s'aproxima a la frontera coincideix amb f .

Fixem $z_0 \in \mathbb{D}$. Notem que la fórmula integral de Poisson per $f(z) \equiv 1$ diu que

$$\int_{\partial\mathbb{D}} P(z, z_0) |dz| = 2\pi, \quad (5.4)$$

independentment del valor particular de z_0 . Per altra banda, podem fitar la integral lluny de z_0 com

$$\int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0| > \delta} P(z, z_0) |dz| \leq (1 - |z_0|) \mathcal{O}(1/\delta^2). \quad (5.5)$$

Efectivament, com que $P(z, z_0) = \frac{(1-|z_0|)(1+|z_0|)}{|z-z_0|^2}$ quan $z \in \partial\mathbb{D}$, només cal fitar $|z_0| \leq 1$ al numerador i $|z - z_0| > \delta$ al denominador.

Segui $\varepsilon > 0$. Volem veure que $|u_f(z_0) - f(\xi)| < \varepsilon$ si $|z_0 - \xi|$ és prou petit. Fixem-nos que

$$u_f(z_0) - f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z) P(z, z_0) |dz| - f(\xi) \stackrel{(5.4)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} (f(z) - f(\xi)) P(z, z_0) |dz|.$$

Prenent valors absoluts, i separant la part local i la part no-local, trobem

$$\begin{aligned} |u_f(z_0) - f(\xi)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0| \leq \delta} |f(z) - f(\xi)| P(z, z_0) |dz| \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0| > \delta} |f(z) - f(\xi)| P(z, z_0) |dz| = \boxed{1} + \boxed{2}. \end{aligned}$$

Primer fixarem δ de manera que controlem la part local i després suposarem que $|z_0 - \xi|$ és prou petit també, per poder controlar també la part no-local.

Per la part local, notem que si $|z_0 - \xi| < \delta/2$ i $|z - z_0| \leq \delta$, aleshores $|z - \xi| < |z - z_0| + |z_0 - \xi| \leq 2\delta$ i, si δ és prou petit, aleshores $|f(z) - f(\xi)| < \varepsilon/2$. En resum,

$$\boxed{1} \leq \frac{\varepsilon/2}{2\pi} \int_{z \in \partial\mathbb{D}} P(z, z_0) |dz| \stackrel{(5.4)}{=} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per la part no-local, fitem $|f(z) - f(\xi)| \leq 2 \sup |f|$ i usem (5.5) per inferir que

$$\boxed{2} \leq \frac{\sup |f|}{\pi} \int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0| > \delta} P(z, z_0) |dz| \stackrel{(5.5)}{\leq} \sup |f| \frac{C(1 - |z_0|)}{\delta^2}.$$

Si ara fixem primer δ per controlar la part local i després suposem que $|z_0 - \xi|$ és prou petit (i en particular $1 - |z_0| = |\xi| - |z_0| \leq |z_0 - \xi|$ és petit també) de manera que la part no-local estigui fitada per $\varepsilon/2$, inferim que

$$|u_f(z_0) - f(\xi)| \leq \varepsilon.$$

Finalment observem que el paràmetre δ escollit no depèn de ξ , i la fita de $|z_0 - \xi| < \frac{\delta^2 \varepsilon}{2C \sup |f|}$ depèn de $\sup |f|$ i δ , però no de ξ . Per tant, la continuïtat trobada és uniforme en $\xi \in \partial\mathbb{D}$ i se'n dedueix ràpidament que $u_f \in C(\overline{\mathbb{D}})$. $\square$

Observació 5.44. En aquesta demostració hem fet servir de manera implícita l'aproximació de la identitat: si un nucli $k(z, z_0)$ de valors reals satisfà la identitat (5.4) i la fita (5.5), i és integrable en el sentit de Lebesgue en $z \in \partial\mathbb{D}$, aleshores determina una aproximació de la identitat. És a dir que, repetint l'argument anterior, obtenim la continuïtat a la frontera de l'extensió $\int_{\partial\mathbb{D}} f(z) k(z, z_0) |dz|$ i que aquests valors de frontera coincideixen amb la funció $f \in C(\partial\mathbb{D})$. El nucli de Poisson garanteix, a més, l'harmonicitat de la solució trobada.

La separació del comportament d'una integral entre la part local i la part no-local, és un mecanisme clàssic usat en anàlisi de Fourier i, més en general, en anàlisi harmònica. •

Tot seguit donem una expressió alternativa de la solució del problema de Dirichlet sota hipòtesis extremes. Suposem que tenim una funció $u : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ contínua i harmònica en el disc, i anomenem $f(\theta) := u(e^{i\theta})$ als seus valors frontera. Aleshores sabem que

$$u(z) = F + \bar{G} \quad \text{amb } F, G \in H(\mathbb{D}),$$

on podem escollir $G(0) = 0$ ja que podem fixar una constant additiva, vegeu el lema 5.35. De la teoria local de Cauchy, vam aprendre que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{i} \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad (5.6)$$

per $z \in \mathbb{D}$, on $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Per tal de garantir la convergència uniforme, fem una suposició més. Suposem ara que

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| < +\infty \quad \text{i} \quad \sum_{n \geq 1} |b_n| < +\infty. \quad (5.7)$$

Definició 5.45 (Coeficients de Fourier). Donada $f \in L^1([0, 2\pi])$, anomenem per $n \in \mathbb{Z}$ el *coeficient de Fourier*

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

•

Teorema 5.46. Si $f \in C(\partial\mathbb{D})$ i $u_f = F + \bar{G}$ amb $F, G \in H(\mathbb{D})$ tals que (5.6) i (5.7) se satisfan, aleshores

$$u_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(-n) \bar{z}^n, \quad \text{per } z \in \mathbb{D} \quad (5.8)$$

(identificant $\partial\mathbb{D}$ amb $[0, 2\pi]$) i, per $z = e^{i\theta}$ tenim

$$f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\theta},$$

amb convergència uniforme en $\theta \in [0, 2\pi]$.

Demostració. Pel teorema d'Abel les sèries de (5.6) presenten convergència uniforme en $\bar{\mathbb{D}}$ i per tant podem dir que F i G són contínues al disc tancat, amb

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{i} \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

per a tot $z \in \bar{\mathbb{D}}$, i a més podem intercanviar límits: si $|z| = 1$ aleshores

$$u(z) = \lim_{r \rightarrow 1} u(rz) = \lim_{r \rightarrow 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n r^n \bar{z}^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \bar{z}^n.$$

Per tant, només ens cal demostrar (5.8). La segona afirmació se'n segueix per continuïtat a la frontera.

Per la fórmula integral de Cauchy per a derivades, sabem l'expressió dels coeficients a_n en termes dels valors de F a la frontera dels discs $D_r := D_r(0)$ amb $r < 1$ (i anàlogament de b_n en termes de G):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{F(w)}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+1}} re^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} F(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta. \quad (5.9)$$

A més,

$$\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \bar{G}(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \overline{\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} G(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta} = \overline{\frac{1}{2\pi i r^{2n}} \int_{\partial D_r} G(w) w^{n-1} dw}.$$

Si $n > 0$, pel teorema de Cauchy en un disc tenim que

$$\int_{\partial D_r} G(w) w^{n-1} dw = 0.$$

Si, en canvi, $n = 0$, aleshores la fórmula integral de Cauchy ens permet arribar a la mateixa conclusió:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} G(w) w^{-1} dw = G(0) = 0.$$

En resum, tornant a (5.9) i usant la convergència uniforme de F i G ens permeten passar al límit:

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \xrightarrow{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Raonant anàlogament amb $\bar{u}$, per $n \geq 1$ obtenim

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

és a dir

$$\bar{b}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta.$$

Combinant amb (5.6) el que hem vist és (5.8). □

El teorema 5.46 ens permet recuperar f en $\partial\mathbb{D}$ en termes dels coeficients de Fourier, que al seu torn estan determinats pels valors de f en $\partial\mathbb{D}$. Notem que en aquest raonament hem partit del fet que f és harmònica en el disc, contínua fins la frontera i les seves parts holomorfa i antiholomorfa tenen *a priori* bones propietats de convergència (convergència uniforme en la frontera). En general, donada una funció contínua $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, podem definir els coeficients de Fourier anteriors i la podem estendre de manera harmònica al disc mitjançant (5.8), però podem garantir-ne la continuïtat a la frontera? Podem garantir que $f(\theta)$ i $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{in\theta}$ definides com abans mantenen alguna relació? Aquest és el camp d'estudi de l'anàlisi de Fourier, que s'escapa de l'abast d'aquests apunts.

Exercicis

5.6.1. La fita 5.5 es pot millorar: demostreu que

$$\int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0| > \delta} P(z, z_0) |dz| \leq (1 - |z_0|) \mathcal{O}(1/\delta).$$

Indicació: Feu la integral en anells $2^j\delta < |z - z_0| \leq 2^{j+1}\delta$ i sumeu. ◁

5.6.2. Supposem que $\phi_1, \phi_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ són harmòniques a Ω i contínues fins a $\partial\Omega$ i que $\phi_1 = \phi_2$ a la vora $\partial\Omega$. Proveu que si Ω és simplement connex i fitat, aleshores $\phi_1 = \phi_2$ en tot punt d' Ω . Indicació: trobeu la funció v harmònica conjugada de $\phi_1 - \phi_2$ i apliqueu el principi del màxim (mínim) a $\phi_1 - \phi_2 + iv$. ◁

5.6.3. Una distribució estacionària T de la temperatura en una regió Ω és una funció harmònica i contínua fins la frontera. Trobeu la temperatura T a l'interior d'un disc de radi 1 si sabem que la temperatura val $\operatorname{Im} z$ als dos primers quadrants de la circumferència de frontera i 0 a la resta de punts de la vora. En particular vegeu que la temperatura al centre del disc és $1/\pi$. ◁