

6. Sèries de Laurent

En aquest capítol veurem com són les singularitats aïllades de les funcions holomorfes i estudiarem els desenvolupaments en sèrie entorn d'una singularitat. Obtindrem el teorema dels residus, que ens permetrà calcular integrals definides i indefinides que altrament serien complicades. Finalment en deduirem el principi de l'argument i el teorema de Rouché.

6.1. Sèries de Laurent i singularitats

Veurem tot seguit que tota funció holomorfa en un anell té un desenvolupament en sèrie de Laurent¹, que té una expressió formal similar a les sèries de potències, considerant també exponents negatius.

Sigui $a \in \mathbb{C}$, i siguin $0 \leq r < R \leq \infty$. Considerem l'anell

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}.$$

Observem que a Ω , les funcions $1, (z - a), (z - a)^2, \dots, (z - a)^n$ són holomorfes, però també ho són les funcions $(z - a)^{-1}, (z - a)^{-2}, \dots, (z - a)^{-n}$.

Definició 6.1 (Sèrie de Laurent). Anomenem *sèrie de Laurent* al voltant d' $a \in \mathbb{C}$ una sèrie de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

La part amb exponents negatius s'anomena *part singular* de la sèrie de Laurent. •

Escrivim $f = f_1 + f_2$, amb $f_2(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$. Observem que f_2 és una sèrie de potències que tindrà un radi de convergència R_2 , de manera que $f_2 \in H(D_{R_2}(a))$.

Considerem ara la sèrie que correspondria a les potències negatives, amb $w = \frac{1}{z-a}$, és a dir, estudiem la sèrie $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$. Aquesta és també una sèrie de potències, que tindrà el seu radi de convergència R_1 i, en particular, convergirà uniformement en $|w| \leq r$, per a tot $r < R_1$. Aleshores

$$f_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}$$

convergirà si $\frac{1}{|z-a|} < R_1$, és a dir, si $|z - a| > \frac{1}{R_1}$. I a més a més, la sèrie que defineix $f_1(z)$ convergeix uniformement en $\{|z - a| \geq 1/r\}$, on $r < R_1$.

¹Pierre Alphonse Laurent, París, 1813–1854. https://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre_Alphonse_Laurent

Ajuntant les dues parts de la sèrie de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$, veiem que f és holomorfa en l'anell $\{\frac{1}{R_1} < |z - a| < R_2\}$ (sempre que $1/R_1 < R_2$). El recíproc d'aquesta afirmació també és certa: tota funció holomorfa en un anell s'expressa com una sèrie de Laurent.

Teorema 6.2 (Existència i unicitat). *Sigui $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ amb $0 \leq r < R \leq \infty$, i sigui $f \in H(\Omega)$. Aleshores hi ha una única sèrie de Laurent amb*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n, \quad z \in \Omega.$$

A més, la sèrie convergeix absolutament i uniforme en els compactes d' Ω . En particular,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad \text{per qualsevol } \rho \in (r, R). \quad (6.1)$$

Demostració. Considerem les sèries $f_2(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n$ i $f_3(w) = \sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$ amb c_n donat per (6.1) (observem que el valor de ρ escollit no afecta, ja que si $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, els cercles $\gamma_{\rho_j}(t) = a + \rho_j e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$ són homòlegs en Ω , vegeu l'exemple 5.15). Aquests tenen radis de convergència $R_2 = \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$ i $R_3 = \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}\right)^{-1}$.

Notem en primer lloc que si $n \in \mathbb{Z}$ i $r < \rho < R$, aleshores

$$|c_n| \stackrel{\text{P.4.8}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{|w-a|=\rho} \frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}} |dw| \leq \frac{\sup_{\partial D_\rho(a)} |f|}{\rho^n}.$$

Per tant,

$$\frac{1}{R_2} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\sup_{\partial D_\rho(a)} |f|}}{\rho} = \frac{1}{\rho},$$

i

$$\frac{1}{R_3} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\sup_{\partial D_\rho(a)} |f|} \rho = \rho.$$

Com que $\rho \in (r, R)$ és arbitrari, deduïm que

$$R_1 := \frac{1}{R_3} \leq r \quad \text{i} \quad R \leq R_2.$$

Les sèries f_2 i f_3 convergeixen absolutament i uniforme en compactes dels seus discs de convergència $D_{R_2}(a)$ i $D_{R_3}(0)$ respectivament. Fent el canvi $w = (z - a)^{-1}$ en la segona sèrie deduïm que

$$f_1(z) := f_3((z - a)^{-1}) = \sum_{n \leq -1} c_n (z - a)^n$$

convergeix absolutament i uniforme en compactes de $\{|z - a| > R_1\}$. Per tant, $f_1 + f_2$ convergeix absolutament i uniforme en compactes d' Ω tal com volíem veure.

Resta demostrar que $f = f_1 + f_2$ i que la sèrie és única. Comencem per veure la coincidència. Fixem $z \in \Omega$. Prenem r_1, r_2 amb $r < r_1 < |z - a| < r_2 < R$, i considerem els cercles

$$\gamma_1(t) = a + r_1 e^{it}, \quad \gamma_2(t) = a + r_2 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Definim el cicle $\Gamma = \gamma_2 - \gamma_1$. Com que Γ és homòloga a 0 en l'anell Ω , i $\text{Ind}(\Gamma, z) = 1$, aplicant la fórmula integral de Cauchy global, obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Ara desenvoluparem en sèrie cadascuna de les dues integrals, de la mateixa manera que vam fer quan vam provar que tota funció holomorfa és localment una sèrie de potències, i ja haurem acabat. En primer lloc, per $w \in \gamma_2^*$, i com que $|z - a| < r_2 = |w - a|$, tenim que $\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = \frac{|z-a|}{r_2} < 1$. Per tant

$$\frac{1}{w - z} = \sum_{k \geq 0} \frac{(z - a)^k}{(w - a)^{k+1}},$$

i la convergència de la sèrie és uniforme en γ_2^* pel criteri M de Weierstrass. Per tant, podem treure el sumatori fora de la integral per obtenir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{k \geq 0} (z - a)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r_2} \frac{f(w)}{(w - a)^{k+1}} dw = f_2(z).$$

Per a la segona integral, procedim anàlogament: observem que, per $w \in \gamma_1^*$ tenim que $\left| \frac{w-a}{z-a} \right| = \frac{r_1}{|z-a|} < 1$. Per tant

$$\frac{1}{z - w} = \sum_{k \geq 1} \frac{(w - a)^{k-1}}{(z - a)^k}.$$

Aplicant el criteri M de Weierstrass, aquest cop en γ_1^* , deduïm que la sèrie anterior convergeix uniformement en γ_1^* i, per tant, podem treure el sumatori fora de la integral per obtenir

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z - a)^k} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r_1} f(w) (w - a)^{k-1} dw \right) = f_1(z).$$

Vegem ara la unicitat. Prenem ρ amb $r < \rho < R$. Recordem que, per $k \in \mathbb{Z}$, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} (z - a)^k dz = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -1 \\ 1 & \text{si } k = -1 \end{cases}$$

Si $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k (z - a)^k$ convergeix uniformement en els compactes d' Ω (això serà així per Cauchy-Hadamard), llavors podem treure el sumatori fora de la integral en el càlcul que segueix, per obtenir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} (w - a)^{k-(n+1)} dw = b_n,$$

que determina el coeficient $b_n = c_n$ de manera única. □

Exercicis

6.1.1. Calculeu la sèrie de Laurent de

$$a) \frac{z-1}{z(z-4)^3} \text{ a } 0 < |z-4| < 4. \qquad b) 1/e^{(1-1/z)} \text{ per } |z| > 0. \quad \triangleleft$$

6.1.2. Per a la funció $f(z) = \frac{\sin z \cos 3z}{z^4}$

1. Trobeu els primers termes no nuls de la part central de la seva sèrie de Laurent a $z = 0$.

2. Calculeu $\oint f(z)dz$ si es recorre $|z| = 1$ un cop i en sentit antihorari. $\triangleleft$

6.1.3. Trobeu el desenvolupament en sèrie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ a les corones:

$$\begin{array}{ll} a) \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}; & c) \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}; \\ b) \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}; & d) \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}. \end{array} \quad \triangleleft$$

6.1.4. Sigui $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$, doneu les sèries de Laurent per les tres corones centrades a 0 allà on f és analítica ($|z| < 1$, $1 < |z| < 3$ i $|z| > 3$). $\triangleleft$

6.1.5. Doneu els primers termes de la sèrie de Laurent de

$$a) f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{3z}\right) \text{ per } |z| > 0. \qquad b) f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \text{ per } 0 < |z| < R. \quad \triangleleft$$

6.1.6. Quina és la corona (o anell) de convergència de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$? $\triangleleft$

6.2. Singularitats aïllades de funcions holomorfes

Definició 6.3. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i considerem un subconjunt $E \subset \Omega$. Si $f \in H(\Omega \setminus E)$ i no està definida en els punts de E (o bé hi està definida però no hi és $\mathbb{C}$ -derivable), aleshores diem que E són les *singularitats* de f en Ω .

Una singularitat z_0 d'una funció holomorfa f es diu *aïllada* si hi ha $r > 0$ de manera que $f \in H(D_r(z_0) \setminus \{z_0\})$. $\bullet$

Per exemple, les funcions

$$\frac{\sin z}{z}; \quad \frac{1}{z^2}; \quad e^{1/z}$$

són holomorfes a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, i tenen una singularitat aïllada en $z = 0$.

Definició 6.4 (Singularitat evitable). Sigui z_0 una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f . Diem que z_0 és una *singularitat evitable* de f si hi ha $\varepsilon > 0$ i $g \in H(D_\varepsilon(z_0))$ amb

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad \bullet$$

És a dir, una singularitat evitable seria una singularitat “fictícia”, ja que podríem redefinir la funció de manera que sigui holomorfa al voltant del punt. És clar que si z_0 és una singularitat aïllada de f , i existeix $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, llavors z_0 és una singularitat evitable de f (simplement definint $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, vegeu el corollari 4.36 del teorema de Morera). Ara bé, existeix un criteri encara més feble per determinar quan una singularitat aïllada és evitable.

Proposició 6.5. *Sigui z_0 singularitat aïllada d'una funció holomorfa f . Llavors z_0 és evitable si i només si*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Demostració. Tenim que $f \in H(D_r(z_0) \setminus \{z_0\})$. Si z_0 és una singularitat evitable, llavors hi ha $\varepsilon > 0$ i $g \in H(D_\varepsilon(z_0))$ amb $f(z) = g(z)$ per $z \in D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. Per tant

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = 0 \cdot g(z_0) = 0.$$

Suposem ara que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$, i provarem que z_0 és una singularitat evitable de f . Definim

$$h(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}.$$

Llavors h és holomorfa en $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Com que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$, la funció h és contínua en z_0 , de manera que h és holomorfa en $D_r(z_0)$ (vegeu el corollari 4.36). Com que $h(z_0) = 0$, pel teorema 4.43 hi ha $g \in H(D_r(z_0))$ amb $h(z) = (z - z_0)g(z)$. En particular, $f(z) = g(z)$ per $z \neq z_0$, de manera que z_0 és una singularitat evitable de f . $\square$

A partir d'aquesta proposició ja podem veure que la funció $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ té una singularitat evitable en $z = 0$. En canvi, les singularitats en $z = 0$ de les funcions $\frac{1}{z^2}$ i $e^{1/z}$ no són evitables.

Definició 6.6 (Pol). Sigui z_0 una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f . Diem que z_0 és un *pol* de f si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty. \quad \bullet$$

Exemple 6.7. La funció $\frac{1}{z^2}$ té un pol en $z = 0$. En canvi, la singularitat en $z = 0$ de la funció $f(z) = e^{1/z}$ no és evitable ni és un pol, ja que si $z = -x$, tenim que $e^{-1/x} \rightarrow 0$ quan $x \rightarrow 0$, i en canvi, per $z = ix$, tenim que $|e^{1/ix}| = 1$. $\diamond$

Definició 6.8 (Singularitat essencial). Una singularitat aïllada d'una funció holomorfa que no és evitable ni és un pol es diu que és una *singularitat essencial*. $\bullet$

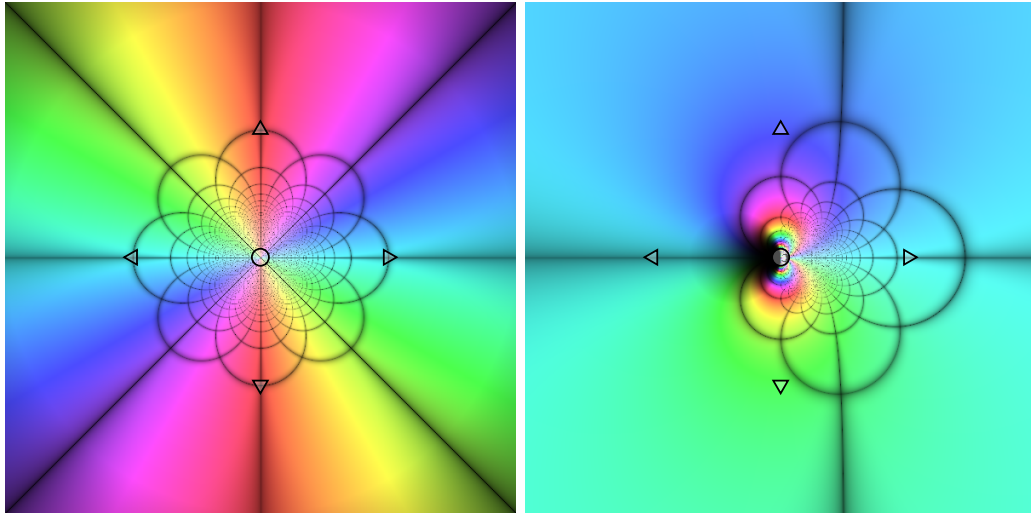


Figura 6.1.: A l'esquerra la funció $\frac{1}{z^2}$, amb un pol d'ordre 2 a l'origen; a la dreta $f(z) = e^{1/z}$, amb una singularitat essencial a l'origen.

Tornem al cas en què una funció f holomorfa en $D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ tingui un pol en el punt z_0 . Donat que $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, existeix $0 < r < R$ tal que $f(z) \neq 0$ per a tot $0 < |z - z_0| < r$. Si definim en $\Omega = D_r(z_0)$ la funció

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases},$$

es compleix que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, que prova que g és contínua en z_0 . Per tant, $g \in C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{z_0\})$, que implica que $g \in H(\Omega)$. Com que $g(z_0) = 0$, pel teorema 4.43 hi ha $m \in \mathbb{N}$ de manera que $g(z) = (z - z_0)^m g_1(z)$, on $g_1 \in H(\Omega)$ amb $g_1(z_0) \neq 0$. En particular, $g_1(z) \neq 0$ en un entorn de z_0 , de manera que podem desenvolupar en sèrie de potències al voltant de z_0 la funció $1/g_1$,

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k.$$

Llavors, per z en un entorn de z_0 amb $z \neq z_0$, tenim que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{g_1(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k \\ &= \frac{A_0}{(z - z_0)^m} + \frac{A_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{(z - z_0)} + G(z), \end{aligned}$$

on G és una sèrie de potències al voltant de z_0 , i $A_0 \neq 0$.

Definició 6.9. Donada una funció f amb un pol en z_0 , anomenem *ordre del pol* z_0 el nombre natural m tal que podem escriure

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

amb $c_{-m} \neq 0$. •

Per exemple, la funció $f(z) = \frac{1}{z^2}$ té un pol d'ordre 2 en $z = 0$.

També veiem que z_0 és un pol de f d'ordre m , si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0)^k f(z)| = +\infty, \quad \text{per a tot } k < m,$$

i existeix el límit

$$c_{-m} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0.$$

Si tenim una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f , podem veure quin tipus de singularitat és mitjançant la sèrie de Laurent de f en $0 < |z - z_0| < r$.

Lema 6.10 (Classificació de singularitats aïllades en termes de la sèrie de Laurent). *Sigui f holomorfa en $\{0 < |z - z_0| < r\}$ amb sèrie de Laurent donada per*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

- (i) z_0 és evitable si i només si $c_{-n} = 0$ per a tot $n \geq 1$;
- (ii) z_0 és un pol d'ordre m si i només si $c_{-n} = 0$ per a tot $n > m$ i $c_{-m} \neq 0$;
- (iii) z_0 és una singularitat essencial si i només si hi ha infinits $c_{-n} \neq 0$ per $n > 0$.

El següent resultat ens dona una idea del que passa al voltant d'una singularitat essencial d'una funció holomorfa.

Teorema 6.11 (Casorati²-Weierstrass). *Sigui f holomorfa en $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Si z_0 és una singularitat essencial de f , llavors*

$$f(D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$$

és dens en $\mathbb{C}$ per a tot $0 < \varepsilon \leq r$.

Demostració. Sigui ε amb $0 < \varepsilon \leq r$. Suposem que $f(D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ no és dens en $\mathbb{C}$. Aleshores hi ha $w_0 \in \mathbb{C}$ i $t > 0$ de manera que

$$|f(z) - w_0| \geq t \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon. \quad (6.2)$$

²Felice Casorati, Pavia, 1835–1890. https://ca.wikipedia.org/wiki/Felice_Casorati

En particular, $f(z) \neq w_0$ i, per tant, la funció

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

és holomorfa en $D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. La condició (6.2) ens diu també que g és fitada, de manera que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = 0$, que implica que $\{z_0\}$ és una singularitat evitable de g per la proposició 6.5. Llavors existeix

$$\alpha = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - w_0}.$$

Si $\alpha = 0$, llavors $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, de manera que z_0 seria un pol de f , en contradicció amb la nostra hipòtesi. Finalment, si $\alpha \neq 0$, llavors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 + \frac{1}{\alpha}$$

de manera que z_0 seria una singularitat evitable de f , en contradicció amb el fet que z_0 és una singularitat essencial de f . $\square$

Un resultat més avançat (teorema gran de Picard³), ens diu que al voltant d'una singularitat essencial, una funció holomorfa pren tots els valors complexos excepte potser un.

Exercicis

6.2.1. Construcció de funcions

- Trobeu una funció f que tingui un pol d'ordre 2 a $z = 1 + i$ i singularitats essencials a $z = 0, 1$.
- Trobeu una funció f que tingui una singularitat evitable a $z = 0$, un pol d'ordre 6 a $z = 1$ i una singularitat essencial a $z = i$. $\triangleleft$

6.2.2. Sigui f analítica amb zero d'ordre n a z_0 i g analítica amb zero d'ordre m a z_0 . Si $h(z) = f(z)/g(z)$ proveu que

- si $n > m$ $h(z)$ s'estén a una funció holomorfa amb un zero d'ordre $n - m$ a z_0 ,
- si $n < m$ $h(z)$ té un pol d'ordre $m - n$ a z_0 ,
- si $n = m$ $h(z)$ s'estén a una funció holomorfa i no nul·la a z_0 . $\triangleleft$

6.2.3. Determineu les singularitats de les funcions següents. Si a és una singularitat evitable de f , calculeu el valor que cal donar a $f(a)$ per tal que f sigui holomorfa en un entorn d' a , i si a és un pol de f , determineu la part singular de f en a (la part de la sèrie amb índexs negatius).

³Charles Émile Picard, París, 1856–1941. https://ca.wikipedia.org/wiki/Charles_%C3%89mile_Picard

$$a) f(z) = z \cos(1/z).$$

$$c) f(z) = \frac{1}{(1 - ez)^2}. \quad \triangleleft$$

$$b) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3(z - 1)^2}.$$

6.2.4. Sigui $f \in H(D_r(a) \setminus \{a\})$. Suposem que existeix una successió $(z_n)_n$ tal que $z_n \rightarrow a$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e^{f(z_n)}| = 0, \quad \left| f\left(z_n + \frac{1}{n}\right) \right| \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determineu el tipus de singularitat que té la funció f en el punt a . $\triangleleft$

6.2.5. a) La funció $\tan(1/z)$ té una singularitat aïllada al 0? De quin tipus?

b) Sigui 0 singularitat aïllada de $f(z)$. Suposem que $|f(z)| \leq |z|^{-\alpha}$ on $0 < \alpha < 1$. Demostreu que 0 és una singularitat evitable. $\triangleleft$

6.2.6. (a) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$. Suposem que $f(a_n) = 0$ per una successió $a_n \in \mathbb{D}^*$ tal que $a_n \rightarrow 0$. Demostreu que $f \equiv 0$ o bé $z = 0$ és una singularitat essencial de f .

(b) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^*$ tal que per a tot $n \geq 2$, f no té zeros sobre les corbes $|z| = 1/n$ i a més

$$\int_{|z|=1/n} \frac{1}{f(z)} dz \neq \int_{|z|=1/(n+1)} \frac{1}{f(z)} dz.$$

Demostreu que $z = 0$ és una singularitat essencial de f . Indicació: Utilitzeu el teorema de deformació i l'apartat anterior. $\triangleleft$

6.3. Teorema dels Residus

L'objectiu d'aquesta secció és veure com es pot calcular $\int_\gamma f(z) dz$ quan γ és un camí tancat en Ω , però la funció f no és holomorfa en tot Ω , sinó que té singularitats aïllades.

Definició 6.12. Sigui f holomorfa amb una singularitat aïllada en un punt a . Sigui

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$$

el desenvolupament en sèrie de Laurent de f al voltant del punt a , és a dir, en $D_r(a) \setminus \{a\}$. El residu de f en a és

$$\text{Res}(f, a) = c_{-1}. \quad \bullet$$

Proposició 6.13. Sigui $r > 0$ i $a \in \mathbb{C}$ i sigui $f \in H(D_r(a) \setminus \{a\})$. Llavors

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, a) \quad \forall 0 < \varepsilon < r.$$

Demostració. Això és una conseqüència immediata del teorema 6.2 i de la definició de residu. $\square$

Observació 6.14 (Càlcul de residus). És clar que si $z = a$ és una singularitat evitable de f , llavors $\text{Res}(f, a) = 0$.

Si $z = a$ és un pol simple de f , llavors

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z).$$

Suposem que $z = a$ és un pol de f d'ordre m . En aquest cas, obtenim el desenvolupament de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad 0 < |z - a| < r.$$

Llavors, per $0 < |z - a| < r$, tenim que

$$g(z) := (z - a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-(m-1)}(z - a) + \cdots + c_{-1}(z - a)^{m-1} + c_0(z - a)^m + \cdots$$

de manera que el residu de f en el punt a és el coeficient $(m - 1)$ -èsim del desenvolupament en sèrie de potències de la funció g , que sabem que és

$$\frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

Per tant, si $z = a$ és un pol de f d'ordre m , llavors

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \partial^{(m-1)} [(z - a)^m f(z)]_{z=a}. \quad \bullet$$

Exemple 6.15. Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2},$$

que té singularitats en els punts $z_0 = 1$ i $z_1 = -1$, que són pols d'ordre 2. Llavors, si $g(z) = (z - 1)^2 f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2}$, llavors $g'(z) = \frac{e^z(z+1) - 2e^z}{(z+1)^3}$, i

$$\text{Res}(f, 1) = g'(1) = 0.$$

Si $h(z) = (z + 1)^2 f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, llavors $h'(z) = \frac{e^z(z-1) - 2e^z}{(z-1)^3}$, i

$$\text{Res}(f, -1) = h'(-1) = \frac{1}{2e}. \quad \diamond$$

Teorema 6.16 (Teorema dels residus). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, i sigui $f \in H(\Omega \setminus A)$, on $A \subset \Omega$ no té punts d'acumulació en Ω . Si Γ és un cicle en $\Omega \setminus A$ que és homòleg a 0 en Ω , llavors*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Ind}(\Gamma, a) \text{Res}(f, a).$$

Demostració. Vegem primer que la suma té un nombre finit de termes diferents de zero. Posem

$$K = \Gamma^* \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*; \text{Ind}(\Gamma, z) \neq 0\}.$$

Comprovem que K és compacte. Observem primer que $K \subset \Omega$, ja que per hipòtesi $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per a tot $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Si R és prou gran, llavors $\Gamma^* \subset D_R(0)$ i $\mathbb{C} \setminus D_R(0)$ està contingut en la component connexa no fitada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, on es verifica que $\text{Ind}(\Gamma, \cdot) = 0$. Per tant, $K \subset D_R(0)$ i, en particular, K és **fitat**. D'altra banda, cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ és un obert i K és el complementari de les components connexes de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ on l'índex val zero, és a dir, K és **tancat** i, en conseqüència, K és compacte.

Com que A no té punts d'acumulació en Ω , és finit o numerable i, en particular,

$$B = \{a \in A : \text{Ind}(\Gamma, a) \neq 0\} = K \cap A,$$

és finit ja que el compacte $K \subset \Omega$ no pot contenir punts d'acumulació. Per tant

$$B = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Considerem els discs oberts $D_i := D_{\varepsilon_i}(a_i)$, $i = 1, \dots, n$ amb $\overline{D_i} \cap (A \setminus \{a_i\}) = \emptyset$ de manera que

- (i) $\overline{D_{\varepsilon_i}(a_i)} \subset \Omega$, $i = 1, \dots, n$;
- (ii) $D_{\varepsilon_i}(a_i) \cap \Gamma^* = \emptyset$, $i = 1, \dots, n$;
- (iii) $\overline{D_{\varepsilon_i}(a_i)} \cap \overline{D_{\varepsilon_j}(a_j)} = \emptyset$ per $i \neq j$.

Per $i = 1, \dots, n$, siguin $\gamma_i(t) = a_i + \varepsilon_i e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, cercles de centre a_i i radi ε_i , i considerem el cicle

$$\Lambda = \Gamma - \sum_{i=1}^n n_i \gamma_i, \quad n_i = \text{Ind}(\Gamma, a_i).$$

Llavors Λ és un cicle en $\Omega \setminus A$. Vegem que és homòleg a 0 en $\Omega \setminus A$. Hem de veure que

$$\text{Ind}(\Lambda, z) = 0 \quad \text{per a tot } z \notin (\Omega \setminus A).$$

Si $z \notin \Omega$, llavors $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$, ja que Γ és homòleg a 0 en Ω . També, per $i = 1, \dots, n$, tenim que $\text{Ind}(\gamma_i, z) = 0$, ja que z pertany a la component no fitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma_i^*$, de manera que $\text{Ind}(\Lambda, z) = 0$.

Si $z \in A \setminus B$, llavors $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per la definició del conjunt B . A més, també $\text{Ind}(\gamma_i, z) = 0$ per a tot $i = 1, \dots, n$ ja que z es troba a l'exterior del cercle γ_i . Per tant, $\text{Ind}(\Lambda, z) = 0$.

Si $z \in B$, llavors $z = a_k$ per algun $1 \leq k \leq n$. Com que $\text{Ind}(\gamma_i, a_k) = 0$ si $i \neq k$, i $\text{Ind}(\gamma_k, a_k) = 1$, tenim que

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\Lambda, z) &= \text{Ind}(\Lambda, a_k) = \text{Ind}(\Gamma, a_k) - \sum_{i=1}^n n_i \text{Ind}(\gamma_i, a_k) \\ &= \text{Ind}(\Gamma, a_k) - n_k = \text{Ind}(\Gamma, a_k) - \text{Ind}(\Gamma, a_k) = 0. \end{aligned}$$

Així doncs, tenim una funció $f \in H(\Omega \setminus A)$, i Λ és un cicle en $\Omega \setminus A$ que és homòleg a 0 en $\Omega \setminus A$. Pel teorema de Cauchy global, tenim que

$$\int_{\Lambda} f(z) dz = 0.$$

És a dir,

$$0 = \int_{\Lambda} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{i=1}^n n_i \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

Per la proposició 6.13, tenim que

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_i),$$

de manera que, com que $n_i = \operatorname{Ind}(\Gamma, a_i)$, tenim que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Ind}(\Gamma, a_i) \operatorname{Res}(f, a_i). \quad \square$$

Moltes vegades aplicarem el teorema dels residus quan tinguem una funció holomorfa amb un nombre finit de singularitats $\{a_1, \dots, a_n\}$ dins d'una corba γ tancada simple orientada positivament, així que els índexs d'aquests punts valen 1. En aquest cas el teorema dels residus ens diu que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f, a_i).$$

Exercicis

6.3.1. Existeix alguna funció f amb pol simple a z_0 tal que $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$? Si el pol és d'ordre 2, pot passar que $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$? $\triangleleft$

6.3.2. Determineu els residus de f a 0 i a 1 en l'exercici 6.1.3. Quines de les sèries que vau calcular cal usar? $\triangleleft$

6.3.3. Calculeu els residus de les funcions següents en els punts indicats:

a) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$, $z_0 = 0$.

b) $f(z) = \frac{1 + e^z}{z^4}$, $z_0 = 0$. $\triangleleft$

6.3.4. Decidiu si són certes o falses les següents afirmacions. Doneu els arguments que provin les afirmacions o trobeu contraexemples.

1. Si f, g tenen un pol a z_0 llavors $f + g$ té un pol a z_0 .
2. Si f, g tenen un pol a z_0 i en els dos casos el residu és no nul llavors $f \cdot g$ té un pol a z_0 amb residu no nul.

3. Si f té una singularitat essencial a $z = 0$ i g un pol d'ordre finit a $z = 0$ llavors $f + g$ té singularitat essencial a $z = 0$.

4. Si f té un pol d'ordre m a $z = 0$ llavors $f(z^2)$ té un pol d'ordre $2m$. $\triangleleft$

6.3.5. Supposem que f és holomorfa amb un zero d'ordre m a z_0 . Proveu que $g(z) = f'(z)/f(z)$ té un pol simple a z_0 amb $\text{Res}(g, z_0) = m$. $\triangleleft$

6.3.6. a) Proveu que si $g(z)$ té un zero simple a z_0 , llavors $1/g(z)$ té un pol simple a z_0 .

b) Proveu que $\text{Res}(1/g, z_0) = 1/g'(z_0)$.

c) Sigui $f(z) = 1/\sin(z)$, trobeu els seus pols i proveu que són simples. Trobeu els residus. $\triangleleft$

6.3.7. Trobeu i classifiqueu les singularitats aïllades de cadascuna de les funcions següents. Calculeu el residu a cada singularitat.

a) $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2(z + 1)}$; b) $g(z) = \frac{1}{e^z - 1}$; c) $h(z) = \cos(1 - 1/z)$. $\triangleleft$

6.3.8. Avalueu $\oint \frac{1}{(z + 1)(z - 1)(z - 2)(z - 3)(z - 4)(z - 5)} dz$ al llarg de la corba $|z - 3| = 3$ recorreguda en sentit antihorari. $\triangleleft$

6.3.9. Avalueu les següents integrals

a) $\oint_{|z|=5} \frac{\sin z}{z^2 - 4} dz$, c) $\oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z^2(z - 2)(z + 5i)} dz$. $\triangleleft$

b) $\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz$,

6.3.10. Calculeu $\int_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{z - a} dz$ pels diferents valors d' $a \in \mathbb{C}$ tals que $|a| \neq 1$. $\triangleleft$

6.3.11. Calculeu la integral de la funció $f(z) = \frac{1 + z}{1 + \sin z}$ sobre la vora del disc $D_7(0)$. $\triangleleft$

6.3.12. Per a $t > 0$, sigui C_t la circumferència de centre it que passa pels punts -2 i 2 . Calculeu

$f(t) = \int_{C_t} \frac{e^{i\pi z} + 1}{z(z - t)} dz$, per a $t \neq 2$. $\triangleleft$

6.4. Residu a l'infinit

Una funció holomorfa en un domini que contingui un entorn de l'infinit i tal que $f(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ es pot entendre que hi té un pol. Si $f(\infty) \in \mathbb{C}$, parlarem d'una singularitat evitable, i si $\nexists f(\infty)$, d'una singularitat essencial. El teorema dels residus ens permet també relacionar el residu en aquesta singularitat amb els residus en $\mathbb{C}$.

Definició 6.17. Sigui f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus E$ amb un conjunt finit de singularitats aïllades E , i sigui Γ una corba simple tancada orientada positivament i tal que tots els punts de E queden a l'interior de Γ . Aleshores el *residu de f a l'infinit* és

$$\text{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz. \quad \bullet$$

Pel teorema dels residus, si A és el conjunt de singularitats aïllades de f en $\mathbb{C}$, tenim que

$$\text{Res}(f, \infty) = - \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a),$$

ja que $\text{Ind}(\Gamma, a) = 1$ per hipòtesi.

Lema 6.18. Sigui f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus E$ amb un conjunt finit de singularitats aïllades E . Aleshores el residu de f a l'infinit és

$$\text{Res}(f, \infty) = - \text{Res} \left(\frac{1}{w^2} f \left(\frac{1}{w} \right), 0 \right).$$

Demostració. Fem el canvi de variable $w = 1/z$. Sigui C_t la circumferència de radi t , recorreguda en sentit antihorari. Si R és tal que C_R conté totes les singularitats, aleshores trobem

$$-2\pi i \text{Res}(f, \infty) = \int_{C_R} f(z) dz = \int_{C_{1/R}^-} f \left(\frac{1}{w} \right) \frac{-dw}{w^2},$$

on $C_{1/R}^-$ és la corba inversa de $C_{1/R}$, vegeu la definició 4.2. Canviant-ne l'orientació trobem

$$\text{Res}(f, \infty) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_{1/R}} f \left(\frac{1}{w} \right) \frac{dw}{w^2} \stackrel{\text{T. 6.16}}{=} - \text{Res} \left(\frac{1}{w^2} f \left(\frac{1}{w} \right), 0 \right),$$

tal com volíem veure. □

Exercicis

6.4.1. Trobeu el valor la integral $\oint_{|z|=2} \frac{5z-1}{z(z-1)} dz$ calculant el residu de l'integrand a l'infinit. ◁

6.4.2. Sigui $a \in \mathbb{R}$, calculeu, estudiant el residu a l'infinit, $I = \oint_C \frac{a^2 - z^2}{z(z^2 + a^2)} dz$ on C és una corba simple que envolta les singularitats de l'integrand. ◁

6.4.3. Avalueu $\oint_{|z|=1} e^{1/z} \sin(1/z) dz$. ◁

6.5. Aplicació al càlcul d'integrals

El teorema dels residus es pot fer servir per calcular diverses integrals reals. Farem diversos exemples típics.

Exemple 6.19. Tenim una funció racional R sense singularitats en $|z| = 1$, i volem calcular

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt.$$

Fent el canvi $z = e^{it}$, podem posar

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}; \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}.$$

Com que $dz = ie^{it} dt$, llavors

$$I = \frac{1}{i} \int_{\gamma} R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{z},$$

on γ és el cercle $|z| = 1$. Ara apliquem el teorema dels residus i ja està.

Per exemple,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}.$$

Fent el canvi $z = e^{it}$, tenim que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz.$$

La funció

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

té singularitats en els punts $\alpha = (-2 + \sqrt{3})i$ i $\beta = (-2 - \sqrt{3})i$. Tenim que $|\alpha| < 1$ i $|\beta| > 1$, així que aplicant el teorema dels residus, tenim que

$$\int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \alpha).$$

Com que α és un pol simple de f , tenim que

$$\operatorname{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{2}{z - \beta} = \frac{2}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{3}i}.$$

Per tant,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

◇

Exemple 6.20. Càlcul d'integrals del tipus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx,$$

on f no té cap pol en l'eix real.

Per exemple, donat $k > 0$, calculem

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2} dx.$$

Tenim

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx \right).$$

Així doncs, calculem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx.$$

Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + k^2}.$$

Aquesta funció és holomorfa a tot $\mathbb{C}$, excepte en els punts ki , $-ki$ que són pols de f d'ordre 1. Prenem $R > 0$ molt gran, de manera que $R > k$. Integrem la funció f en el semicercle γ format pel segment $\gamma_1(x) = x$, amb $x \in [-R, R]$ i $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Com que només

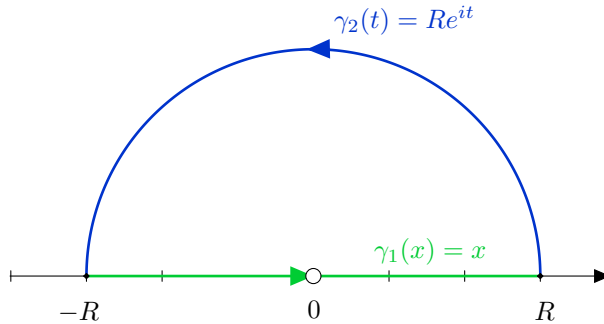


Figura 6.2.: Camins de l'exemple 6.20.

el punt ki es troba en l'interior del semicercle, pel teorema dels residus, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ki).$$

Calculem ara el residu de f en el punt ki . Com que és un pol d'ordre 1, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, ki) = \lim_{z \rightarrow ki} (z - ki) f(z) = \lim_{z \rightarrow ki} \frac{e^{iz}}{z + ki} = \frac{e^{iki}}{2ki},$$

així que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{\pi}{k} e^{-k}.$$

D'altra banda, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx.$$

Fent $R \rightarrow \infty$, obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{\pi}{k} e^{-k},$$

on

$$I_R = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Si veiem que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$, aleshores obtindrem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} dx = \frac{\pi}{k} e^{-k} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2} dx = \frac{\pi}{2k} e^{-k}.$$

Provem doncs que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$. Tenim que

$$I_R = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{R^2 e^{2it} + k^2} Ri e^{it} dt.$$

Llavors

$$|I_R| \leq \int_0^{\pi} \frac{|e^{iRe^{it}}|}{|R^2 e^{2it} + k^2|} R dt.$$

Com que $|e^{iRe^{it}}| = e^{-R \sin t}$, fent servir que $|R^2 e^{2it} + k^2| \geq R^2 - k^2$, i que $\sin t \geq 0$ per $t \in [0, \pi]$, veiem que

$$|I_R| \leq \frac{R}{R^2 - k^2} \int_0^{\pi} e^{-R \sin t} dt \leq \frac{\pi R}{R^2 - k^2} \rightarrow 0$$

quan $R \rightarrow \infty$, provant el resultat desitjat. $\diamond$

Observació 6.21. Si R és una funció racional sense pols a l'eix real i

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zR(z) = 0$$

(és a dir, si $R = P/Q$ amb $\deg Q \geq \deg P + 2$), aleshores podem calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$$

integrant R sobre un semicercle del semiplà superior i fent tendir el radi a infinit, com en l'exemple anterior. Vegeu l'exercici 6.5.1. $\bullet$

Exemple 6.22. Càlcul de

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}, \quad n \geq 2.$$

Aquesta integral és convergent ja que $n > 1$. Considerem la funció

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n},$$

que és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ excepte en les solucions de $z^n + 1 = 0$, és a dir, en

$$a_k = e^{i(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Integrem la funció f en el “formatget” γ de la figura 6.3, amb $R > 1$ gran. Només el pol

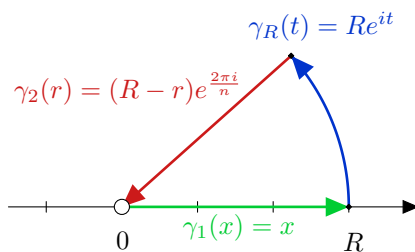


Figura 6.3.: Camins de l'exemple 6.22.

a_0 es troba en l'interior del camí γ , de manera que, pel teorema dels residus,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_0).$$

Com que $a_0 = e^{\pi i/n}$ és un zero simple de $1+z^n$, tenim

$$\operatorname{Res}(f, a_0) = \frac{1}{na_0^{n-1}},$$

vegeu l'exercici 6.3.6. Com que $a_0^n = -1$, això també es pot escriure com

$$\operatorname{Res}(f, a_0) = -\frac{a_0}{n}.$$

Per tant,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -\frac{2\pi i}{n} e^{\pi i/n}.$$

D'altra banda, si $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi/n]$, aleshores

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi}{n} \frac{R}{R^n - 1} \longrightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

A més,

$$\int_{[0,R]} f(z) dz = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n},$$

mentre que, en el segment radial inclinat, posant $z = te^{2\pi i/n}$,

$$\int_{[0,Re^{2\pi i/n}]} f(z) dz = e^{2\pi i/n} \int_0^R \frac{dt}{1+t^n}.$$

Tenint en compte l'orientació del contorn, obtenim, fent $R \rightarrow +\infty$,

$$(1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2\pi i}{n} e^{\pi i/n}.$$

Finalment, com que

$$1 - e^{2\pi i/n} = -2ie^{\pi i/n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

deduïm

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}.$$

◇

Exemple 6.23. Si f té algun pol en l'eix real, evitem el pol. Per exemple, calculem

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Integrant per parts, es pot veure que aquesta integral impròpia és convergent (encara que no és absolutament convergent). Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z},$$

que és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Integrem f en el camí γ de la figura 6.4. Pel teorema de

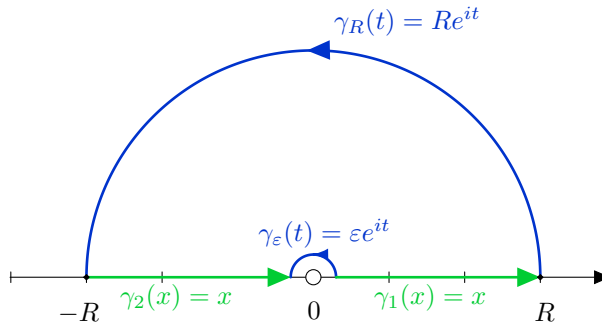


Figura 6.4.: Camins de l'exemple 6.23.

Cauchy, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

D'altra banda, com que $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_R \vee \gamma_2 \vee \gamma_\varepsilon^-$, amb $\gamma_1(x) = x$ per $x \in [\varepsilon, R]$; $\gamma_2(y) = y$ per $y \in [-R, -\varepsilon]$; $\gamma_R(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \pi]$ i $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ per $t \in [0, \pi]$, tenim que

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz.$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

També, després de fer el canvi $x = -y$, tenim que

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iy}}{y} dy = - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx.$$

Per tant, per a $0 < \varepsilon < R$, tenim

$$0 = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx + I_R - I_\varepsilon.$$

Això és,

$$0 = 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx + I_R - I_\varepsilon.$$

Fent primer $R \rightarrow +\infty$ i després $\varepsilon \rightarrow 0$, i usant que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$ (vegeu l'exercici 6.5.2), obtenim

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon.$$

Tot plegat ens dona que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon.$$

Vegem ara que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(e^{iz} - 1)}{z} dz = 0.$$

Efectivament, per $|z| = \varepsilon$ amb $0 < \varepsilon < 1$ tenim que

$$\left| \frac{e^{iz} - 1}{z} \right| \leq \frac{e^{|z|} - 1}{|z|} \leq e^{|z|} = e^\varepsilon \leq e$$

(aquestes desigualtats es poden veure a partir del desenvolupament en sèrie de l'exponencial) i, per tant,

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(e^{iz} - 1)}{z} dz \right| \leq e \text{Long}(\gamma_\varepsilon) = e \pi \varepsilon,$$

que tendeix a zero quan ε tendeix a zero.

Això implica que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{i \varepsilon e^{it} dt}{\varepsilon e^{it}} = \pi i.$$

Per tant

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad \diamond$$

Exemple 6.24. Per $0 < \alpha < 1$, podem calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{Q(x)}{x^{\alpha}} dx$$

on Q no té cap pol en $\{0\} \cup \mathbb{R}^+$ amb $\lim_{z \rightarrow \infty} zQ(z) = 0$.

En aquest cas, considerem la funció

$$f(z) = Q(z) z^{-\alpha}, \quad z^{-\alpha} = e^{-\alpha \mathcal{L}z},$$

amb $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$, amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$. Llavors $z^{-\alpha}$ és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Sobre la vora superior del tall,

$$z^{-\alpha} \rightarrow x^{-\alpha},$$

mentre que sobre la vora inferior,

$$z^{-\alpha} \rightarrow e^{-2\pi i \alpha} x^{-\alpha}.$$

. En aquest cas, integrem f en el recinte “comecocos” γ de la figura 6.5.

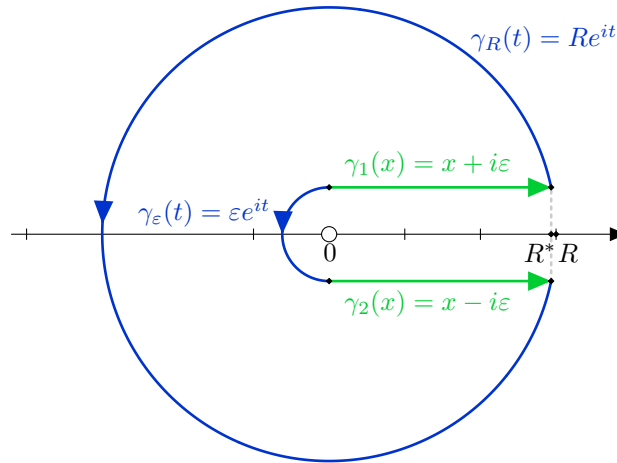


Figura 6.5.: Camins de l'exemple 6.24.

Tenim $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R - \gamma_2 - \gamma_\varepsilon$, amb

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x + i\varepsilon, & \text{per } x \in [0, R^*]; \\ \gamma_R(t) &= Re^{it}, & \text{per } t \in [\varepsilon^*, 2\pi - \varepsilon^*]; \\ \gamma_2(x) &= x - i\varepsilon, & \text{per } x \in [0, R^*]; \\ \gamma_\varepsilon(t) &= \varepsilon e^{it}, & \text{per } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

El lector àvid de rigor pot desxifrar el significat de R^* i ε^* i el seu comportament asimptòtic observant la figura 6.5. Així, si veiem que els arcs exterior i interior no contribueixen en el límit, el teorema dels residus dona

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_0^\infty \frac{Q(x)}{x^\alpha} dx = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Res}(Q(z)z^{-\alpha}, a),$$

on A és el conjunt de pols de Q en $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, vegeu l'exercici 6.5.7. $\diamond$

Exemple 6.25. Volem calcular integrals del tipus

$$\int_0^\infty R(x) \ln x dx,$$

on R no té cap pol en $\mathbb{R}^+$ i si $R = P/Q$, grau $Q \geq \text{grau } P + 2$.

Observem, primer, que si raonem com en els casos anteriors i agafem la funció $g(z) = R(z) \mathcal{L}z$ on $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$ amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$, i integrem la funció g en la regió “comecocos” del cas anterior, es compleix que $z \in \gamma_1^*$, $z = x + i\varepsilon$, així que $\mathcal{L}z \rightarrow \ln x$ si $\varepsilon \rightarrow 0$ i si $z \in \gamma_3^*$, $z = x - i\varepsilon$, de manera que $\mathcal{L}z \rightarrow \ln x + 2\pi i$ si $\varepsilon \rightarrow 0$. Tot plegat ens dona que si $z = x + i\varepsilon$, amb $x > 0$, $g(x + i\varepsilon) \rightarrow R(x) \ln x$, i $g(x - i\varepsilon) \rightarrow R(x)(\ln x + 2\pi i)$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$ i, com que els camins es recorren en sentits oposats, la part corresponent a $R(x) \ln(x)$ es cancel·la, i no podem calcular la integral desitjada.

Per aquest motiu, agafem la funció

$$f(z) = R(z) (\mathcal{L}z)^2,$$

on $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$ amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$, i integrem la funció f en la regió “comecocos” del cas anterior. La component imaginària ens permetrà recuperar la integral buscada, vegeu l'exercici 6.5.5. $\diamond$

Exercicis

6.5.1. Demostreu que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \triangleleft$$

6.5.2. Per $r > 0$, considerem la corba $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $\gamma_r(t) = re^{it}$, i sigui

$$I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Demostreu que $\lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = 0$. $\triangleleft$

6.5.3. Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3} dx$$

i calculeu-ne el seu valor (cal justificar tots els passos). $\triangleleft$

6.5.4. Calculeu

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

6.5.5. Calculeu

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

6.5.6. Justifiqueu la integrabilitat (Lebesgue o impròpia Riemann) i calculeu les següents integrals (en el tercer apartat, $n = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{array}{lll} a) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t} dt; & c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2+\cos t} dt; & e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2-x+1} dx; \\ b) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx; & d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx; & f) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^5}. \end{array}$$

6.5.7. Donat $a \in (0, 1)$ calculeu el valor de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2} dx.$$

6.5.8. Siguiu $f(z) = e^z/z^2$ i la recta $\gamma = \{1+it; t \in (-\infty, +\infty)\}$.

a) Calculeu (justificant tots els passos)

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Indicació: integreu f sobre la vora del semidisc de centre $z_0 = 1$ i radi R amb $\operatorname{Re} z \leq 1$.

$$b) \text{ Deduïu que } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(t) + 2t\sin(t)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2\pi}{e}.$$

6.5.9. Considereu la funció $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$.

(a) Determineu les singularitats de f .

(b) Calculeu la part singular del desenvolupament de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(c) Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor.

6.5.10. *Considereu*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)^2}.$$

(a) *Trobeu la part singular de la sèrie de Laurent al voltant de $z = 2i$.*

(b) *Justifiqueu la convergència de*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor (justifiqueu tots els passos).

<

6.5.11. *Sigui $f(z) = e^{iz^2}$, i considereu el camí γ_R format per el segment que va de 0 a R ; l'arc del cercle $|z| = R$ que va de R a $Re^{i\pi/4}$, i el segment que va de $Re^{i\pi/4}$ a 0. Demostreu que*

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$

i utilitzeu-ho per a calcular les integrals de Fresnel

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx, \quad \int_0^\infty \sin(x^2) dx.$$

Observació: *Podeu utilitzar que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.*

<

6.5.12. *Calculeu, justificant tots els passos, la integral*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2 + x + 1} dx, \quad -1 < \alpha < 1.$$

Indicació: *Considereu la funció $f(z) = \frac{z^\alpha}{z^2 + z + 1}$. Definiu una determinació del logaritme $\log(z)$ a $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ de manera que $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$. Finalment integreu la funció $f(z)$ a la mateixa regió que les integrals del tipus*

$$\int_0^{+\infty} R(x) \ln(x) dx.$$

<

6.6. Principi de l'argument

El principi de l'argument i el teorema de Rouché es fan servir per calcular el nombre de zeros i pols d'una funció meromorfa dins d'una corba tancada.

Definició 6.26. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert. Diem que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és *meromorfa* en Ω si $f \in H(\Omega \setminus E)$, on $E \subset \Omega$ està format per punts aïllats, i aquestes singularitats de f són pols. En aquest cas, posem $f \in M(\Omega)$. •

Teorema 6.27 (Principi de l'argument). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f \in M(\Omega)$. Denotem per Z el conjunt dels zeros de f en Ω , i per E el conjunt de pols de f en Ω . Sigui γ un camí tancat en $\Omega \setminus (Z \cup E)$, homòleg a 0 en Ω . Llavors*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \in Z} \text{Ind}(\gamma, z) m(f, z) - \sum_{p \in E} \text{Ind}(\gamma, p) m(f, p),$$

on $m(f, z)$ és la multiplicitat del zero z , i $m(f, p)$ denota l'ordre del pol p .

Com en el teorema dels residus, les sumes anteriors tenen només un nombre finit de termes no nuls.

Observació 6.28. S'anomena el principi de l'argument, ja que si $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$ és la corba imatge, llavors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Ind}(\Gamma, 0),$$

així que, si γ és una corba tancada simple, llavors el nombre de zeros menys el nombre de pols de f en l'interior de γ (comptant multiplicitats) és igual al nombre de voltes que dona la corba imatge $f(\gamma)$ al voltant del zero, que seria la variació de l'argument al llarg de $f(\gamma)$ dividit per 2π .

En efecte, tenim que

$$\text{Ind}(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - 0} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt}{f(\gamma(t))} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad \bullet$$

Demostració del teorema 6.27. Observem que si f és holomorfa en $\Omega \setminus E$, llavors la funció $h = f'/f$ és holomorfa en $\Omega \setminus (E \cup Z)$. Aplicant el teorema dels residus, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{w \in E \cup Z} \text{Res} \left(\frac{f'}{f}, w \right) \text{Ind}(\gamma, w).$$

• Si z_0 és un zero de f de multiplicitat m , llavors $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, on g és holomorfa en un entorn de z_0 amb $g(z_0) \neq 0$. Llavors, en un entorn de z_0 tenim que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Com que $g(z) \neq 0$ en un entorn de z_0 , llavors g'/g és holomorfa en aquest entorn, de manera que

$$\text{Res}(f'/f, z_0) = m.$$

• Si p_0 és un pol de f d'ordre m , llavors $\tilde{g}(z) = (z - p_0)^m f(z)$ és holomorfa en un entorn de p_0 amb $\tilde{g}(p_0) \neq 0$. Llavors, procedint com abans obtenim

$$\text{Res}(f'/f, p_0) = -m.$$

Per tant

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{z \in Z} \operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, z \right) \operatorname{Ind}(\gamma, z) + \sum_{p \in E} \operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, p \right) \operatorname{Ind}(\gamma, p) \\ &= \sum_{z \in Z} \operatorname{Ind}(\gamma, z) m(f, z) - \sum_{p \in E} \operatorname{Ind}(\gamma, p) m(f, p). \end{aligned} \quad \square$$

Exemple 6.29 (Aplicació del principi de l'argument). Aplicant el principi de l'argument calculem el nombre de zeros (comptant multiplicitats) del polinomi $Q(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10$ al primer quadrant.

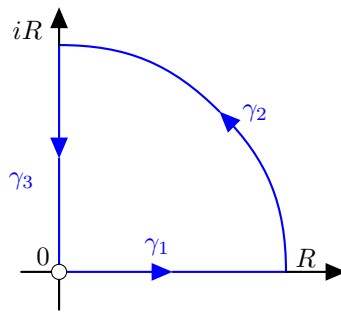


Figura 6.6.: Camins per l'exemple 6.29.

Volem aplicar el principi de l'argument a la corba $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ formada per:

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x, & x &\in [0, R] \\ \gamma_2(t) &= Re^{it}, & t &\in [0, \pi/2] \\ \gamma_3^-(y) &= iy, & y &\in [0, R]. \end{aligned}$$

on $R > 0$ és prou gran per englobar les arrels de Q al primer quadrant $\mathcal{Q}_1$, que són un nombre finit. Pel principi de l'argument,

$$\#Z(Q) \cap \mathcal{Q}_1 = \sum_{w \in Z} \operatorname{Ind}(\gamma, w) m(Q, w) = \operatorname{Ind}(Q \circ \gamma, 0).$$

En el que raonarem a continuació, provarem també que el polinomi Q no té cap zero a γ^* .

Mirem doncs quantes voltes fa la corba $Q \circ \gamma$ al voltant de 0, vegeu la figura 6.7. Seguint la notació de la definició 5.2, anomenem $\hat{\sigma}$ la determinació del logaritme d'una corba σ , i a més, denotem

$$\Delta \arg \sigma = \operatorname{Im}(\hat{\sigma}(b) - \hat{\sigma}(a)),$$

on a i b són els extrems de l'interval de definició de σ . Notem que quan σ és un camí tancat, aquest nombre és un múltiple de enter 2π i és la variació de l'argument de la corba. Aleshores,

$$\operatorname{Ind}(Q \circ \gamma, 0) = \frac{\widehat{Q \circ \gamma}(b) - \widehat{Q \circ \gamma}(a)}{2\pi i} = \frac{\Delta \arg Q \circ \gamma_1 + \Delta \arg Q \circ \gamma_2 + \Delta \arg Q \circ \gamma_3}{2\pi}.$$

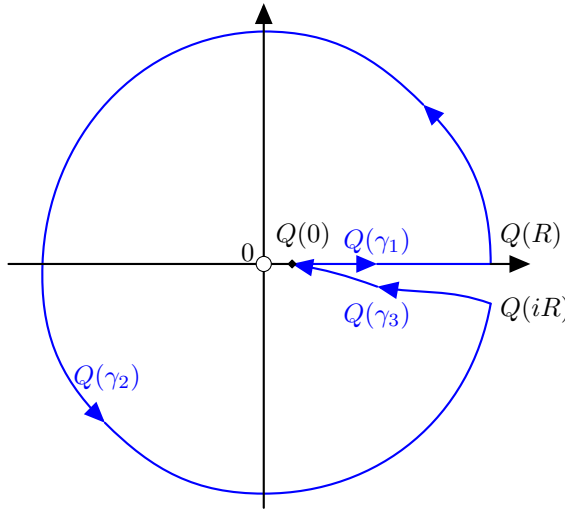


Figura 6.7.: Imatge per Q dels camins de l'exemple 6.29.

Estudiem cada tros de γ . La corba $Q(\gamma_1(x)) = Q(x)$ és continguda a $\mathbb{R}_+$, ja que

$$Q(x) = x^4 + 2x(x^2 - 1) + 10 > 10 - 2 = 8 > 0.$$

Tenim doncs que Q no s'anul·la a γ_1^* i $Q(\gamma_1)$ és un segment al semieix real positiu, que va de $Q(0)$ a $Q(R)$. Per tant, $\Delta \arg Q \circ \gamma_1 = 0$.

Seguidament

$$Q(\gamma_2(t)) = Q(Re^{it}) = (Re^{it})^4 \left(1 + \frac{2}{Re^{it}} - \frac{2}{(Re^{it})^3} + \frac{10}{(Re^{it})^4} \right).$$

Per tant, quan R és molt gran, $Q(\gamma_2(t))$ no s'anul·la i és una petita pertorbació de $\eta(t) = R^4 e^{i4t}$, i podem argumentar com en la demostració del lema 5.21:

$$\alpha := \frac{Q \circ \gamma_2}{\eta} \implies \Delta \arg \alpha = \operatorname{Im} \hat{\alpha}(\pi/2) - \operatorname{Im} \hat{\alpha}(0) = \operatorname{Im} \operatorname{Log} (1 + \mathcal{O}(R^{-1})) = \mathcal{O}(R^{-1}).$$

Com que $t \in [0, \pi/2]$, obtenim que $4t \in [0, 2\pi]$ i la variació de l'argument en aquest tram és

$$\Delta \arg Q \circ \gamma_2 = \Delta \arg \eta + \Delta \arg \alpha = 2\pi + \mathcal{O}(R^{-1}).$$

Pel tercer tros tenim que

$$Q(\gamma_3^-(y)) = Q(iy) = (y^4 + 10) - 2i(y^3 + y),$$

i en particular $Q(iR)$ és un punt amb part imaginària negativa. Observem que per a $y > 0$,

$$\operatorname{Re} Q(iy) > 0, \quad \operatorname{Im} Q(iy) < 0.$$

Per tant $Q(\gamma_3(y))$ va del punt $Q(iR)$ cap a $Q(0)$ restant sempre dins del quart quadrant, de manera que

$$|\Delta \arg Q \circ \gamma_3| \leq \pi/2.$$

Amb tot això,

$$\text{Ind}(Q \circ \gamma, 0) = \frac{0 + 2\pi + \mathcal{O}(R^{-1}) + |\Delta \arg Q \circ \gamma_3|}{2\pi},$$

és a dir que el nombre de voltes que fa $Q \circ \gamma$ al voltant de 0, que ha de ser un nombre enter, és necessàriament 1 per R prou gran; i pel principi de l'argument

$$\#Z(Q) \cap \mathcal{Q}_1 = \text{Ind}(Q \circ \gamma, 0) = 1. \quad \diamond$$

Exercicis

6.6.1. Quines de les següents funcions són meromorfs a $\mathbb{C}$?

$$a) z^5, \quad b) z^{5/2}, \quad c) e^{1/z}, \quad d) 1/\sin(z). \quad \triangleleft$$

6.6.2. Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) amb part real positiva del polinomi $P(z) = z^6 - z^4 - 2z - 6$.

I si alternativament el polinomi fos $Q(z) = z^6 - z^4 - 2z + 6$? $\triangleleft$

6.6.3. Sigui f una funció entera tal que

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Demostreu que f té, com a molt, un zero a tot $\mathbb{C}$. $\triangleleft$

6.7. Teorema de Rouché

Teorema 6.30 (Teorema de Rouché⁴). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $f, g \in M(\Omega)$. Sigui γ un camí tancat simple homòleg a 0 en Ω . Supposem que f i g no tenen pols en γ^* . Si

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \quad z \in \gamma^*$$

aleshores

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g,$$

on Z_f, Z_g denoten el nombre de zeros (comptant multiplicitats) de f i g en l'interior de γ , i P_f, P_g el nombre de pols (comptant l'ordre) de f i g en l'interior de γ .

Observació 6.31. Cal que la desigualtat sigui estricta. També, en ser γ simple, tenim que $\text{Ind}(\gamma, z)$ val 0 en la component no fitada i ± 1 , però el signe no varia per continuïtat. •

⁴Eugène Rouché, Someire, 1832–1910. https://ca.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne_Rouch%C3%A9

Demostració del teorema 6.30. Notem que f i g tampoc no poden tenir zeros en γ^* per la hipòtesi imposada (en cas contrari, tindríem $|g(z)| < |g(z)|$ o bé $|f(z)| < 0$).

Tenim $F = f/g \in M(\Omega)$. Si suposem, per simplificar, que els pols i els zeros d'una funció no coincideixen ni amb zeros ni amb pols de l'altra, aleshores

$$\{\text{zeros de } F\} = \{\text{zeros de } f\} \cup \{\text{pols de } g\}; \quad \{\text{pols de } F\} = \{\text{zeros de } g\} \cup \{\text{pols de } f\}.$$

Per la hipòtesi, tenim que $\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1$ per $z \in \gamma^*$, de manera que la corba imatge $\Gamma = F(\gamma) \subset D_1(1)$, així que Γ no dona cap volta al voltant del 0 i, per tant, $\text{Ind}(\Gamma, 0) = 0$. Pel principi de l'argument

$$0 = \text{Ind}(\Gamma, 0) = Z_F - P_F = Z_f + P_g - (Z_g + P_f),$$

d'on obtenim el resultat. En el cas general, la mateixa conclusió se segueix de la identitat local

$$\text{ord}_a(F) = \text{ord}_a(f) - \text{ord}_a(g),$$

on els pols es compten amb ordre negatiu. $\square$

La majoria de les vegades apliquem el teorema de Rouché en un cercle $\{|z - a| = R\}$ i a funcions f, g holomorfes en un entorn de $\overline{D_R(a)}$. En aquest cas, si $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ per $|z - a| = R$, se segueix que f i g tenen el mateix nombre de zeros comptant multiplicitats en el disc obert $D_R(a)$. Això ens pot servir per determinar els zeros de f en el disc, si podem triar una funció g de la qual es pugui determinar fàcilment el nombre de zeros.

Exemple 6.32. Trobem el nombre de zeros del polinomi $P(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ en el disc unitat $\mathbb{D}$.

Prenem la funció $g(z) = 6z^3$ que té 3 zeros comptant multiplicitats en $\mathbb{D}$. Tenim que $|g(z)| = 6$ si $|z| = 1$. Llavors

$$|P(z) - g(z)| = |z^7 - 2z^5 - z + 1| \leq |z|^7 + 2|z|^5 + |z| + 1 = 5 < 6 = |g(z)|, \quad \text{si } |z| = 1.$$

Pel teorema de Rouché, P i g tenen el mateix nombre de zeros (comptant multiplicitats) en $\mathbb{D}$, així que P té 3 zeros en $\mathbb{D}$. $\diamond$

Exemple 6.33. Trobem quants zeros té $P(z) = z^4 - 6z + 3$ en l'anell $\{1 < |z| < 2\}$.

Primer, trobem els zeros de P dins del disc $\{|z| < 2\}$. Prenem $g(z) = z^4$ que té 4 zeros comptant multiplicitats en $\{|z| < 2\}$. Tenim que

$$|P(z) - g(z)| = |-6z + 3| \leq 6|z| + 3 = 15 < 16 = |g(z)| \quad \text{si } |z| = 2.$$

Com abans, aquesta desigualtat també implica que P no té zeros en $|z| = 2$. Pel teorema de Rouché, P i g tenen el mateix nombre de zeros en $\{|z| < 2\}$, de manera que P té 4 zeros en $\{|z| < 2\}$.

Ara, busquem els zeros de P en el disc unitat $\{|z| < 1\}$. Prenem $h(z) = -6z$ que té un zero en el disc unitat. Tenim que

$$|P(z) - h(z)| = |z^4 + 3| \leq |z|^4 + 3 = 4 < 6 = |h(z)| \quad \text{si } |z| = 1.$$

Pel teorema de Rouché, P té exactament un zero, comptant multiplicitats, en el disc unitat.

En conclusió, el polinomi P té 3 zeros en l'anell $\{1 < |z| < 2\}$. $\diamond$

Teorema 6.34 (Teorema de Hurwitz⁵). *Sigui f_n una successió de funcions holomorfes en un domini Ω tals que $f_n \rightarrow f$ uniformement en compactes d' Ω , per una certa funció f . Si per a tota $n \geq 0$, f_n no s'anul·la en cap punt d' Ω , aleshores o bé $f \equiv 0$ o bé f no s'anul·la en Ω .*

Demostració. Comencem observant que f és holomorfa en Ω pel teorema de Weierstrass. Suposem que f no és idènticament 0, però $f(a) = 0$ per un cert $a \in \Omega$. Aleshores, com que els zeros de f han de ser aïllats (en ser f no idènticament nul·la), tenim que $f(z) \neq 0$ en un cert disc puntejat $\overline{D_r(a)} \setminus \{a\} \subset \Omega$. Sigui $0 < m = \min_{|z-a|=r} |f(z)|$ que existeix perquè f és contínua i el cercle és un compacte i sigui n prou gran per garantir que

$$|f_n(z) - f(z)| < m$$

per a tot z en $\{|z - a| = r\}$, fet que es dedueix de la convergència uniforme. Aleshores, sobre la corba $\{|z - a| = r\}$,

$$|f_n(z) - f(z)| < m \leq |f(z)|,$$

i pel teorema de Rouché, f_n i f tenen el mateix nombre de zeros dins $\{|z - a| = r\}$. Però això és una contradicció ja que f en té almenys un, i f_n no en té cap per hipòtesi. $\square$

Exercicis

6.7.1. *Demostreu que l'equació $e^z = 2z + 1$ té exactament una solució en el disc unitat obert. Indicació: Proveu que $|e^z - 1| \leq e - 1$ si $|z| = 1$.* $\triangleleft$

6.7.2. *Sigui f una funció holomorfa en el disc unitat tancat tal que $|f(z)| < 1$, per a $|z| = 1$. Quants punts fixos té f ?* $\triangleleft$

6.7.3. *Calculeu el nombre de solucions (comptant multiplicitats) de les següents equacions en el disc unitat:*

(a) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$.

(b) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$.

(c) $z^7 - 5z^4 + z^2 = 2$. $\triangleleft$

6.7.4. *Quants zeros té $P(z) = z^4 + 6z^3 - 4z^2 + 1/8$ en la regió $\{z \in \mathbb{C}; \frac{1}{2} < |z| < 1\}$?* $\triangleleft$

6.7.5. *Considerem $P(z) = z^6 + 3z^4 + z^2 + z + 9$.*

(a) *Proveu que tots els zeros de $P(z)$ són a l'anell $1 < |z| < 2$.*

(b) *Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) de $P(z)$ al primer quadrant.* $\triangleleft$

⁵Adolf Hurwitz, Hildesheim, 1859–1919. https://ca.wikipedia.org/wiki/Adolf_Hurwitz

6.7.6. (a) Calculeu el nombre de solucions a $\mathbb{D}$ de l'equació $e^z = 4z + 1$.

(b) Demostreu que l'equació $e^z = 3z^n$ té n solucions en el disc unitat ($n = 1, 2, \dots$). $\triangleleft$

6.7.7. Sigui $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$, i $n \in \mathbb{N}$.

(a) Demostreu que l'equació

$$(z - 1)^n e^z = a$$

té exactament n arrels diferents al semiplà $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Indicació: Considereu un disc centrat a $z = 1$ i de radi $R = 1$ primer, després mireu de modificar el camí augmentant el radi sense sortir del semiplà tancat de la dreta.

(b) Proveu que si, a més, $|a| \leq 1/2^n$, llavors totes aquestes arrels són al disc $D_{1/2}(1)$. $\triangleleft$

6.7.8. Demostreu que per a tot $R > 0$ existeix $n(R) \geq 0$ tal que si $n > n(R)$

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

no té zeros al disc $\{|z| \leq R\}$. $\triangleleft$

6.7.9. Sigui f_n una successió de funcions holomorfes en un domini Ω tals que $f_n \rightarrow f$ uniformement en compactes d' Ω , per una certa funció f .

1. (Corol·lari de Hurwitz) Deduïu que si $f_n(z) \neq a$ per a tot $z \in \Omega$ i tot $n \in \mathbb{N}$, aleshores, $f \equiv a$ o bé $f(z) \neq a$ en Ω .
2. Proveu que si f_n és injectiva en Ω per a tot $n \geq 0$, aleshores f és constant o bé f és injectiva en Ω . Indicació: Argumenteu per reducció a l'absurd, i utilitzeu l'apartat anterior.
3. Proveu que si f té un zero d'ordre m en $a \in \Omega$, aleshores existeix $\rho_0 > 0$ tal que per tot $\rho < \rho_0$ i per tot $n > n_\rho$, f_n té exactament m zeros en $D_\rho(a)$ comptant multiplicitats. $\triangleleft$

