

7. Representació Conforme

La representació conforme és una de les idees centrals de l'anàlisi complexa del segle XIX. A partir dels treballs de Riemann, Schwarz, Poincaré¹ i Koebe², es va entendre que les funcions holomorfes injectives no només transformen dominis, sinó que en preserven l'estructura angular i en revelen propietats geomètriques.

7.1. El teorema de l'aplicació de Riemann

Les funcions holomorfes també es poden veure com a transformacions entre regions del pla complex. Les que ens ocupen en aquest capítol són les que són bijectives, a més d'holomorfes.

Definició 7.1. Siguin $U, V \subset \mathbb{C}$ dos oberts connexos. Diem que $f : U \rightarrow V$ és una *representació conforme* (o *transformació conforme*) entre U i V si f és holomorfa i bijectiva. Aleshores diem que U i V són *conformement equivalents*. •

El nom de representació conforme fa referència a la preservació dels angles.

Lema 7.2. Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ és una funció holomorfa i $z_0 \in U$, aleshores

$$f \text{ és localment injectiva en } z_0 \iff f'(z_0) \neq 0 \iff f \text{ preserva els angles en } z_0.$$

Demostració. La primera equivalència és resultat del teorema de la funció inversa i de l'analiticitat de les funcions holomorfes, es pot usar Rouché per exemple. La segona es deriva de l'observació 3.16 i de l'existència d'un ordre, vegeu el teorema 4.43, deixem els detalls pel lector. □

Tot seguit veiem que les representacions conformes són biholomorfes.

Proposició 7.3. Si $f : U \rightarrow V$ és holomorfa i bijectiva, aleshores f és biholomorfa, és a dir, $f^{-1} : V \rightarrow U$ també és holomorfa.

Demostració. La funció f és oberta pel teorema de l'aplicació oberta, de manera que f^{-1} és contínua. Aleshores la biholomorfia es dedueix de la proposició 3.8. □

Observació 7.4. Les representacions conformes també s'anomenen a vegades funcions biholomorfes per la proposició 7.3. En la literatura també se les anomena funcions *conformes* o funcions *univalents*. •

¹Henry Poincaré, Nancy, 1854–1912. https://ca.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar%C3%A9

²Paul Koebe, Luckenwalde, 1882–1945. https://ca.wikipedia.org/wiki/Paul_Koebe

Advertència 7.5. Hem vist que totes les representacions conformes $f : U \rightarrow V$ satisfan que

- $f'(z) \neq 0$, per a tot $z \in U$, i
- preserven angles en tots els punts de U .

Però el recíproc no és cert: la funció exponencial $f(z) = e^z$ satisfà que $f'(z) \neq 0$ per tot $z \in \mathbb{C}$ i, de fet, preserva els angles, però $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ no és una representació conforme ja que no és injectiva. •

El següent resultat és un dels més remarcables de l'anàlisi complexa:

Teorema 7.6 (Teorema de l'aplicació de Riemann). *Tot domini U simplement connex del pla diferent de $\mathbb{C}$ és conformement equivalent al disc unitat $\mathbb{D}$, és a dir, existeix una representació conforme f entre U i $\mathbb{D}$, vegeu la figura 7.1.*

A més, si imposem la imatge d'un punt i l'argument de la derivada, per exemple $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) \in \mathbb{R}^+$, aleshores f és única.

El teorema de l'aplicació de Riemann fou formulat per Bernhard Riemann en la seva tesi doctoral de 1851. La demostració original utilitzava el principi de Dirichlet, un mètode variacional que en aquell moment no estava completament justificat. La primera demostració plenament rigorosa arribà posteriorment amb els treballs de matemàtics com Hilbert, Koebe i Poincaré.

Observació 7.7. El comportament de $\varphi := f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow U$ quan ens acostem a la frontera de $\mathbb{D}$ pot ser molt complicat si ∂U no és una corba. Aquest estudi és fascinant i dona lloc al camp de la *teoria geomètrica de funcions* (*GFT* per les sigles en anglès de 'geometric function theory'). •

Observació 7.8. Notem que la condició $U \neq \mathbb{C}$ del teorema de l'aplicació de Riemann és necessària. Efectivament, la no existència de representació conforme en el cas $U = \mathbb{C}$ és conseqüència immediata del teorema de Liouville. •

La demostració de l'existència és un pèl delicada, el lector interessat la pot trobar a l'apèndix A. De fet, la demostració original de Riemann es basava en el principi de Dirichlet, que afirma l'existència d'una funció que minimitza una certa integral d'energia. Weierstrass va assenyalar que aquest principi no estava justificat en la generalitat en què s'usava. Més endavant, Hilbert va donar fonaments rigorosos a aquest tipus d'arguments variacionals. Tot seguit demostrem la unicitat.

Demostració de la unicitat al teorema de l'aplicació de Riemann. Suposem que existeixen dues representacions conformes $f, g : U \rightarrow \mathbb{D}$ satisfent les condicions de l'enunciat. Considerem $h = g \circ f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. Notem que l'origen n'és un punt fix:

$$h(0) = g(f^{-1}(0)) = g(z_0) = 0.$$

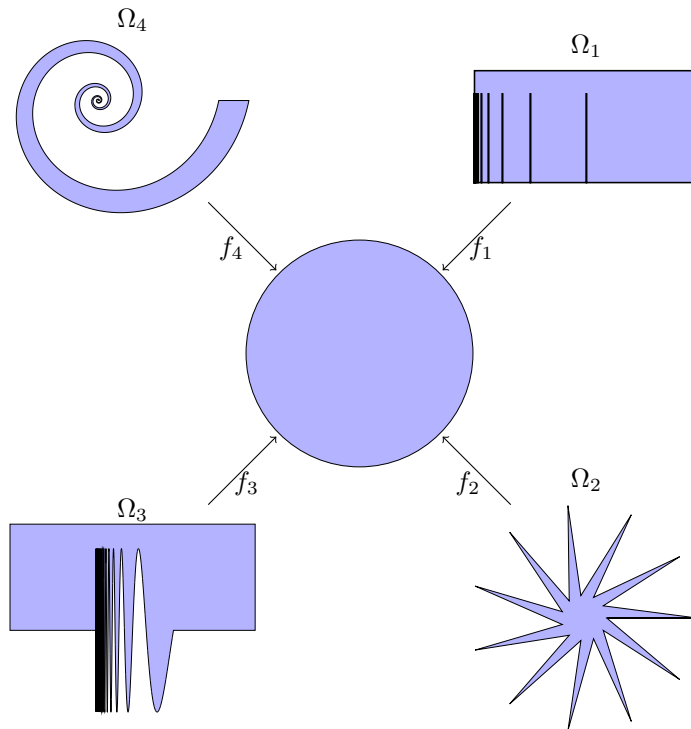


Figura 7.1.: El teorema de Riemann assegura que tots els dominis simplement connexos són conformement equivalents.

A més, h és holomorfa i envia el disc unitat a ell mateix. Per tant, pel lema de Schwarz (vegeu el lema 4.54), tenim que

$$|h(z)| \leq |z| \quad \text{per a tot } z \in \mathbb{D}.$$

Però h^{-1} satisfà les mateixes hipòtesis i, per tant,

$$|h^{-1}(w)| \leq |w| \quad \text{per a tot } w \in \mathbb{D}.$$

Així, escrivint $w = h(z)$ trobem que

$$|h(z)| \leq |z| = |h^{-1}(w)| \leq |w| = |h(z)|,$$

i les desigualtats han de ser igualtats. Hem demostrat doncs que

$$|h(z)| = |z| \quad \text{per a tot } z \in \mathbb{D}.$$

Altra vegada pel lema de Schwarz, existeix $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ tal que

$$h(z) = \lambda z.$$

Com que

$$\lambda = h'(0) = \frac{g'(z_0)}{f'(z_0)} \in \mathbb{R}_+,$$

deduïm que $\lambda = 1$ i, per tant, h és la identitat, de manera que $f = g$ tal i com volíem veure. $\square$

Com és natural, la majoria de les representacions conformes no poden calcular-se explícitament. Però algunes sí, i poden combinar-se per a construir-ne moltes d'altres. Algunes són particularment importants en aquesta i en moltes altres àrees de les matemàtiques i la física (geometria, electromagnetisme, àlgebra,...) i les estudiarem aquí.

7.2. Projectió estereogràfica i circumferències generalitzades

Com veurem a la propera secció, el treball de certes transformacions conformes anomenades homografies se simplifica en considerar el pla complex compactificat $\mathbb{C}_\infty$. Aquest s'anomena sovint *esfera de Riemann*, ja que la projecció estereogràfica (vegeu la figura 7.2) ens proporciona un homeomorfisme entre el pla complex compactificat i l'esfera

$$S^2 = \left\{ p \in \mathbb{R}^3 : \left\| p - \left(0, 0, \frac{1}{2} \right) \right\| = \frac{1}{2} \right\}.$$

La projecció estereogràfica $p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ envia $(x, y, u) \in S^2 \setminus (0, 0, 1) \mapsto (\lambda x, \lambda y) \sim \lambda(x + iy)$, de manera que $(\lambda x, \lambda y, 0)$, (x, y, u) i $(0, 0, 1)$ estiguin alineats, i envia el pol nord $(0, 0, 1)$ a l'infinit. Es pot veure que $\lambda = 1/(1 - u)$, vegeu l'exercici 7.2.1.

Observació 7.9. Es pot veure que la projecció estereogràfica envia circumferències de S^2 que passen pel pol nord a rectes (per l'infinit) i circumferències de S^2 que no passen pel pol nord a circumferències del pla complex.

La demostració es pot fer com segueix: si la circumferència inicial passa pel pol nord, aleshores el conjunt de rectes que uneixen el pol nord amb els punts de la circumferència formen un pla que passa pel pol nord, diguem-li Π . Aleshores, la imatge de la circumferència per la projecció estereogràfica és la intersecció de Π amb el pla XY , que efectivament és una recta (vegeu la figura 7.3).

Si la circumferència inicial C_1 no passa pel pol nord, es tracta de la intersecció de S^2 amb un pla Π que no passa pel pol nord, i la seva projecció és la intersecció del con que formen les rectes pel pol nord als punts de la circumferència amb el pla XY . Aquesta intersecció és una cònica. Si anomenem p_1 el punt de C_1 amb màxima coordenada vertical i p_2 el punt de mínima coordenada vertical, ℓ_j la recta que passa per N i p_j , aleshores la cònica projectada es tracta d'una circumferència si i només si l'angle α que forma Π amb ℓ_2 és igual a l'angle β que forma el pla XY amb ℓ_1 , ja que seran el·lipses de la mateixa excentricitat per simetria. Notem que β és el complementari de l'angle entre l'eix Z i ℓ_1 . A la vegada, aquest és complementari de l'angle γ que formen l'eix Z amb la recta que passa per l'origen i p_1 , ja que els triangles inscrits en una semicircumferència són rectangles. Finalment, treballant al pla $\tilde{\Pi}$ que formen ℓ_1 i ℓ_2 , l'angle α veu el mateix arc

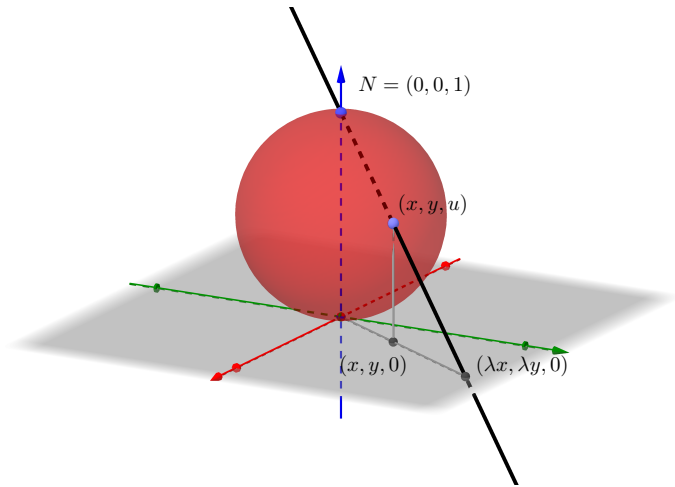


Figura 7.2.: La projecció estereogràfica.

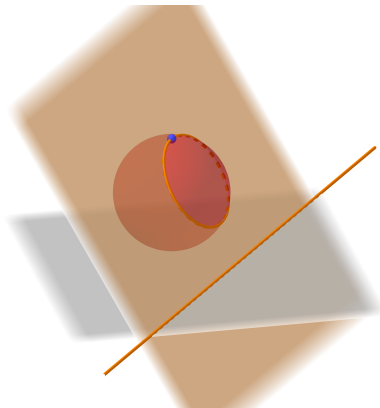


Figura 7.3.: La projecció estereogràfica envia circumferències pel pol nord a rectes.

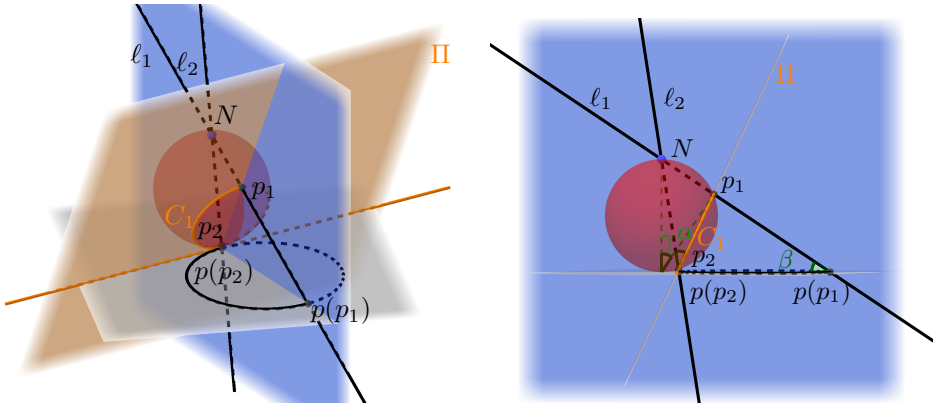


Figura 7.4.: La projecció estereogràfica envia circumferències que no passen pel pol nord a circumferències, vegeu l'observació 7.9.

de circumferència de $S^2 \cap \tilde{\Pi}$ que γ i, per la propietat de l'arc capaç, són iguals (vegeu la figura 7.4). •

Definició 7.10. Anomenem *circumferències generalitzades* de $\mathbb{C}_\infty$ les circumferències o rectes de $\mathbb{C}$. En el cas de les rectes, diem que ∞ pertany a la circumferència generalitzada. •

En la literatura també s'anomenen *cercles generalitzats* ja que corresponen als cercles de l'esfera S^2 , però pot crear confusió amb el cercle com a sinònim de disc, així que aquí evitarem aquesta denominació.

Lema 7.11. L'equació d'una circumferència generalitzada ℓ és

$$Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0,$$

amb $A, C \in \mathbb{R}$ i $B \in \mathbb{C}$ de manera que $|B|^2 > AC$. En particular ℓ és una circumferència si i només si $A \neq 0$, i té centre $-B/A$ i radi $R = \sqrt{\frac{|B|^2 - AC}{A^2}}$.

Demostració. Vegeu l'exercici 7.2.2. □

Exercicis

7.2.1. Sigui p la projecció estereogràfica. Demostreu que $\lambda = \frac{1}{1-u}$, i que la inversa de p és

$$p^{-1}(x + iy) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} (x, y, x^2 + y^2). \quad \triangleleft$$

7.2.2. Demostreu que l'equació d'una circumferència de centre $\alpha \in \mathbb{C}$ i radi r és

$$|z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2, \quad z \in \mathbb{C},$$

i la d'una recta perpendicular a α passant per $z_0 \in \mathbb{C}$ és

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = m, \quad z \in \mathbb{C},$$

on m és una constant real que només depèn d' α i z_0 . ◁

7.3. Transformacions de Möbius

Una transformació de Möbius³ o homografia és una funció de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{amb } (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \text{ i tal que } ad - bc \neq 0.$$

³August Ferdinand Möbius, Schulpforte, 1790–1868. https://ca.wikipedia.org/wiki/August_Ferdinand_M%C3%B6bius