

Les transformacions de Möbius apareixen de manera natural en geometria projectiva. En llenguatge matricial, corresponen a l'acció del grup projectiu lineal $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ sobre la recta projectiva complexa, que podem identificar amb $\mathbb{C}_\infty$.

Denotem el conjunt de totes les homografies per $\mathcal{M}$. Entenem que $T(-d/c) = \infty$ i $T(\infty) = a/c$, en el sentit que si $c = 0$ tenim que $T(\infty) = \infty$. Aleshores T és un homeomorfisme en $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ amb la topologia generada pels oberts de $\mathbb{C}$ i els entorns oberts de l'infinit $\{|z| > r\}$. De fet, les homografies són representacions conformes de $\mathbb{C}_\infty$ en ell mateix (aquí treballem amb funcions meromorfe bijectives a $\mathbb{C}_\infty$, entenent que una funció és meromorfa a l'infinit si $f \circ \varphi$ ho és a l'origen al precompondre amb la carta $\varphi(z) = 1/z$). Es pot veure addicionalment que són les úniques amb aquesta propietat, vegeu l'exercici 7.5.1.

Observació 7.12. Tota homografia T és globalment bijectiva en $\mathbb{C}_\infty$, i la seva inversa és $T^{-1} \in \mathcal{M}$ definida per

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

El lector pot comprovar aquest fet fàcilment. Per tant, $\mathcal{M}$ amb l'operació composició té estructura de grup. Notem també que

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0 \quad \text{per a tot } z \neq \infty, -\frac{d}{c}. \quad \bullet$$

Les homografies bàsiques són les

- *Translacions*: $T(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$.
- *Girs*: $T(z) = e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$.
- *Homotècies*: $T(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
- *Inversions*: $T(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,

vegeu la figura 7.5. La combinació d'un gir i una homotècia s'anomena a vegades *dilatació complexa*, $T(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Tota homografia es pot obtenir com a composició d'homografies bàsiques, vegeu l'exercici 7.3.2.

Proposició 7.13. Tota homografia envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades.

Demostració. Vegeu l'exercici 7.3.4. □

En conseqüència, les components connexes dels complementaris de les circumferències generalitzades són conformement equivalents mitjançant les homografies corresponents segons l'orientació, vegeu la figura 7.6.

Exemple 7.14. La *inversió* (o *involució*) $T(z) = 1/z$ envia la circumferència unitat a ella mateixa (amb una simetria axial respecte de la recta real), el disc unitat a $\mathbb{D}^c \cup \{\infty\}$ i les rectes $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ són invariants, intercanviant 0 i ∞ , vegeu la figura 7.7. A més

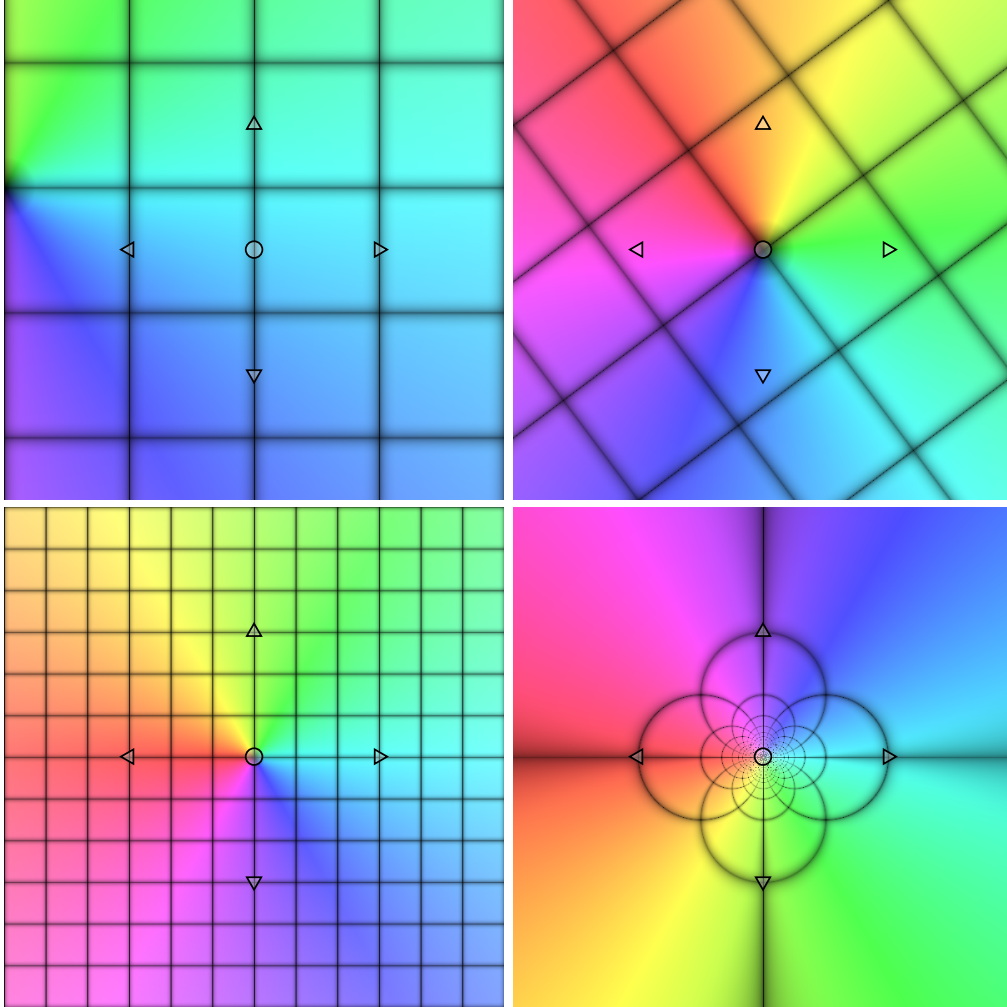


Figura 7.5.: Homografies bàsiques: translació amb $b = 2 - i/2$, gir d'angle $\theta = \arctan(4/3)$, homotècia de raó $\lambda = 3$ i inversió.

és una involució, és a dir, $T^2(z) = z$. Les circumferències ℓ que passen per l'origen van a rectes que tallen $\partial\mathbb{D}$ en els punts conjugats dels punts de tall $\ell \cap \partial\mathbb{D}$, i viceversa. Les rectes per l'origen van a la seva recta conjugada. Finalment, les circumferències que no passen per l'origen van a circumferències que no passen per l'origen. Si aquesta és interior al cercle unitat, aleshores la seva imatge estarà al complementari. Si talla la circumferència unitat, aleshores la seva imatge també, pels punts de tall conjugats. La tangència interior a $\partial\mathbb{D}$ esdevé tangència exterior de la imatge en el punt de tangència conjugat. Notem que el centre de la circumferència imatge no és, en general, la imatge del centre de la circumferència. $\diamond$

Lema 7.15. *Donats tres punts diferents $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, existeix una única homografia T tal que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ i $T(z_3) = \infty$. Per tant, si C és l'única circumferència*

generalitzada que passa pels tres punts, aleshores $T(C) = \mathbb{R}$.

Demostració. Si cap d'ells no és infinit, prenem

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Si un d'ells és infinit, s'utilitza la mateixa definició eliminant els factors que el contenen. Per exemple, si $z_1 = \infty$, prenem

$$T(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

Per la unicitat, notem que si S és una altra homografia, aleshores $S \circ T^{-1}$ fixa 0, 1 i ∞ . En particular, si $S \circ T^{-1}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, trobem que

$$S \circ T^{-1}(0) = 0 \implies b = 0,$$

$$S \circ T^{-1}(\infty) = \infty \implies c = 0,$$

$$S \circ T^{-1}(1) = 1, b = 0, c = 0 \implies a = d.$$

Per tant, $S \circ T^{-1}$ és la identitat i $S \equiv T$. □

Corol·lari 7.16. *Donades dues ternes de punts diferents $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}_\infty^3$, existeix una única homografia $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(z_j) = w_j$. En particular, si T té tres punts fixos, només pot ser la identitat.*

Exemple 7.17 (Exemple fonamental). Volem representar conformement $\mathbb{D}$ en $H := \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Per fer-ho, busquem una homografia que envii $(-1, i, 1) \mapsto (0, i, \infty)$, de manera que per preservar l'orientació, sabem que enviarà $\mathbb{D}$ a H , vegeu la figura 7.8. Raonant com al lemma 7.15, la condició $(-1, 1) \mapsto (0, \infty)$ obliga que tinguem

$$T(z) = c \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Per fixar i , cal

$$i = T(i) = c \frac{i + 1}{i - 1} = ci \iff c = -1.$$

Per tant,

$$T(z) = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

i la seva inversa és $T^{-1}(w) = \frac{w-1}{w+1}$.

En particular, $\partial\mathbb{D}$ va a l'eix imaginari pur, i el disc unitat va al semiplà de part real positiva, vegeu la figura 7.10. També envia el complementari de $\overline{\mathbb{D}}$ al semiplà de part real negativa. La imatge dels semicercles $\mathbb{D} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ i $\mathbb{D} \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$ són el primer i el quart quadrant respectivament. De fet, correspon a una rotació de 90° de S^2 respecte de l'eix que passa per $p^{-1}(i)$ i $p^{-1}(-i)$. ◇

Observació 7.18. T no és l'única homografia que envia $\mathbb{D}$ en H , de fet n'hi ha infinites. Però sí que és l'única que ho fa enviant els punts $(-1, i, 1)$ a $(0, i, \infty)$. •

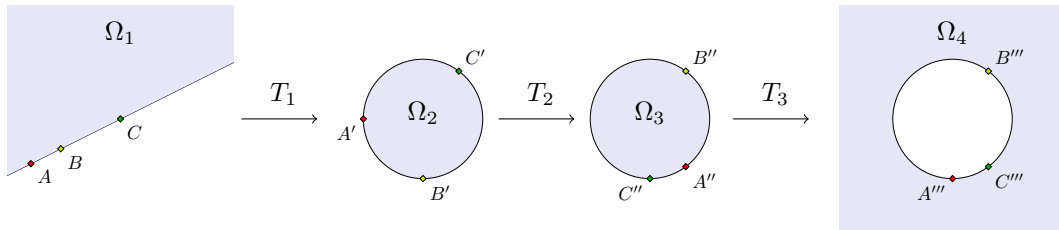


Figura 7.6.: Les homografies envien circumferències generalitzades a circumferències generalitzades, i preserven l'orientació.

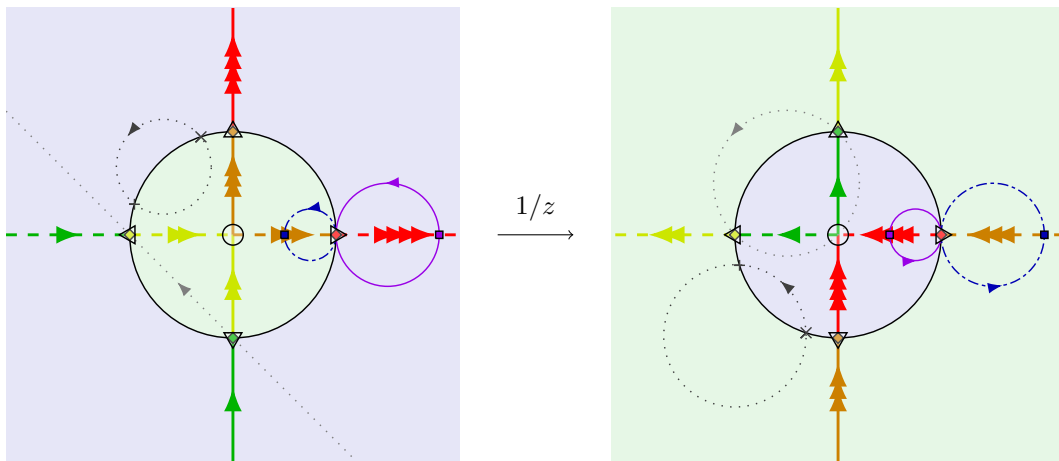


Figura 7.7.: La inversió preserva els eixos i la circumferència unitat, però els únics punts fixos són ± 1 .

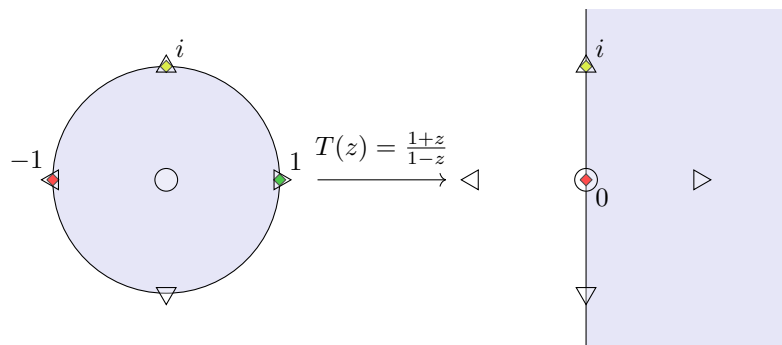


Figura 7.8.: L'homografia $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$ envia el disc unitat al semiplà de la dreta.

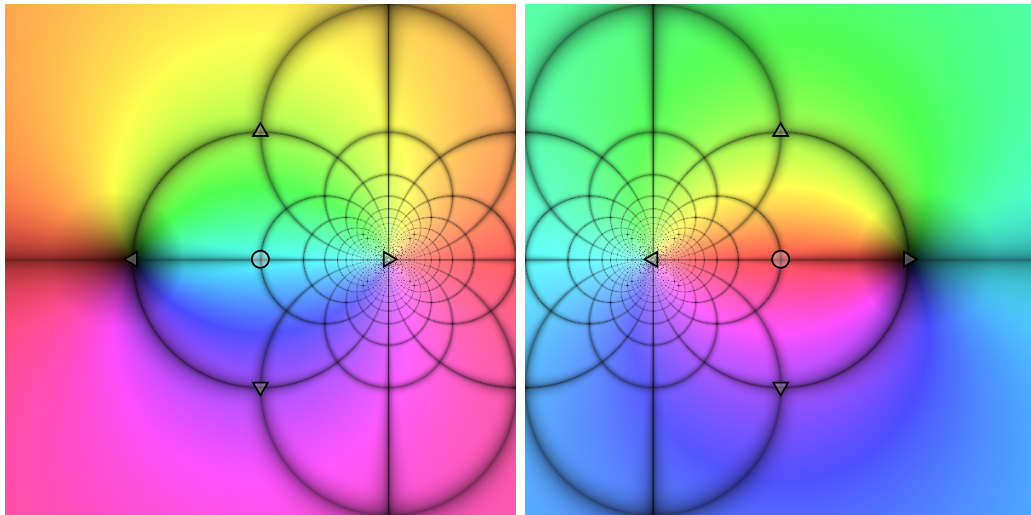


Figura 7.9.: L'homografia $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$ i la seva inversa, vegeu l'exemple 7.17. Notem que T té un pol simple en $z = 1$ i zero simple en $z = -1$, i que les corbes de nivell són circumferències generalitzades que passen pel pol.

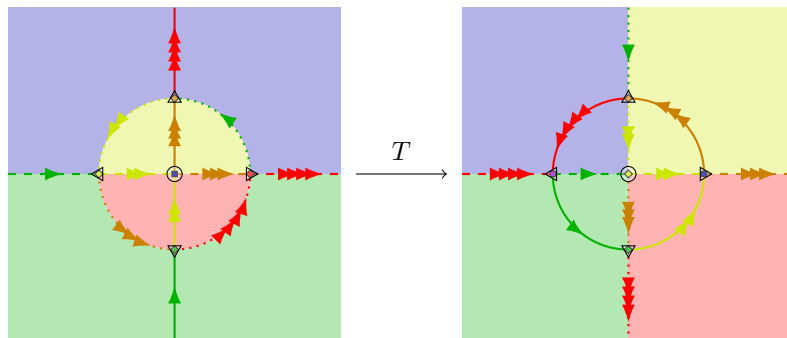


Figura 7.10.: Acció de l'homografia $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$

Exercicis

7.3.1. Donada una homografia $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, definim $A_T := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que està definit mòdul constant multiplicativa. Per exemple, les matrius $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ corresponen respectivament a la translació $z \mapsto z + b$, a la dilatació $z \mapsto az$ i a la inversió $z \mapsto 1/z$.

- Donades $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$, demostreu que $A_{T_2 \circ T_1} = A_{T_2} A_{T_1}$ (mòdul constant multiplicativa).
- Trobeu T^{-1} i relacioneu-la amb A_T . ◁

7.3.2. Demostreu que tota $T \in \mathcal{M}$ es pot escriure com a composició de dilatacions, translacions i inversions. ◁

7.3.3. Trobeu una descomposició en dilatacions, translacions i una inversió de la transformació

$$T(z) = \frac{2z + i}{(1 - i)z + 3i}. \quad \triangleleft$$

7.3.4. Demostreu que tota $T \in \mathcal{M}$ envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades. $\triangleleft$

7.3.5. Doneu la imatge per $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ i per $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$ de

a) la recta real, b) $\partial D_2(0)$, c) $\partial \mathbb{D}$, d) l'eix imaginari. $\triangleleft$

7.3.6. Trobeu l'homografia que envia $(i, 0, -1)$ a $(-i, 0, \infty)$. $\triangleleft$

7.3.7. Trobeu $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(1 - i) = 1 + i$, $T(2) = i$, $T(1 + i) = -i$. $\triangleleft$

7.3.8. Demostreu el corollari 7.16. $\triangleleft$

7.3.9. Trobeu una homografia que enviï $\mathbb{D}$ a $\mathbb{H}_+ := \{\operatorname{Im} z > 0\}$. $\triangleleft$

7.3.10. Definim

$$T_1(z) = \frac{z-1}{2z-i}, T_2(z) = \frac{z+1}{iz-1}, T_3(z) = \frac{iz}{(1+i)-z}.$$

Trobeu $T_3^{-1} \circ T_2 \circ T_1$. $\triangleleft$

7.3.11. Sigui $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ i definim $T(z) = \frac{z}{az+1}$. Trobeu T^m , $m \in \mathbb{Z}$. $\triangleleft$

7.3.12. Trobeu totes les homografies que tinguin per punts fixos 0 i $-i$. $\triangleleft$

7.3.13. Siguin C_1 i C_2 dues circumferències generalitzades i $z_1 \in \mathbb{C}_\infty \setminus C_1$, $z_2 \in \mathbb{C}_\infty \setminus C_2$. Demostreu que existeix $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(C_1) = C_2$ i $T(z_1) = z_2$. Podeu fer servir l'Exercici 1.1.10. Trobeu-ne una en el cas particular

$$C_1 = \{z : |z - 1| = 1\}, z_1 = 1; C_2 = \{z : \bar{z}i = z\}, z_2 = i. \quad \triangleleft$$

7.4. Raó doble i simetria

Definició 7.19 (Raó doble). La *raó doble* dels punts $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, que denotem per (z_0, z_1, z_2, z_3) , es defineix com

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) := T(z_0),$$

on $T \in \mathcal{M}$ és tal que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ i $T(z_3) = \infty$. •

Com hem vist al lema 7.15, si tots ells són finits, tenim que

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Definició 7.20 (Simetria). Diem que dos punts z i z^* són simètrics respecte d'una circumferència generalitzada C si existeix una homografia T que envia C en $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $T(z^*) = \overline{T(z)}$. •

Observem que la simetria respecte d'una recta correspon al concepte clàssic de conjugació. Així mateix, és fàcil veure que z i z^* són conjugats respecte al cercle unitat si i només si $z^* = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$, vegeu la figura 7.11.

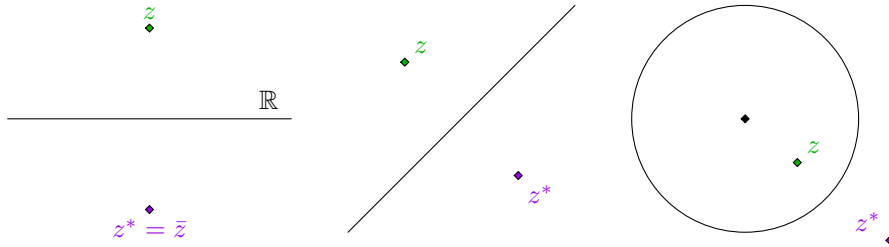


Figura 7.11.: Simetria respecte de la recta real (conjugació), respecte d'una recta qualsevol (simetria axial) i respecte d'una circumferència.

El següent lema ens indica que el concepte de simetria no depèn de l'homografia escollida.

Lema 7.21. *Es pot veure que, si z_1, z_2, z_3 són punts diferents d'una circumferència generalitzada C , aleshores z i z^* són simètrics respecte de C si i només si*

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

Demostració. Siguin $z_1, z_2, z_3 \in C$, i anomenem $S(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$, l'homografia que determina la raó doble. Notem que $S(C) = \mathbb{R}_\infty$. Si $S(z^*) = \overline{S(z)}$, aleshores efectivament són simètrics per definició.

Per veure la implicació contrària, suposem que tenim $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(C) = \mathbb{R}_\infty$ i $T(z^*) = \overline{T(z)}$. Discutim dos casos:

- Si $T(z^*) \in \mathbb{R}$, aleshores $T(z^*) = \overline{T(z^*)} = T(z)$ i per l'injectivitat tenim que $z = z^* \in C$, de manera que

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (z^*, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R},$$

i concloem $S(z^*) = \overline{S(z)}$ tal i com volíem veure.

- Si, en canvi, $T(z^*) \notin \mathbb{R}$, aleshores tenim un continu de circumferències generalitzades que passen per $T(z^*)$ i $T(z)$, que, en passar per complexos conjugats, són simètriques respecte de $\mathbb{R}$ i, per tant, tallen $\mathbb{R}$ en angles rectes. Les seves preimatges per $T \circ S^{-1}$ han de tallar també en angles rectes la recta real i, per tant, són una família infinita de circumferències generalitzades simètriques respecte de $\mathbb{R}$. Com que són simètriques respecte de $\mathbb{R}$, i la família inclou totes les circumferències generalitzades per $S(z)$ i $S(z^*)$, que són punts diferents, necessàriament aquests dos punts són conjugats (n'hi ha prou amb considerar la recta que els uneix i qualsevol altra circumferència).

□

Exercicis

7.4.1. Sigui $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(D_R(a)) = D_R(a)$. Demostreu que els punts fixos de T estan a $\partial D_R(a)$ o bé són simètrics respecte de $\partial D_R(a)$. ◁

7.5. Automorfismes

D'especial rellevància són les representacions conformes d'un conjunt en si mateix ja que, amb l'operació composició, tenen una estructura de grup. A continuació veurem que en els casos senzills, com $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}_\infty$, aquestes poden trobar-se explícitament.

Teorema 7.22. Tota representació conforme de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ és una homografia de la forma

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad (7.1)$$

per algun $a \in \mathbb{D}$ i $\theta \in \mathbb{R}$.

Definició 7.23. Amb l'operació composició, aquestes homografies formen un subgrup de $\mathcal{M}$ anomenat *automorfismes de $\mathbb{D}$* , abreuïat com $\text{Aut}(\mathbb{D})$, vegeu la figura 7.12. •

Demostració del teorema 7.22. L'exhaustivitat i la injectivitat estan fetes a l'exercici 1.1.10. Per tant, tota homografia T de la forma (7.1) és una representació conforme del disc en ell mateix. Per veure que és l'única possible, suposem que f és una representació conforme de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$, sigui $a \in \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$ i prenem $\theta := \text{Arg}(f'(a))$. Definim $T_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Notem que, com que

$$T'_a(z) = \frac{1 - \bar{a}z + \bar{a}(z - a)}{(1 - \bar{a}z)^2} = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2},$$

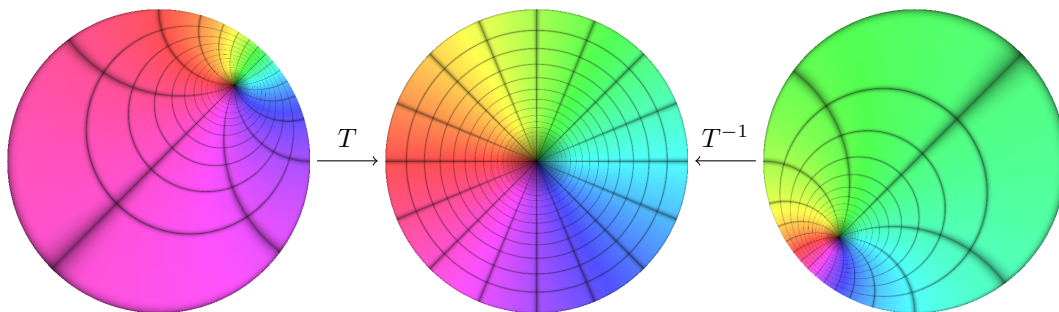


Figura 7.12.: Al centre, automorfisme identitat del disc unitat representat en polars (inclou radi i angle $k\pi/8$), a l'esquerra, automorfisme del disc $T(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ amb $a = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ i a la dreta el seu automorfisme invers T^{-1} .

deduïm que

$$T_a(a) = 0 \quad \text{i} \quad T'_a(a) = \frac{1}{1-|a|^2} > 0.$$

D'altra banda, $e^{-i\theta}f$ també és una representació conforme del disc en ell mateix i

$$(e^{-i\theta}f)'(a) = e^{-i\theta}e^{i\theta}|f'(a)| > 0.$$

Per la unicitat del teorema de l'aplicació de Riemann, les dues representacions coincideixen, és a dir,

$$e^{-i\theta}f \equiv T_a$$

i, per tant, f té la forma (7.1). □

Observació 7.24 (Unicitat de l'aplicació de Riemann). La manera com s'expressen les condicions d'unicitat a l'enunciat del teorema 7.6 pot ser lleugerament obscura. Seria potser més aclaridor entendre-les de la següent manera:

Teorema. Si $U \subsetneq \mathbb{C}$ és un obert simplement connex, aleshores existeix una representació conforme $f : U \rightarrow \mathbb{D}$. A més, f és única mòdul postcomposició per automorfismes de $\mathbb{D}$.

En altres paraules, dues representacions conformes, f i g , de U en $\mathbb{D}$ han de complir que $f = T \circ g$, per un automorfisme T del disc unitat, és a dir

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

per algun $a \in \mathbb{D}$ i algun $\theta \in \mathbb{R}$. Això ens diu que per escollir f tenim tres graus de llibertat reals que poden utilitzar-se, per exemple, per decidir la imatge d'algun punt (això són dos – parts real i imaginària), i l'argument d'alguna altra quantitat com la derivada en un punt (el tercer grau, que seria el que s'aconseguiria amb la rotació $e^{i\theta}$). La condició habitual de $f'(0) > 0$ és equivalent a demanar $\arg f'(0) = 0$, i pot aconseguir-se sempre multiplicant per una constant de mòdul 1, és a dir component amb una rotació. •

Observació 7.25. Les transformacions de Möbius també tenen un paper central en *geometria hiperbòlica*. En particular, les homografies que preserven el disc unitat o el semiplà superior actuen com a isometries dels models clàssics de la geometria hiperbòlica de Poincaré, vegeu el treball *circle limit*⁴ de M. C. Escher⁵. •

Teorema 7.26. *Tota representació conforme de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ és una homografia de la forma*

$$T(z) = az + b$$

per alguns $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Amb l'operació composició, aquestes homografies formen un subgrup de $\mathcal{M}$ anomenat automorfismes de $\mathbb{C}$, abreujat com $\text{Aut}(\mathbb{C})$.

Demostració. El lector pot comprovar fàcilment que $az + b$ és una representació conforme de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Anem a veure que, donada una representació conforme $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, podem trobar a i b de manera que $f(z) = az + b$. En primer lloc, considerem $g(z) = f(1/z)$, que té una singularitat a l'origen.

Vegem que la singularitat no és essencial. Notem primer que $f(\mathbb{D}) \cap g(\mathbb{D}) = \emptyset$ per la bijectivitat de f . Com que $f(\mathbb{D})$ és un obert pel teorema de l'aplicació oberta, la imatge de $\mathbb{D}$ per g no és densa en el pla complex. Pel teorema de Casorati-Weierstrass la singularitat no és essencial.

Si la singularitat de $g(z) = f(1/z)$ a 0 fos evitable, aleshores f seria fitada en un entorn de l'infinit; com que també és fitada en compactes, seria fitada a tot $\mathbb{C}$, i per Liouville seria constant, contradient la hipòtesi d'injectivitat.

Així doncs la part singular de la sèrie de Laurent de g a $\mathbb{C}^*$ té un nombre finit (no nul) de termes. Per la unicitat de les sèries de Laurent, aquesta ha de coincidir amb la sèrie de potències de f aplicada a $1/z$ i, per tant, només té la part singular i una constant. Deduïm que f és un polinomi. Finalment, la injectivitat implica que f és un polinomi de grau 1 pel teorema fonamental de l'àlgebra. □

Exercicis

7.5.1. *Demostreu que tota representació conforme de $\mathbb{C}_\infty$ en $\mathbb{C}_\infty$ és una homografia.* ◁

7.5.2. *Trobeu tots els automorfismes T de $\mathbb{D}$ tals que $T(1/2) = 1/3$.* ◁

7.5.3. *Trobeu totes les representacions conformes del disc unitat en ell mateix que envien $1/2$ a 0. N'existeix alguna que envii 0 a $-i/2$? I 0 a $-i/4$? Utilitzeu T per trobar una representació conforme S que envii $\partial\mathbb{D}$ a $\partial D_2(i)$ tal que $S(1/2) = i$ i $S(0) = 0$.* ◁

7.5.4. *Demostreu que el lloc geomètric de les imatges de qualsevol punt $b \in \mathbb{D}$ per les transformacions que fixen la imatge d'un altre punt, és a dir*

$$\{w \in \mathbb{D} : w = T(b) \text{ amb } T \in \text{Aut}(\mathbb{D}), T(a) = \tilde{a}\},$$

és una circumferència. ◁

⁴<https://mcescher.com/gallery/mathematical/>

⁵Maurits Cornelis Escher, 1898–1972. https://ca.wikipedia.org/wiki/Maurits_Cornelis_Escher

7.6. Altres transformacions conformes

A diferència de les homografies, que són biholomorfes a tot el pla ampliat, altres funcions són conformes quan es restringeixen a certes regions del pla. A continuació en veiem algunes de les més comunes.

Potències

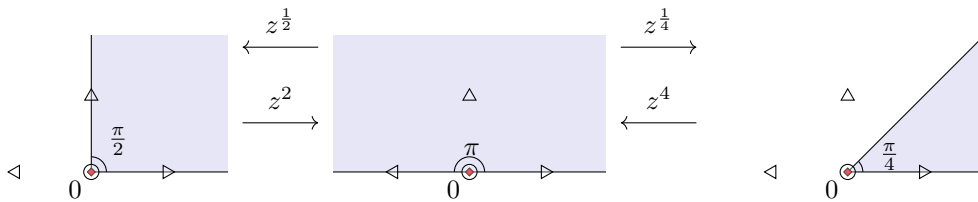


Figura 7.13.: Acció de les potències en sectors.

Comencem per veure com es comporten les potències. Fixem la branca de l'argument $\mathcal{A} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow [0, 2\pi)$, que dona lloc a

$$\mathcal{L}(z) = \ln |z| + i\mathcal{A}(z) = \begin{cases} \operatorname{Log}(-z) + i\pi & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \\ \ln(z) & \text{si } z \in (0, \infty), \end{cases}$$

que és una branca contínua del logaritme en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ i envia els reals positius als reals. Aleshores, donat un nombre real positiu $s > 0$, indiquem per

$$z^s = e^{s\mathcal{L}(z)},$$

és a dir, que ara z^s ja no és multivaluada, sinó que en fixem una elecció, i per $x \in (0, \infty)$ tenim que $x^s \in (0, \infty)$ és la funció de variable real usual.

Per tal que sigui bijectiva, cal considerar-la en sectors oberts d'angle $\alpha \leq \min\{2\pi/s, 2\pi\}$, que la funció envia de manera conforme a un sector obert d'angle $\beta = s\alpha \leq 2\pi$. Per exemple, $f(z) = z^{1/2}$ és una representació conforme de $\{z : 0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi\}$ en $\{z : 0 < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}\}$, on $\alpha = \pi$ i $\beta = \pi/2$, vegeu la figura 7.13.

Exemple 7.27. Volem trobar la representació conforme del semicercle Ω_1 en el semiplà superior $\mathbb{H}_+$, vegeu la figura 7.14.

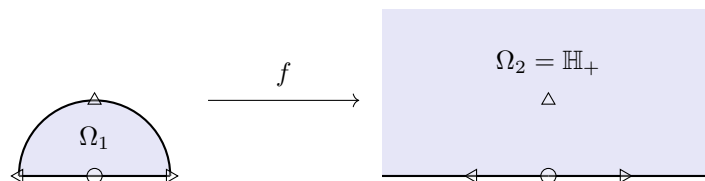


Figura 7.14.: Volem trobar una representació $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{H}_+$.

Per fer-ho, sabem de l'exemple 7.17 que l'homografia $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$ envia el semicercle al primer quadrant, i el primer quadrant és conformement equivalent al semiplà superior per l'acció de z^2 . Per tant, podem prendre

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2,$$

vegeu la figura 7.15. ◇

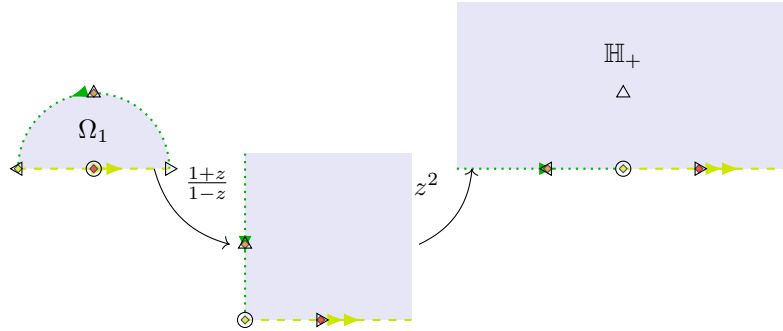


Figura 7.15.: Representació $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{H}_+$ obtinguda per composició.

L'exponencial

L'exponencial també és localment injectiva, ja que la seva derivada mai s'anul·la. Globalment, és injectiva en bandes horitzontals obertes d'amplada menor o igual a 2π , vegeu la figura 7.16. Per tant, envia bandes horitzontals obertes d'amplada menor o igual a 2π a sectors d'angle igual a aquesta amplada. Si l'amplada és π seran semiplans. Si l'amplada és 2π , es tractarà del pla complex menys una semirecta.

Exemple 7.28. Tot seguit veurem com trobar l'aplicació de Riemann d'una banda horitzontal, vegeu les figures 7.17 i 7.18. La banda $\{x + iy : 0 < y < \pi\}$ s'envia per l'exponencial $f_1(z) = e^z$ al semiplà de part imaginària positiva. Multiplicant per $-i$, $f_2(z) = -iz$ s'envia al semiplà de part real positiva. Finalment, $f_3(z) = \frac{z-1}{z+1}$, vegeu l'exemple 7.17, l'envia al disc unitat. Així doncs, $f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) = \frac{e^z - i}{e^z + i}$ és una aplicació de Riemann de la banda horitzontal donada. ◇

Exemple 7.29. Sigui Ω un domini fitat tancat per dos arcs de circumferència que intersequen en dos punts diferents a i b , vegeu la figura 7.19. Per trobar l'aplicació de Riemann, podem considerar $f_1(z) = \frac{z-a}{z-b} \frac{c-b}{c-a}$, on c és qualsevol punt de l'arc que va de a a b deixant la regió Ω a l'esquerra, és a dir resseguint el domini en sentit antihorari. Aleshores la imatge del primer arc és la semirecta dels reals positius, i la imatge d' Ω és un sector d'obertura α on $\alpha < 2\pi$ és l'angle que formen els arcs de circumferència en a .

Aleshores $f_2(z) = z^{\pi/\alpha}$ l'envia al sector $\{z : 0 < \text{Arg}(z) < \pi\}$. Prenent $f_3(z) = -iz$ obtenim el semiplà de part real positiva, que s'envia al disc unitat mitjançant $f_4(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

Per tant, $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ és una aplicació de Riemann d' Ω . ◇

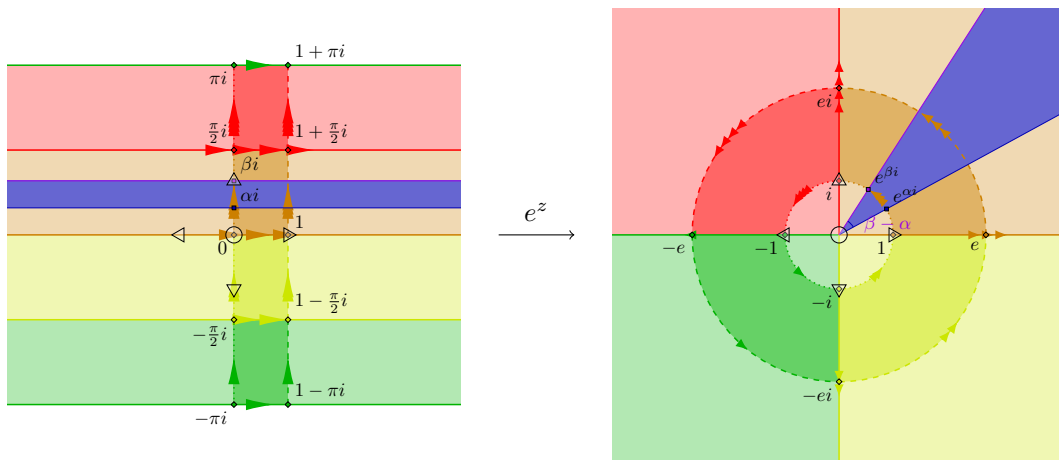


Figura 7.16.: Acció de la funció exponencial en bandes horitzontals i en rectangles paral·lels als eixos. Bandes horitzontals d'amplada γ van a sectors d'obertura γ .

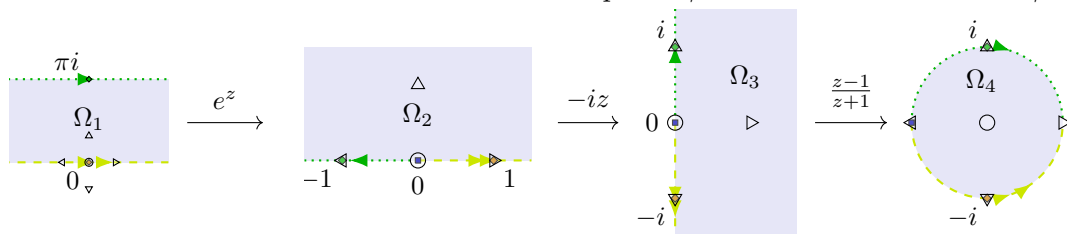


Figura 7.17.: Aplicació de Riemann de la banda horitzontal.

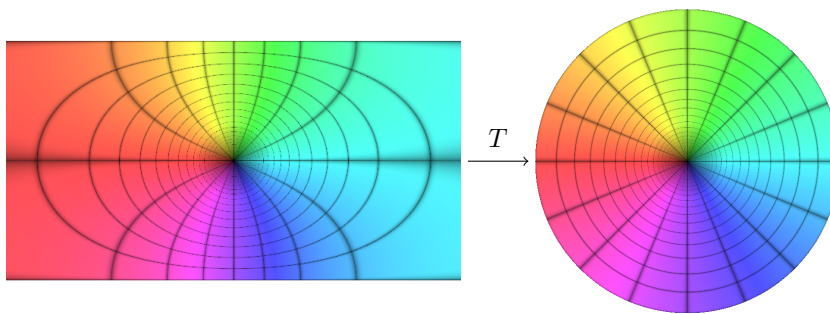


Figura 7.18.: Aplicació de Riemann $T(z) = \frac{e^z - i}{e^z + i}$ de la banda Ω_1 , amb la coloració de la disc unitat a la dreta.

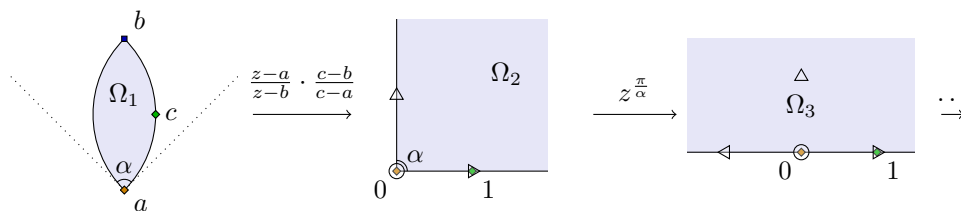


Figura 7.19.: Aplicació de Riemann d'una lent (serveix també per segments circulars i lúnules).

Exercicis

- 7.6.1.** *Quina és la imatge del primer quadrant per z^3 ?* ◁
- 7.6.2.** *Quina transformació pot enviar una banda horitzontal a un semiplà?* ◁
- 7.6.3.** *Trobeu una aplicació de Riemann del sector $\{0 < \text{Arg } z < \pi/8\}$.* ◁
- 7.6.4.** *Es pot enviar el semiplà superior a un triangle mitjançant una homografia?* ◁
- 7.6.5.** *Proveu que no existeix cap representació conforme del semiplà de la dreta en $D_1(1)$ que envii $1 \mapsto 1$, i que s'estengui a la frontera enviant $0 \mapsto 0$ i $\infty \mapsto 1+i$.* ◁
- 7.6.6.** *Demostreu que les transformacions conformes del semiplà superior $\mathbb{H}_+ := \{\text{Im } z > 0\}$ en $\mathbb{D}$ són de la forma $e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$ per alguna $a \in \mathbb{H}_+$ i algun $\theta \in \mathbb{R}$.* ◁
- 7.6.7.** *Trobeu una transformació de Möbius que envii el primer quadrant a $\mathbb{D}_+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$. Utilitzeu-la per a trobar una transformació conforme de $\mathbb{H}_+$ a $\{|\text{Re } z| < 1, \text{Im } z > 0\}$.* ◁
- 7.6.8.** *Trobeu una representació conforme de $\{0 < \text{Re } z < \pi/2\}$ en $\mathbb{D}$.* ◁
- 7.6.9.** *Trobeu una representació conforme d' Ω_1 en Ω_2 .*
- a) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$, $\Omega_2 = \mathbb{H}_+$.
- b) $\Omega_1 = \mathbb{D}$, $\Omega_2 = \mathbb{H}_+ \cap \overline{\mathbb{D}}^c$.
- c) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \{\text{Re } z > 1/2\}$, $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$.
- d) $\Omega_1 = \mathbb{H}_+$, $\Omega_2 = \{|\text{Re } z| < 1, \text{Im } z > 0\}$.
- e) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$, $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap \{|z + 1/2| > 1/2\}$.
- f) $\Omega_1 = D_{\sqrt{2}}(1) \cap D_{\sqrt{2}}(-1)$, $\Omega_2 = \mathbb{D}$, que deixi invariant el segment $(-i, i)$.
- g) $\Omega_1 = \mathbb{D} \setminus [0, 1)$, $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.
- h) $\Omega_1 = \{|\text{Im } z| < \pi/2\} \setminus ((-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty))$, $\Omega_2 = \mathbb{D}$. ◁