

## 8. Fluids

Les funcions holomorfes proporcionen una eina extremadament eficaç per descriure fluxos bidimensionals incompressibles i irrotacionals. El terme flux (o corrent) fa referència al moviment constant i continu d'un líquid, un gas o un grup nombrós de persones i coses en una sola direcció. Aquestes tècniques han tingut una importància històrica notable en hidrodinàmica i aerodinàmica, és a dir, en *dinàmica de fluids*. En aquest capítol fem una breu pinzellada de com funciona aquesta connexió.

### 8.1. Qüestions generals. Escenari i notació.

1. *El flux del fluid és bidimensional.* En el nostre model suposem que les característiques del flux són idèntiques per tot pla paral·lel. Això ens permet fixar l'atenció només en un pla, considerem el pla d'Argand de variable  $z$ . Les figures construïdes en aquest pla s'interpreten com seccions transversals de cilindres, vegeu la figura 8.1.
2. *El flux és estacionari o uniforme.* Considerem que la velocitat del fluid en un punt no varia amb el temps, només depèn de la posició  $(x, y)$ . Vegeu per exemple un mapa de vents de la Terra a <https://earth.nullschool.net/>, cal esperar un bona estona per veure com canvia la distribució. En petita escala temporal podem pensar que és un flux estacionari.
3. *Les components del camp de velocitats deriven d'un potencial.* Denotem per  $\mathbf{V}(x, y) = (V_1, V_2)$  les components del camp de velocitats del fluid en el punt  $(x, y)$ . Suposarem que existeix una funció  $\varphi(x, y)$ , que anomenem *velocitat potencial*, de manera que

$$\nabla\varphi = \text{grad}\varphi = \mathbf{V}.$$

En aquest cas el flux es diu que és *irrotacional* o *potencial*. Es pot demostrar que aquesta condició és equivalent a

$$\text{rot}\mathbf{V} = \frac{-\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0.$$

4. *El fluid és incompressible.* La densitat, o massa per unitat de volum, és constant. Si  $V_n$  és la component normal de la velocitat al llarg d'un circuit tancat  $C$  (vegeu la figura 8.3) aquesta condició equival a

$$Q := \int_C V_n ds = \int_C (-V_2 dx + V_1 dy) = 0.$$

Això expressa que la quantitat de fluid dins de  $C$  és constant (entra el mateix que surt). Aquesta condició és equivalent a

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0.$$

A la quantitat  $Q$  se l'anomena *flux* (també anomenat *potència* o *cabal*) del vector  $\mathbf{V}$  a través del contorn  $C$ . En fluids més generals la quantitat  $Q$  pot ser no nul·la.

En general, per fluxos estacionaris amb camp de velocitats  $\mathbf{V}$  (que no necessàriament provenen d'un potencial), a la quantitat

$$\Gamma := \int_C (V_1 dx + V_2 dy) = \int_C V_t ds$$

on  $C$  és una corba tancada,  $V_t$  la component tangencial de  $\mathbf{V}$  en  $C$  (vegeu la figura 8.3) i  $ds$  l'element de longitud, se l'anomena *circulació* o *intensitat* del flux al voltant de  $C$ . El lector pot demostrar (vegeu l'exercici 8.1.1) que, amb la identificació habitual de vectors amb nombres complexos, tenim

$$\Gamma + iQ = \int_C \overline{\mathbf{V}} dz.$$

Notem que quan el fluid és incompressible, la velocitat potencial  $\varphi$  és una funció harmònica (vegeu l'exercici 8.1.3). Sigui  $\psi(x, y)$  una funció harmònica conjugada de la velocitat potencial  $\varphi(x, y)$  definida al conjunt  $\Omega \subset \mathbb{C}$  (és a dir, que  $\varphi_x = \psi_y$  i  $\varphi_y = -\psi_x$ ). Notem que aquesta pot no estar definida globalment (en particular si el domini no és simplement connex), però al llarg del capítol prestarem poca atenció a aquest fet. Per exemple, si estudiem una funció del tipus  $1/z$ , prendrem com a potencial una determinació del logaritme que serà només la primitiva en un “entorn tallat”, és a dir en el disc punxat llevat d'un radi. Com que aplicarem el teorema de Cauchy sempre a la seva derivada, aquesta definició no serà problemàtica.

**Notació 8.1.** Fixem la següent notació pel capítol:

- La funció analítica en  $\Omega$  donada per

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

s'anomena *potencial complex*.

- La funció  $\varphi$  és la *funció potencial* (o *velocitat potencial*) i  $\psi$  la *funció de corrent*.
- Les corbes  $\varphi = c$  són les *línies equipotencials* i  $\psi = c$  les *línies de corrent* o *de flux* (són ortogonals).
- El camp del flux, o *velocitat de corrent*,  $\mathbf{V} = Ve^{i\alpha}$  en polars, satisfà

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}(z) &= V_1 + iV_2 = \overline{\Phi'(z)}, \\ V &= |\mathbf{V}| = |\Phi'|, \quad \alpha = -\arg(\Phi'), \\ \mathbf{V} &= \operatorname{grad} \varphi, \end{aligned} \right\}$$

vegeu l'exercici 8.1.4.

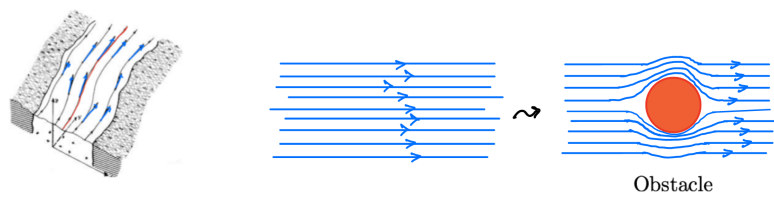


Figura 8.1.: Secció bidimensional d'un flux. El disc representa la secció d'un cilindre.

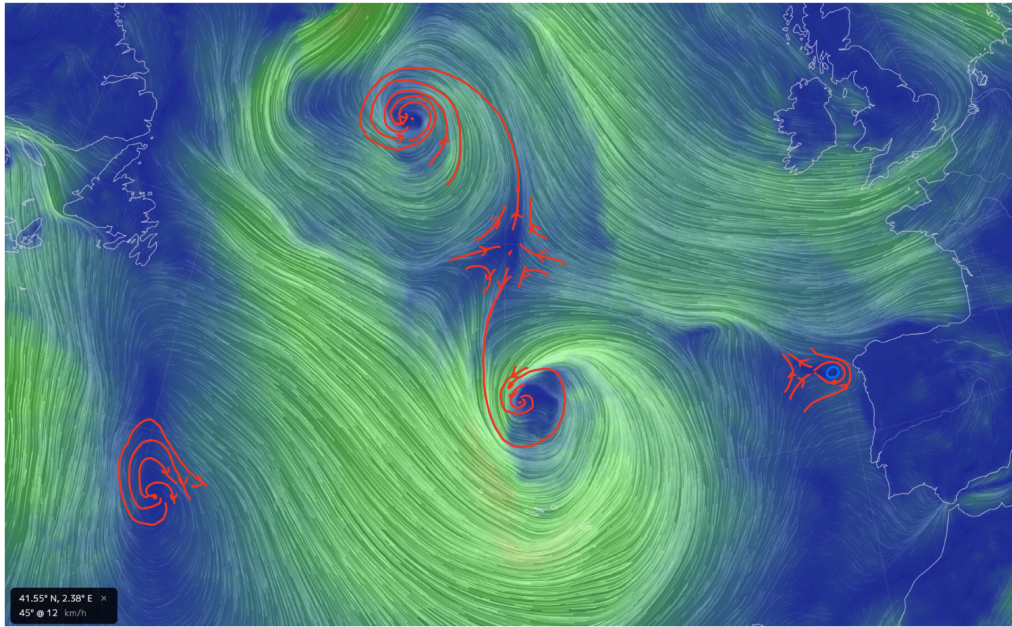


Figura 8.2.: Mapa de vents.

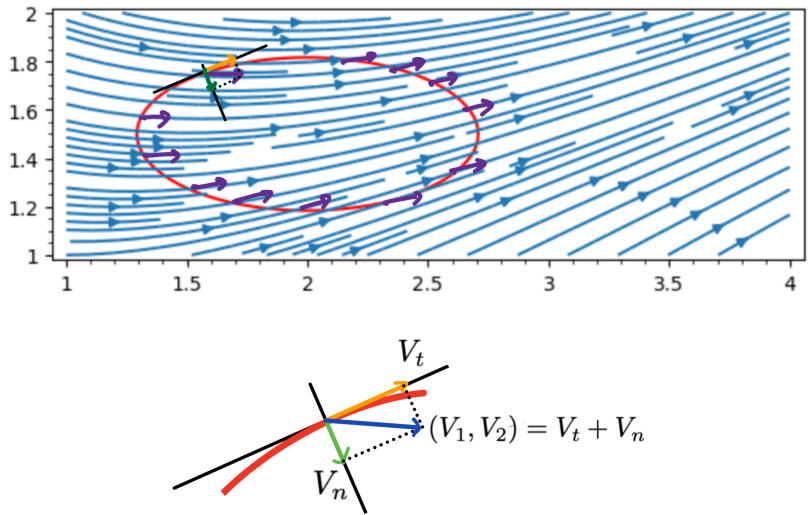


Figura 8.3.: Component tangencial  $V_t$  i normal  $V_n$  del flux respecte a un circuit.

- Els punts on  $\Phi'(z) = 0$  s'anomenen punts *estacionaris* o *d'estancament* (en aquests punts la velocitat és zero). •

**Observació 8.2** (Comandes amb Sage.). Per dibuixar les línies de corrent i les línies equipotencials caldrà la comanda `contour_plot` i per dibuixar els camps (amb fletxes de direcció) `plot_vector_field` o `streamline_plot`. •

## Exercicis

**8.1.1.** Proveu que  $\Gamma + iQ = \int_C \overline{\mathbf{V}} dz$ . ◁

**8.1.2.** Proveu que la circulació  $\Gamma = 0$  en un flux potencial (suposeu que la funció potencial és de classe  $C^2$  com a mínim). ◁

**8.1.3.** Proveu que per fluxos definits en un domini  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que satisfan les quatre hipòtesis anteriors, la velocitat potencial  $\varphi(x, y)$  és una funció harmònica. ◁

**8.1.4.** Proveu que  $\overline{\Phi'(z)} = \mathbf{V}(z) = V_1 + iV_2$ . ◁

## 8.2. Fluxos bàsics.

**Exemple 8.3** (Flux uniforme). Ve donat pel potencial  $\Phi(z) = V_0 e^{-\delta i} z$ , amb  $V_0, \delta \in \mathbb{R}$ .

Trobem la seva expressió. Recordem que  $\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = \overline{V_0 e^{-\delta i}} = V_0 e^{\delta i}$ ,  $V = V_0$ , per tant,

$$\varphi = \operatorname{Re}(\Phi(z)) = \operatorname{Re}(V_0 e^{-\delta i}(x + iy)) = V_0(\cos \delta \cdot x + \sin \delta \cdot y).$$

$$\psi = \operatorname{Im}(\Phi(z)) = \operatorname{Im}(V_0 e^{-\delta i}(x + iy)) = V_0(-\sin \delta \cdot x + \cos \delta \cdot y).$$

Les línies de flux  $\psi = c$  són rectes amb pendent  $\tan \delta$  i  $\delta$  és l'angle que formen les línies de flux amb l'eix real. ◊

**Exemple 8.4** (Font al punt  $z = a$ ). Aquí  $\Phi(z) = k \operatorname{Log}(z - a)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Quan  $k > 0$  s'anomena *font* (en anglès, *source*), si  $k < 0$  una *pica* (en anglès, *sink*).

Trobem l'expressió de  $\mathbf{V}$ ,  $V$ ,  $\varphi$  i  $\psi$ . Tenim que  $\overline{\Phi'(z)} = \frac{k}{\bar{z} - \bar{a}} = k \frac{z - a}{|z - a|^2} = \frac{k}{|z - a|^2}(x - a_1 + i(y - a_2))$ . Llavors

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{k}{|z - a|^2}(x - a_1, y - a_2), \quad V(x, y) = \frac{k}{|z - a|}.$$

Les direccions de flux que dona  $\mathbf{V}$  segueixen la direcció de  $z - a$ , si  $k > 0$  surten, una font, i si  $k < 0$  entren, una pica. Com que  $\Phi = k \operatorname{Log}(z - a) = k(\ln |z - a| + i \operatorname{Arg}(z - a))$  tenim que  $\psi(x, y) = k \operatorname{Arg}(z - a)$  i les corbes  $\psi = c$  són línies que surten de  $a$  com es veu a l'esquerra de la figura 8.4. Observem que si  $C$  envolta  $a$ , aleshores

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z) dz = \int_C \frac{k dz}{z - a} = 2k\pi i.$$

Aleshores  $\Gamma = 0$  i  $Q = 2k\pi$ . No té circulació i la potència és  $2k\pi$ . ◊

**Exemple 8.5** (Flux amb circulació). Estudiem el cas  $\Phi(z) = -ik\text{Log}(z - a)$   $k \in \mathbb{R}$ . Veurem que la velocitat del flux és inversament proporcional a la distància al punt  $a$ . Diem que en el punt  $a$  hi ha un *remolí* de força  $k$ .

Procedim com en el cas anterior. Tenim que  $\overline{\Phi'(z)} = \frac{ki}{\bar{z} - \bar{a}} = ki \frac{z - a}{|z - a|^2} = \frac{ki}{|z - a|^2}(x - a_1 + i(y - a_2)) = \frac{k}{|z - a|^2}(-(y - a_2) + i(x - a_1))$ . Llavors

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{k}{|z - a|^2}(-(y - a_2), x - a_1), \quad V(x, y) = \frac{k}{|z - a|}.$$

Les direccions de flux que dona  $\mathbf{V}$  segueixen direccions de circumferències amb centre  $a$ , si  $k > 0$  en direcció antihorària i si  $k < 0$  en direcció horària, en els dos casos és un remolí.

Com que  $\Phi = -ki\text{Log}(z - a) = -ki(\ln|z - a| + i\text{Arg}(z - a)) = k(\text{Arg}(z - a) - i\ln|z - a|)$  tenim que  $\psi(x, y) = -k\ln|z - a|$  i les corbes  $\psi = c$  són circumferències centrades a  $a$  tal com es veu a la dreta de la figura 8.4. Observem que si  $C$  envolta  $a$ , aleshores

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z)dz = \int_C \frac{-ikdz}{z - a} = 2k\pi.$$

Aleshores  $\Gamma = 2k\pi$  i  $Q = 0$ . La circulació és  $2k\pi$  i la potència és 0.  $\diamond$

## Exercicis

**8.2.1.** Superposició. *Sumant diferents potencials complexos es poden descriure fluxos més sofisticats. Un exemple important s'obté sumant una font al punt  $-a$  amb una pica al punt  $a$  amb  $a > 0$ :*

$$\Phi(z) = k\text{Log}\left(\frac{z + a}{z - a}\right) \sim k\text{Log}(z + a) - k\text{Log}(z - a).$$

*Trobeu l'expressió de  $\mathbf{V}$ ,  $V$ ,  $\varphi$  i  $\psi$ . Dibuixeu les línies de corrent ( $\psi = c$ ), vegeu la figura 8.5.*  $\triangleleft$

**8.2.2.** *En l'exercici anterior, fem  $a \rightarrow 0$  i  $k \rightarrow \infty$  de manera que  $2ka = \mu$  sigui finit. Vegeu que al límit obtenim el potencial complex  $\Phi(z) = \mu/z$  que s'anomena doblet o dipol. Ve a ser una font i una pica separades per una distància infinitesimal. La quantitat  $2\pi\mu$  s'anomena moment del doblet. Trobeu l'expressió de  $\mathbf{V}$ ,  $V$ ,  $\varphi$  i  $\psi$ . Dibuixeu les línies de corrent ( $\psi = c$ ).*  $\triangleleft$

**8.2.3.** Font-remolí. *Estudieu el flux amb funció potencial  $\Phi(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\text{Log}(z - a)$ . Discutiu segons els valors de  $\Gamma$  (circulació o intensitat) i  $Q$  (potència). Feu dibuixos de les línies de camp segons els signes de  $\Gamma$  i  $Q$ .*  $\triangleleft$

### 8.3. Obstacles

Un problema important en la teoria de fluids és determinar el model de corrent que es mou inicialment a velocitat uniforme  $V_0$  i que ha d'evitar un obstacle. La idea general és considerar un potencial complex de la forma  $\Phi(z) = V_0 z + G(z)$  on  $G(z)$  compleix que  $\lim_{z \rightarrow \infty} G'(z) = 0$ . Això vol dir que lluny de l'obstacle el corrent ve donat per  $V_0 z$ . De vegades cal també que aquest nou potencial  $\Phi$  tingui la frontera de l'obstacle com a trajectòria.

**Exemple 8.6.** Estudiem el corrent del fluid amb potencial complex donat per

$$\Phi(z) = V_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$$

amb  $V_0, a \in \mathbb{R}$ .

Ja veiem que és una superposició d'un flux lineal (quan  $z$  és gran) i un doblet (quan  $z$  és prop de zero).

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= V_0 \left( x \left( 1 + \frac{a^2}{|z|^2} \right) + iy \left( 1 - \frac{a^2}{|z|^2} \right) \right) \\ \varphi &= V_0 x \left( 1 + \frac{a^2}{|z|^2} \right) \\ \psi &= V_0 y \left( 1 - \frac{a^2}{|z|^2} \right) \\ \mathbf{V} &= \overline{\Phi'(z)} = V_0 \left( 1 - \frac{a^2 z^2}{|z|^4} \right) \\ V &= |V_0| \left| 1 - \frac{a^2 z^2}{|z|^4} \right|.\end{aligned}$$

Comprovem ara que  $|z| = a$  és una línia de corrent: observem que els punts de  $C = \{z = x + iy : |z|^2 = a^2\}$  satisfan  $\psi(x, y) = ct$ . En efecte, si  $z \in C$  llavors

$$\psi(z) = V_0 y (1 - a^2/a^2) = 0$$

i  $C$  és la corba de nivell zero, és una línia de flux. A la figura 8.6 es pot veure el flux per  $V_0 = a^2 = 3$ .

◇

Una situació més general es dona en el següent teorema.

**Teorema 8.7.** Si  $f$  és un potencial complex definit a  $\mathbb{C}$ , amb singularitats només en la regió exterior  $|z| > R$ , aleshores

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}$$

té  $|z| = R$  com a línia de corrent i conserva, a l'exterior del cercle, les singularitats de  $f$ .

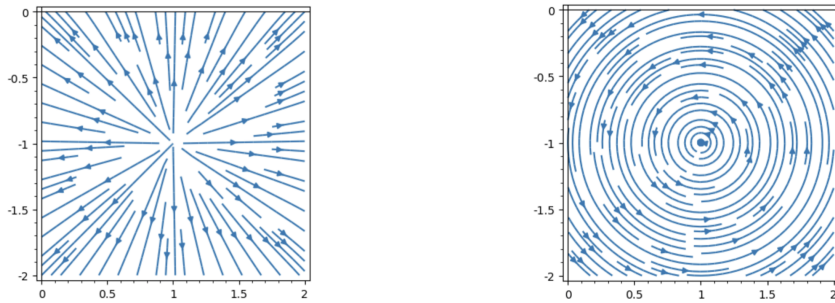


Figura 8.4.: A l'esquerra hi ha una font en  $a = 1 - i$  amb  $k = 2$ , a la dreta, un remolí.

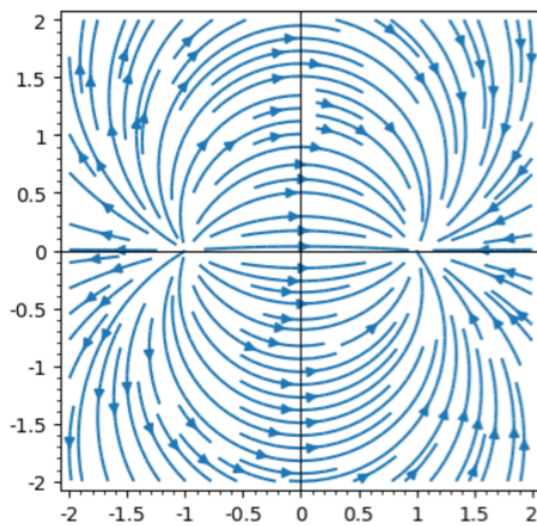


Figura 8.5.: Superposició amb  $a = 1$ .

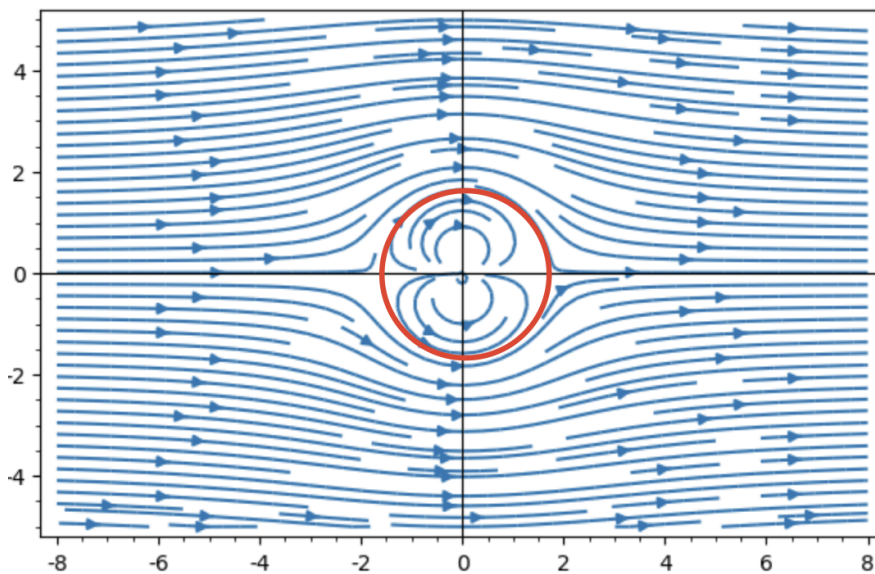


Figura 8.6.: Flux per  $\Phi(z) = 3(z + 3/z)$ .

Recordem que si  $f(z)$  és analítica en una regió  $\Omega$ , llavors  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  és analítica a  $\bar{\Omega}$  i  $g'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$ .

*Demostració.* Si  $|z| = R$  llavors  $\Phi(z) = f(z) + \overline{f(R^2/z)} = f(z) + \overline{f(\bar{z})} \in \mathbb{R}$ . Llavors  $\psi(z) = 0$  per tot  $z$  de la circumferència  $|z| = R$ , llavors aquesta circumferència és línia de flux. Sigui  $p$  un punt singular de  $f$ , per hipòtesi  $|p| > R$ , llavors  $|R^2/\bar{z}| < R$  i  $p$  no és punt singular de  $\overline{f(R^2/\bar{z})}$ . Les singularitats de  $\Phi$  fora de la circumferència són les que provenen de  $f$  i no de la part afegida.  $\square$

## Exercicis

**8.3.1.** Modifiquem el flux amb potencial donat per  $f(z) = \text{Log}(z+2)$  que és una font sortint des del punt  $z = -2$  (vist en un exemple anterior). Per això considerem la modificació donada pel potencial

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \text{Log}(z+2) + \overline{\text{Log}\left(\frac{1}{\bar{z}} + 2\right)}.$$

a) Descomponeu  $\Phi$  en fluxos coneguts.

b) Calculeu  $\Phi'(z)$  i contrasteu-ho amb l'apartat anterior.

c) Vegeu que per  $z$  amb  $|z|$  molt gran resulta  $\Phi'(z) \approx \frac{1}{z+2}$  i que lluny de  $z = -2$  el flux associat a  $\Phi$  és com una font sortint de  $z = -2$ .

d) Mostreu amb un gràfic com eviten el disc unitari les línies de flux (feu servir `contour_plot` i `streamline_plot`).  $\triangleleft$

## 8.4. Expressió general (recapitulació).

**Proposició 8.8.** Si  $\Phi(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$  aleshores

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_C V_t ds = \oint_C (V_1 dx + V_2 dy) = \oint_C d\varphi \\ Q &= \oint_C V_n ds = \oint_C (-V_2 dx + V_1 dy) = \oint_C d\psi\end{aligned}$$

i llavors

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z) dz.$$

Si  $\Phi'(z)$  està definida a l'interior de  $C$  i té un nombre finit de punts singulars  $\{p_k\}$ , aleshores

$$\Gamma + iQ = 2\pi i \sum_k \text{Res}(\Phi'(z), p_k).$$

*Demostració.* Tenim que  $V_1 - iV_2 = \Phi'(z) \stackrel{\text{CR}}{=} \varphi_x + i\psi_x \stackrel{\text{CR}}{=} \psi_y - i\varphi_y$ . Aleshores

$$Q = \oint_C V_n ds = \oint_C (-V_2 dx + V_1 dy) = \oint_C \psi_x dx + \psi_y dy = \oint_C d\psi$$

i

$$\Gamma = \oint_C V_t ds = \oint_C (V_1 dx + V_2 dy) = \oint_C \varphi_x dx + \varphi_y dy = \oint_C d\varphi.$$

Ara bé

$$\begin{aligned} \Phi'(z)dz &= (\varphi_x + i\psi_x)(dx + idy) = \varphi_x dx - \psi_x dy + i(\psi_x dx + \varphi_x dy) = \\ &= \varphi_x dx + \varphi_y dy + i(\psi_x dx + \psi_y dy) = d\varphi + id\psi. \end{aligned}$$

i podem concloure que

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z)dz.$$

La darrera afirmació de l'exercici és conseqüència del teorema dels residus.  $\square$

**Proposició 8.9.** Si  $a$  és un pol d'ordre finit de  $\bar{V}(z)$ , podem prendre  $\Phi(z)$  en un “entorn tallat” al voltant de  $a$  com

$$\Phi(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z-a} + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \text{Log}(z-a) + c_0 + c_1(z-a) + \cdots.$$

*Demostració.* Per tenir  $\Phi'(z)$  un pol d'ordre finit integrant obtenim el resultat.  $\square$

Llavors, segons el que hem vist al llarg del capítol, diem que

- $\Phi(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \text{Log}(z-a)$  determina en  $a$  una *font-remolí* de potència  $Q$  i intensitat  $\Gamma$ , la denotem per  $(a; Q, \Gamma)$ . Quan  $Q = 0$  és un remolí, i quan  $\Gamma = 0$  és una font ( $Q > 0$ ) o una pica ( $Q < 0$ ).
- $\Phi(z) = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z-a}$  determina en  $a$  un *doblet* de moment  $p$ , el denotem per  $(a; p)$  ( $\bar{p}$  determina la direcció la direcció del doblet que passa per  $a$ ).
- $\Phi(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$  determina un *multiplet* d'ordre  $2k$  en el punt  $a$ .<sup>1</sup>

Els resultats anteriors mostren que les singularitats de les funcions meromorfs es poden interpretar físicament com a fonts, remolins o altres estructures elementals de flux

---

<sup>1</sup>La notació i comportament a l'∞ és similar, si  $\Phi(z) = c_n z^n + \cdots + \frac{p}{2\pi} z + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \text{Log}(z) + c_0 + \frac{c_1}{z} \cdots$  direm que el terme en  $\text{Log}(z)$  determina una *font-remolí* de potència  $-Q$  i intensitat  $-\Gamma$ , el terme en  $z$  un *doblet* de moment  $p$  i els de  $z^k$  *multiplets* d'ordre  $2k$ .

**Exercicis**

**8.4.1.** Pels  $z$  on  $V(z) = \overline{\Phi'(z)} = 0$  diem que hi ha un punt estacionari del corrent (per exemple és aquell punt d'un riu on una fulla petita s'ha quedat aturada però que al seu voltant circula l'aigua).

- a) Per  $\Phi(z) = z^n$  el 0 és un punt estacionari d'ordre  $n - 1$ . Feu un dibuix amb les línies de flux i les línies equipotencials superposades per  $n = 2, 3, 4$ .
- b) Podeu deduir experimentalment quin angle formen les línies equipotencials i les línies de flux?
- c) Proveu que si un punt estacionari  $a$  és un zero d'ordre  $n - 1$  llavors les línies equipotencials i de corrent ( $\varphi = ct.$ ,  $\psi = ct.$ ) formen un angle  $\pi/2n$  en el punt estacionari (feu-lo com a mínim pel cas  $\Phi'(z) = Cz^{n-1}$ ,  $C \in \mathbb{C}$ ). Quin angle formen una línia de corrent i una línia equipotencial quan es creuen en un punt no estacionari?  $\triangleleft$

**8.4.2.** Discutiu el moviment del fluid amb potencial complex igual a

a)  $\Phi(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \text{Log} \left( \frac{z - a}{z - b} \right)$  on  $a, b \in \mathbb{C}$  i  $Q, \Gamma \in \mathbb{R}$ .

b)  $\Phi(z) = az + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log}(z)$  on  $a, \Gamma > 0$ .

c)  $\Phi(z) = az + \frac{Q}{2\pi} \text{Log}(z)$  on  $a, Q > 0$ .

d)  $\Phi(z) = \frac{p}{2\pi z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log}(z)$  on  $p, \Gamma > 0$ .  $\triangleleft$

**8.4.3.** Discutiu el moviment del fluid amb potencial complex

$$\Phi(z) = V_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log}(z), \text{ amb } \Gamma, V_0, R > 0.$$

Particularment estudieu els casos  $\Gamma < 4\pi RV_0$ ,  $\Gamma > 4\pi RV_0$  i  $\Gamma = 4\pi RV_0$ . Dibuixeu exemples de cadascun dels casos.  $\triangleleft$

**8.4.4.** Doneu un potencial complex que tingui fonts-remolins  $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k) : k = 1, \dots, n\}$  i velocitat  $V_\infty = Ve^{i\alpha}$  a l'infinít.  $\triangleleft$