

A. El teorema de l'aplicació de Riemann

Recordem l'enunciat del teorema que ens ocupa.

Teorema A.1 (Teorema de l'aplicació de Riemann). *Sigui $U \subsetneq \mathbb{C}$ un obert simplement connex. Llavors existeix una representació conforme $f : U \rightarrow \mathbb{D}$. A més, si escollim $z_0 \in U$ i demanem que $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) > 0$ (és a dir que $f'(z_0) \in \mathbb{R}_+$), aleshores f és única.*

La demostració de la unicitat és senzilla, vegeu la Secció 7.1. Recordem que es pot reescriure com que f és única mòdul postcomposició amb automorfismes del disc, vegeu l'observació 7.24.

En aquest apèndix demostrarem l'existència de la representació conforme, vegeu també, per exemple, [BC13, Capítol 9]. Tot i que el teorema va ser enunciat per Riemann, la demostració completa s'atribueix a Koebe. És una demostració elegant que fa servir diverses de les eines que hem desenvolupat en aquests apunts. Addicionalment, però, necessitem també el concepte de família normal i el teorema de Montel¹, que enunciem a continuació.

Famílies normals i el teorema de Montel

Sigui $U \subset \mathbb{C}$ un obert del pla complex, i $\mathcal{F}$ una família de funcions holomorfes en U . Diem que $\mathcal{F}$ és una *família normal* si tota successió de funcions de $\mathcal{F}$ té una parcial que convergeix uniformement en compactes de U . Observem que pel teorema de Weierstrass (vegeu el teorema 4.38), el límit ha de ser una funció holomorfa, tot i que no necessàriament ha de ser membre de la família $\mathcal{F}$.

Comprovar si una família de funcions és normal acostuma a fer-se fent servir el teorema de Montel. La versió feble d'aquest resultat diu el següent:

Teorema A.2 (Teorema de Montel, versió feble). *Sigui $U \subset \mathbb{C}$ un obert i $\mathcal{F}$ una família de funcions holomorfes en U . Suposem que $\mathcal{F}$ és uniformement fitada, és a dir, que existeix $M > 0$ tal que*

$$|f(z)| \leq M, \quad \text{per a tota } f \in \mathcal{F} \text{ i tot } z \in U.$$

Aleshores, la família $\mathcal{F}$ és normal.

El lector interessat pot trobar una demostració a [SS10, Sect. 3].

Demostració del teorema de l'aplicació de Riemann

La demostració consta de tres passos diferents que farem per separat.

¹Paul Montel, Niça, 1876–1975. https://ca.wikipedia.org/wiki/Paul_Montel

Pas 1. Vegem primer que existeix un subconjunt $V \subset \mathbb{D}$ que conté l'origen i una representació conforme $F : U \rightarrow V$ amb $F(z_0) = 0$.

Demostració. Per fer-ho, escollim un nombre $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha \notin U$ (existeix perquè U no és tot el pla). Aleshores $z - \alpha \neq 0$ a U i, per tant, donat que U és simplement connex, existeix una determinació del logaritme de $z - \alpha$ en U (vegeu el teorema 5.28). És a dir, existeix una funció holomorfa $\mathcal{L}(z)$ tal que $e^{\mathcal{L}(z)} = z - \alpha$. De l'equació veiem que $\mathcal{L}$ és necessàriament injectiva, però a més, veiem que

$$\mathcal{L}(z) \neq \mathcal{L}(z_0) + 2\pi i, \quad \text{per a tot } z \in U,$$

ja que, altrament, exponenciant aquesta expressió obtindríem $z = z_0$, que implicaria que $\mathcal{L}(z) = \mathcal{L}(z_0)$, una contradicció. De fet, $\mathcal{L}(U)$ omet tot un disc centrat en $\mathcal{L}(z_0) + 2\pi i$ ja que si no fos així, existiria una successió (z_n) en U tal que $\mathcal{L}(z_n) \rightarrow \mathcal{L}(z_0) + 2\pi i$. De nou, exponenciant aquesta expressió, i donat que l'exponencial és contínua, tindríem que $z_n \rightarrow z_0$ i, per tant, $\mathcal{L}(z_n) \rightarrow \mathcal{L}(z_0)$, una contradicció.

Així doncs hem vist que existeix un disc D centrat a $\mathcal{L}(z_0) + 2\pi i$ tal que $\mathcal{L}(U)$ no interseca D . Considerem ara l'homografia

$$T(w) = \frac{w - \mathcal{L}(z_0)}{w - (\mathcal{L}(z_0) + 2\pi i)},$$

que envia el punt $\mathcal{L}(z_0) + 2\pi i$ a l'infinit i $\mathcal{L}(z_0)$ a l'origen, i el disc D al complementari d'un disc.

Com que $\mathcal{L}$ és injectiva, $T \circ \mathcal{L}$ també ho és i, per tant, $T \circ \mathcal{L} : U \rightarrow T(\mathcal{L}(U))$ és una representació conforme. A més, per construcció, $T(\mathcal{L}(U))$ és un conjunt fitat. Només ens cal doncs compondre $T \circ \mathcal{L}$ amb una homotècia adequada, per obtenir una representació conforme de U en un subconjunt de $\mathbb{D}$ que conté l'origen i tal que $F(z_0) = 0$. $\square$

Del pas anterior deduïm que podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que U és un subconjunt obert de $\mathbb{D}$ i que $0 \in U$ és el punt que volem enviar a 0. Considerem la família $\mathcal{F}$ de funcions holomorfes i injectives d' U en D fixant l'origen, és a dir

$$\mathcal{F} = \{f : U \rightarrow \mathbb{D} \mid f \text{ injectiva, holomorfa i } f(0) = 0\}.$$

Observem que la identitat pertany a $\mathcal{F}$ i, per tant, $\mathcal{F}$ no és buida. A més, aquesta família és uniformement fitada per construcció, ja que totes les funcions van a parar al disc unitat. El teorema de Montel (vegeu el teorema A.2) ens diu, doncs, que $\mathcal{F}$ és una família normal.

Pas 2. Vegem que $\mathcal{F}$ conté una funció f que maximitza $|f'(0)| = s := \sup_{h \in \mathcal{F}} |h'(0)| \geq 1$.

Demostració. Observem primer que $|f'(0)|$ està uniformement fitada, per a $f \in \mathcal{F}$. Això es pot veure aplicant la desigualtat de Cauchy (vegeu el lema 4.28) a f' en un petit disc centrat a l'origen. En conseqüència, podem definir

$$s = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)| \geq 1,$$

on la desigualtat ve donada pel fet que la identitat pertany a $\mathcal{F}$. Escollim una successió $(f_n) \subset \mathcal{F}$ tal que $|f'_n(0)| \rightarrow s$, quan $n \rightarrow \infty$. Donat que $\mathcal{F}$ és normal, aquesta successió té una parcial que convergeix uniformement en compactes de U a una funció f . Pel teorema de Weierstrass (vegeu el teorema 4.38), f és holomorfa en U i $|f'(0)| = s \geq 1$. Això ens diu que f no és constant i, com que les funcions f_n són injectives, el teorema de Hurwitz (vegeu el teorema 6.34 i l'exercici 6.7.9) ens diu que f també és injectiva. Per continuïtat, també veiem que $|f(z)| \leq 1$ per a tot $z \in U$ i, pel principi del mòdul màxim (vegeu el teorema 4.51), se segueix que $|f(z)| < 1$ (ja que U és obert). Clarament també tenim que $f(0) = 0$, la qual cosa implica que $f \in \mathcal{F}$ i que $|f'(0)| = s$, tal i com volíem demostrar. $\square$

Pas 3. *Vegeu que, de fet, f és una representació conforme de U en $\mathbb{D}$.*

Demostració. Ja sabem que f és holomorfa i injectiva, per tant només ens queda demostrar que és exhaustiva. La idea és veure que, si no fos així, podríem trobar una funció $F \in \mathcal{F}$ amb $|F'(0)| > |f'(0)| = s$, la qual cosa és una contradicció.

Suposem doncs que existeix $a \in \mathbb{D}$ tal que $f(z) \neq a$ per a tot $z \in U$. Considerem l'automorfisme de $\mathbb{D}$ que intercanvia els punts a i 0 (vegeu l'exercici 1.1.10)

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}.$$

Com que U és simplement connex, també ho és $(\varphi_a \circ f)(U)$ i, a més, no conté l'origen. Per tant, existeix una branca holomorfa $\mathcal{S}$ de l'arrel quadrada (de la identitat) en $(\varphi_a \circ f)(U)$, vegeu l'exercici 5.4.2, i que és injectiva. Considerem ara la composició

$$F = \varphi_{g(a)} \circ \mathcal{S} \circ \varphi_a \circ f,$$

i procedim a veure que $F \in \mathcal{F}$. Clarament F és holomorfa i $F(0) = 0$. Totes les funcions envien el disc unitat a ell mateix i, per tant, F també ho fa. De la mateixa manera, F és injectiva ja que totes les components ho són, i així concloem que $F \in \mathcal{F}$.

Considerem ara $h(u) = u^2$, la inversa de $\mathcal{S}$, i escrivim

$$f = \varphi_a^{-1} \circ h \circ \varphi_{g(a)}^{-1} \circ F := \Phi \circ F.$$

Observem que Φ envia $\mathbb{D}$ a ell mateix (no injectivament), amb $\Phi(0) = 0$. Pel lema de Schwarz (vegeu el lema 4.54), es compleix que $|\Phi'(0)| \leq 1$. A més, la igualtat només podria passar si Φ fos una rotació. Però Φ no és injectiva, ja que conté el factor $h(u) = u^2$. Per tant,

$$|\Phi'(0)| < 1.$$

Però aleshores, usant la regla de la cadena,

$$s = |f'(0)| = |\Phi'(0)F'(0)| < |F'(0)|$$

que contradiu la maximalitat de $|f'(0)|$ en $\mathcal{F}$. Deduïm doncs que f és exhaustiva i, per tant, una representació conforme de U en $\mathbb{D}$ fixant l'origen. $\square$

Multiplicant f per la constant $|f'(0)|/f'(0)$, de mòdul 1, obtenim $\tilde{f}$ amb les mateixes propietats i satisfent $\tilde{f}'(0) > 0$.

Per acabar, observem que en el pas 1, hem pogut escollir una translació que ens portés el punt $z_0 \in U$ escollit a l'origen. És aquesta composició final la que satisfarà les condicions del teorema. $\square$

Índex conceptual

- aïllament dels zeros, 114
- Abel
 - Niels Henrik, 29
 - teorema d', 53
 - uniforme, criteri d', 52
- absolutament convergent, 12
- acumulació de zeros, 115
- algebraicament tancat, 3
- analítica real, 139
- analiticitat de les funcions holomorfes, 99
- angle, 14
- angle recte, 14
- antiholomorfa, funció, 138
- aplicació de Riemann, 144
 - teorema de l', 182, 211
- aplicació oberta, teorema de l', 119
- arbre, la persona i el gos, teorema de l', 133
- arc-connex, 10
- arccosinus, 16
- arcsinus, 16
- arctangent, 16
 - funció, 76
- Argand
 - Jean-Robert, 10
 - pla d', 10
- argument, 23
 - principi de l', 173
 - principal, 20, 36
- arrel
 - de funcions holomorfes, 213
 - quadrada, funció, 77
- arrel n -èsima, 25, 36
- arrel cúbica, funció, 77
- arrel, criteri de l', 13
- arrels n -èsimes de la unitat, 27
- associativa, propietat, 6
- $\text{Aut}(\mathbb{C})$, 196
- $\text{Aut}(\mathbb{D})$, 194
- automorfisme
 - del disc, 194
 - del pla complex, 196
- Bernoulli
 - Jacob, 126
 - lemniscata de, 126
- biholomorfa, funció, 181
- binomi de Newton, 101
- Bolzano, Bernard, 2
- Bombelli, Rafael, 1
- branca contínua, 35
- $\mathbb{C}$, 2
- $\mathbb{C}^*$, 20
- γ^* , 82
- $\mathbb{C}$ -derivable, 55
- càlcul geomètric de l'índex, 123
- cabal, 202
- cadena, 126
- camí, 82
- canvi de variables, 48
- caracterització de simplement connex, 137
- Cardano
 - equació de, 1, 38
 - Girolamo, 1
- Casorati
 - Weierstrass, teorema de, 155
 - Felice, 155
- Cauchy
 - Goursat, teorema de, 89
 - Hadamard, teorema de, 45
 - Pompeiu, fórmula de, 95

- Riemann, equacions de, 62
- Augustin Louis, 11
- desigualtats de, 102
- teorema de, 135, 136
- global, teorema de, 128
- per convexos, teorema de, 94
- per un disc, teorema de, 93
- cercle generalitzat, 186
- cicle, 127
- cicle homòleg a 0, 128
- cicles homòlegs, 128
- circulació, 202
- circumferència generalitzada, 186
- classificació de singularitats, 155
- coloració del pla complex, 31
- commutativa, propietat, 6
- complex, nombre, 3
- comportament a la frontera, 50
- comptant multiplicitats, 27
- conforme, funció, 181
- conformement equivalent, 181
- conjugat, 6
- conjunt de zeros, 112
- connex, 10
- contínua, 30
- continuitat, 30
- contractible, 132
- convergència
 - de sèries, 11
 - de successions, 11
 - uniforme, 44
- convex, 94
- coordenades cartesianes enteres, 31
- corba, 82
 - C^1 a trossos, 82
 - de classe C^1 , 82
 - inversa, 82
 - simple, 82
 - tancada, 82
- corbes homòtopes, 132
- cos dels nombres complexos, 7
- cosinus, 14
 - funció, 75
 - hiperbòlic, 76
- criteri
 - de l'arrel, 13
 - del quocient, 13
- $\mathbb{D}$, 10
- de Moivre, Abraham, 19
- deformació, teorema de, 135
- del Ferro
 - Scipione, 1
 - Tartaglia, equació de, 1
- derivabilitat implica continuïtat, 57
- derivació d'una sèrie de potències, 71
- derivació sota el signe d'integració, 109
- derivada de la funció inversa, 57
- desenvolupament en sèrie de potències, 99
- determinació, 35
 - de l'argument, 41, 42
 - de l'arrel, 41, 137
 - de l'arrel n -èsima, 42
 - del logaritme, 41, 42, 121, 137
- diferencial, 61, 68
- dilatació complexa, 187
- dinàmica de fluids, 201
- dipol, 205
- Dirichlet
 - Peter Gustav Lejeune, 29, 144
 - uniforme, criteri de, 52
- disc de convergència, 45
- disc unitat, 10
- distributiva, propietat, 6
- divisió de complexos, 7
- doblet, 205, 209
- domini, 10
- domini de definició, 29
- $D_r(a)$, 10
- el·lipse, 84
- efecte de la derivada, 63
- entera, funció, 55
- Escher
 - Maurits Cornelis, 196
- esfera de Riemann, 184
- espai
 - mètric, 10

- normat, 10
- topològic, 10
- vectorial, 5, 9
- estrellat, domini, 94
- Euler
 - identitat d', 17, 18
 - Leonhard, 1
- existència de primitives, 136
- exponencial, funció, 17, 31, 75, 198
- família normal, 211
- Ferrari, Lodovico, 1
- fluid incompressible, 201
- flux, 201, 202
 - al voltant d'un obstacle circular, 206
 - amb circulació, 205
 - estacionari, 201
 - irrotacional, 201
 - potencial, 201
 - uniforme, 201, 204
- fonamental de l'àlgebra, teorema, 3, 26, 104
- font, 204
- font-remolí, 209
- fracció de complexos, 7
- funció
 - analítica, 71
 - de variable complexa, 29
 - inversa, derivada de la , 57
 - potencial, 202
- funció de corrent, 202
- galeria de funcions, 76
- geomètrica de funcions, teoria, 182
- geometria hiperbòlica, 196
- GFT, 182
- gir, 187
- Goursat, Édouard, 88
- gràfic de colors, 31
- Green
 - fórmula de, 88
 - George, 88
- grup projectiu lineal, 187
- Hadamard, Jacques, 45
- harmònica conjugada, 94, 140
- harmònica, funció, 94, 138
- Herglotz
 - fórmula de representació de, 142
 - Gustav, 141
 - nucli de, 141
- Hilbert, David, 108
- holomorfa, funció, 55
- holomorfia de funcions analítiques, 71
- homòtopa a 0, 132
- homografia, 186
- homografies bàsiques, 187
- homologia, 128
- homotècia, 187
- homotopia, 132
- homotopia amb extrems fixats, 132
- Hurwitz
 - Adolf, 178
 - teorema de, 178
- i , 2
- imaginari, eix, 10
- imatge de conjunts especials, 31
- independència de camí, teorema de la, 135
- independència del camí, 86
- índex
 - d'un cicle, 127
 - d'una corba, 98, 122
 - expressió integral de l', 124
 - propietats de la funció, 124
- infinitèsim, 16
- integral
 - de camí, 84
 - de Cauchy, fórmula, 95, 102, 109, 129, 131
 - de funcions amb valors complexos, 83
 - de Poisson, fórmula, 141
- intensitat, 202
- invers, element, 7
- inversa per la dreta, 38
- inversió, 187
- involució, 187
- jacobià i canvi de variables, 64

- Jukovski
 funció de, 35, 77
 Nikolai, 35
- Koebe
 Paul, 181
- Koebe, Paul, 211
- línies de corrent, 202
- línies equipotencials, 202
- límit d'una funció en un punt, 30
- límit superior, 12
- lacunar, sèrie, 48
- Laplace, Pierre-Simon, 108
- laplaciana, 65, 138
- Laurent
 Pierre Alphonse, 149
 sèrie de, 149
- Legendre, Adrien-Marie, 80
- Liouville
 Joseph, 81
 teorema de, 104
- localment conforme, 63
- logaritme, 36
 derivada del, 58
 principal, 36
- longitud d'una corba, 14, 83
- Möbius
 August Ferdinand, 186
 transformació de, 186
- mòdul, 6
- mòdul màxim, principi del, 117
- Machin
 fórmula de, 24
 John, 24
- meromorfa, funció, 172
- Mertens
 Franz, 12
 teorema de, 12
- moment del doblet, 205
- Montel
 Paul, 211
 teorema de, 211
- Morera
 Giacinto, 81
 teorema de, 105
- multiplet, 209
- multiplicitat del zero, 113
- multivaluada, funció, 35
- número π , 14
- neutre, element, 6
- Newton
 Isaac, 101
- norma, 10
- nucli
 de Herglotz, 141
 de Poisson, 141
- $\mathcal{O}(z)$, 56
- $o(z)$, 55
- obert, 10, 29
- obstacle, 206
- oposat, element, 6
- ordre
 del pol, 155
 del zero, 113
- orientació, 187
- part
 imaginària, 4
 real, 4
- $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$, 187
- pica, 204
- Picard
 Charles Émile, 156
 teorema gran de, 156
- Pitàgores, 15
 teorema de, 15
- pla complex, 10
- Poincaré
 Henry, 181
- Poisson
 nucli de, 141
 Siméon Denis, 141
- pol, 153
- polars, coordenades, 20
- polinomi, 8
 de Legendre, 80

- Pompeiu, Dimitrie, 95
potència, 202
 complexa, 40
 funció, 31, 197
potencial, 201
potencial complex, 202
primitiva holomorfa, 85
principi de l'argument, 173
problema de Dirichlet, 144
producte de complexos, 4
producte de funcions analítiques, 73
prolongació analítica, principi de, 114, 115
 propietat de la mitjana, 98
 propietats de la integral, 83
punt
 d'estancament, 204
 estacionari, 204
 final, 82
 inicial, 82

 Q , 31
quocient, criteri del, 13, 47

raó doble, 193
radi de convergència, 45
rang, 29
real, eix, 10
recorregut, 29
recta projectiva complexa, 187
reflexió de Schwarz, principi de, 106
regla
 de Barrow, 85
 de la cadena, 57, 68
regles de derivació, 57
remolí, 205
reparametrització, 82
representació conforme, 181
residu, 157
 a l'infinit, 162
 càlcul del, 158
residus, teorema dels, 158
Riemann, Bernhard, 55
Rouché
 teorema de, 176
Rouché, Eugène, 176

sèrie
 de Laurent, 149
 de potències, 44
 derivada, 71
 producte de Cauchy, 12
Schwarz
 Hermann, 106
 lema de, 118
simetria, 193
simplement connex, 135
singularitat, 152
 aïllada, 152
 essencial, 153
 evitable, 153
sinus, 14
 funció, 75
 hiperbòlic, 76
Stone, Marshall H., 120
suma de camins, 82
suma de complexos, 4
sumació per parts, fórmula de, 51

Tales de Milet, 14
tancat, 10, 29
tangent, 14
 funció, 76
Tartaglia, Niccolò Fontana, 1
topologia de $\mathbb{C}$, 10
transformació conforme, 181
transformada de Hilbert, 108
transformada de Laplace, 108
translació, 187
triangular, desigualtat, 10
 per integrals, 83
trigonometria, 14

uniforme en compactes
 convergència, 99, 211
univalent, funció, 181

variable, 70
velocitat de corrent, 202

velocitat potencial, 202

Weierstrass

 Karl, 37

 teorema de, 106

 criteri M de, 45

Wirtinger

 derivades de, 61

 operadors de, 61

 Wilhelm, 55

Bibliografia

- [Ahl79] Lars Ahlfors. *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 3rd edition, 1979.
- [BC08] Joaquim Bruna and Julià Cufí. *Anàlisi complexa*, volume 49. Univ. Autònoma de Barcelona, 2008.
- [BC13] Joaquim Bruna and Julià Cufí. *Complex Analysis: Translated from the Catalan by Ignacio Monreal*. EMS Press, May 2013.
- [BG12] Carlos A Berenstein and Roger Gay. *Complex variables: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Bur12] R. Burckel. *An Introduction to Classical Complex Analysis: Vol. 1*, volume 64. Birkhäuser, 2012.
- [Con78] John B Conway. *Functions of One Complex Variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2nd edition, 1978.
- [D'A10] John P D'Angelo. *An introduction to complex analysis and geometry*, volume 12. American Mathematical Soc., 2010.
- [Gam03] Theodore Gamelin. *Complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [M⁺70] Alexei I Markushévich et al. *Teoría de las funciones analíticas*. Moscú: Editorial Mir,, 1970.
- [MH99] Jerrold E. Marsden and Michael J. Hoffman. *Basic complex analysis*, volume 72. Cambridge University Press, 3rd edition, 1999.
- [R⁺79] Walter Rudin et al. *Análisis real y complejo*. 1979.
- [SS10] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2. Princeton University Press, 2010.
- [VLA72] LI Volkovyski, G. Lunts, and I. Aramanovich. *Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja*. Mir Moscu, 1972.

