

Introducció a l'anàlisi complexa

Llistes de problemes, v26.12

Carme Cascante*, Núria Fagella, Eduardo Gallego[†],
Jordi Pau, Martí Prats

8 de setembre de 2026

*CC: cascante@ub.edu, NF: nfagella@ub.edu, JP: jordi.pau@ub.edu:

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Catalonia

[†]EG: Eduardo.Gallego@uab.cat MP: marti.prats@uab.cat:

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Catalonia

1. El cos dels nombres complexos

1.1. El cos dels nombres complexos

1.1.1. Doneu en forma $a + bi$:

$$\begin{array}{lll} a) (-1 + i)^2, & c) \frac{-1+5i}{2+3i}, & e) \left(\frac{2+i}{6i-(1-2i)} \right)^2, \\ b) \frac{8i-1}{i}, & d) \frac{(8+2i)-(1-i)}{(2+i)^2}, & f) ((3-i)^2 - 3)i. \end{array}$$

1.1.2. Demostreu o doneu un contraexemple:

$$a) \operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w, \quad b) \operatorname{Re}(zw) = (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Re} w), \quad c) \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Re} w}. \quad \triangleleft$$

1.1.3. Sigui $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im}(z) > 0$. Proveu que $\operatorname{Im}(1/z) < 0$. $\triangleleft$

1.1.4. Si $z = x + iy$ on $x, y \in \mathbb{R}$, trobeu les parts real i imaginària de:

$$\begin{array}{lll} a) z^2, & c) \frac{1}{z-3}, & e) \frac{z+1}{2z-5}, \\ b) z(z+1), & d) \frac{1}{z^2}, & f) z^3. \end{array} \quad \triangleleft$$

1.1.5. Sigui $\frac{x+iy}{x-iy} = a + ib$ amb $(x, y) \neq (0, 0)$ i $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Proveu que $a^2 + b^2 = 1$. $\triangleleft$

1.1.6. Proveu que $-1 + i$ satisfà $z^2 + 2z + 2 = 0$. $\triangleleft$

1.1.7. Escriuiu l'equació complexa $z^3 + 5z^2 = z + 3i$ com dues equacions reals. $\triangleleft$

1.1.8. a) Si z_1, z_2 són complexos amb $z_1 + z_2$ i $z_1 z_2$ reals negatius proveu que z_1, z_2 són reals.

b) Proveu que el vector $z_1 \neq 0$ és paral·lel al vector $z_2 \neq 0$ si i només si $\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = 0$. $\triangleleft$

1.1.9. Proveu analíticament i gràfica que $|z-1| = |\bar{z}-1|$. $\triangleleft$

1.1.10. Demostreu que $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$ si $|a| = 1$ o bé $|b| = 1$. Quina excepció cal fer si $|a| = |b| = 1$?

Demostreu també que $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$ si $|a| < 1$ i $|b| < 1$.

Per acabar, si per $a \in \mathbb{D}$ definim $\varphi_a(z) := \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, demostreu que $\varphi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, que és bijectiva en $\mathbb{D}$ i en $\partial\mathbb{D}$ i doneu-ne la inversa. $\triangleleft$

1.2. Els nombres complexos com a espai vectorial

1.2.1. *Describeu els conjunts de punts del pla que satisfan:*

- a) $1 < \operatorname{Im}(iz) < 2$, c) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$, e) $|z - 2| > |z - 3|$,
 b) $\operatorname{Im} \frac{z-a}{z} = 0, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, d) $|z - 1| = |z + i|$, f) $|z - 1| + |z + 1| = 7$. ◁

1.2.2. *Suposem que $a_n \rightarrow a$ i $b_n \rightarrow b$. Demostreu que $a_n + b_n \rightarrow a + b$ i $a_n b_n \rightarrow ab$, sabent que ambdues propietats són certes a la recta real.* ◁

1.2.3. *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

- a) $i^n + \frac{1}{n+i}$, b) $\frac{n+i}{n-i}$, c) $\frac{3in^2}{n^2-2i}$. ◁

1.2.4. *Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:*

- a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$. ◁

1.2.5. *Demostreu el teorema de Mertens.* ◁

1.2.6. *Vegeu que tota successió convergent $\{z_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ satisfà que $|z_{n+1} - z_n| \rightarrow 0$.* ◁

1.3. Repàs de trigonometria

1.3.1. *Demostreu tots els resultats de la secció.* ◁

1.3.2. *Definim el sinus i el cosinus hiperbòlics de $x \in \mathbb{R}$ com*

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Demostreu que se satisfan les següents identitats:

- a) $\sinh(0) = 0$ i $\cosh(0) = 1$.
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$.
 c) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ i $\cosh(-x) = \cosh(x)$.
 d) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
 e) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.
 f) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.
 g) $(\sinh x)' = \cosh x$ i $(\cosh(x))' = \sinh(x)$. ◁

1.4. L'exponencial complexa

1.4.1. Fent servir la fórmula de De Moivre, trobeu expressions de $\sin 3\theta$ i $\sin 4\theta$ en termes de $\sin \theta$ i $\cos \theta$. ◁

1.4.2. Trobeu les arrels de $z^4 + 1 = 0$ i feu-les servir per veure que $z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$. ◁

1.5. Representació polar d'un nombre complex

1.5.1. Trobeu la forma polar dels nombres següents i dibuixeu-los.

a) $3(1 + \sqrt{3}i)$, b) $2\sqrt{3} - 2i$, c) $-2 + 2i$, d) $-1 - i$. ◁

1.5.2. Expressen en forma cartesiana $(a + ib)$ els següents nombres:

a) $(2 + 3i)(4 + i)$, c) $\frac{1}{4+i}$, e) $(1 - 2i)^3$, g) $(1 + i)^{100} + (1 - i)^{100}$,
 b) $(4 + 2i)^2$, d) $\frac{i}{2+i}$, f) $\frac{1}{2+i} + \frac{4-2i}{3+i}$, h) $\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2$. ◁

1.5.3. Fent servir el producte $(1 + i)(5 - i)^4$, deduiu la fórmula de Machin¹: $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$. ◁

1.5.4. Estudieu la convergència de $\{z_0^n\}$ si $|z_0| < 1$ o si $|z_0| > 1$. ◁

1.5.5. Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:

a) $z_n = \frac{i}{n}$, c) $z_n = \operatorname{Arg}(-1 + i/n)$, e) $z_n = \left(\frac{1-i}{4}\right)^n$,
 b) $z_n = i(-1)^n$, d) $z_n = \frac{n(2+i)}{n+1}$, f) $z_n = \exp\left(\frac{2n\pi i}{5}\right)$.

Aquí hem escrit $\exp(z) = e^z$. ◁

1.6. Equacions amb exponencials

1.6.1. Resoleu les següents equacions:

¹John Machin (1706), podeu trobar més informació a https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula.

a) $e^z = 1 + i$;

b) $e^{iz} = -1$.

<

1.7. Arrels n -èsimes

1.7.1. *Calculeu:*

a) $\sqrt[3]{-1}$, b) $3^{1/4}$, c) $\sqrt[4]{-i}$, d) $(-1 + \sqrt{3}i)^{1/2}$, e) $(3 + 4i)^{\frac{1}{2}}$. <

1.7.2. *Donat $a \in \mathbb{C}$, quin és el màxim de $|z^n + a|$ per a $|z| \leq 1$?*

<

1.7.3. *Resoleu l'equació $e^{z^2} = i$*

1.8. Polinomis: enunciat del teorema fonamental de l'àlgebra

1.8.1. *Resoleu $(z + 1)^5 = z^5$.*

<

1.8.2. *Sigui $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$. Considerant el polinomi $(1 - z)P(z)$, demostreu que tots els zeros de $P(z)$ estan dins del disc unitat.*

<

2. Funcions de variable complexa

2.1. Funcions

2.1.1. *Escriure les següents funcions de la forma $u(x, y) + iv(x, y)$.*

a) $f(z) = 1/z$, b) $g(z) = \frac{2z^2 + 3}{|z - 1|}$, c) $h(z) = e^z + e^{-z}$. ◁

2.1.2. *Trobeu el rang de*

- a) $f(z) = z^2$ si z està en el primer quadrant,
b) $g(z) = 1/z$ per $0 < |z| \leq 1$,
c) $h(z) = -2z^3$ per z tal que $0 < |z| < 1$ i $\text{Arg} z < \pi/2$. ◁

2.1.3. *Digueu on són contínues les següents funcions*

a) $\frac{1}{z - 2 + 3i}$, c) $\frac{3z - 1}{z^2 + z + 4}$,
b) $\frac{iz^3 + 2z}{z^2 + 1}$, d) $z^2(2z^2 - 3z + 1)^{-2}$. ◁

2.1.4. *Proveu que la inversió $w = f(z) = 1/z$ transforma*

- a) el cercle $\{|z| = r\}$ en el cercle $\{|w| = 1/r\}$;
b) el raig $\{\text{Arg} z = \theta_0\}$, amb $-\pi < \theta_0 < \pi$, en el raig $\{\text{Arg} w = -\theta_0\}$;
c) el cercle $\{|z - 1| = 1\}$ a la línia vertical $\{x = 1/2\}$. ◁

2.1.5. *Trobeu una funció afí que transformi el cercle $\{|z| < 1\}$ en el cercle $\{|w - w_0| < R\}$ de manera que els centres es corresponguin i el diàmetre horitzontal es transformi en el diàmetre que forma un angle α amb l'eix real.* ◁

2.1.6. *Per l'exponencial $f(z) = e^z$:*

- a) *Descriu-ne el domini i el rang.*
b) *Proveu que $f(-z) = 1/f(z)$.*

c) Descriuiu la imatge de $\{\operatorname{Re} z = 1\}$.

d) Descriuiu la imatge de $\{\operatorname{Im} z = \pi/4\}$.

e) Descriuiu la imatge de la banda $\{0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi/4\}$. $\triangleleft$

2.1.7. La funció de Jukovski¹ és $w = J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, vegeu la figura 3.7. Proveu que

a) $J(z) = J(1/z)$,

b) J porta el cercle unitat $\{|z| = 1\}$ a l'interval real $[-1, 1]$,

c) J porta el cercle $\{|z| = r\}$ ($r > 0, \neq 1$) a l'el·lipse $\left\{ \frac{u^2}{\left[\frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \right]^2} = 1 \right\}$,
que té els focus a ± 1 . $\triangleleft$

2.1.8. Fent servir la comanda `contour_plot` de Sage dibuixeu les corbes de nivell de u i v si $f = u + iv$ és

a) z ,

d) $\sin(z)$,

g) e^z ,

b) z^2 ,

e) $1/z$,

h) $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$,

c) $\log(z)$,

f) $1/z^2$,

i) $\log(z-1) + \log(z+1)$. $\triangleleft$

2.2. Funcions multivaluades: logaritmes i arguments

2.2.1. Donada l'equació de Cardano $z^3 + pz + q = 0$, comproveu que si $C = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}}$, aleshores $z_1 = C - \frac{p}{3C}$ és solució de la cúbica. Les tres arrels s'obtenen canviant l'elecció de l'arrel cúbica.

Tot seguit obriu GeoGebra² i dibuixeu els punts $p = 1+i$ i $q = 2+0i$; definiu $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, C mitjançant la fórmula anterior, i $z_1 = C - \frac{p}{3C}$, $z_2 = wC - \frac{p}{3wC}$ i $z_3 = w^2C - \frac{p}{3w^2C}$. Escolliu tres colors diferents per z_j , i activeu la seva traça. Deixant q fixat i movent p , per exemple, comproveu que els tres punts són funció de p , i es poden determinar com a branques contínues localment de manera contínua, tot i que C presenta discontinuïtats de salt que fan que els tres z_j vagin permutant la seva posició. Per exemple, podeu fixar p en la circumferència de radi 4 amb la instrucció `p=Punt(Circumferència((0, 0), 4))` i observar què ocorre, i comparar amb el radi 2 o 3. Podeu usar també la instrucció `lloc geomètric`. Quantes voltes cal que faci p a aquesta circumferència per tal que una arrel doni la volta a l'origen de manera contínua? $\triangleleft$

2.2.2. Calculeu els possibles valors de

¹Nikolai Jukovski, Orekhovo, 1847–1921. https://ca.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Jukovski

²O entra a <https://www.geogebra.org/m/jbszj89u>

a) $\log(1)$, b) $\log(-1)$, c) $\log(1+i)$, d) $\log(1-i\sqrt{3})$, e) $\log(i)$. $\triangleleft$

2.2.3. *Escrivim $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ i $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$. Resoleu les equacions*

a) $e^z = 2i$; c) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$; e) $\cos z = \sin z$. $\triangleleft$

b) $\operatorname{Log}(z^2 - 1) = i\pi/2$; d) $\cos z = 2i$;

2.2.4. *Determinar explícitament la inversa de $q(z) = 2e^z + e^{2z}$ en funció de logaritmes. Resoldre $q(z) = 3$, trobant totes les solucions.*

2.2.5. *Sigui $\mathcal{L}$ una determinació del logaritme en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ tal que $\mathcal{L}(1) = 2\pi i$. Proveu que la funció $f(z) = \mathcal{L}(z+3)$ és contínua en*

$$D := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > -3\}.$$

Quant val $f(3i)$? $\triangleleft$

2.2.6. *Una branca de l'argument $\mathcal{A}(z)$ (i la del logaritme $\mathcal{L}(z)$ corresponent, vegeu l'observació 2.13) queda fixada si donem el domini Ω on està definida i el valor de $\mathcal{A}(z)$ (o de $\mathcal{L}(z)$) d'un punt d' Ω . Considereu els dominis:*

$$\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi}, r \geq 0\}; \quad \Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi/4}, r \geq 0\};$$

$$\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus (\{x \in [-1, 0]\} \cup \{-1 + iy, y \in [0, 1.5]\} \cup \{x + 1.5i, x \in [-1, \infty)\}).$$

Completeu la següent taula.

2.2.7. *Estudieu si existeix alguna determinació del logaritme en els conjunts següents i determineu els possibles conjunts imatge:*

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}$, c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$. $\triangleleft$

2.2.8. *Feu un esbós del domini $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : z \neq e^{x+i2\pi x} \text{ per } x \in \mathbb{R}\}$. Sigui $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una determinació de l'argument en aquest domini i $\mathcal{L}$ la determinació del logaritme associada. Suposant que $\mathcal{A}(i) = -\frac{3\pi}{2}$, determineu $\mathcal{A}(-i)$ i $\mathcal{L}(e^{5/2})$.* $\triangleleft$

2.2.9. *Siguin $h_0(z)$, $h_1(z)$ i $h_2(z)$ les determinacions de l'arrel cúbica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (és a dir, funcions contínues que satisfan que $h_j(z)^3 = z$ en Ω) tals que $h_0(1) = 1$, $h_1(1) = e^{2\pi i/3}$ i $h_2(1) = e^{4\pi i/3}$.*

i) *Descriviu $h_j(\Omega)$ per $j = 0, 1, 2$.*

ii) *Per $j = 0, 1, 2$ relacioneu h_j amb Log i Arg .*

iii) *Usant les relacions anteriors, trobeu el valor de $h_j(i)$, per $j = 0, 1, 2$.* $\triangleleft$

2.3. Potències complexes

2.3.1. Trobeu l'error en el següent raonament de Bernoulli: $(-z)^2 = z^2$, llavors $2 \log(-z) = 2 \log z$. Per tant, $\log(-z) = \log(z)$. $\triangleleft$

2.3.2. Calculeu els possibles valors de

- a) i^i , b) $(\sqrt{3} + i)^{1-i}$, c) 2^{-i} , d) $(i^2)^i$, e) $(i^i)^2$. $\triangleleft$

2.4. Determinacions de logaritmes i arrels de funcions

2.4.1. Sigui X un espai topològic connex. Demostreu que si S_1 i S_2 són dues determinacions de l'arrel n -èsima de $f : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ llavors existeix una arrel n -èsima de la unitat ζ tal que $S_2(x) = \zeta \cdot S_1(x)$, per a tot $x \in X$. $\triangleleft$

2.4.2. Determineu els dominis de continuïtat (és a dir l'obert maximal on una funció és contínua) de les funcions e^{z^2} , $e^{1/z}$, $1/e^z$, $1/(e^z - 1)$, de la branca principal de $\sqrt{1 - z}$ i de la branca principal de $\sqrt{1 + e^z}$. $\triangleleft$

2.4.3. Doneu una determinació de $f(z)$ que sigui contínua a la regió D donada.

- a) $f_1(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,
b) $f_2(z) = (z^2 + 4)^{1/2}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{iy \in \mathbb{C} : |y| < 2\}$,
c) $f_3(z) = (z^4 - 1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,
d) $f_4(z) = (z^3 - 1)^{1/3}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. $\triangleleft$

2.5. Sèries de potències de nombres complexos

2.5.1. Considereu la sèrie de potències $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - i)^n$. Digueu si són certes les següents afirmacions.

- a) $S(z)$ pot ser divergent en $z = 0$ i convergent en $z = -i$ simultàniament.
b) $S(z)$ pot ser convergent en $z = 1 + i$ i en $z = 2 + i$ simultàniament.
c) Si $S(z)$ és convergent en $z = 1 + i$, aleshores també ho és en $z = 2i$.
d) Si $S(z)$ és divergent en $z = 2i$, aleshores també ho és en $z = 2 + i$. $\triangleleft$

2.5.2. Sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una sèrie convergent en el disc $D = D_R(0)$. Demostreu que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \quad \text{si } 0 < r < R. \quad \triangleleft$$

2.5.3. Sigui $S_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ i $S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$. Demostreu que S_1 és convergent en z si i només si ho és S_2 . En cas afirmatiu, tenim que $S_1(z) = zS_2(z)$. $\triangleleft$

2.6. Càlcul del radi de convergència

2.6.1. Calculeu el radi de convergència de les següents sèries de potències

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n; \quad \alpha \in \mathbb{R};$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{n}};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) \dots 2n}{n^n} z^n;$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} (z-2)^{n(n+1)};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2^n}}{n^n};$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2^n};$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n} (z-1)^n;$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (3z-2)^n;$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} (z+1)^n, \text{ per } a \in (0, 1);$

j) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n)^n z^{2^n}. \quad \triangleleft$

2.7. Comportament a la frontera del disc de convergència

2.7.1. Estudieu la convergència de les següents sèries de potències:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1},$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}. \quad \triangleleft$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)},$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n,$

2.7.2. Demostreu el criteri d'Abel i el teorema d'Abel. Indicació: Vegeu [BC13, teorema 2.20] per un cas més general en regions no tangencials (angles de Stolz). $\triangleleft$

3. Derivació complexa i holomorfia

3.1. Funcions holomorfes

3.1.1. a) Demostreu la regla del producte per la derivació.

b) Proveu que si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 llavors és contínua en aquest punt.

c) Proveu que si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 , llavors

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \lambda(z)(z - z_0)$$

on $\lambda(z) \rightarrow 0$ si $z \rightarrow z_0$. ◁

3.1.2. Sigui $f(z)$ i $g(z)$ funcions enteres. Decidiu si les següents funcions són enteres:

a) $f(z)^3$, c) $f(z)/g(z)$, e) $f(1/z)$,

b) $f(z)g(z)$, d) $5f(z) + ig(z)$, f) $f(g(z))$. ◁

3.1.3. Proveu que $g(z) = 3x^2 + 2x - 3y^2 - 1 + i(6xy + 2y)$ és entera. Escriviu g com a funció de z .¹ ◁

3.1.4. Existeix alguna funció f holomorfa en el disc unitat $\mathbb{D}$ tal que per a tot $n = 2, 3, \dots$

a) $f\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$? c) $|f\left(\frac{1}{n}\right)| = \frac{1}{\ln(n+1)}$?

b) $f\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$? d) $|f\left(\frac{1}{n}\right)| = \frac{n}{n+1}$? ◁

3.1.5. Doneu una branca de $\log(z^2 + 2z + 3)$ que sigui holomorfa en (un entorn de) $z = -1$. Calculeu la seva derivada en aquest punt. En quin domini és holomorfa la branca que heu definit? ◁

3.1.6. Sigui f una funció holomorfa en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ que satisfà $|f(z) - i| < 1$ per a tot $z \in \Omega$. Demostreu que la funció g definida per

$$g(z) = \frac{1 - i + f(z)}{1 + i - f(z)}$$

té logaritme holomorf en Ω . ◁

3.1.7. Sigui $f(z) = z^3 + 1$ i $z_1 = (-1 + \sqrt{3}i)/2$, $z_2 = (-1 - \sqrt{3}i)/2$. Provar que no existeix cap punt w en el segment que uneix z_1 i z_2 de manera que $f(z_2) - f(z_1) = f'(w)(z_2 - z_1)$. Que es pot dir del teorema del valor mitjà per funcions complexes? ◁

¹Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ és holomorfa en un domini Ω tallat per la recta real i u, v són holomorfes en dues variables, llavors es pot provar que $f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$, vegeu l'exercici 4.10.9.

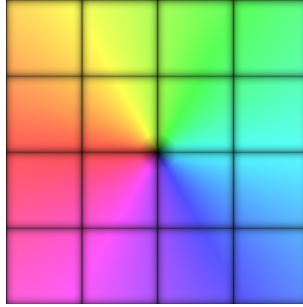
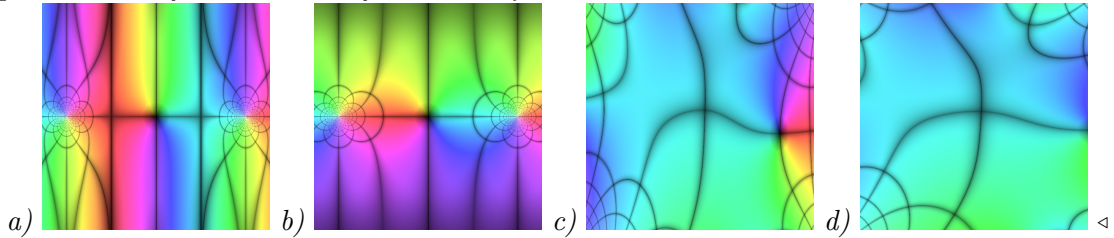


Figura 3.1.: Graella en el pla complex entre $-2 - 2i$ i $2 + 2i$.

3.2. Les equacions de Cauchy-Riemann

3.2.1. Representem la identitat al pla complex amb la coloració habitual i amb la graella entera. Per exemple, la identitat sobre el quadrat $2Q = \{x + iy : x, y \in (-2, 2)\}$ és la imatge de la figura. Una de les següents funcions, les diferencials de les quals no s'anul·len en $2Q$, representa una funció holomorfa en $2Q$. Quina és?



3.2.2. Trobeu els valors de les constants a, b, c de manera que f sigui holomorfa i expresseu-la en termes de z .

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + i \sin x(\cosh y + b \sinh y)$.

3.2.3. Sigui $f = u + iv$ holomorfa i dues vegades diferenciable en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Proveu que les funcions u i v són harmòniques. (Una funció $f(x, y)$ és harmònica si les seves segones derivades parcials són contínues i el seu laplacà $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 0$, vegeu la secció 5.5.)

3.2.4. Considerem $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$

a) Proveu que u és harmònica.

b) Trobeu una v de manera que $f = u + iv$ sigui holomorfa (s'anomena harmònica conjugada de u).

c) Trobeu una expressió compacta de $f(z)$. $\triangleleft$

3.2.5. Trobeu els polinomis harmònics de la forma $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. Trobeu la funció harmònica conjugada i la funció holomorfa corresponent. $\triangleleft$

3.2.6. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (és a dir, un obert connex) i f una funció holomorfa en Ω .

1. Proveu que si f només pren valors imaginaris purs, aleshores f és constant.
2. Proveu que si $|f|$ és constant, aleshores f també és constant. Equivalentment si f només pren valors en una circumferència, llavors f és constant. $\triangleleft$

3.2.7. Doneu una descripció de les funcions enteres de la forma $f(x+iy) = u(x) + iv(x, y)$. $\triangleleft$

3.2.8. (a) Determineu els nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ pels quals

$$v_\lambda(x, y) = 2 \sin x \sinh y + x^3 - \lambda xy^2 + y$$

és la part imaginària d'una funció entera f_λ i calculeu f_λ .

(b) Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre determinat en a). És

$$g_\lambda = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - i \frac{\partial v_\lambda}{\partial y}$$

una funció entera? Quina relació hi ha entre g_λ i f_λ ? $\triangleleft$

3.2.9. Decidiu on són holomorfs les funcions següents

$$a) \frac{1}{z-2+3i}, \quad b) \frac{iz^3+2z}{z^2+1}, \quad c) \frac{3z-1}{z^2+z+4}, \quad d) \frac{z^2}{(2z^2-3z+1)^2}. \triangleleft$$

3.2.10. Sigui

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Demostreu que

a) $f(z)$ satisfà les equacions de Cauchy-Riemann a tot punt $z \in \mathbb{C}$.

b) f no és contínua al 0 i, per tant, f no és holomorfa a un entorn del 0. $\triangleleft$

3.2.11. Si u i v s'expressen respecte a les coordenades polars (r, θ) , proveu que les equacions de Cauchy-Riemann es poden expressar de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Indicació: estudeu el límit incremental seguint $\arg z = \theta_0$ i $|z| = r_0$. $\triangleleft$

3.2.12. Quina part del pla es contreu i quina part es dilata si la transformació es realitza mitjançant la funció:

- a) $w = z^2$; c) $w = \frac{1}{z}$; d) $w = e^z$;
 b) $w = z^2 + 2z$; e) $w = \log(z - 1)$. ◁

3.2.13. Demostreu que, si f és diferenciable en z_0 , aleshores la diferencial és $\mathbb{C}$ -lineal si i només si $\bar{\partial}f(z_0) = 0$, si i només si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 . ◁

3.3. Càlcul de les derivades de Wirtinger

3.3.1. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i f una funció holomorfa en Ω . Definim $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Omega\}$ i $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$ donada per $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Proveu que f^* és holomorfa en Ω^* . ◁

3.3.2. Trobeu els punts on la funció f té derivada complexa (i calculeu-la si escau) en els següents casos. (Podeu fer servir si cal que $f' = f_x$.)

- a) $f(z) = |z|^4$; e) $f(z) = |z|$;
 b) $f(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$; f) $f(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$;
 c) $f(z) = z + \frac{1}{z}$; g) $f(z) = \cos |z|^2$;
 d) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$; h) $f(z) = z + z\bar{z}$. ◁

3.3.3. Donat un polinomi de dues variables reals $P(x, y)$, demostreu que identificant $z = x + iy$ són equivalents:

1. P es pot expressar com un polinomi en z .
2. P és una funció entera.
3. $\bar{\partial}P = 0$ en $\mathbb{C}$. ◁

3.4. Funcions analítiques

3.4.1. Discutir l'analiticitat de

- a) $8\bar{z} + i$, e) $x^2 + y^2 + y - 2 + ix$,
 b) $\frac{z}{\bar{z} + 2}$, f) $\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$,
 c) $\frac{z^3 + 2z + i}{z - 1}$ (vegeu la figura 3.7), g) $|z|^2 + 2z$,
 d) $x^2 - y^2 + 2xyi$, h) $\frac{|z|^2 + z}{2}$. ◁

3.4.2. Trobeu la suma de les sèries

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^n}{n!}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \text{ si } |z| < 1. \quad \triangleleft$$

3.4.3. Sigui $f(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ per $|z| < R$ on R és el radi de convergència de la sèrie. Demostreu que si $f(z_k) = 0$ per una successió $(z_k)_k$ tal que $z_k \neq 0$ i $z_k \rightarrow 0$ quan $k \rightarrow \infty$, aleshores $f(z) \equiv 0$ (i.e. $c_n = 0$ per a tot $n \geq 0$). Indicació: Calculeu $f(0)$ i considereu la sèrie $f(z)/z$. $\triangleleft$

3.4.4. Demostreu que si dues sèries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ i $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ són convergents i tenen la mateixa suma per a una successió $(z_k)_k$ tal que $z_k \neq 0$ i $z_k \rightarrow 0$ quan $k \rightarrow \infty$ aleshores $a_n = b_n$ per a tot $n \geq 0$. $\triangleleft$

3.4.5. Calculeu la suma de les sèries de potències de l'exercici 2.7.1. $\triangleleft$

3.4.6. Considereu la sèrie

$$S(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n-1}}{2n}.$$

a) Estudieu-ne la convergència puntual i uniforme sobre compactes.

b) Calculeu quant val la suma per tot z del disc de convergència.

c) Doneu el valor de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n9^n}. \quad \triangleleft$$

3.4.7. Considereu la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 1} n(n+1)z^n.$$

a) Estudieu la seva convergència.

b) Calculeu la seva suma.

c) Quant val $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}$? $\triangleleft$

3.4.8. Considereu la sèrie de potències

$$S(z) = 2\pi i + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (2z+1)^n}{n}.$$

(a) Calculeu la seva suma i el seu domini de convergència, especificant amb precisió totes les funcions involucrades. Indicació: Per especificar un logaritme, cal donar un domini de definició i la imatge d'un punt.

(b) Calcula la solució (si existeix) de l'equació $S(z) = e$. $\triangleleft$

3.5. Algunes funcions holomorfes importants

3.5.1. *Demostreu que:*

(i) $\sin z$ i $\cos z$ són funcions enteres amb

$$(\sin z)' = \cos z; \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

(ii) $\cos(-z) = \cos z$, i també $\sin(-z) = -\sin z$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(iv) Per a tot $z, w \in \mathbb{C}$, $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$. $\triangleleft$

3.5.2. *Resoleu les següents equacions:*

a) $\sin z = 4$

b) $\cos z = i$. $\triangleleft$

3.5.3. a) *Proveu que $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$ i que $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$.*

b) *Trobeu tots els zeros de les funcions sinus i cosinus.*

c) *Deduïu de (b) que, per a $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, es verifica:*

i) $\cos z_1 = \cos z_2$ si, i només si, $z_2 \pm z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

ii) $\sin z_1 = \sin z_2$ si, i només si, $z_2 - z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$ o bé $z_2 + z_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

d) *Proveu que per a tot $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se satisfà:*

i) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ (vegeu l'exercici 1.3.2).

ii) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

iii) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

iv) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

e) *Sobre quines rectes està fitada la funció sinus? I la funció cosinus?* $\triangleleft$

3.5.4. (a) *Proveu que per a cada $w \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, l'equació $\tan z = w$ té infinites solucions, que són la funció multivaluada*

$$\arctan w := \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i - w}{i + w} \right).$$

Vegeu també que per a $w = \pm i$ l'equació no té cap solució.

(b) *Vegeu que dues determinacions contínues de $\arctan w$ en un conjunt connex $E \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ difereixen de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*

(c) *Vegeu que no hi ha cap determinació contínua de $\arctan w$ als anells $\{r < |w - i| < R\}$, $\{r < |w + i| < R\}$, $0 < r < R < 2$, però que sí que n'hi ha si $2 < r < R < +\infty$.* $\triangleleft$

3.5.5. *Demostreu que el domini de continuïtat de la branca principal de l'arctangent*

$$\operatorname{Arctan} w := \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{i - w}{i + w} \right)$$

és $\mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)\}$. $\triangleleft$

3.5.6. a) *Sigui $\mathcal{L}$ la determinació del logaritme en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ que compleix que $\mathcal{L}(1) = 4\pi i$. Definim $f(z) := -\mathcal{L}(2 - 2z)$. Demostreu que f és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Calculeu $f(0)$ i $f(-i)$.*

b) *Considereu la sèrie de potències*

$$S(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(2z - 1)^n}{n}.$$

Demostreu que $S(z) = -\operatorname{Log}(2 - 2z)$, per tot $z \in D := D_{1/2}(1/2)$, on Log és la determinació principal del logaritme.

c) *Quina relació hi ha entre $S(z)$ i $f(z)$? Indicació: Relacioneu primer $\mathcal{L}(z)$ amb $\operatorname{Log}(z)$ per $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.* $\triangleleft$

3.5.7. *Sigui $\sqrt{\cdot}$ la determinació de l'arrel quadrada en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ que compleix que $\sqrt{-1} = i$ i sigui $f(z) = \sqrt{3z + 2}$.*

1. *Expresseu $\sqrt{\cdot}$ en termes d'una determinació del logaritme i argument.*

Recordem que

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2}(\ln |z| + i \arg z)}.$$

2. *Quina és la regió més gran on f és holomorfa? Quina és la imatge? Existeix z tal que $f(z) = -i$?*

3. *Què val $f(\frac{i-2}{3})$?* $\triangleleft$

3.5.8. *Els polinomis de Legendre² $P_j(\zeta)$ són els coeficients de z^j en el desenvolupament de Taylor*

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta z + z^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\zeta) z^j.$$

Provar que $P_j(\zeta)$ és un polinomi de grau j i calcular P_0, P_1, P_2 i P_3 . $\triangleleft$

²Adrien-Marie Legendre, París, 1752 – 1833. https://ca.wikipedia.org/wiki/Adrien-Marie_Legendre

4. Integrals de línia i teoria local de Cauchy

4.1. Corbes

4.1.1. Proveu que l'el·lipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ és una corba diferenciable (és a dir, existeix una parametrització $z(t), t \in I$ que el seu rang és l'el·lipse, és diferenciable, $z'(t) \neq 0$ i z és corba simple. Diem que $z(t)$ és una parametrització admissible o regular). $\triangleleft$

4.1.2. Parametritzeu el contorn format pel perímetre del quadrat amb vèrtexs $-1 - i, 1 - i, 1 + i, -1 + i$, seguint aquest ordre. Quina és la seva longitud? $\triangleleft$

4.2. Integració sobre corbes

4.2.1. Sigui $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el cercle unitat amb l'orientació habitual. Avalueu, per a tots els $m \in \mathbb{Z}$:

a) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^m}$; b) $\int_{\gamma} \frac{|dz|}{z^m}$; c) $\int_{\gamma} \frac{dz}{|z^m|}$; d) $\int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z^m|}$. $\triangleleft$

4.2.2. Sigui $\gamma = \partial D_r(0)$ recorreguda un cop amb l'orientació estàndard.. Calculeu, per a $n \in \mathbb{Z}$, $\int_{\gamma} z^n dz$. $\triangleleft$

4.2.3. Sigui $\gamma = [i + 1, -i]$. Avalueu les següents integrals de línia:

a) $\int_{\gamma} \sin(2z) dz$, b) $\int_{|z|=1} z e^{z^2} dz$, c) $\int_{|z-2|=1} \frac{1}{z} dz$. $\triangleleft$

4.2.4. Avalueu les següents integrals.

a) $\int_{\gamma} \left(\frac{6}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + 1 - 3(z-i)^2 \right) dz$ si γ és $\{|z-i| = 4\}$ recorreguda un cop amb l'orientació estàndard.

b) $\int_{\gamma} (x - 2xyi) dz$ al llarg del contorn $\gamma(t) = t + it^2$ amb $t \in [0, 1]$.

c) $\int_{\gamma} (|z-1+i|^2 - z) dz$ al llarg de la semicircumferència $\gamma(t) = 1 - i + e^{it}$ on $t \in [0, \pi]$.

d) La funció no analítica $f(z) = x^2 + iy$ (per què?) al llarg de $\{|z| = 1\}$ recorreguda un cop en sentit antihorari. $\triangleleft$

4.2.5. Calculeu les següents integrals al llarg del camí γ que s'indica.

a) $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ per qualsevol contorn en el semiplà dret que va de $-3i$ a $3i$. Quin problema tenim si seguim un contorn pel semiplà esquerre? Indicació: considereu la determinació principal del logaritme en la qual el logaritme no està definit si $y = 0, x \leq 0$.

b) $\int_{\gamma} e^z \cos z dz$ per un camí d'origen $a = i$ i final $b = \pi$.

c) $\int_{\gamma} z^{1/2} dz$ per la branca principal de $z^{1/2}$ per un camí d'origen $a = i$ i final $b = \pi$ que no talli la semirecta $(-\infty, 0]$. $\triangleleft$

4.2.6. Considerem la determinació de l'arrel $\sqrt{z^2 - 1}$ que és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ i positiva a $(1, \infty)$.

(a) Vegeu que $z + \sqrt{z^2 - 1}$ omet l'eix real negatiu si $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$, de manera que la determinació principal $\text{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ està definida a Ω .

(b) Vegeu que $\text{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ és una primitiva de $\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}$ a Ω .

(c) Avalueu $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$, on γ és el tros de cercle $|z - 1| = \sqrt{2}$ que va de i a $-i$ passant pel semiplà de la dreta ($\text{Re } z > 0$).

Indicació: comproveu que $\sqrt{z^2 - 1} = e^{\frac{1}{2}(\text{Log}(z-1) + \text{Log}(z+1))}$ s'estén a $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ de manera contínua. $\triangleleft$

4.2.7. Siguin $\gamma_1 := \{|z| = 1 : \text{Im } z \geq 0\}$ i $\gamma_2 := \{|z| = 2 : \text{Re } z, \text{Im } z \geq 0\}$. Demostreu que:

a) $\left| \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2 + 2} \right| \leq \pi,$

c) $\left| \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz \right| \leq 2\pi e,$

b) $\left| \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3},$

d) $\left| \int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{z^2} dz \right| \leq \pi e^2.$ $\triangleleft$

4.2.8. (a) Sigui γ un camí en $\mathbb{C}$. Proveu que si f és una funció contínua en γ^* llavors

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})} dz.$$

(b) Deduïu que si f és una funció contínua en el cercle unitat llavors

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z) dz} = - \int_{|z|=1} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}.$$
 $\triangleleft$

4.3. Teorema de Cauchy

4.3.1. Demostreu el teorema de Cauchy per oberts estrellats. ◁

4.3.2. Recordeu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(a) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = \sqrt{\pi}$ per a tot $a > 0$. Indicació: Apliqueu el teorema de Cauchy al rectangle $[-R, R] \times [0, a]$.

(b) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(nx) dx = \sqrt{2\pi} e^{-n^2/2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ◁

4.3.3. Determineu el domini d'holomorfia de les funcions f donades i digueu per què $\int_{|z|=2} f(z) dz = 0$.

a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - 6z + 10}$;

b) $f(z) = \text{Log}(z + 3)$. ◁

4.3.4. Sigui $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funció harmònica en un disc D , és a dir, tal que $\Delta u = 4\partial\bar{\partial}u = 0$. Demostreu que existeix una funció $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmònica tal que $(u + iv)$ és holomorfa. L'anomenem harmònica conjugada. Indicació: Demostreu que les equacions de Cauchy-Riemann per $F = U + iV$ es poden escriure com $\partial F = 2\partial U$ o com $\bar{\partial}\bar{U} = -i\bar{\partial}V$. Indicació: Vegeu la secció 5.5. ◁

4.3.5. El teorema de Green diu que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert i $U \subset \Omega$ és un obert fitat prou regular (per exemple amb frontera C^1) i tal que $\bar{U} \subset \Omega$, aleshores tot camp vectorial $F = (F_1, F_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ amb $F \in C^1(\Omega)$ satisfà que

$$\int_U (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dm = \int_{\partial U} (F_1 dx + F_2 dy).$$

Demostreu la fórmula de Green en variable complexa (4.1). ◁

4.3.6. Continuant amb l'exercici 4.3.5, demostreu la fórmula de Cauchy generalitzada, coneguda com a fórmula de Cauchy-Pompeiu¹, que diu que si $\phi \in C^1(\Omega)$ i $z_0 \in U$, aleshores

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\phi(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} dm(z).$$

Notem que el cas particular $\phi \in C_c^1(U)$ ens diu $\phi = \mathcal{C}(\bar{\partial}\phi)$, on $\mathcal{C}$ indica la transformada de Cauchy

$$\mathcal{C}\psi(z_0) := -\frac{1}{\pi} \int_U \frac{\psi(z)}{z - z_0} dm(z). \quad \triangleleft$$

4.4. Fórmula integral de Cauchy

4.4.1. Avalueu, usant la fórmula integral de Cauchy, les següents integrals:

¹Dimitrie Pompeiu, Broscăuți, 1873–1954. https://ca.wikipedia.org/wiki/Dimitrie_Pompeiu

- a) $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz;$ d) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+z+1};$ g) $\int_{|z|=3} \frac{3z-2}{z^2-z} dz;$
 b) $\int_{|z|=1} \frac{\sin(e^z)}{z} dz;$ e) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2z-3};$ h) $\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1} dz.$ ◁
 c) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1};$ f) $\int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\cos(z)}{z^2(z^2-\pi^2)} dz;$

4.4.2. Resoleu els següent exercicis relacionats amb la fórmula integral de Cauchy.²

- a) Calculeu $\oint_C \frac{z^2}{z^4-1} dz$ sobre la circumferència de radi 3 centrada en 0.
 b) És cert que $\oint_C \frac{e^z}{z} dz = 0$ si C és tancada i simple? ◁

4.4.3. Sigui p un polinomi de grau n , amb tots els seus zeros continguts en $D_R(0)$. Demostreu que

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n. \quad \triangleleft$$

4.4.4. Sigui $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Calculeu la integral de línia $\int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz$. Deduïu que

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2) dt}{1+r^2-2r \cos(\theta-t)} = 2\pi, \quad \text{per a tot } 0 \leq r < 1 \text{ i } \theta \in \mathbb{R}. \quad \triangleleft$$

4.4.5. Siguin $f, g \in H(\Omega)$, on Ω és un domini tal que $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Donat $a \in \mathbb{C}$ amb $|a| \neq 1$, calculeu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{ag(w)}{aw-1} \right) dw. \quad \triangleleft$$

4.4.6. Demostreu (4.3) usant la fórmula integral de Cauchy centrada i el teorema de Cauchy en convexos. ◁

4.5. Sèries de potències

4.5.1. Desenvolpeu en sèrie de potències al voltant del punt a i doneu el radi de convergència de:

²De vegades es fa servir la notació $\oint$ per indicar que la integral és sobre un camí tancat.

- a) $1/z$, $a = 1$; c) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $a = 0$; e) $\frac{e^z}{1-z}$, $a = 0$;
 b) $z^2 e^z$, $a = 0$; d) $\frac{1}{(1-z)^3}$, $a = 0$; f) $\frac{1}{1+e^z}$, $a = 0$.

(en (e) i (f) només cal calcular els 3 primers termes). ◁

4.5.2. Sigui $\alpha \in \mathbb{C}$, provar que si $(1+z)^\alpha$ es pensa com $e^{\alpha \text{Log}(1+z)}$ llavors per $|z| < 1$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots$$

(binomi de Newton³). ◁

4.5.3. Trobeu els desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt a de les següents funcions:

- a) $f(z) = \cos^2 z$, $a = 0$; b) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$, $a = 1$; c) $\sqrt[3]{z}$, $a = 1$.

Aquí $\sqrt[3]{\cdot}$ és la determinació de l'arrel cúbica en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ que val $(-1 + i\sqrt{3})/2$ en $z = 1$. ◁

4.5.4. Considereu la funció $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+i)z}$ i el punt $a = -1$.

1. "Sense fer cap càlcul", raoneu quin és el disc de convergència de la sèrie de potències de f al voltant del punt a .

2. Calculeu la sèrie de potències de f al voltant de a . ◁

4.5.5. a) Es pot desenvolupar $\sqrt{z}$ en sèrie de potències en un entorn de l'origen?

b) Quin és el disc màxim centrat a 0 on es pot desenvolupar $\cos(1/(z-1))$ en sèrie de potències?

c) I la funció $\frac{1}{2-z} + \frac{z}{3-z}$? ◁

4.5.6. Determineu com a mínim els coeficients a_1, a_2, a_3, a_4 de la sèrie de Taylor de $1/(1+z+z^4)$ centrada a l'origen. Expliqueu perquè el radi de convergència és com a mínim $2/3$. ◁

4.5.7. Vegem com el teorema 4.24 és propi de l'anàlisi complexa. Una funció de variable real f és analítica en un interval obert $I \subset \mathbb{R}$ si es pot expressar localment com a sèrie de potències amb coeficients reals. Demostreu que si f és analítica en I aleshores hi és derivable. Trobeu una funció infinites vegades derivable en $\mathbb{R}$ que no hi sigui analítica. Trobeu una funció f analítica en $\mathbb{R}$ que tingui radi de convergència 1. ◁

³Isaac Newton, Woolsthorpe-by-Colsterworth, Lincolnshire, 1642 – 1727. https://ca.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

4.6. Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades i desigualtats de Cauchy

4.6.1. Donat $r > 0$ i $a \in \mathbb{C}$, calculeu

$$I = \int_{|z-a|=r} \frac{e^{2z}}{(z-a)^3} dz. \quad \triangleleft$$

4.6.2. Siguin $0 \leq m \leq n$ enters. Calculeu

$$\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{m+1}} dz. \quad \triangleleft$$

4.6.3. Intentarem calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ fent servir la fórmula integral de Cauchy per derivades.

a) Considereu la semicircumferència C en el semiplà superior centrada a 0 amb radi R i tancada pel segment de l'eix OX . Calculeu $\int_C \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$.

b) Descomponeu $C = C_1 \cup C_2$ on C_1 és el segment de $-R$ a R i C_2 la part restant de C . Doneu una fita superior de $\left| \int_{C_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \right|$ fent servir la desigualtat triangular per integrals.

c) Fent servir els apartats anteriors calculeu $\int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$. Que passa si R tendeix a infinit? $\triangleleft$

4.6.4. Sigui $\alpha > 0$ i $f \in H(\mathbb{D})$ tal que existeix $c > 0$ i per a tot $|z| < 1$, $(1-|z|)^\alpha |f(z)| \leq c$. Demostreu que per a tot $n \geq 0$, $|f^{(n)}(0)| \leq cn! \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha (n+\alpha)^\alpha$. $\triangleleft$

4.6.5. Sigui f una funció entera de manera que existeixen constants $C, M > 0$ tals que $|f(z)|e^{-C|z|} \leq M$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Demostreu que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leq CMe$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.

Indicació: Apliqueu la desigualtat de Cauchy al cercle centrat a z i de radi r per provar que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leq \frac{M}{r} e^{Cr}$ per a tot $r > 0$ i $z \in \mathbb{C}$. Avalueu a $r = 1/C$. $\triangleleft$

4.6.6. (a) Suposem que una funció f entera satisfà que $|f(z)| \leq M_R$ si $|z| = R$. Demostreu que els coeficients c_k de la seva sèrie de Taylor centrada a $a = 0$ compleixen

$$|c_k| \leq \frac{M_R}{R^k}.$$

(b) Suposem que el mòdul d'un polinomi $P(z)$ està fitat per 1 pels z al disc unitat. Demostreu que tots els coeficients de P tenen mòdul fitat per 1. $\triangleleft$

4.6.7. Proveu que si $f \in H(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \leq |e^{iz}|$ per a tot $z \in \mathbb{D}$, aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! e. \quad \triangleleft$$

4.7. Teorema de Liouville i teorema fonamental de l'àlgebra

4.7.1. La funció $f(z) = 1/z^2$ tendeix a 0 quan $z \rightarrow \infty$ però no és una funció constant. Contradiu això el teorema de Liouville? $\triangleleft$

4.7.2. Sigui f una funció entera. Usant el teorema de Liouville proveu que

(a) Si $|f| \geq 1$, llavors f és constant.

(b) Si $\operatorname{Re} f \geq 0$, llavors f és constant.

(c) Si $\operatorname{Im} f \leq 1$, llavors f és constant. $\triangleleft$

(d) Si $\operatorname{Re} f$ no té zeros, llavors f és constant.

4.7.3. Caracteritzeu les funcions enteres f tals que $|f'(z)| \leq |z|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. $\triangleleft$

4.7.4. Supposem que f és entera. Provar que si $f^{(4)}(z)$ és fitada en el pla llavors f és un polinomi de grau 4 com a màxim. $\triangleleft$

4.7.5. Sigui f una funció entera. Per a $|a| < R$ i $|b| < R$ calculeu

$$I = \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

Useu el resultat per demostrar el teorema de Liouville. $\triangleleft$

4.7.6. Sigui f una funció entera tal que $|f(z)| \leq Ce^{\operatorname{Re} z}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$, on $C > 0$ és una constant. Què es pot dir de f ? $\triangleleft$

4.7.7. Sigui f una funció entera tal que $|f'(z)| < |f(z)|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Què podem dir de f ? $\triangleleft$

4.8. Teorema de Morera

4.8.1. Demostreu la continuïtat de f en el principi de reflexió de Schwarz. $\triangleleft$

4.8.2. Sigui $f(z) = 1/z^2$. Comproveu que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ per a tot camí tancat γ que no passi per 0, però f no és analítica en 0. Contradiu això el corol·lari 4.36 del teorema de Morera? $\triangleleft$

4.8.3. (a) Sigui h una funció contínua a $\mathbb{R}$ amb suport compacte (és a dir, existeix $K \subset \mathbb{R}$ compacte tal que $h(x) = 0$ si $x \notin K$) i sigui

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-itz} dt.$$

(Quan ens restringim a $z \in \mathbb{R}$, H s'anomena transformada de Fourier de h ; si prenem iz en el lloc de z , H s'anomena transformada de Laplace⁴ bilateral de h .) Proveu que H és una funció entera amb creixement exponencial: existeixen $A, C > 0$ tals que $|H(z)| \leq Ce^{A|\operatorname{Im} z|}$.

(b) Sigui h una funció contínua a $[0, 1]$. Demostreu que la seva transformada de Hilbert⁵

$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z} dt$$

és analítica per a $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$. ◁

4.8.4. Sigui f holomorfa en un obert Ω , i sigui $z_0 \in \Omega$ amb $f'(z_0) \neq 0$. Demostreu que existeix $r_0 > 0$ de manera que, per $0 < \varepsilon < r_0$, es compleix la identitat

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

Indicació: proveu primer que la funció G definida per

$$G(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

és holomorfa en Ω . ◁

4.9. Derivació sota el signe integral i fórmula integral de Cauchy per derivades

4.9.1. Avalueu, usant la fórmula de Cauchy per a les derivades

$$a) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-1/2)^2} dz. \quad b) \int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{(3z-2)^4} dz. \quad c) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} e^{e^{i\theta}} d\theta. \quad \triangleleft$$

4.9.2. Demostreu la fórmula integral de Cauchy per derivades no centrada usant la fórmula integral de Cauchy per derivades centrada i el teorema de Cauchy en convexos. ◁

4.10. Zeros de funcions holomorfes i principi de prolongació analítica

4.10.1. Trobeu els zeros, amb l'ordre corresponent, de les següents funcions:

⁴Pierre-Simon Laplace, Beaumont-en-Auge, 1749–1827. https://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace

⁵David Hilbert, Königsberg, 1862–1943. https://ca.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

$$a) \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}; \quad b) z^2 \sin z; \quad c) \frac{1}{z} + \frac{1}{z^5}. \quad \triangleleft$$

4.10.2. Trobeu la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció entera $f(z) = 2 \cos z^3 + z^6 - 2$. $\triangleleft$

4.10.3. Trobeu tots els zeros de les següents funcions holomorfes i calculeu-ne les seves multiplicitats:

$$a) f(z) = z^2(e^{z^2} - 1); \quad b) f(z) = \frac{z^2 - \pi^2}{z} \sin z; \quad c) f(z) = (\sqrt{z} - 2)^3.$$

Aquí $\sqrt{\cdot}$ és la determinació de l'arrel quadrada en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ que val -1 en $z = 1$. $\triangleleft$

4.10.4. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini. Demostreu que l'anell de funcions holomorfes $H(\Omega)$ és un domini d'integritat, és a dir, si $f, g \in H(\Omega)$ amb $fg \equiv 0$ aleshores $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$. $\triangleleft$

4.10.5. Sigui $\{a_n\}_n$ una successió estrictament decreixent de nombres reals $a_n \in (0, 1)$ i tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}$. Demostreu que:

(a) Si $f(a_n) \in \mathbb{R}$ per a tot n , aleshores $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ per a tot $z \in \mathbb{D}$.

(b) Si a més $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$ per a tot n , aleshores f és constant. $\triangleleft$

4.10.6. Trobeu totes les funcions holomorfes a $\mathbb{D}$ tals que:

(a) $|f(1/n)| \leq 1/2^n$, per a tot nombre natural $n \geq 2$.

(b) $f(1/n) = \ln(1 + n^3) - 3 \ln n$ per a $n > 1$. $\triangleleft$

4.10.7. Trobeu totes les funcions f holomorfes en el disc $D_2(0)$ tals que $f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ per a tot $\theta \in [0, 2\pi)$, i a més $f(0) = 0$. $\triangleleft$

4.10.8. (a) Sigui f una funció entera tal que existeixen constants $n \in \mathbb{N}$, $C > 0$ i $R > 0$ tals que $|f(z)| \leq C|z|^n$, per a $|z| \geq R$. Demostreu que f és un polinomi de grau més petit o igual que n .

(b) Deduïu que si f és una funció entera amb $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$, llavors f és un polinomi.

Indicació: Demostreu que f només té un nombre finit de zeros $a_1, \dots, a_n$ (comptant multiplicitats) i apliqueu l'apartat (a) a la funció $F = P/f$, on $P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$. $\triangleleft$

4.10.9. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (obert connex) tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Suposem que tenim $f, g, h \in H(\Omega)$ i $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tals que per $x + iy \in \Omega$ tenim

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

i per $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$ tenim

$$u(x, 0) = g(x) \quad v(x, 0) = h(x).$$

Demostreu que

$$f(z) = g(z) + ih(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

<

4.11. El principi del mòdul màxim

4.11.1. Cerqueu l'enunciat del teorema de Stone⁶-Weierstrass i compareu-lo amb l'exemple 4.55.

<

4.11.2. Trobeu el màxim de:

a) $|\cos z|$ i $|\sin z|$ a $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

b) $|e^z|$ i $|e^{z^2}|$ a $|z| \leq 1$.

<

4.11.3. Trobeu totes les funcions holomorfes en $\mathbb{D}$ tals que $f(1/2) = 3$ i $|f(z)| \leq 3$ si $|z| < 1$.

<

4.11.4. Considereu $f(z) = e^{\cos(z)} z^2$ i el disc D de radi 2 centrat a 5. Proveu que $f(z)$ assoleix el valor màxim i mínim del mòdul en $\overline{D}$ a la frontera. Indicació: considereu $1/f(z)$.

<

4.11.5. Sigui f una funció holomorfa en el disc $D_R(0)$, $R > 0$. Definim

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < R.$$

Demostreu que si f no és constant, aleshores $M(r)$ és estrictament creixent a $[0, R)$.

<

4.11.6. Sigui f una funció holomorfa en un obert connex Ω i D un disc obert tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Suposeu que $|f(z)| = c$ per tot $z \in \partial D$, on c és una constant. Proveu que f té almenys un zero en D o bé f és constant en Ω . Indicació: Distingiu segons si $c = 0$ o $c > 0$. En el segon cas, proveu que si f no té zeros en D , aleshores f és constant en D .

<

⁶Marshall Harvey Stone, New York City, 1903–1989. https://en.wikipedia.org/wiki/Marshall_H._Stone

4.11.7. *Sigui f una funció holomorfa i no constant en un obert connex $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supposeu que existeix $a \in \Omega$ tal que $|f(a)| \leq |f(z)|$ per a tot $z \in \Omega$. Proveu que aleshores $f(a) = 0$. $\triangleleft$*

4.11.8. *Sigui $f \in H(\Omega)$ en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $f \circ f = f$. Demostreu que o bé f és constant, o bé és la identitat. $\triangleleft$*

4.11.9. *Sigui $f \in H(\mathbb{C})$ no constant. Demostreu que, per a tot $c > 0$,*

$$\overline{\{z; |f(z)| < c\}} = \{z; |f(z)| \leq c\}. \quad \triangleleft$$

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

5.1. Índex d'una corba tancada respecte d'un punt

5.1.1. Considerem el camí $\gamma(t) = 4e^{it} \cos \frac{2}{3}t$, $(0 \leq t \leq 6\pi)$. Calculeu $\text{Ind}(\gamma, 3)$ i $\text{Ind}(\gamma, 1)$. ◁

5.1.2. Considerem el camí $\gamma(t) = (1 + e^{it} + e^{-it})e^{it}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Esbosseu el dibuix de la corba i calculeu-ne l'índex en cada component connexa del complementari de la seva imatge. Calculeu ◁

$$\int_{\gamma} \frac{3z - 3}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} dz.$$

5.2. El teorema global de Cauchy

5.2.1. Considerem el camí $\gamma(t) = (2 \sin(2t - \frac{\pi}{3}), 2 \sin(3t))$, amb $t \in [0, 2\pi]$. Esbosseu el camí, calculeu l'índex de la corba en cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, i trobeu el valor de ◁

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2+1} dz.$$

5.3. Homotopia i teorema de Cauchy

5.4. Dominis simplement connexos

5.4.1. Siguin $f, g \in H(\mathbb{C})$ tals que $f^2 + g^2 \equiv 1$. Demostreu que existeix $h \in H(\mathbb{C})$ tal que $f = \cos(h)$ i $g = \sin(h)$. ◁

5.4.2. [Determinació de l'arrel en dominis simplement connexos] Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, i $f \in H(\Omega)$ amb $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Vegeu que existeix $g \in H(\Omega)$ amb

$$g(z)^2 = f(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

A més, si $z_0 \in \Omega$ i tenim que $w_0^2 = f(z_0)$, podem escollir g de manera que $g(z_0) = w_0$. ◁

5.5. Funcions harmòniques

5.5.1. Demostreu el lema 5.34 usant les equacions de Cauchy-Riemann directament. $\triangleleft$

5.5.2. Demostreu que la funció $u(z) = \frac{1}{2} \ln(z\bar{z})$ és harmònica, però no té harmònica conjugada a $\mathbb{C}^*$. $\triangleleft$

5.5.3. Si f és analítica, són harmòniques $|f(z)|$, $\operatorname{Arg} f(z)$ i $\ln |f(z)|$? $\triangleleft$

5.5.4. Proveu el principi del màxim per funcions harmòniques: sigui u harmònica al domini Ω llavors

a) si $z_0 \in \Omega$ i u té un màxim o un mínim relatiu a z_0 llavors u és constant en algun disc centrat a z_0 .

b) Si el domini Ω és fitat, connex i $u \in C(\bar{\Omega})$, llavors el màxim i el mínim absoluts de u s'asoleixen a $\partial\Omega$.

Indicació: seguiu la demostració del principi del màxim per $|f|$ amb f analítica fet en capítols anteriors. $\triangleleft$

5.5.5. Determineu quines de les següents funcions u són harmòniques. Per cadascuna d'elles trobeu una conjugada harmònica v i expresseu la funció analítica $f(z) = u + iv$ com a funció de z .

a) $3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$

c) $xe^x \cos y - ye^x \sin y$

b) $2xy + 3xy^2 - 2y^3$

d) $e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$. $\triangleleft$

5.5.6. Calculeu per $n = 1, 2, 3, 4$ els polinomis harmònics $p_n(x, y)$, $q_n(x, y)$ definits per la igualtat $z^n = p_n + iq_n$. Trobar la forma general de p_n, q_n en coordenades polars (r, θ) . $\triangleleft$

5.5.7. Sigui Ω un domini simplement connex, i sigui $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ una aplicació de Riemann, és a dir un homeomorfisme holomorf entre $\mathbb{D}$ i Ω amb inversa holomorfa, vegeu el teorema 7.6. Suposem que φ s'estén contínuament a $\partial\mathbb{D}$, que φ^{-1} s'estén contínuament a $\partial\Omega$ i que les seves derivades s'estenen contínuament a $\partial\mathbb{D}$ i a $\partial\Omega$ respectivament (sense anul·lar-s'hi). Demostreu que existeixen determinacions del logaritme i l'argument de manera que

$$\mathcal{L}_{\varphi'}(z_0) = \operatorname{Re} \mathcal{L}_{\varphi'}(0) + \frac{i}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{A}_{\varphi'}(z) H(z, z_0) |dz|. \quad \triangleleft$$

5.6. El problema de Dirichlet

5.6.1. La fita 5.5 es pot millorar: demostreu que

$$\int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0| > \delta} P(z, z_0) |dz| \leq (1 - |z_0|) \mathcal{O}(1/\delta).$$

Indicació: Feu la integral en anells $2^j\delta < |z - z_0| \leq 2^{j+1}\delta$ i sumeu. $\triangleleft$

5.6.2. *Suposem que $\phi_1, \phi_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ són harmòniques a Ω i contínues fins a $\partial\Omega$ i que $\phi_1 = \phi_2$ a la vora $\partial\Omega$. Proveu que si Ω és simplement connex i fitat, aleshores $\phi_1 = \phi_2$ en tot punt d' Ω . Indicació: trobeu la funció v harmònica conjugada de $\phi_1 - \phi_2$ i apliqueu el principi del màxim (mínim) a $\phi_1 - \phi_2 + iv$.* $\triangleleft$

5.6.3. *Una distribució estacionària T de la temperatura en una regió Ω és una funció harmònica i contínua fins la frontera. Trobeu la temperatura T a l'interior d'un disc de radi 1 si sabem que la temperatura val $\operatorname{Im} z$ als dos primers quadrants de la circumferència de frontera i 0 a la resta de punts de la vora. En particular vegeu que la temperatura al centre del disc és $1/\pi$.* $\triangleleft$

6. Sèries de Laurent

6.1. Sèries de Laurent i singularitats

6.1.1. Calculeu la sèrie de Laurent de

a) $\frac{z-1}{z(z-4)^3}$ a $0 < |z-4| < 4$. b) $1/e^{(1-1/z)}$ per $|z| > 0$. $\triangleleft$

6.1.2. Per a la funció $f(z) = \frac{\sin z \cos 3z}{z^4}$

1. Trobeu els primers termes no nuls de la part central de la seva sèrie de Laurent a $z = 0$.

2. Calculeu $\oint f(z)dz$ si es recorre $|z| = 1$ un cop i en sentit antihorari. $\triangleleft$

6.1.3. Trobeu el desenvolupament en sèrie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ a les corones:

a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$; c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$;
b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$; d) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$. $\triangleleft$

6.1.4. Sigui $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$, doneu les sèries de Laurent per les tres corones centrades a 0 allà on f és analítica ($|z| < 1$, $1 < |z| < 3$ i $|z| > 3$). $\triangleleft$

6.1.5. Doneu els primers termes de la sèrie de Laurent de

a) $f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{3z}\right)$ per $|z| > 0$. b) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ per $0 < |z| < R$. $\triangleleft$

6.1.6. Quina és la corona (o anell) de convergència de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$? $\triangleleft$

6.2. Singularitats aïllades de funcions holomorfes

6.2.1. Construcció de funcions

- a) Trobeu una funció f que tingui un pol d'ordre 2 a $z = 1 + i$ i singularitats essencials a $z = 0, 1$.
- b) Trobeu una funció f que tingui una singularitat evitable a $z = 0$, un pol d'ordre 6 a $z = 1$ i una singularitat essencial a $z = i$. $\triangleleft$

6.2.2. Sigui f analítica amb zero d'ordre n a z_0 i g analítica amb zero d'ordre m a z_0 . Si $h(z) = f(z)/g(z)$ proveu que

- a) si $n > m$ $h(z)$ s'estén a una funció holomorfa amb un zero d'ordre $n - m$ a z_0 ,
- b) si $n < m$ $h(z)$ té un pol d'ordre $m - n$ a z_0 ,
- c) si $n = m$ $h(z)$ s'estén a una funció holomorfa i no nul·la a z_0 . $\triangleleft$

6.2.3. Determineu les singularitats de les funcions següents. Si a és una singularitat evitable de f , calculeu el valor que cal donar a $f(a)$ per tal que f sigui holomorfa en un entorn d' a , i si a és un pol de f , determineu la part singular de f en a (la part de la sèrie amb índexs negatius).

- a) $f(z) = z \cos(1/z)$. c) $f(z) = \frac{1}{(1 - e^z)^2}$. $\triangleleft$
- b) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3(z - 1)^2}$.

6.2.4. Sigui $f \in H(D_r(a) \setminus \{a\})$. Suposem que existeix una successió $(z_n)_n$ tal que $z_n \rightarrow a$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e^{f(z_n)}| = 0, \quad \left| f\left(z_n + \frac{1}{n}\right) \right| \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determineu el tipus de singularitat que té la funció f en el punt a . $\triangleleft$

6.2.5. a) La funció $\tan(1/z)$ té una singularitat aïllada al 0? De quin tipus?

- b) Sigui 0 singularitat aïllada de $f(z)$. Suposem que $|f(z)| \leq |z|^{-\alpha}$ on $0 < \alpha < 1$. Demostreu que 0 és una singularitat evitable. $\triangleleft$

6.2.6. (a) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$. Suposem que $f(a_n) = 0$ per una successió $a_n \in \mathbb{D}^*$ tal que $a_n \rightarrow 0$. Demostreu que $f \equiv 0$ o bé $z = 0$ és una singularitat essencial de f .

- (b) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^*$ tal que per a tot $n \geq 2$, f no té zeros sobre les corbes $|z| = 1/n$ i a més

$$\int_{|z|=1/n} \frac{1}{f(z)} dz \neq \int_{|z|=1/(n+1)} \frac{1}{f(z)} dz.$$

Demostreu que $z = 0$ és una singularitat essencial de f . Indicació: Utilitzeu el teorema de deformació i l'apartat anterior. $\triangleleft$

6.3. Teorema dels Residus

6.3.1. Existeix alguna funció f amb pol simple a z_0 tal que $\text{Res}(f, z_0) = 0$? Si el pol és d'ordre 2, pot passar que $\text{Res}(f, z_0) = 0$? $\triangleleft$

6.3.2. Determineu els residus de f a 0 i a 1 en l'exercici 6.1.3. Quines de les sèries que vau calcular cal usar? $\triangleleft$

6.3.3. Calculeu els residus de les funcions següents en els punts indicats:

a) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$, $z_0 = 0$. b) $f(z) = \frac{1 + e^z}{z^4}$, $z_0 = 0$. $\triangleleft$

6.3.4. Decidiu si són certes o falses les següents afirmacions. Doneu els arguments que provin les afirmacions o trobeu contraexemples.

1. Si f, g tenen un pol a z_0 llavors $f + g$ té un pol a z_0 .
2. Si f, g tenen un pol a z_0 i en els dos casos el residu és no nul llavors $f \cdot g$ té un pol a z_0 amb residu no nul.
3. Si f té una singularitat essencial a $z = 0$ i g un pol d'ordre finit a $z = 0$ llavors $f + g$ té singularitat essencial a $z = 0$.
4. Si f té un pol d'ordre m a $z = 0$ llavors $f(z^2)$ té un pol d'ordre $2m$. $\triangleleft$

6.3.5. Suposem que f és holomorfa amb un zero d'ordre m a z_0 . Proveu que $g(z) = f'(z)/f(z)$ té un pol simple a z_0 amb $\text{Res}(g, z_0) = m$. $\triangleleft$

6.3.6. a) Proveu que si $g(z)$ té un zero simple a z_0 , llavors $1/g(z)$ té un pol simple a z_0 .

b) Proveu que $\text{Res}(1/g, z_0) = 1/g'(z_0)$.

c) Sigui $f(z) = 1/\sin(z)$, trobeu els seus pols i proveu que són simples. Trobeu els residus. $\triangleleft$

6.3.7. Trobeu i classifiqueu les singularitats aïllades de cadascuna de les funcions següents. Calculeu el residu a cada singularitat.

a) $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2(z + 1)}$; b) $g(z) = \frac{1}{e^z - 1}$; c) $h(z) = \cos(1 - 1/z)$. $\triangleleft$

6.3.8. Avalueu $\oint \frac{1}{(z + 1)(z - 1)(z - 2)(z - 3)(z - 4)(z - 5)} dz$ al llarg de la corba $|z - 3| = 3$ recorreguda en sentit antihorari. $\triangleleft$

6.3.9. Avalueu les següents integrals

$$a) \oint_{|z|=5} \frac{\sin z}{z^2 - 4} dz,$$

$$c) \oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z^2(z-2)(z+5i)} dz. \quad \triangleleft$$

$$b) \oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz,$$

$$6.3.10. \text{ Calculeu } \int_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{z-a} dz \text{ pels diferents valors d'a } \in \mathbb{C} \text{ tals que } |a| \neq 1. \quad \triangleleft$$

$$6.3.11. \text{ Calculeu la integral de la funció } f(z) = \frac{1+z}{1+\sin z} \text{ sobre la vora del disc } D_7(0). \quad \triangleleft$$

6.3.12. Per a $t > 0$, sigui C_t la circumferència de centre it que passa pels punts -2 i 2 . Calculeu

$$f(t) = \int_{C_t} \frac{e^{i\pi z} + 1}{z(z-t)} dz, \text{ per a } t \neq 2. \quad \triangleleft$$

6.4. Residu a l'infinit

6.4.1. Trobeu el valor la integral $\oint_{|z|=2} \frac{5z-1}{z(z-1)} dz$ calculant el residu de l'integrand a l'infinit. $\triangleleft$

6.4.2. Siguí $a \in \mathbb{R}$, calculeu, estudiant el residu a l'infinit, $I = \oint_C \frac{a^2 - z^2}{z(z^2 + a^2)} dz$ on C és una corba simple que envolta les singularitats de l'integrand. $\triangleleft$

6.4.3. Avalueu $\oint_{|z|=1} e^{1/z} \sin(1/z) dz$. $\triangleleft$

6.5. Aplicació al càlcul d'integrals

6.5.1. Demostreu que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \triangleleft$$

6.5.2. Per $r > 0$, considerem la corba $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $\gamma_r(t) = re^{it}$, i sigui

$$I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Demostreu que $\lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = 0$. $\triangleleft$

6.5.3. Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3} dx$$

i calculeu-ne el seu valor (cal justificar tots els passos). ◁

6.5.4. Calculeu

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$
 ◁

6.5.5. Calculeu

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$
 ◁

6.5.6. Justifiqueu la integrabilitat (Lebesgue o impròpia Riemann) i calculeu les següents integrals (en el tercer apartat, $n = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{array}{lll} a) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4 \cos t} dt; & c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2 + \cos t} dt; & e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1} dx; \\ b) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx; & d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx; & f) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^5}. \end{array}$$
 ◁

6.5.7. Donat $a \in (0, 1)$ calculeu el valor de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2} dx.$$
 ◁

6.5.8. Sigui $f(z) = e^z/z^2$ i la recta $\gamma = \{1 + it; t \in (-\infty, +\infty)\}$.

a) Calculeu (justificant tots els passos)

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Indicació: integreu f sobre la vora del semidisc de centre $z_0 = 1$ i radi R amb $\operatorname{Re} z \leq 1$.

b) Deduïu que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(t) + 2t\sin(t)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2\pi}{e}.$ ◁

6.5.9. Considereu la funció $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 9)(z^2 + 4)^2}.$

(a) Determineu les singularitats de f .

(b) Calculeu la part singular del desenvolupament de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(c) Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor.

<

6.5.10. Considereu

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)^2}.$$

(a) Trobeu la part singular de la sèrie de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(b) Justifiqueu la convergència de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor (justifiqueu tots els passos).

<

6.5.11. Sigui $f(z) = e^{iz^2}$, i considereu el camí γ_R format per el segment que va de 0 a R ; l'arc del cercle $|z| = R$ que va de R a $Re^{i\pi/4}$, i el segment que va de $Re^{i\pi/4}$ a 0. Demostreu que

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$

i utilitzeu-ho per a calcular les integrals de Fresnel

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx, \quad \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx.$$

Observació: Podeu utilitzar que $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

<

6.5.12. Calculeu, justificant tots els passos, la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^2 + x + 1} dx, \quad -1 < \alpha < 1.$$

Indicació: Considereu la funció $f(z) = \frac{z^{\alpha}}{z^2 + z + 1}$. Definiu una determinació del logaritme $\log(z)$ a $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ de manera que $z^{\alpha} = e^{\alpha \log(z)}$. Finalment integreu la funció $f(z)$ a la mateixa regió que les integrals del tipus

$$\int_0^{+\infty} R(x) \ln(x) dx.$$

<

6.6. Principi de l'argument

6.6.1. Quines de les següents funcions són meromorfs a $\mathbb{C}$?

- a) z^5 , b) $z^{5/2}$, c) $e^{1/z}$, d) $1/\sin(z)$. ◁

6.6.2. Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) amb part real positiva del polinomi $P(z) = z^6 - z^4 - 2z - 6$.

I si alternativament el polinomi fos $Q(z) = z^6 - z^4 - 2z + 6$? ◁

6.6.3. Sigui f una funció entera tal que

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Demostreu que f té, com a molt, un zero a tot $\mathbb{C}$. ◁

6.7. Teorema de Rouché

6.7.1. Demostreu que l'equació $e^z = 2z + 1$ té exactament una solució en el disc unitat obert. Indicació: Proveu que $|e^z - 1| \leq e - 1$ si $|z| = 1$. ◁

6.7.2. Sigui f una funció holomorfa en el disc unitat tancat tal que $|f(z)| < 1$, per a $|z| = 1$. Quants punts fixos té f ? ◁

6.7.3. Calculeu el nombre de solucions (comptant multiplicitats) de les següents equacions en el disc unitat:

(a) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$.

(b) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$.

(c) $z^7 - 5z^4 + z^2 = 2$. ◁

6.7.4. Quants zeros té $P(z) = z^4 + 6z^3 - 4z^2 + 1/8$ en la regió $\{z \in \mathbb{C}; \frac{1}{2} < |z| < 1\}$? ◁

6.7.5. Considerem $P(z) = z^6 + 3z^4 + z^2 + z + 9$.

(a) Proveu que tots els zeros de $P(z)$ són a l'anell $1 < |z| < 2$.

(b) Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) de $P(z)$ al primer quadrant. ◁

6.7.6. (a) Calculeu el nombre de solucions a $\mathbb{D}$ de l'equació $e^z = 4z + 1$.

(b) Demostreu que l'equació $e^z = 3z^n$ té n solucions en el disc unitat ($n = 1, 2, \dots$). ◁

6.7.7. Sigui $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$, i $n \in \mathbb{N}$.

(a) Demostreu que l'equació

$$(z - 1)^n e^z = a$$

té exactament n arrels diferents al semiplà $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Indicació: Considereu un disc centrat a $z = 1$ i de radi $R = 1$ primer, després mireu de modificar el camí augmentant el radi sense sortir del semiplà tancat de la dreta.

(b) Proveu que si, a més, $|a| \leq 1/2^n$, llavors totes aquestes arrels són al disc $D_{1/2}(1)$. $\triangleleft$

6.7.8. Demostreu que per a tot $R > 0$ existeix $n(R) \geq 0$ tal que si $n > n(R)$

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

no té zeros al disc $\{|z| \leq R\}$. $\triangleleft$

6.7.9. Sigui f_n una successió de funcions holomorfes en un domini Ω tals que $f_n \rightarrow f$ uniformement en compactes d' Ω , per una certa funció f .

1. (Corollari de Hurwitz) Deduïu que si $f_n(z) \neq a$ per a tot $z \in \Omega$ i tot $n \in \mathbb{N}$, aleshores, $f \equiv a$ o bé $f(z) \neq a$ en Ω .
2. Proveu que si f_n és injectiva en Ω per a tot $n \geq 0$, aleshores f és constant o bé f és injectiva en Ω . Indicació: Argumenteu per reducció a l'absurd, i utilitzeu l'apartat anterior.
3. Proveu que si f té un zero d'ordre m en $a \in \Omega$, aleshores existeix $\rho_0 > 0$ tal que per tot $\rho < \rho_0$ i per tot $n > n_\rho$, f_n té exactament m zeros en $D_\rho(a)$ comptant multiplicitats. $\triangleleft$

7. Representació Conforme

7.1. El teorema de l'aplicació de Riemann

7.2. Projectió estereogràfica i circumferències generalitzades

7.2.1. *Sigui p la projectió estereogràfica. Demostreu que $\lambda = \frac{1}{1-u}$, i que la inversa de p és*

$$p^{-1}(x + iy) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} (x, y, x^2 + y^2). \quad \triangleleft$$

7.2.2. *Demostreu que l'equació d'una circumferència de centre $\alpha \in \mathbb{C}$ i radi r és*

$$|z|^2 - \alpha \bar{z} - \bar{\alpha} z = r^2 - |\alpha|^2, \quad z \in \mathbb{C},$$

i la d'una recta perpendicular a α passant per $z_0 \in \mathbb{C}$ és

$$\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} = m, \quad z \in \mathbb{C},$$

on m és una constant real que només depèn d' α i z_0 .

7.3. Transformacions de Möbius

7.3.1. *Donada una homografia $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, definim $A_T := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que està definit mòdul constant multiplicativa. Per exemple, les matrius $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ corresponen respectivament a la translació $z \mapsto z + b$, a la dilatació $z \mapsto az$ i a la inversió $z \mapsto 1/z$.*

a) Donades $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$, demostreu que $A_{T_2 \circ T_1} = A_{T_2} A_{T_1}$ (mòdul constant multiplicativa).

b) Trobeu T^{-1} i relacioneu-la amb A_T .

7.3.2. *Demostreu que tota $T \in \mathcal{M}$ es pot escriure com a composició de dilatacions, translacions i inversions.*

7.3.3. *Trobeu una descomposició en dilatacions, translacions i una inversió de la transformació*

$$T(z) = \frac{2z + i}{(1 - i)z + 3i}. \quad \triangleleft$$

7.3.4. *Demostreu que tota $T \in \mathcal{M}$ envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades.*

7.3.5. *Doneu la imatge per $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ i per $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$ de*

a) la recta real, b) $\partial D_2(0)$, c) $\partial \mathbb{D}$, d) l'eix imaginari. $\triangleleft$

7.3.6. Trobeu l'homografia que envia $(i, 0, -1)$ a $(-i, 0, \infty)$. $\triangleleft$

7.3.7. Trobeu $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(1-i) = 1+i$, $T(2) = i$, $T(1+i) = -i$. $\triangleleft$

7.3.8. Demostreu el corollari 7.16. $\triangleleft$

7.3.9. Trobeu una homografia que enviï $\mathbb{D}$ a $\mathbb{H}_+ := \{\operatorname{Im} z > 0\}$. $\triangleleft$

7.3.10. Definim

$$T_1(z) = \frac{z-1}{2z-i}, T_2(z) = \frac{z+1}{iz-1}, T_3(z) = \frac{iz}{(1+i)-z}.$$

Trobeu $T_3^{-1} \circ T_2 \circ T_1$. $\triangleleft$

7.3.11. Sigui $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ i definim $T(z) = \frac{z}{az+1}$. Trobeu T^m , $m \in \mathbb{Z}$. $\triangleleft$

7.3.12. Trobeu totes les homografies que tinguin per punts fixos 0 i $-i$. $\triangleleft$

7.3.13. Sigui C_1 i C_2 dues circumferències generalitzades i $z_1 \in \mathbb{C}_\infty \setminus C_1$, $z_2 \in \mathbb{C}_\infty \setminus C_2$. Demostreu que existeix $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(C_1) = C_2$ i $T(z_1) = z_2$. Podeu fer servir l'Exercici 1.1.10. Trobeu-ne una en el cas particular

$$C_1 = \{z : |z-1| = 1\}, z_1 = 1; C_2 = \{z : \bar{z}i = z\}, z_2 = i. \triangleleft$$

7.4. Raó doble i simetria

7.4.1. Sigui $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(D_R(a)) = D_R(a)$. Demostreu que els punts fixos de T estan a $\partial D_R(a)$ o bé són simètrics respecte de $\partial D_R(a)$. $\triangleleft$

7.5. Automorfismes

7.5.1. Demostreu que tota representació conforme de $\mathbb{C}_\infty$ en $\mathbb{C}_\infty$ és una homografia. $\triangleleft$

7.5.2. Trobeu tots els automorfismes T de $\mathbb{D}$ tals que $T(1/2) = 1/3$. $\triangleleft$

7.5.3. Trobeu totes les representacions conformes del disc unitat en ell mateix que envien $1/2$ a 0 . N'existeix alguna que enviï 0 a $-i/2$? I 0 a $-i/4$? Utilitzeu T per trobar una representació conforme S que enviï $\partial \mathbb{D}$ a $\partial D_2(i)$ tal que $S(1/2) = i$ i $S(0) = 0$. $\triangleleft$

7.5.4. Demostreu que el lloc geomètric de les imatges de qualsevol punt $b \in \mathbb{D}$ per les transformacions que fixen la imatge d'un altre punt, és a dir

$$\{w \in \mathbb{D} : w = T(b) \text{ amb } T \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D}), T(a) = \tilde{a}\},$$

és una circumferència. $\triangleleft$

7.6. Altres transformacions conformes

- 7.6.1.** Quina és la imatge del primer quadrant per z^3 ? ◁
- 7.6.2.** Quina transformació pot enviar una banda horitzontal a un semiplà? ◁
- 7.6.3.** Trobeu una aplicació de Riemann del sector $\{0 < \operatorname{Arg} z < \pi/8\}$. ◁
- 7.6.4.** Es pot enviar el semiplà superior a un triangle mitjançant una homografia? ◁
- 7.6.5.** Proveu que no existeix cap representació conforme del semiplà de la dreta en $D_1(1)$ que envii $1 \mapsto 1$, i que s'estengui a la frontera enviant $0 \mapsto 0$ i $\infty \mapsto 1+i$. ◁
- 7.6.6.** Demostreu que les transformacions conformes del semiplà superior $\mathbb{H}_+ := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ en $\mathbb{D}$ són de la forma $e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$ per alguna $a \in \mathbb{H}_+$ i algun $\theta \in \mathbb{R}$. ◁
- 7.6.7.** Trobeu una transformació de Möbius que envii el primer quadrant a $\mathbb{D}_+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$. Utilitzeu-la per a trobar una transformació conforme de $\mathbb{H}_+$ a $\{| \operatorname{Re} z | < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$. ◁
- 7.6.8.** Trobeu una representació conforme de $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$ en $\mathbb{D}$. ◁
- 7.6.9.** Trobeu una representació conforme d' Ω_1 en Ω_2 .
- a) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$, $\Omega_2 = \mathbb{H}_+$.
- b) $\Omega_1 = \mathbb{D}$, $\Omega_2 = \mathbb{H}_+ \cap \overline{\mathbb{D}}^c$.
- c) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \{\operatorname{Re} z > 1/2\}$, $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$.
- d) $\Omega_1 = \mathbb{H}_+$, $\Omega_2 = \{|\operatorname{Re} z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.
- e) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$, $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap \{|z + 1/2| > 1/2\}$.
- f) $\Omega_1 = D_{\sqrt{2}}(1) \cap D_{\sqrt{2}}(-1)$, $\Omega_2 = \mathbb{D}$, que deixi invariant el segment $(-i, i)$.
- g) $\Omega_1 = \mathbb{D} \setminus [0, 1)$, $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.
- h) $\Omega_1 = \{|\operatorname{Im} z| < \pi/2\} \setminus ((-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty))$, $\Omega_2 = \mathbb{D}$. ◁

8. Fluids

8.1. Qüestions generals. Escenari i notació.

8.1.1. Proveu que $\Gamma + iQ = \int_C \overline{V} dz$. ◁

8.1.2. Proveu que la circulació $\Gamma = 0$ en un flux potencial (suposeu que la funció potencial és de classe C^2 com a mínim). ◁

8.1.3. Proveu que per fluxos definits en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ que satisfan les quatre hipòtesis anteriors, la velocitat potencial $\varphi(x, y)$ és una funció harmònica. ◁

8.1.4. Proveu que $\overline{\Phi'(z)} = \mathbf{V}(z) = V_1 + iV_2$. ◁

8.2. Fluxos bàsics.

8.2.1. Superposició. Sumant diferents potencials complexos es poden descriure fluxos més sofisticats. Un exemple important s'obté sumant una font al punt $-a$ amb una pica al punt a amb $a > 0$:

$$\Phi(z) = k \operatorname{Log} \left(\frac{z+a}{z-a} \right) \sim k \operatorname{Log}(z+a) - k \operatorname{Log}(z-a).$$

Trobeu l'expressió de $\mathbf{V}$, V , φ i ψ . Dibuixeu les línies de corrent ($\psi = c$), vegeu la figura 8.5. ◁

8.2.2. En l'exercici anterior, fem $a \rightarrow 0$ i $k \rightarrow \infty$ de manera que $2ka = \mu$ sigui finit. Vegeu que al límit obtenim el potencial complex $\Phi(z) = \mu/z$ que s'anomena doblet o dipol. Ve a ser una font i una pica separades per una distància infinitesimal. La quantitat $2\pi\mu$ s'anomena moment del doblet. Trobeu l'expressió de $\mathbf{V}$, V , φ i ψ . Dibuixeu les línies de corrent ($\psi = c$). ◁

8.2.3. Font-remolí. Estudieu el flux amb funció potencial $\Phi(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \operatorname{Log}(z-a)$. Discutiu segons els valors de Γ (circulació o intensitat) i Q (potència). Feu dibuixos de les línies de camp segons els signes de Γ i Q . ◁

8.3. Obstacles

8.3.1. Modifiquem el flux amb potencial donat per $f(z) = \text{Log}(z+2)$ que és una font sortint des del punt $z = -2$ (vist en un exemple anterior). Per això considerem la modificació donada pel potencial

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \text{Log}(z+2) + \overline{\text{Log}\left(\frac{1}{\bar{z}} + 2\right)}.$$

- Descomponeu Φ en fluxos coneguts.
- Calculeu $\Phi'(z)$ i contrasteu-ho amb l'apartat anterior.
- Vegeu que per z amb $|z|$ molt gran resulta $\Phi'(z) \approx \frac{1}{z+2}$ i que lluny de $z = -2$ el flux associat a Φ és com una font sortint de $z = -2$.
- Mostreu amb un gràfic com eviten el disc unitari les línies de flux (feu servir `contour_plot` i `streamline_plot`). ◁

8.4. Expressió general (recapitulació).

8.4.1. Pels z on $V(z) = \overline{\Phi'(z)} = 0$ diem que hi ha un punt estacionari del corrent (per exemple és aquell punt d'un riu on una fulla petita s'ha quedat aturada però que al seu voltant circula l'aigua).

- Per $\Phi(z) = z^n$ el 0 és un punt estacionari d'ordre $n-1$. Feu un dibuix amb les línies de flux i les línies equipotencials superposades per $n = 2, 3, 4$.
- Podeu deduir experimentalment quin angle formen les línies equipotencials i les línies de flux?
- Proveu que si un punt estacionari a és un zero d'ordre $n-1$ llavors les línies equipotencials i de corrent ($\varphi = ct.$, $\psi = ct.$) formen un angle $\pi/2n$ en el punt estacionari (feu-lo com a mínim pel cas $\Phi'(z) = Cz^{n-1}$, $C \in \mathbb{C}$). Quin angle formen una línia de corrent i una línia equipotencial quan es creuen en un punt no estacionari? ◁

8.4.2. Discussiu el moviment del fluid amb potencial complex igual a

$$a) \Phi(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \text{Log}\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \text{ on } a, b \in \mathbb{C} \text{ i } Q, \Gamma \in \mathbb{R}.$$

$$b) \Phi(z) = az + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log}(z) \text{ on } a, \Gamma > 0.$$

$$c) \Phi(z) = az + \frac{Q}{2\pi} \text{Log}(z) \text{ on } a, Q > 0.$$

$$d) \quad \Phi(z) = \frac{p}{2\pi z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log}(z) \text{ on } p, \Gamma > 0. \quad \triangleleft$$

8.4.3. *Discutiu el moviment del fluid amb potencial complex*

$$\Phi(z) = V_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log}(z), \text{ amb } \Gamma, V_0, R > 0.$$

Particularment estudieu els casos $\Gamma < 4\pi RV_0$, $\Gamma > 4\pi RV_0$ i $\Gamma = 4\pi RV_0$. Dibuixeu exemples de cadascun dels casos. $\triangleleft$

8.4.4. *Doneu un potencial complex que tingui fonts-remolins $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k) : k = 1, \dots, n\}$ i velocitat $\mathbf{V}_\infty = V e^{i\alpha}$ a l'infinit.* $\triangleleft$

