

Introducció a l'anàlisi complexa

Llistes de problemes solucionats, v26.12

Carme Cascante*, Núria Fagella, Eduardo Gallego[†],
Jordi Pau, Martí Prats

8 de setembre de 2026

*CC: cascante@ub.edu, NF: nfagella@ub.edu, JP: jordi.pau@ub.edu:

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Catalonia

[†]EG: Eduardo.Gallego@uab.cat MP: marti.prats@uab.cat:

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Catalonia

1. El cos dels nombres complexos

1.1. El cos dels nombres complexos

1.1.1. Doneu en forma $a + bi$:

a) $(-1 + i)^2$,

c) $\frac{-1+5i}{2+3i}$,

e) $\left(\frac{2+i}{6i-(1-2i)}\right)^2$,

b) $\frac{8i-1}{i}$,

d) $\frac{(8+2i)-(1-i)}{(2+i)^2}$,

f) $((3-i)^2 - 3)i$.

Solució:

a) $-2i$,

c) $1 + i$,

e) $(-253 - 204i)/4225$,

b) $8 + i$,

d) $33/25 - 19i/25$,

f) $6 + 5i$.

1.1.2. Demostreu o doneu un contraexemple:

a) $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w$, b) $\operatorname{Re}(zw) = (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Re} w)$, c) $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Re} w}$. $\triangleleft$

Solució:

a) Cert

b) Fals

c) Fals

1.1.3. Sigui $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im}(z) > 0$. Proveu que $\operatorname{Im}(1/z) < 0$. $\triangleleft$

Solució: Si $z = x + iy$ amb $y > 0$ com que $1/z = (x - yi)/|z|^2$ resulta que $\operatorname{Im}(1/z) < 0$.

1.1.4. Si $z = x + iy$ on $x, y \in \mathbb{R}$, trobeu les parts real i imaginària de:

a) z^2 ,

c) $\frac{1}{z-3}$,

e) $\frac{z+1}{2z-5}$,

b) $z(z+1)$,

d) $\frac{1}{z^2}$,

f) z^3 . $\triangleleft$

Solució:

a) $x^2 - y^2 + 2xyi$

c) $(x-3-iy)/((x-3)^2+y^2)$,

e) $\frac{2x^2-5x+2x-5+2y^2-i7y}{(2x-5)^2+4y^2}$

b) $x^2 - y^2 + x + (2xy + y)i$

d) $\frac{x^2-y^2-i2xy}{(x^2+y^2)^2}$

f) $x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$.

1.1.5. *Segueixi $\frac{x+iy}{x-iy} = a+ib$ amb $(x,y) \neq (0,0)$ i $x,y,a,b \in \mathbb{R}$. Proveu que $a^2+b^2=1$.* $\triangleleft$

Solució: Notem, d'una banda, que

$$(a+ib)\overline{(a+ib)} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2.$$

D'altra banda, com que $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$, tenim

$$\frac{x+iy}{x-iy} \cdot \frac{\overline{x+iy}}{\overline{x-iy}} = \frac{x+iy}{x-iy} \cdot \frac{x-iy}{x+iy} = 1.$$

Per tant,

$$a^2+b^2 = (a+ib)\overline{(a+ib)} = 1.$$

1.1.6. *Proveu que $-1+i$ satisfà $z^2+2z+2=0$.* $\triangleleft$

Solució: N'hi ha prou amb substituir: $(-1+i)^2+2(-1+i)+2=\dots=0$.

1.1.7. *Escriu l'equació complexa $z^3+5z^2=z+3i$ com dues equacions reals.* $\triangleleft$

Solució: $x^3-3xy^2+5x^2-5y^2-x=0$, $3x^2y-y^3+10xy-y-3=0$.

1.1.8. a) *Si z_1, z_2 són complexos amb z_1+z_2 i z_1z_2 reals negatius proveu que z_1, z_2 són reals.*

b) *Proveu que el vector $z_1 \neq 0$ és paral·lel al vector $z_2 \neq 0$ si i només si $\text{Im}(z_1\bar{z}_2)=0$.* $\triangleleft$

Solució:

a) Si $z_k = x_k + iy_k$, tenim que $y_1+y_2=0$, $x_1+x_2 < 0$ i $x_1x_2 - y_1y_2 < 0$, $x_1y_2 + x_2y_1 = 0$. Llavors $x_1x_2 + y_1^2 < 0$ i $y_1(x_2 - x_1) = 0$. Si $y_1 = 0$, llavors $y_2 = 0$ i z_1, z_2 són reals. Si $x_1 = x_2$ tenim que $x_1x_2 > 0$, llavors $\text{Re}(z_1z_2) > 0$ que no és possible per hipòtesi.

Solució proposada per Tomàs Planelles Alonso (amb una visió més constructivista):

Considerem el polinomi $P(X) = X^2 - (z_1 + z_2)X + z_1z_2 \in \mathbb{R}[X]$. Notem que

$$\Delta_P = (z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2 \geq 0,$$

ja que $z_1z_2 \leq 0$. Aleshores, les dues arrels de P són reals.

D'altra banda, tenim que $P(z_1) = P(z_2) = 0$ per construcció. Per tant, z_1 i z_2 són reals.

Comentaris: Notem que podem relaxar alguna de les hipòtesis de l'enunciat; ens serveix que $z_1 + z_2$ sigui real.

b) *Solució proposada per Martí Mota Llobet:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} \in \mathbb{R} \iff \text{Im}\left(\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}\right) = 0 \iff \text{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0$$

1.1.9. *Proveu analíticament i gràfica que $|z - 1| = |\bar{z} - 1|$.* $\triangleleft$

Solució: Com que $\bar{z}$ és el simètric respecte de l'eix OX de z els dos punts estan a la mateixa distància de qualsevol punt de OX , en particular de 1. També podem veure que

$$|z - 1|^2 = (z - 1)(\overline{z - 1}) = |\bar{z} - 1|^2.$$

1.1.10. *Demostreu que $\left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right| = 1$ si $|a| = 1$ o bé $|b| = 1$. Quina excepció cal fer si $|a| = |b| = 1$?*

Demostreu també que $\left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right| < 1$ si $|a| < 1$ i $|b| < 1$.

Per acabar, si per $a \in \mathbb{D}$ definim $\varphi_a(z) := \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$, demostreu que $\varphi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, que és bijectiva en $\mathbb{D}$ i en $\partial\mathbb{D}$ i doneu-ne la inversa. $\triangleleft$

Solució: Suposem $|a| = 1$, l'altre cas es demostra igual per simetria.

$$\frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \frac{a}{a} = \frac{a(a - b)}{a - b} = a, \quad a \neq b.$$

Si tenen mòdul 1 cal evitar que siguin iguals ja que en aquest cas dividim per 0.

Suposem ara $|a|, |b| < 1$, tenim que

$$\left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right|^2 < 1 \iff |a - b|^2 < |1 - \bar{a}b|^2 \iff |a|^2 + |b|^2 < 1 + |a|^2|b|^2$$

i això equival a

$$(|a|^2 - 1)(|b|^2 - 1) > 0$$

que és cert per ser $|a|, |b| < 1$.

Que $\varphi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es dedueix de l'apartat anterior. La bijectivitat es dedueix si veiem que l'equació $w = \varphi_a(z)$ té només una solució, i usant que $|z\bar{a}| = |z||a| < 1$, obtenim

$$w = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \iff w - \bar{a}zw = a - z \iff \frac{w - a}{-1 + \bar{a}w} = z,$$

d'on surt la bijectivitat ($w \in \mathbb{D}$ o $w \in \partial\mathbb{D}$ si $z \in \mathbb{D}$ o $z \in \partial\mathbb{D}$ altra vegada usant l'apartat anterior).

1.2. Els nombres complexos com a espai vectorial

1.2.1. *Describeu els conjunts de punts del pla que satisfan:*

- | | | |
|--|--------------------------------------|------------------------------|
| a) $1 < \operatorname{Im}(iz) < 2$, | c) $ z = \operatorname{Re} z + 1$, | e) $ z - 2 > z - 3 $, |
| b) $\operatorname{Im} \frac{z - a}{z} = 0, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, | d) $ z - 1 = z + i $, | f) $ z - 1 + z + 1 = 7$. |
- $\triangleleft$

Solució:

- a) $\{1 < \operatorname{Re}(z) < 2\}$; e) $\{\operatorname{Re} z > 5/2\}$;
 b) $z = at, t \in \mathbb{R}^*$;
 c) Paràbola $x = (1/2)(y^2 - 1)$; f) $(x/(7/2))^2 + (y/(3\sqrt{5}/2))^2 = 1$ que és una el·lipse, també podem escriure $180x^2 + 196y^2 = 2205$.
 d) Mediatriu de 1 i $-i$: $y = -x$;

1.2.2. *Suposem que $a_n \rightarrow a$ i $b_n \rightarrow b$. Demostreu que $a_n + b_n \rightarrow a + b$ i $a_nb_n \rightarrow ab$, sabent que ambdues propietats són certes a la recta real.* $\triangleleft$

Solució: La primera es deriva de l'estructura d'espai vectorial, i ja es va fer en cursos anteriors.

La segona, en ser una operació nova, cal demostrar-la:

$$\operatorname{Re}(a_nb_n) = \operatorname{Re} a_n \operatorname{Re} b_n - \operatorname{Im} a_n \operatorname{Im} b_n \rightarrow \operatorname{Re} a \operatorname{Re} b - \operatorname{Im} a \operatorname{Im} b = \operatorname{Re}(ab),$$

i

$$\operatorname{Im}(a_nb_n) = \operatorname{Re} a_n \operatorname{Im} b_n + \operatorname{Im} a_n \operatorname{Re} b_n \rightarrow \operatorname{Re} a \operatorname{Im} b + \operatorname{Im} a \operatorname{Re} b = \operatorname{Im}(ab).$$

Per (1.5) això implica

$$a_nb_n \rightarrow ab.$$

1.2.3. *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

- a) $i^n + \frac{1}{n+i}$, b) $\frac{n+i}{n-i}$, c) $\frac{3in^2}{n^2-2i}$. $\triangleleft$

Solució: a) No; b) 1, usant l'exercici 1.2.2; c) 3i, usant l'exercici 1.2.2.

Per exemple,

$$\frac{n+i}{n-i} = \frac{1+i/n}{1-i/n} \xrightarrow{\text{Ex. 1.2.2}} \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

1.2.4. *Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:*

- a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$. $\triangleleft$

Solució: Cap convergeix absolutament. Però sense mòdul, la part real i la imaginària són sèries alternades amb terme general de mòdul decreixent tendint a 0. Per tant les dues sèries són convergents.

1.2.5. *Demostreu el teorema de Mertens.* $\triangleleft$

Solució: Suposem primer que $\alpha_n, \beta_n > 0$ per no escriure valors absoluts, i sigui $A = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$. Donat $\varepsilon > 0$, existeix $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que per $N > N_0$ tenim que $0 < A - \sum_{n=0}^N \alpha_n \leq \frac{\varepsilon}{A+B}$ i $0 < B - \sum_{n=0}^N \beta_n \leq \frac{\varepsilon}{A+B}$. Aleshores

$$\begin{aligned} AB - \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} &\leq AB - \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_k \beta_j = \left(A - \sum_{k=0}^N \alpha_k \right) B + \left(B - \sum_{j=0}^N \beta_j \right) \sum_{k=0}^N \alpha_k \\ &\leq \frac{\varepsilon}{A+B} B + \frac{\varepsilon}{A+B} A = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} AB - \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} &\geq AB - \sum_{k=0}^{2N} \sum_{j=0}^{2N} \alpha_k \beta_j = \left(A - \sum_{k=0}^{2N} \alpha_k \right) B + \left(B - \sum_{j=0}^{2N} \beta_j \right) \sum_{k=0}^{2N} \alpha_k \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Pel cas general, comencem observant que

$$|\gamma_n| = \left| \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k| |\beta_{n-k}|.$$

Per tant, la sèrie de Cauchy associada a $\sum |\alpha_n|$ i $\sum |\beta_n|$ domina la sèrie $\sum |\gamma_n|$. Com que $\sum |\alpha_n|$ i $\sum |\beta_n|$ són convergents, el teorema de Mertens per a sèries no negatives implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |\alpha_k| |\beta_{n-k}| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n| \right) < \infty.$$

Així doncs, $\sum \gamma_n$ és absolutament convergent.

Per veure la identitat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \right),$$

raonem com abans, controlant les cues pels valors absoluts i usant que les tres sèries involucrades són absolutament convergents.

1.2.6. *Vegeu que tota successió convergent $\{z_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ satisfà que $|z_{n+1} - z_n| \rightarrow 0$.* ◁

Solució: Considerem $w_0 := z_0$, $w_n := z_n - z_{n-1}$ per $n \geq 1$. Aleshores aquesta successió es pot escriure com a suma parcial telescòpica:

$$z_n = \sum_{k=0}^n w_k,$$

de manera que z_n és convergent si i només si $\sum_{n \geq 0} w_n$ ho és. En cas de ser-ho, la condició necessària de convergència (observació 1.20) aplicada a la sèrie diu que $|z_n - z_{n-1}| = |w_n| \rightarrow 0$.

1.3. Repàs de trigonometria

1.3.1. Demostreu tots els resultats de la secció. ◁

1.3.2. Definim el sinus i el cosinus hiperbòlics de $x \in \mathbb{R}$ com

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Demostreu que se satisfan les següents identitats:

a) $\sinh(0) = 0 \quad i \quad \cosh(0) = 1.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty \quad i \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty.$

c) $\sinh(-x) = -\sinh(x) \quad i \quad \cosh(-x) = \cosh(x).$

d) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$

e) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$

f) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$

g) $(\sinh x)' = \cosh x \quad i \quad (\cosh(x))' = \sinh(x).$ ◁

Solució: Es pot calcular tot directament usant les propietats de la funció $x \mapsto e^x$ per $x \in \mathbb{R}$.

1.4. L'exponencial complexa

1.4.1. Fent servir la fórmula de De Moivre, trobeu expressions de $\sin 3\theta$ i $\sin 4\theta$ en termes de $\sin \theta$ i $\cos \theta$. ◁

Solució:

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 + i(3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - \sin(\theta)^3)$$

i amb això acabem. De manera similar $\sin 4\theta = 4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta$ i $\cos 4\theta = \sin^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \cos^4 \theta$.

1.4.2. Trobeu les arrels de $z^4 + 1 = 0$ i feu-les servir per veure que $z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$. ◁

Solució: Les arrels són $\alpha = e^{i\pi/4}, \bar{\alpha}, \beta = e^{i3\pi/4}, \bar{\beta}$. Com que $(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha} = z^2 - \sqrt{2}z + 1$ i de manera similar per β , els polinomis $(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})$ i $(z - \beta)(z - \bar{\beta})$ són els que es citen a l'enunciat.

1.5. Representació polar d'un nombre complex

1.5.1. Trobeu la forma polar dels nombres següents i dibuixeu-los.

$$a) 3(1 + \sqrt{3}i), \quad b) 2\sqrt{3} - 2i, \quad c) -2 + 2i, \quad d) -1 - i. \quad \triangleleft$$

Solució:

$$\begin{aligned} a) & 6(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)); & c) & 2\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4)); \\ b) & 4(\cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6)); & d) & \sqrt{2}(\cos(-3\pi/4) + i \sin(-3\pi/4)). \end{aligned}$$

1.5.2. *Expresseu en forma cartesiana ($a + ib$) els següents nombres:*

$$\begin{aligned} a) & (2 + 3i)(4 + i), & c) & \frac{1}{4+i}, & e) & (1 - 2i)^3, & g) & (1 + i)^{100} + (1 - i)^{100}, \\ b) & (4 + 2i)^2, & d) & \frac{i}{2+i}, & f) & \frac{1}{2+i} + \frac{4-2i}{3+i}, & h) & \left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Solució: (a) $5 + 14i$; (b) $12 + 16i$; (c) $\frac{4-i}{17}$ (d) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$; (e) $-11 + 2i$; (f) $\frac{7}{5} - \frac{6}{5}i$; (g) -2^{51} ; (h) $-2 - \frac{3}{2}i$.

1.5.3. *Fent servir el producte $(1 + i)(5 - i)^4$, deduiu la fórmula de Machin¹: $\pi/4 = 4 \arctan(1/5) - \arctan(1/239)$.* $\triangleleft$

Solució: Abans de fer l'exercici cal que fem algunes observacions.

- En primer lloc que la funció $\arctan(x)$ pren valors a $(-\pi/2, \pi/2)$.
- En segon lloc que la funció $\text{Arg}(z)$ pren valors entre $(-\pi, \pi]$.
- A més a més la igualtat $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$ només té sentit mòdul 2π . Per exemple

$$\text{Arg}(i(-1 + i)) = \text{Arg}(-1 - i) = -3\pi/4 \neq \text{Arg}(i) + \text{Arg}(-1 + i) = \pi/2 + 3\pi/4 = 5\pi/4$$

però difereixen en 2π .

Dit això observem que $\text{Arg}(1 + i) = \pi/4$ i està en el primer quadrant, $\text{Arg}(5 - i) = \arctan(-1/5) = -\arctan(1/5)$ i està en el quart quadrant, $\text{Arg}((5 - i)^4) = -4 \arctan(1/5) = \text{Arg}(476 - 480i)$ que també està en el quart quadrant. Resulta que $(1 + i)(5 - i)^4 = 4(239 - i)$ que està en el quart quadrant i $\text{Arg}((1 + i)(5 - i)^4) = \arctan(-1/239) = -\arctan(1/239)$. Llavors

$$\pi/4 = 4 \arctan(1/5) - \arctan(1/239) + 2\pi n.$$

Però $\arctan(1/5) > \arctan(1/239)$ d'on $0 < 4 \arctan(1/5) - \arctan(1/239) < 4 \arctan(1/5) < 4 \arctan(1/\sqrt{3}) = 2\pi/3$ llavors ha de ser $n = 0$ i tenim la igualtat.

1.5.4. *Estudieu la convergència de $\{z_0^n\}$ si $|z_0| < 1$ o si $|z_0| > 1$.* $\triangleleft$

¹John Machin (1706), podeu trobar més informació a https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula.

Solució: Donem per conegut que si $0 < r < 1$ llavors $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ i que si $r > 1$ llavors $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$. Aleshores si $|z_0| < 1$ el límit és 0 i si és més gran que 1 no és mai convergent. De fet, el límit és, en cert sentit (en mòdul, per exemple), ∞ . El cas més interessant es dona quan $|z_0| = 1$. Aleshores $z_0 = e^{2\pi\alpha i}$. Si α és un enter, la successió és constant i, per tant, convergent. Altrament no és convergent. Concretament, si α és racional (llevat d'un enter) els $\{z_0^n\}$ formen un conjunt finit de punts de la circumferència. Si α és irracional és un conjunt infinit.

1.5.5. Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:

$$\begin{array}{lll} a) z_n = \frac{i}{n}, & c) z_n = \operatorname{Arg}(-1 + i/n), & e) z_n = \left(\frac{1-i}{4}\right)^n, \\ b) z_n = i(-1)^n, & d) z_n = \frac{n(2+i)}{n+1}, & f) z_n = \exp\left(\frac{2n\pi i}{5}\right). \end{array}$$

Aquí hem escrit $\exp(z) = e^z$. ◁

Solució: a) 0, b) No convergeix ($z_n = \pm i$ alterna), c) π , d) $2 + i$, e) 0, f) recorre les arrels cinquenes de la unitat.

1.6. Equacions amb exponencials

1.6.1. Resoleu les següents equacions:

$$a) e^z = 1 + i; \quad b) e^{iz} = -1. \quad \text{◁}$$

Solució: (a) $z = \ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
(c) $z = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.7. Arrels n -èsimes

1.7.1. Calculeu:

$$a) \sqrt[3]{-1}, \quad b) 3^{1/4}, \quad c) \sqrt[4]{-i}, \quad d) (-1 + \sqrt{3}i)^{1/2}, \quad e) (3 + 4i)^{1/2}. \quad \text{◁}$$

Solució: (a) -1 , $(1 \pm i\sqrt{3})/2$; (b) $\pm \sqrt[4]{3}$, $\pm i\sqrt[4]{3}$; (c) $\cos \theta + i \sin \theta$ amb $\theta = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$;
(d) $\pm \sqrt{2}/2(1 + i\sqrt{3})$; (e) $\pm(2 + i)$.

1.7.2. Donat $a \in \mathbb{C}$, quin és el màxim de $|z^n + a|$ per a $|z| \leq 1$? ◁

Solució: Si $a \neq 0$, el màxim s'assoleix en $|z| = 1$ i $z^n = \frac{a}{|a|}$. Si $a = 0$, s'assoleix per a tot z amb $|z| = 1$. El valor màxim és $1 + |a|$ en tots els casos.

1.7.3. Resoleu l'equació $e^{z^2} = i$

Solució: $z = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}; z = \pm \sqrt{2k\pi - \frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$

1.8. Polinomis: enunciat del teorema fonamental de l'àlgebra

1.8.1. Resoleu $(z + 1)^5 = z^5$. ◁

Solució: 1) Si z és solució ha de passar que $|z + 1| = |z|$ llavors z ha d'estar a la mateixa distància de -1 que de 0 . Llavors z es troba a la recta $x = -1/2$, és a dir, és de la forma $-1/2 + it$. Substituïm i veiem que t ha de satisfer $5t^4 - 5t^2/2 + 1/16 = 0$. Aquesta equació és biquadràtica i es resol fàcilment. Obtenim

$$-\frac{1}{2} \pm i \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{5} + 5}}{2\sqrt{5}} \right), -\frac{1}{2} \pm i \left(\frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} \right).$$

Numèricament $-1/2 \pm 0.688i$ i $-1/2 \pm 0.162i$.

2) Fem el canvi $z = 1/w$, llavors $(1/w + 1)^5 = 1/w^5$. Si $w \neq 0$ resulta que z és solució si i només si $(1 + w)^5 = 1$, això vol dir que $1 + w$ és una arrel 5-èsima de la unitat diferent de 1. Aleshores

$$1 + w = \omega^k, \quad k = 1, \dots, 4, \quad \omega = e^{i2\pi/5}.$$

Llavors

$$z = \frac{1}{\omega^k - 1} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \frac{\sin(2\pi k/5)}{1 - \cos(2\pi k/5)}, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Com abans tenim numèricament que $-1/2 \pm 0.688i$ i $-1/2 \pm 0.162i$.

Observem que l'equació polinòmica original és de grau 4 i, per tant, té 4 solucions.

1.8.2. Sigui $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$. Considerant el polinomi $(1 - z)P(z)$, demostreu que tots els zeros de $P(z)$ estan dins del disc unitat. ◁

Solució: $(1 - z)P(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} - nz^n$. Si z és zero de P amb $|z| > 1$ tenim que

$$|nz^n| = |1 + z + \dots + z^{n-1}| \leq 1 + |z| + |z|^2 + \dots + |z|^{n-1} < 1 + (n - 1)|z|^n$$

ja que $|z|^r < |z|^n$ si $r < n$. Llavors $n|z|^n < 1 + (n - 1)|z|^n$, això implica que $|z|^n < 1$. Contradicció amb $|z| > 1$. Llavors ha de ser $|z| \leq 1$.

2. Funcions de variable complexa

2.1. Funcions

2.1.1. *Escriure les següents funcions de la forma $u(x, y) + iv(x, y)$.*

a) $f(z) = 1/z$, b) $g(z) = \frac{2z^2 + 3}{|z - 1|}$, c) $h(z) = e^z + e^{-z}$. ◁

Solució:

a) $\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$. b) $\frac{2x^2-2y^2+3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + i\frac{4xy}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$.
c) $2(\cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \cdot \sin y)$.

2.1.2. *Trobeu el rang de*

a) $f(z) = z^2$ si z està en el primer quadrant,
b) $g(z) = 1/z$ per $0 < |z| \leq 1$,
c) $h(z) = -2z^3$ per z tal que $0 < |z| < 1$ i $\text{Arg} z < \pi/2$. ◁

Solució:

a) el semiplà superior, b) $\{z : |z| \geq 1\}$, c) $\{z : 0 < |z| < 2\}$.

2.1.3. *Digueu on són contínues les següents funcions*

a) $\frac{1}{z - 2 + 3i}$, c) $\frac{3z - 1}{z^2 + z + 4}$,
b) $\frac{iz^3 + 2z}{z^2 + 1}$, d) $z^2(2z^2 - 3z + 1)^{-2}$. ◁

Solució:

a) $\mathbb{C} \setminus \{2 - 3i\}$, c) $\mathbb{C} \setminus \{-1/2 \pm i\sqrt{15}/2\}$,
b) $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, d) $\mathbb{C} \setminus \{1, 1/2\}$.

2.1.4. *Proveu que la inversió $w = f(z) = 1/z$ transforma*

- a) *el cercle $\{|z| = r\}$ en el cercle $\{|w| = 1/r\}$;*
- b) *el raig $\{\operatorname{Arg} z = \theta_0\}$, amb $-\pi < \theta_0 < \pi$, en el raig $\{\operatorname{Arg} w = -\theta_0\}$;*
- c) *el cercle $\{|z - 1| = 1\}$ a la línia vertical $\{x = 1/2\}$.* $\triangleleft$

Solució:

- a) Si $|z| = r$ llavors $|1/z| = 1/r$,
- b) Si $z = re^{i\theta_0}$ amb $r > 0$ llavors $w = (1/r)e^{-i\theta_0}$ i l'afirmació és clara.
- c) Si $|z - 1| = 1$ llavors $z = 1 + e^{it} = 1 + \cos t + i \sin t$ i

$$w = 1/z = \frac{1 + \cos t - i \sin t}{(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t} = \frac{1 + \cos t - i \sin t}{2 + 2 \cos t}$$

té part real igual a $1/2$. Estudiant els límits laterals, per exemple, o bé trobant-ne la inversa, podem comprovar que és exhaustiva en aquesta recta.

2.1.5. *Trobeu una funció afí que transformi el cercle $\{|z| < 1\}$ en el cercle $\{|w - w_0| < R\}$ de manera que els centres es corresponguin i el diàmetre horitzontal es transformi en el diàmetre que forma un angle α amb l'eix real.* $\triangleleft$

Solució: Volem trobar $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$ de manera que $f(0) = w_0$, $f(e^{it}) = w_0 + Re^{i(t+\alpha)}$. Llavors $b = w_0$ i $a = Re^{i\alpha}$ i

$$f(z) = Re^{i\alpha}z + w_0.$$

2.1.6. *Per l'exponencial $f(z) = e^z$:*

- a) *Descriviu-ne el domini i el rang.*
- b) *Proveu que $f(-z) = 1/f(z)$.*
- c) *Descriviu la imatge de $\{\operatorname{Re} z = 1\}$.*
- d) *Descriviu la imatge de $\{\operatorname{Im} z = \pi/4\}$.*
- e) *Descriviu la imatge de la banda $\{0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi/4\}$.* $\triangleleft$

Solució:

- a) Domini és $\mathbb{C}$ i rang és $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- b) $f(-z) = e^{-z} = 1/e^z = 1/f(z)$.

- c) $\{e^{1+iy} = e(\cos y + i \sin y), y \in \mathbb{R}\}$ és la circumferència de radi e centrada a l'origen de coordenades.
- d) $\{e^{x+i\pi/4} = e^x(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2), x \in \mathbb{R}\}$ que és el raig $y = x$ amb $x > 0$.
- e) El sector circular amb angle entre 0 i $\pi/4$ al primer quadrant.

2.1.7. La funció de Jukovski¹ és $w = J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, vegeu la figura 3.7. Proveu que

- a) $J(z) = J(1/z)$,
- b) J porta el cercle unitat $\{|z| = 1\}$ a l'interval real $[-1, 1]$,
- c) J porta el cercle $\{|z| = r\}$ ($r > 0, \neq 1$) a l'el·lipse $\left\{ \frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1 \right\}$,
que té els focus a ± 1 . ◁

Solució:

- a) $J(1/z) = \frac{1}{2} \left(1/z + \frac{1}{1/z} \right) = J(z)$.
- b) $J(e^{it}) = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) = \cos(t) \in [-1, 1]$.
- c) Si $J(re^{it}) = u(t) + iv(t)$ és clar que $u(t) = \frac{1}{2}(r + 1/r) \cos(t)$ i $v(t) = \frac{1}{2}(r - 1/r) \sin(t)$. D'aquí deduïm que (u, v) de la imatge de $|z| = r$ satisfan l'equació de l'el·lipse que es dona. Recordem que en una el·lipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ amb $a > b$ els focus estan a $(\pm c, 0)$ amb $c = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$. En el nostre cas $a = \frac{1}{2}(r + 1/r)$, $b = \frac{1}{2}|r - 1/r|$ i $c = \pm 1$.

2.1.8. Fent servir la comanda `contour_plot` de Sage dibuixeu les corbes de nivell de u i v si $f = u + iv$ és

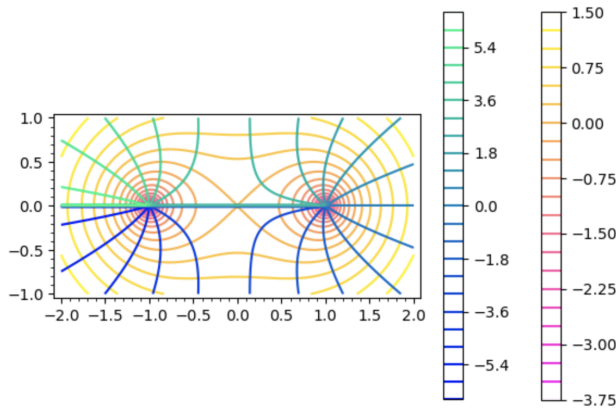
- | | | |
|----------------|----------------|---|
| a) z , | d) $\sin(z)$, | g) e^z , |
| b) z^2 , | e) $1/z$, | h) $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$, |
| c) $\log(z)$, | f) $1/z^2$, | i) $\log(z-1) + \log(z+1)$. ◁ |

Solució: Pel cas i) podem fer com es veu a la figura annexa

¹Nikolai Jukovski, Orekhovo, 1847–1921. https://ca.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Jukovski

```
In [35]: var('x,y',domain='real')
z=x+i*y
f=log(z+1)+log(z-1)
g(x,y)=f.imag_part()
h(x,y)=f.real_part()
v=contour_plot(lambda x,y: g(x,y), (x,-2,2), (y,-1,1), cmap='winter',contours=20, fill=False, colorbar=True)
u=contour_plot(lambda x,y: h(x,y), (x,-2,2), (y,-1,1), cmap='spring',contours=20, fill=False, colorbar=True)
u+v
```

Out [35]:



Els altres són encara més senzills.

2.2. Funcions multivaluades: logaritmes i arguments

2.2.1. Donada l'equació de Cardano $z^3 + pz + q = 0$, comproveu que si $C = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$, aleshores $z_1 = C - \frac{p}{3C}$ és solució de la cúbica. Les tres arrels s'obtenen canviant l'elecció de l'arrel cúbica.

Tot seguit obriu GeoGebra² i dibuixeu els punts $p = 1+i$ i $q = 2+0i$; definiu $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, C mitjançant la fórmula anterior, i $z_1 = C - \frac{p}{3C}$, $z_2 = wC - \frac{p}{3wC}$ i $z_3 = w^2C - \frac{p}{3w^2C}$. Escolliu tres colors diferents per z_j , i activeu la seva traça. Deixant q fixat i movent p , per exemple, comproveu que els tres punts són funció de p , i es poden determinar com a branques contínues localment de manera contínua, tot i que C presenta discontinuïtats de salt que fan que els tres z_j vagin permutant la seva posició. Per exemple, podeu fixar p en la circumferència de radi 4 amb la instrucció `p=Punt(Circumferència((0, 0), 4))` i observar què ocorre, i comparar amb el radi 2 o 3. Podeu usar també la instrucció `lloc geomètric`. Quantes voltes cal que faci p a aquesta circumferència per tal que una arrel doni la volta a l'origen de manera contínua? ◁

Solució:

$$z_1^3 + pz_1 + q = \left(C - \frac{p}{3C}\right)^3 + p\left(C - \frac{p}{3C}\right) + q.$$

Notem que

$$\left(C - \frac{p}{3C}\right)^3 = C^3 - pC + \frac{p^2}{3C} - \frac{p^3}{27C^3}.$$

²o entra a <https://www.geogebra.org/m/jbszj89u>

Per tant,

$$z_1^3 + pz_1 + q = C^3 - \frac{p^3}{27C^3} + q = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{p^3}{27\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} + q.$$

Notem ara que

$$\frac{p^3}{27\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} = \frac{p^3\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}{27\left(\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

2.2.2. Calculeu els possibles valors de

a) $\log(1)$, b) $\log(-1)$, c) $\log(1+i)$, d) $\log(1-i\sqrt{3})$, e) $\log(i)$. ◁

Solució: (a) $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$; (b) $(2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$; (c) $\ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$; (d) $\ln 2 + i(5\pi/3 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$; (e) $(\pi/2 + 2k\pi)i, k \in \mathbb{Z}$.

2.2.3. Escriu $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ i $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$. Resoleu les equacions

a) $e^z = 2i$; c) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$; e) $\cos z = \sin z$. ◁
b) $\operatorname{Log}(z^2 - 1) = i\pi/2$; d) $\cos z = 2i$;

Solució: a) $z \in \log(2i)$ és a dir $z \in \{\ln(2) + i\pi/2 + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$

b) Escriu $w = z^2 - 1$. Trobem que $w = e^{i\pi/2} = i$. Per tant, $z^2 - 1 = i$, i $z = \pm\sqrt{1+i} = \pm\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$.

c) Posem $e^z = t$ llavors t és una arrel tercera de la unitat que no és 1, és a dir $t = e^{\pm i2\pi/3}$. Llavors $z \in \{i(2\pi/3 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{i(-2\pi/3 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$

d) Posem $w = e^{iz}$, resollem l'equació de segon grau que obtenim i resulta $w = (2 \pm \sqrt{5})i$. Per tant, $z = \pi/2 + 2k\pi - i\ln(2 + \sqrt{5})$, i $z = -\pi/2 + 2k\pi - i\ln(\sqrt{5} - 2)$. Tot plegat, queda

$$z = \pm(\pi/2 + 2k\pi + i\ln(\sqrt{5} - 2)), \quad \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

e) Procedim com en el cas anterior i tenim que

$$z \in \{\pi/4 + 2k\pi, 5\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{\pi/4 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

2.2.4. Determinar explícitament la inversa de $q(z) = 2e^z + e^{2z}$ en funció de logaritmes. Resoldre $q(z) = 3$, trobant totes les solucions.

Solució: Si $t = e^z$ cal resoldre l'equació $t^2 + 2t - w = 0$ d'on

$$e^z = -1 + \sqrt{1+w},$$

on usem $\sqrt{}$ per la funció multivaluada arrel quadrada. Apliquem logaritmes i obtenim

$$q^{-1}(w) = \log(-1 + \sqrt{1+w}) = \text{Log}(-1 \pm e^{\frac{1}{2}\text{Log}(1+w)}) + 2k\pi i$$

que és una funció multivaluada.

- Per la branca positiva de l'arrel tenim que

$$q^{-1}(3) = \log(-1 + 2) = \log(1) = \{2\pi ni, n \in \mathbb{Z}\}.$$

- Per la branca negativa

$$q^{-1}(3) = \log(-1 - 2) = \log(-3) = \{\ln(3) + i(\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}\}.$$

2.2.5. Sigui $\mathcal{L}$ una determinació del logaritme en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ tal que $\mathcal{L}(1) = 2\pi i$. Proveu que la funció $f(z) = \mathcal{L}(z+3)$ és contínua en

$$D := \{z \in \mathbb{C}; \text{Re}(z) > -3\}.$$

Quant val $f(3i)$? ◁

Solució: Notem que $D + 3 = \{z \in \mathbb{C}; \text{Re}(z) > 0\} \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Per tant, f és contínua. A més sabem que $\mathcal{L} = \text{Log} + 2k\pi i$. Com que $0 = \text{Log}(1) = \mathcal{L}(1) - 2k\pi i = 2\pi i - 2k\pi i$, trobem $k = 1$. I per tant,

$$f(3i) = \mathcal{L}(3i+3) = \text{Log}(3i+3) + 2\pi i = \ln|3i+3| + (\text{Arg}(3i+3) + 2\pi)i = \ln(3\sqrt{2}) + \frac{9\pi}{4}i.$$

2.2.6. Una branca de l'argument $\mathcal{A}(z)$ (i la del logaritme $\mathcal{L}(z)$ corresponent, vegeu l'observació 2.13) queda fixada si donem el domini Ω on està definida i el valor de $\mathcal{A}(z)$ (o de $\mathcal{L}(z)$) d'un punt d' Ω . Considereu els dominis:

$$\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi}, r \geq 0\}; \quad \Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi/4}, r \geq 0\};$$

$$\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus (\{x \in [-1, 0]\} \cup \{-1 + iy, y \in [0, 1.5]\} \cup \{x + 1.5i, x \in [-1, \infty)\}).$$

Completeu la següent taula.

Solució:

	Ω_1	Ω_2	Ω_3
$\mathcal{A}(1) = 0$	$\mathcal{A}(i) = \frac{\pi}{2}$ $\mathcal{L}(i) = \frac{\pi}{2}i$	$\mathcal{A}(i) = \frac{-3\pi}{2}$ $\mathcal{L}(i) = \frac{-3\pi}{2}i$	$\mathcal{A}(i) = \frac{\pi}{2}$ $\mathcal{L}(i) = \frac{\pi}{2}i$ $\mathcal{L}(2i) = \frac{-3\pi}{2}i + \ln 2$
$\mathcal{A}(1) = -2\pi$	$\mathcal{A}(i) = \frac{-3\pi}{2}$ $\mathcal{L}(i) = \frac{-3\pi}{2}i$	$\mathcal{A}(i) = \frac{-7\pi}{2}$ $\mathcal{L}(i) = \frac{-7\pi}{2}i$	$\mathcal{A}(i) = \frac{-3\pi}{2}$ $\mathcal{L}(i) = \frac{-3\pi}{2}i$ $\mathcal{L}(2i) = \frac{-7\pi}{2}i + \ln 2$
$\mathcal{A}(i) = -\frac{3\pi}{2}$	$\mathcal{A}(1) = -2\pi$ $\mathcal{L}(1) = -2\pi i$	$\mathcal{A}(1) = 0$ $\mathcal{L}(1) = 0$	$\mathcal{A}(1) = -2\pi$ $\mathcal{L}(1) = -2\pi i$ $\mathcal{L}(2i) = \frac{-7\pi}{2}i + \ln 2$

2.2.7. Estudieu si existeix alguna determinació del logaritme en els conjunts següents i determineu els possibles conjunts imatge:

- a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}$, c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$. ◁

Solució: a) Sí, $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, per tant $f_k(z) = \operatorname{Log}(z) + 2k\pi i$ és una determinació amb $f_k(\Omega) = \{x + iy : y - 2k\pi \in (-\pi/2, \pi/2)\}$ per algun $k \in \mathbb{Z}$ fixat.

b) Sí, $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, per tant per algun $k \in \mathbb{Z}$ fixat, definim $f_k(z) = \operatorname{Log}(z) + 2k\pi i$, que és una determinació amb $f_k(\Omega) = \{x + iy : y \in (-3\pi/4 + 2k\pi, \pi/4 + 2k\pi)\}$.

c) No. Si existís, existiria una branca contínua de l'argument $\mathcal{A} : D_2(0) \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$. Aleshores $f(z) = \mathcal{A}(3z/2)$ serà una determinació en $\partial\mathbb{D}$, però no n'existeix cap per la proposició 2.15.

2.2.8. Feu un esbós del domini $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : z \neq e^{x+2\pi i x} \text{ per } x \in \mathbb{R}\}$. Sigui $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una determinació de l'argument en aquest domini i $\mathcal{L}$ la determinació del logaritme associada. Suposant que $\mathcal{A}(i) = \frac{-3\pi}{2}$, determineu $\mathcal{A}(-i)$ i $\mathcal{L}(e^{5/2})$. ◁

2.2.9. Siguin $h_0(z)$, $h_1(z)$ i $h_2(z)$ les determinacions de l'arrel cúbica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (és a dir, funcions contínues que satisfan que $h_j(z)^3 = z$ en Ω) tals que $h_0(1) = 1$, $h_1(1) = e^{2\pi i/3}$ i $h_2(1) = e^{4\pi i/3}$.

i) Descriuiu $h_j(\Omega)$ per $j = 0, 1, 2$.

ii) Per $j = 0, 1, 2$ relacioneu h_j amb Log i Arg .

iii) Usant les relacions anteriors, trobeu el valor de $h_j(i)$, per $j = 0, 1, 2$. ◁

Solució: Tenim que $h_j(z)^n = z = e^{x+iy+2k\pi i}$ per tot $z \in \Omega$, on fixem $y = \operatorname{Arg} z$. Si escrivim les parts real i imaginària del logaritme tindrem

$$h_j(z) = e^{u+iv}$$

amb $nu = x$ i $nv = y + 2k\pi$. Per tant,

$$u = \frac{x}{n} \quad v = \frac{y + 2k\pi}{n}.$$

Traient-ne mòdul i argument tenim que

$$|h_j(z)| = e^{\frac{x}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \quad \text{Arg}(h_j(z)) = \frac{y + 2k\pi}{n} = \frac{\text{Arg}(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Responem ara les preguntes:

i) Trobem imposant que $e^{2\pi ji/3} \in h_j(\Omega)$, que

$$h_0(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}(z) \in (-\pi/3, \pi/3)\},$$

$$h_1(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}(z) \in (\pi/3, \pi)\},$$

$$h_2(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}(z) \in (-\pi, -\pi/3)\}.$$

ii) En tenir $n = 3$ trobem

$$\text{Arg}(h_j(z)) = \frac{\text{Arg}(z)}{3} + \frac{2k_j\pi}{3} \implies k_j = \frac{3\text{Arg}(h_j(z))}{2\pi} - \frac{\text{Arg}(z)}{2\pi}.$$

En el cas $z = 1$,

$$k_0 = \frac{3\text{Arg}(1)}{2\pi} - \frac{\text{Arg}(1)}{2\pi} = 0 - 0 = 0.$$

$$k_1 = \frac{3\text{Arg}(e^{2\pi i/3})}{2\pi} - \frac{\text{Arg}(1)}{2\pi} = 1 - 0 = 1.$$

$$k_2 = \frac{3\text{Arg}(e^{-2\pi i/3})}{2\pi} - \frac{\text{Arg}(1)}{2\pi} = -1 - 0 = -1.$$

Per tant,

$$h_j(z) = |h_j(z)|e^{i\text{Arg}(h_j(z))} = |z|^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\text{Arg}(z)}{3} + i\frac{2k_j\pi}{3}} = e^{\frac{\text{Log}(z)}{3} + i\frac{2k_j\pi}{3}}.$$

iii)

$$h_j(i) = |i|^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\text{Arg}(i)}{3} + i\frac{2k_j\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{2k_j\pi}{3}} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{6}} & \text{si } j = 0, \\ e^{i\frac{5\pi}{6}} & \text{si } j = 1, \\ e^{i\frac{-\pi}{2}} = -i & \text{si } j = 2. \end{cases}.$$

2.3. Potències complexes

2.3.1. Trobeu l'error en el següent raonament de Bernoulli: $(-z)^2 = z^2$, llavors $2 \log(-z) = 2 \log z$. Per tant, $\log(-z) = \log(z)$. $\triangleleft$

Solució: Recordem que $\log(z) = \{\ln r + i(\theta + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$ on $z = re^{i\theta}$. És a dir, $\log(z)$ és un conjunt de valors, és multivaluada. Recordem també que e^z és $2\pi i$ periòdica. Llavors $(-z)^2 = z^2 \Rightarrow e^{2 \log(-z)} = e^{2 \log(z)} \Rightarrow 2 \log(-z) - 2 \log(z) = 2k\pi i \Rightarrow \log(-z) - \log(z) = k\pi i$.

Els arguments de z i de $-z$ (que són oposats) difereixen en un múltiple senar de π . Si considerem els arguments principals

$$|\operatorname{Arg}(-z) - \operatorname{Arg}(z)| = k\pi, \quad |\operatorname{Arg}(-z) - \operatorname{Arg}(z)| < 2\pi$$

llavors difereixen en π . La conclusió correcta doncs, en termes de funcions multivaluades, és $\log(-z) = \log(z) + \pi i$.

2.3.2. Calculeu els possibles valors de

$$a) i^i, \quad b) (\sqrt{3} + i)^{1-i}, \quad c) 2^{-i}, \quad d) (i^2)^i, \quad e) (i^i)^2. \quad \triangleleft$$

Solució: (a) $\exp(-(\pi/2 + 2k\pi)), k \in \mathbb{Z}$; (b) $\exp(\ln 2 + \frac{\pi}{6} + 2k\pi + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi - \ln 2)), k \in \mathbb{Z}$; (c) $e^{2k\pi} e^{-i \ln 2}, k \in \mathbb{Z}$; (d) $e^{\pi(1+2k)}, k \in \mathbb{Z}$. (e) $e^{\pi(-1+4k)}, k \in \mathbb{Z}$.

2.4. Determinacions de logaritmes i arrels de funcions

2.4.1. Sigui X un espai topològic connex. Demostreu que si $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ són dues determinacions de l'arrel n -èsima de $f : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ llavors existeix una arrel n -èsima de la unitat ζ tal que $\mathcal{S}_2(x) = \zeta \cdot \mathcal{S}_1(x)$, per a tot $x \in X$. $\triangleleft$

Solució: Sabem que $\mathcal{S}_1(x) \neq 0$ per hipòtesi. Aleshores $\frac{\mathcal{S}_2(x)}{\mathcal{S}_1(x)}$ és contínua, i

$$\left(\frac{\mathcal{S}_2(x)}{\mathcal{S}_1(x)} \right)^n = 1.$$

Com que $\frac{\mathcal{S}_2(x)}{\mathcal{S}_1(x)}$ pren per valors en les arrels de la unitat

$$\left\{ 1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{4\pi i}{n}}, \dots, e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}} \right\},$$

que és un conjunt finit, necessàriament la funció $\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1$ és constant (la imatge contínua d'un connex és connexa).

2.4.2. Determineu els dominis de continuïtat (és a dir l'obert maximal on una funció és contínua) de les funcions e^{z^2} , $e^{1/z}$, $1/e^z$, $1/(e^z - 1)$, de la branca principal de $\sqrt{1-z}$ i de la branca principal de $\sqrt{1+e^z}$. $\triangleleft$

Solució:

- e^{z^2} és contínua a $\mathbb{C}$.
- $e^{1/z}$ té domini $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- $1/e^z$ té domini $\mathbb{C}$, ja que el recorregut de l'exponencial és el domini de $1/z$.
- $1/(e^z - 1)$ té domini $\mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$.
- $\sqrt{1-z} = e^{\frac{1}{2}\text{Log}(1-z)}$ té domini de continuïtat $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$.
- $\sqrt{1+e^z} = e^{\frac{1}{2}\text{Log}(1+e^z)}$ té domini de continuïtat

$$\mathbb{C} \setminus \{z : e^{\text{Re } z} \geq 1, \text{Im } z \in \pi + 2\pi k\} = \mathbb{C} \setminus \{x + i(2k+1)\pi : x \geq 0\}.$$

Per aquest cas, notem que cal $1 + e^z \notin (-\infty, 0]$, és a dir $e^z \notin (-\infty, -1]$.

2.4.3. Doneu una determinació de $f(z)$ que sigui contínua a la regió D donada.

a) $f_1(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

b) $f_2(z) = (z^2 + 4)^{1/2}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{iy \in \mathbb{C} : |y| < 2\}$,

c) $f_3(z) = (z^4 - 1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,

d) $f_4(z) = (z^3 - 1)^{1/3}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. ◁

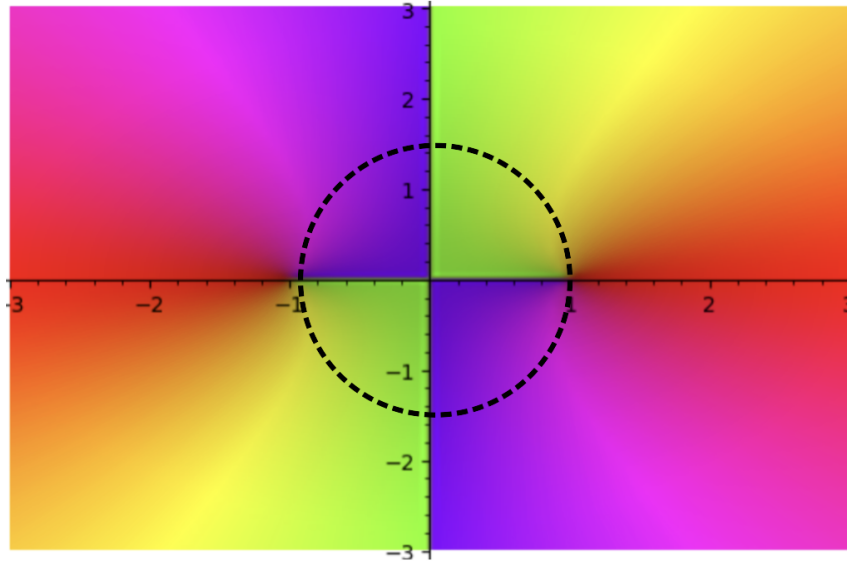
Solució: a) Observem que si considerem la branca principal tenim que

$$(z^2 - 1)^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\text{Log}(z^2 - 1)\right)$$

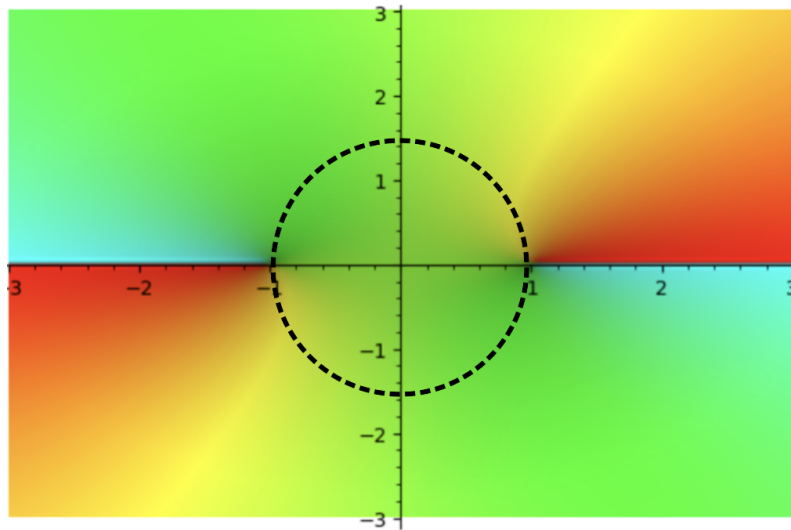
i Log té com a domini d'holomorfia tots els $z \in \mathbb{C}$ excepte els que $z^2 - 1 \leq 0$, és a dir cal treure els $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $a^2 - b^2 + 2abi \leq 1$. Això només pot passar per $ab = 0$. Cas $a = 0$, llavors per a tot bi es compleix. Cas $b = 0$, cal que $a^2 \leq 1$. No és la branca que volem ja que en aquest cas

$$D = \mathbb{C} \setminus (\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 0, |\text{Re } z| < 1\}).$$

Observem abans el que es veu si fem un `complex.plot()`:



Caldrà canviar la branca del logaritme. Podem buscar una branca de l'argument que ens vagi bé però és més fàcil considerar $\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{(-1)(1 - z^2)} \stackrel{0.2.21}{=} i\sqrt{1 - z^2} = i \exp(\frac{1}{2}\text{Log}(1 - z^2))$. Aleshores, traient els z tal que $1 - z^2 \leq 0$ resulta que el domini és $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : |z| \geq 1\}$ i aquest domini inclou el disc. Veiem el `complex_plot()` corresponent:



Vegeu també la figura 3.8.

b) Com a funcions multivaluades (o multivalents) tenim que $\sqrt{z^2 + 4} = z\sqrt{1 + 4/z^2}$, això vol dir que els conjunts que determinen són iguals. Les branques principals de cada

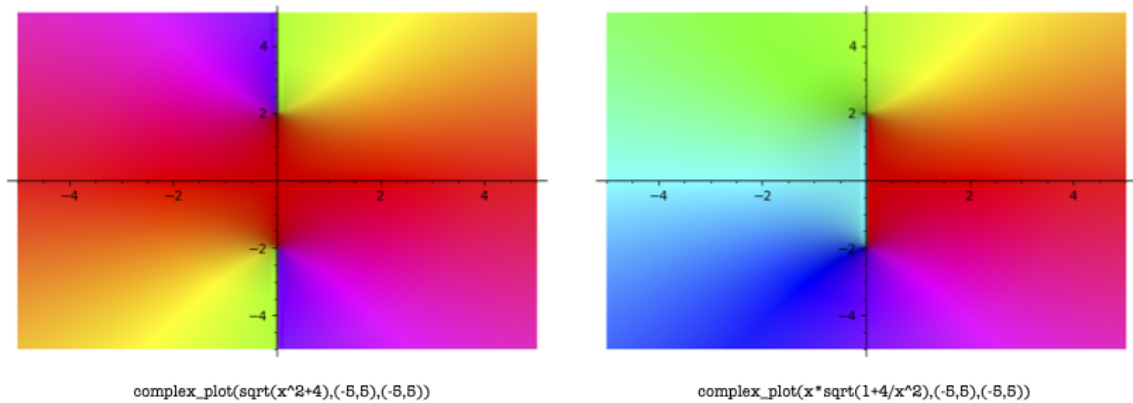
expressió són:

$$\sqrt{z^2 + 4} = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}(z^2 + 4)\right), \quad D = \mathbb{C} \setminus \{z^2 + 4 \leq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{iy, y \in \mathbb{R} : |y| \geq 2\}$$

$$z\sqrt{1 + 4/z^2} = z \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}(1 + 4/z^2)\right), \quad D = \mathbb{C} \setminus \{1 + 4/z^2 \leq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{iy, y \in \mathbb{R} : |y| \leq 2\}$$

on Log denota la branca principal del logaritme.

La que ens va bé és la branca principal de la segona expressió. El domini de continuïtat és llavors $\mathbb{C} \setminus \{iy, y \in \mathbb{R} : |y| < 2\}$.



c) Considerem $f_3(z) = z^2\sqrt{1 - 1/z^4} = iz^2f_1(1/z^2)$, d) Similarment podem definir $z\sqrt[3]{1 - 1/z^3}$.

2.5. Sèries de potències de nombres complexos

2.5.1. Considereu la sèrie de potències $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - i)^n$. Digueu si són certes les següents afirmacions.

- a) $S(z)$ pot ser divergent en $z = 0$ i convergent en $z = -i$ simultàniament.
- b) $S(z)$ pot ser convergent en $z = 1 + i$ i en $z = 2 + i$ simultàniament.
- c) Si $S(z)$ és convergent en $z = 1 + i$, aleshores també ho és en $z = 2i$.
- d) Si $S(z)$ és divergent en $z = 2i$, aleshores també ho és en $z = 2 + i$. ◁

Solució: Falsa. Certa. Falsa. Certa.

La darrera, per exemple, es pot justificar així: Si S és divergent en $z = 2i$, aleshores el radi de convergència $R \leq |2i - i| = 1$. En particular, la sèrie divergeix en tot z tal que $|z - i| > 1$, cosa que se satisfà a $z = 2 + i$. L'afirmació és, per tant, CERTA.

2.5.2. Sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una sèrie convergent en el disc $D = D_R(0)$. Demostreu que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \quad \text{si } 0 < r < R. \quad \triangleleft$$

Solució: Prenem una suma parcial $f_N := \sum_{n=0}^N a_n z^n$. Observem que

$$\begin{aligned} |f_N(re^{i\theta})|^2 &= f_N(re^{i\theta}) \overline{f_N(re^{i\theta})} = \operatorname{Re} \left(\left(\sum_{n=0}^N a_n r^n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{m=0}^N \bar{a}_m r^m e^{-im\theta} \right) \right) \\ &= \sum_{n,m=0}^N r^{n+m} \operatorname{Re} (a_n \bar{a}_m e^{i(n-m)\theta}). \end{aligned}$$

Integrant, i escrivint $\int u + iv = \int u + i \int v$, tenim que

$$\int_0^{2\pi} |f_N(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n,m=0}^N r^{n+m} \operatorname{Re} \left(a_n \bar{a}_m \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right)$$

Però tenim que

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m, \end{cases}$$

la qual cosa ja dona el resultat si la sèrie és finita.

D'altra banda, com que f_N convergeix uniformement a f en el disc $\overline{D_r(0)}$, tenim que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \leq \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

2.5.3. Sigui $S_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ i $S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$. Demostreu que S_1 és convergent en z si i només si ho és S_2 . En cas afirmatiu, tenim que $S_1(z) = zS_2(z)$. $\triangleleft$

Solució: (proposada per Clara Valls Moreso)

El cas $z = 0$, és trivialment cert ja que

$$S_1(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 0^n = 0,$$

que és convergent,

$$S_2(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 0^{n-1} = a_1,$$

que també és convergent i, per tant, efectivament $S_1(z) = zS_2(z)$ per $z = 0$:

$$S_1(0) = 0 = 0 \cdot a_1 = 0 \cdot S_2(0).$$

Manca estudiar el cas general $z \neq 0$.

$\Rightarrow$ Suposem que $S_1(z)$ és convergent. Per definició, la successió de sumes parcials

$$S_1^{(N)}(z) := \sum_{n=1}^N a_n z^n$$

convergeix quan $N \rightarrow \infty$.

Observem que

$$S_1^{(N)}(z) = \sum_{n=1}^N a_n z^n = z \sum_{n=1}^N a_n z^{n-1} = z S_2^{(N)}(z).$$

Com que $z \neq 0$ obtenim

$$S_2^{(N)}(z) = \frac{S_1^{(N)}(z)}{z}.$$

Prenent límits, com que $S_1(z)$ és convergent i $z \neq 0$, obtenim

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_2^{(N)}(z) = \frac{1}{z} \lim_{N \rightarrow \infty} S_1^{(N)}(z) = \frac{S_1(z)}{z} \in \mathbb{C}.$$

Així $S_2(z)$ és convergent i a més

$$zS_2(z) = S_1(z).$$

.

$\Leftarrow$ Suposem que $S_2(z)$ és convergent. Per definició la successió de sumes parcials,

$$S_2^{(N)}(z) := \sum_{n=1}^N a_n z^{n-1}.$$

convergeix quan $N \rightarrow \infty$.

Observem que:

$$zS_2^{(N)}(z) = \sum_{n=1}^N a_n z^n = S_1^{(N)}(z).$$

Prenent límits

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_1^{(N)}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} zS_2^{(N)}(z) = z \lim_{N \rightarrow \infty} S_2^{(N)}(z).$$

Com que $S_2(z)$ és convergent, també $S_1(z)$ és convergent i

$$S_1(z) = zS_2(z).$$

Així doncs queda provat l'enunciat.

2.6. Càlcul del radi de convergència

2.6.1. Calculeu el radi de convergència de les següents sèries de potències

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n; \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{n}};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n} z^n;$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} (z-2)^{n(n+1)};$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2^n}}{n^n};$$

$$h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2^n};$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n} (z-1)^n;$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (3z-2)^n;$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} (z+1)^n, \text{ per } a \in (0, 1);$$

$$j) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n)^n z^{2^n}.$$

<

Solució: Els oberts on hi ha convergència absoluta i uniforme en compactes són: (a) $\mathbb{D}$; (b) $D_{e/4}(0)$; (c) $D_1(-i)$; (d) $D_{2e}(1)$; (e) $\mathbb{C}$; (f) $D_{1/2}(0)$; (g) $D_1(2)$; (h) $D_2(0)$; (i) $D_{1/3}(2/3)$; (j) $\mathbb{D}$.

Per exemple, fem i) i j).

(i) Escrivim $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (3z-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n n^2 \left(z - \frac{2}{3}\right)^n$, així que definim $a_n := 3^n n^2$.

Calculem

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2 3^{n+1}}{n^2 3^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3.$$

Per tant, pel criteri del quocient, el radi de convergència és $1/3$. Tenim doncs convergència al disc $D_{1/3}(2/3)$. En compactes la convergència serà uniforme.

(j) Tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n)^n z^{2^n}$. Notem que el coeficient s'anul·la per $n = 2k + 1$. És a dir que $a_j = 0$ si $j \neq 4^k$, i $a_j = 4^k = j$ si $j = 4^k$. Aleshores

$$\limsup_j \sqrt[j]{|a_j|} = \limsup_k \sqrt[4^k]{|a_{4^k}|} = \limsup_{j=4^k} \sqrt[j]{j}$$

Com que aquest límit existeix, podem substituir límit superior per límit:

$$\lim_j \sqrt[j]{j} = e^{\lim_j \frac{\ln j}{j}} = 1.$$

Per tant, el radi de convergència és $R = 1/1 = 1$, i tenim convergència al disc $\mathbb{D}$.

2.7. Comportament a la frontera del disc de convergència

2.7.1. Estudieu la convergència de les següents sèries de potències:

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, & c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}, & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}. \quad \triangleleft \\
 b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)}, & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n, &
 \end{array}$$

Solució: (a) Conv. unif. en compactes de $\mathbb{D}$ i en tot arc tancat de $\{|z| = 1\}$ que no contingui $z = 1$.

(b) Conv. abs. i unif. a $\overline{\mathbb{D}}$ pel criteri M de Weierstrass.

(c) Conv unif. en tot compacte de $\mathbb{D}$ i en tot arc tancat de $|z| = 1$ que no contingui $1, e^{2\pi i/3}$ o $e^{4\pi i/3}$.

Si anomenem $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$, podem veure que el radi de convergència és 1. Quan el mòdul és $|z| \leq 1$ (la desigualtat estricta no cal, però surt “gratis”), mirem d’aplicar el criteri de Dirichlet:

$$\left| \sum_{n=0}^N z^{3n+1} \right| = |z| \left| \frac{1 - z^{3(N+1)}}{1 - z^3} \right| \leq \frac{2}{|1 - z^3|}$$

Per tant, si $\text{dist}(z^3, 1) > \varepsilon$, aleshores tenim una cota uniforme de les sumes parcials $\sum_{n=0}^N z^{3n+1}$ i podem aplicar el criteri de Dirichlet.

Concloem que per tot compacte de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1, e^{\pm 2\pi i/3}\}$ hi ha convergència uniforme. En particular, en aquests compactes S és el límit uniforme de polinomis, que són funcions contínues, i és, per tant, contínua a $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1, e^{\pm 2\pi i/3}\}$ i uniformement contínua en compactes.

(d) Conv. unif. en compactes de $\mathbb{D}$ i en tot arc tancat de $\{|z| = 1\}$ que no contingui $z = -1$:

Si anomenem $S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n$, aleshores $S(z) = -T(-z)$, on $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ és la sèrie estudiada a l’apartat (a). Així deduïm que S convergeix uniformement en compactes de $\mathbb{D}$ i en tot arc tancat de $\{|z| = 1\}$ que no contingui $z = -1$.

(e) Conv unif. en compactes de $D_5(i)$. Divergeix per a tot punt de la frontera del disc:

Estudiem la sèrie $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$. Notem que el radi de convergència és 5 i que quan $|z - i| = 5$, aleshores el terme general de la sèrie té mòdul $\left| \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n} \right| = \frac{n}{5}$ que no convergeix a zero (condició necessària per la convergència d’una sèrie!). Per tant, la sèrie és divergent a tota la circumferència. La convergència és uniforme en compactes de $D_5(i)$.

2.7.2. *Demostreu el criteri d'Abel i el teorema d'Abel. Indicació: Vegeu [BC13, teorema 2.20] per un cas més general en regions no tangencials (angles de Stolz).* $\triangleleft$

Solució: Deixem el criteri pel lector, i demostrem el teorema d'Abel: Apliquem el criteri d'Abel a $X = A$, $Y = [0, 1]$, per sèrie en X prenem $a_n(\zeta - b)^n$, i en Y prenem r^n , i deduïm que $\sum_n a_n r^n (\zeta - b)^n$ convergeix uniformement a $X \times Y$. És a dir que per tot ε existeix n_ε tal que $m, n > n_\varepsilon$, $\zeta \in A$, $r \in [0, 1]$, trobem

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k r^k (\zeta - b)^k \right| < \varepsilon.$$

Si $z \in C(A, b)$, aleshores existeixen $\zeta \in A$ i $r \in Y$ tal que $z = b + r(\zeta - b)$. Deduïm que

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k (z - b)^k \right| = \left| \sum_{k=n}^m a_k r^k (\zeta - b)^k \right| < \varepsilon,$$

que és la condició de convergència uniforme en $C(A, b)$.

Per veure l'intercanvi de límits, n'hi ha prou amb establir la continuïtat del límit. Notem que $\sum_{k=0}^n a_k (z - b)^k$ és contínua en $\mathbb{C}$ i, per tant, en el con. La convergència uniforme de funcions contínues implica que el límit és continu: per la desigualtat triangular, per tot n tenim que

$$|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(w)| + |f_n(w) - f(w)|;$$

per la convergència uniforme, si $\varepsilon > 0$ existeix n tal que $\sup_z |f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$; i per la continuïtat de f_n existeix δ tal que $|z - w| < \delta$ implica $|f_n(z) - f_n(w)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Per tant,

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(z) - f_n(w)| < \varepsilon. \quad \square$$

3. Derivació complexa i holomorfia

3.1. Funcions holomorfes

3.1.1. a) Demostreu la regla del producte per la derivació.

b) Proveu que si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 llavors és contínua en aquest punt.

c) Proveu que si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 , llavors

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \lambda(z)(z - z_0)$$

on $\lambda(z) \rightarrow 0$ si $z \rightarrow z_0$.

◁

Solució:

a)

$$\begin{aligned} & \frac{f(z + \Delta z)g(z + \Delta z) - f(z)g(z)}{\Delta z} \\ &= \frac{f(z + \Delta z)g(z + \Delta z) - f(z + \Delta z)g(z) + f(z + \Delta z)g(z) - f(z)g(z)}{\Delta z}, \end{aligned}$$

prenem factor comú, passem al límit i obtenim $f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ que és la fórmula per la derivada.

b) Volem veure que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ quan f és derivable en z_0 . Tenim que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \neq \infty.$$

Com que el denominador tendeix a zero cal que el numerador també tendeixi a zero llavors queda provada la continuïtat.

c) Escrivim

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + \left(\frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \right) =: f'(z_0) + \lambda(z).$$

És clar que $\lambda(z) \rightarrow 0$ si $z \rightarrow z_0$ i hem provat l'enunciat.

3.1.2. Siguin $f(z)$ i $g(z)$ funcions enteres. Decidiu si les següents funcions són enteres:

- a) $f(z)^3$, c) $f(z)/g(z)$, e) $f(1/z)$,
 b) $f(z)g(z)$, d) $5f(z) + ig(z)$, f) $f(g(z))$. ◁

Solució: Totes són enteres excepte el cas c) quan $g(z) = 0$ i e) quan $z = 0$.

3.1.3. *Proveu que $g(z) = 3x^2 + 2x - 3y^2 - 1 + i(6xy + 2y)$ és entera. Escriuiu g com a funció de z .*¹ ◁

Solució: Posant $x = 1/2(z + \bar{z})$ i $y = 1/(2i)(z - \bar{z})$, veiem que $f(z) = 3z^2 + 2z - 1$, que és un polinomi. Es pot fer més fàcilment amb la indicació del peu de pàgina:

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = 3z^2 + 2z - 3 \cdot 0^2 - 1 + i(6x \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 3z^2 + 2z - 1.$$

3.1.4. *Existeix alguna funció f holomorfa en el disc unitat $\mathbb{D}$ tal que per a tot $n = 2, 3, \dots$*

- a) $f(\pm \frac{1}{n}) = \frac{1}{2n+1}$? c) $|f(\frac{1}{n})| = \frac{1}{\ln(n+1)}$?
 b) $f(\pm \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$? d) $|f(\frac{1}{n})| = \frac{n}{n+1}$? ◁

Solució: (a) No existeix; (b) Sí, per exemple $f(z) = z^2$; (c) No existeix; (d) Sí, per exemple $f(z) = 1/(1+z)$.

Fem el primer amb detall, el tercer és semblant: Notem que, en cas d'existir una tal funció f holomorfa, aquesta serà en particular contínua a l'origen. Així, necessàriament haurem de tenir

$$f(0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Si és holomorfa, haurà d'existir el límit

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}.$$

En particular tindrem que aquest límit s'assoleix si ens acostem a l'origen pels reals positius i pels reals negatius. Més concretament tindrem

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1/n)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

i, a la vegada

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(-1/n)}{-1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

Com que $1/2 \neq -1/2$, hem arribat a una contradicció i f no pot existir.

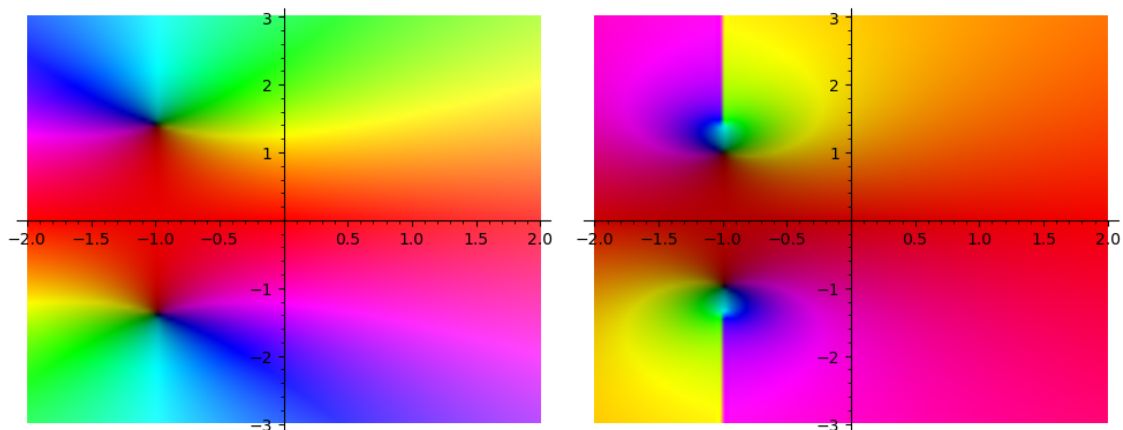
¹Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ és holomorfa en un domini Ω tallat per la recta real i u, v són holomorfes en dues variables, llavors es pot provar que $f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$, vegeu l'exercici 4.10.9.

3.1.5. Doneu una branca de $\log(z^2 + 2z + 3)$ que sigui holomorfa en (un entorn de) $z = -1$. Calculeu la seva derivada en aquest punt. En quin domini és holomorfa la branca que heu definit? $\triangleleft$

Solució: Com que $(-1)^2 + 2(-1) + 3 = 2$, en un entorn de -1 serem lluny dels reals negatius i, per tant, podem escollir $\mathcal{L}_f(z) = \text{Log}(z^2 + 2z + 3)$, per exemple, on $f(z) = z^2 + 2z + 3$. La derivada en $z = -1$ ha de ser

$$\mathcal{L}'_f(-1) = \frac{2z + 2}{z^2 + 2z + 3} \Big|_{z=-1} = 0.$$

Veiem que el polinomi $p(z) = z^2 + 2z + 3 = (z + 1)^2 + 2 \in \mathbb{R}$ si i només si $z + 1 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ i que concretament $p(z) = (z + 1)^2 + 2$ s'anul·la a $-1 \pm \sqrt{2}i$. A partir d'aquests punts es veurà el que hem de podar per continuïtat (teorema de Bolzano). Com que a $z = -1$ el valor és positiu, deduem que el mateix passarà a $\mathbb{R}$ i a $-1 + i(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$. Comprovant que a $z = -1 \pm 4i$ la imatge és negativa, concloem que p és negatiu a $-1 + i(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})^c$. Per tant, el domini és $\mathbb{C} \setminus \{-1 + it, |t| \geq \sqrt{2}\}$. Podem veure el fenomen fent `complex_plot()` (a l'esquerra $z^2 + 2z + 3$ a la dreta el seu logaritme).



Alternativa (proposada per Mireia Marcos Cañal): El logaritme principal és holomorfe a $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Per tant, per als z tals que $f(z) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, la branca serà holomorfa. Vegem per a quins z passa que $f(z) = r$ per $r \in (-\infty, 0]$.

$$f(z) = r \iff z^2 + 2z + (3 - r) = 0 \iff z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(3 - r)}}{2} = -1 \pm \sqrt{-2 + r}.$$

Per tant, serà la branca serà holomorfa a:

$$\mathbb{C} \setminus \{-1 \pm \sqrt{-2 + r} : r \in (-\infty, 0]\} = \mathbb{C} \setminus \{-1 \pm i\sqrt{2 + t} : t \in [0, \infty)\},$$

és a dir, a

$$\mathbb{C} \setminus \{-1 + iy : y \in \mathbb{R}, |y| \geq \sqrt{2}\}.$$

3.1.6. *Sigui f una funció holomorfa en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ que satisfà $|f(z) - i| < 1$ per a tot $z \in \Omega$. Demostreu que la funció g definida per*

$$g(z) = \frac{1 - i + f(z)}{1 + i - f(z)}$$

té logaritme holomorf en Ω . ◁

Solució: Primer observem que la hipòtesi implica que $1 + i - f(z) \neq 0$ per $z \in \Omega$, així que g és holomorfa en Ω ja que f ho és. Si posem $w = f(z) - i$, la hipòtesi ens diu que $|w| < 1$. Observem que

$$\frac{1 - i + f(z)}{1 + i - f(z)} = \frac{1 + w}{1 - w}.$$

Ara, tenim que

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + w}{1 - w} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + w}{1 - w} + \frac{1 + \bar{w}}{1 - \bar{w}} \right) = \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2}$$

Així doncs,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + w}{1 - w} \right) > 0 \quad \text{si } |w| < 1.$$

Per tant,

$$g(\Omega) \subset \{\operatorname{Re} \zeta > 0\} \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

regió on el logaritme principal és holomorf. Aleshores la funció

$$h(z) = \operatorname{Log}(g(z)), \quad z \in \Omega$$

és un logaritme holomorf de g en Ω .

3.1.7. *Sigui $f(z) = z^3 + 1$ i $z_1 = (-1 + \sqrt{3}i)/2$, $z_2 = (-1 - \sqrt{3}i)/2$. Provar que no existeix cap punt w en el segment que uneix z_1 i z_2 de manera que $f(z_2) - f(z_1) = f'(w)(z_2 - z_1)$. Que es pot dir del teorema del valor mitjà per funcions complexes?* ◁

Solució: Tenim que z_1 i z_2 són arrels tercers de la unitat llavors $f(z_2) - f(z_1) = z_2^3 - z_1^3 = 1 - 1 = 0$. Volem saber si hi ha $w \in \overline{z_1 z_2}$ de manera que $0 = 3w^2(z_2 - z_1) = 3w^2(-\sqrt{3}i)$. Però això només passa si $w = 0$ que no pertany al segment entre z_1 i z_2 . Llavors el teorema del valor mitjà tal com es coneix per les funcions reals no és cert en el cas complex.

3.2. Les equacions de Cauchy-Riemann

3.2.1. *Representem la identitat al pla complex amb la coloració habitual i amb la graella entera. Per exemple, la identitat sobre el quadrat $2\mathcal{Q} = \{x + iy : x, y \in (-2, 2)\}$ és la imatge de la figura. Una de les següents funcions, les diferencials de les quals no s'anul·len en $2\mathcal{Q}$, representa una funció holomorfa en $2\mathcal{Q}$. Quina és?*

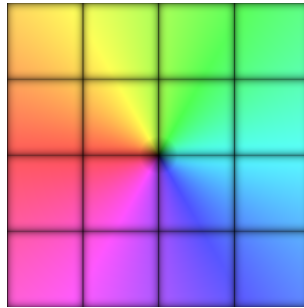
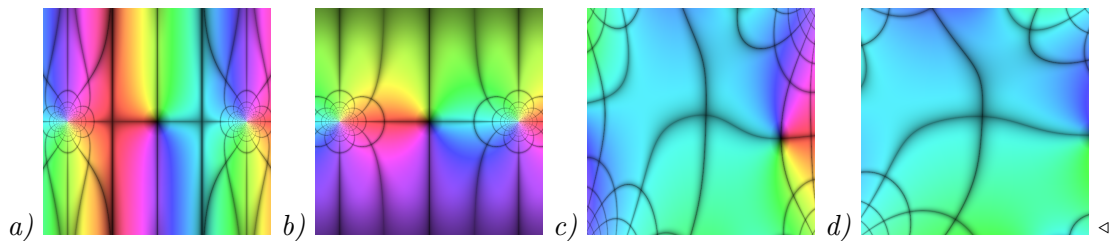


Figura 3.1.: Graella en el pla complex entre $-2 - 2i$ i $2 + 2i$.



Solució: És la d).

La primera no ho pot ser ja que té les preimatges de la graella ortogonal tallen en angles que no són rectes. També podem observar que hi ha punts on la funció no és contínua (el seu mòdul va a infinit), i que canvia l'orientació.

La segona la descartem per la presència de singularitats també: Hi ha dos punts del quadrat on la funció no està definida (el seu mòdul va a infinit). De fet es tracta de la tangent complexa, i els punts són $\pm\pi/2$.

La tercera no ho pot ser ja que les preimatges de la graella ortogonal tallen en angles que no són rectes.

Ha de ser la quarta.

3.2.2. Trobeu els valors de les constants a, b, c de manera que f sigui holomorfa i expresseu-la en termes de z .

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + i \sin x(\cosh y + b \sinh y).$

Solució: Demanem que es compleixin les equacions de Cauchy-Riemann. Llavors a) $c = 1$ i $a = -b$ i $f(z) = (1 - ia)z$. b) Veiem que $a = b = -1$ per Cauchy-Riemann i $f(z) = \cos(z) + i \sin(z)$.

3.2.3. Sigui $f = u + iv$ holomorfa i dues vegades diferenciable en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Proveu que les funcions u i v són harmòniques. (Una funció $f(x, y)$ és harmònica si les seves

segones derivades parcials són contínues i el seu laplaciana $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 0$, vegeu la secció 5.5.) $\triangleleft$

Solució: Usant les equacions de Cauchy-Riemann i el teorema de les derivades creuades de Schwarz, $u_{xx} \stackrel{\text{CR}}{=} v_{yx} = v_{xy} \stackrel{\text{CR}}{=} -u_{yy}$, llavors $u_{xx} + u_{yy} = 0$ i u és harmònica. Amb v podem fer el mateix.

3.2.4. Considerem $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$

a) Proveu que u és harmònica.

b) Trobeu una v de manera que $f = u + iv$ sigui holomorfa (s'anomena harmònica conjugada de u).

c) Trobeu una expressió compacta de $f(z)$. $\triangleleft$

Solució: a) Comprovem que $u_{xx} + u_{yy} = 0$ és feixuc però elemental (podeu fer servir Sage). b) Resolem l'equació $v_y = u_x = e^{-x}(y \cos y - (x - 1) \sin y)$ respecte de y i trobem que $v = e^{-x}(x \cos y + y \sin y) + C(x)$. Fent servir l'altra equació de Cauchy-Riemann veiem que $C = \text{ct.} \in \mathbb{R}$ i

$$v = e^{-x}(x \cos y + y \sin y) + C.$$

c) Fem servir que el candidat natural és $f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$, i obtenim $f(z) = i z e^{-z} + i C$.

3.2.5. Trobeu els polinomis harmònics de la forma $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. Trobeu la funció harmònica conjugada i la funció holomorfa corresponent. $\triangleleft$

Solució: Si imposen la condició de ser harmònica (veure un exercici anterior) veiem que $c = -3a$ i $b = -3d$. Llavors per que el polinomi de l'enunciat sigui harmònic ha de ser $u = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3$. Ara volem trobar v de manera que $f = u + iv$ sigui holomorfa, cal que $v_x = -u_y$ i $v_y = u_x$. De la segona equació obtenim que $v = 3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + C(x)$. Imposant ara la primera equació veiem que $C(x) = dx^3 + K$ on K és una constant d'integració. Llavors ja tenim una f (que no és única). Es veu fàcilment que $f(z) = (a + id)z^3 + iK$, $K \in \mathbb{R}$ (feu servir el truc de l'apartat c de l'exercici anterior, per exemple).

3.2.6. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (és a dir, un obert connex) i f una funció holomorfa en Ω .

1. Proveu que si f només pren valors imaginaris purs, aleshores f és constant.
2. Proveu que si $|f|$ és constant, aleshores f també és constant. Equivalentment si f només pren valors en una circumferència, llavors f és constant. $\triangleleft$

Solució: 1. (proposada per Clara Valls Moreso) Suposem que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és una funció holomorfa tal que per a tot $z \in \Omega$, $f(z) \in i\mathbb{R}$. Això vol dir que la part real de f és nul·la.

Escrivim $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, on $u(x, y) = 0$ per a tot $(x, y) \in \Omega$.

Com que f és holomorfa, les parts real i imaginària verifiquen les equacions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Però com que $u \equiv 0$, tenim que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

i, per tant,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Això implica que v és constant en Ω , ja que Ω és connex (vegeu la proposició 3.14).

2.: Suposem primer que $|f| \equiv 0$. Aleshores efectivament $f \equiv 0$ és constant.

Si, en canvi $|f| \equiv \tilde{C} > 0$, aleshores escrivint les parts real i imaginària de f com $f = u + iv$, tenim que

$$u^2 + v^2 \equiv C = \tilde{C}^2.$$

Derivant l'expressió respecte de les parts real i imaginària, obtenim gràcies a les equacions de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = 0, \\ 2uu_y + 2vv_y = 0, \end{cases} \quad \stackrel{\text{CR}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} uu_x + vv_x = 0, \\ -uv_x + vu_x = 0, \end{cases}$$

Ara multiplicant la primera equació per u , la segona per v i sumant, obtenim

$$\begin{cases} u^2u_x + uvv_x = 0, \\ -uvv_x + v^2u_x = 0, \end{cases} \quad \implies \quad Cu_x = (u^2 + v^2)u_x = 0 \implies u_x = 0.$$

Ara multiplicant la primera equació per v , la segona per u i restant, obtenim

$$\begin{cases} uvu_x + v^2v_x = 0, \\ -u^2v_x + uvu_x = 0, \end{cases} \quad \implies \quad Cv_x = (u^2 + v^2)v_x = 0 \implies v_x = 0.$$

Hem vist que $u_x = v_x = 0$ a tot Ω . Per les equacions de Cauchy-Riemann, tenim que la diferencial és 0 a tot Ω . Com que aquest conjunt és connex, deduïm que f és constant.

3.2.7. Doneu una descripció de les funcions enteres de la forma $f(x+iy) = u(x) + iv(x, y)$.⁴

Solució: Vegem que la solució és $f(z) = \alpha z + \beta$ amb $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\beta \in \mathbb{C}$.

Com que la part real de f depèn només de x , per les equacions de Cauchy-Riemann, tenim que $0 = u_y = -v_x$. En particular, $v(x, y) = \tilde{v}(y) + C$. Altra volta per les equacions de Cauchy-Riemann deduïm que $u_x = v_y$ i, per tant, $u_x = \tilde{v}_y$.

Prenem x_0 fixat. Aleshores

$$\tilde{v}_y(y) = v_y(x_0, y) = u_x(x_0),$$

és a dir, que $\tilde{v}_y$ és una funció constant d'una variable real. Per tant, $\tilde{v}(y) = Cy + D$, amb $C = u_x(x_0)$ i $D \in \mathbb{R}$.

Prenem ara y_0 fixat. Aleshores

$$u_x(x) = v_y(x, y_0) = \tilde{v}_y(y_0) = v_y(x_0, y_0) = u_x(x_0),$$

és a dir, que u_x és una funció constant d'una variable real. Per tant, $u(x) = Ax + B$, amb $A = u_x(x_0)$ i $B \in \mathbb{R}$.

Tot plegat,

$$f(x, y) = Ax + B + i(Cy + D) = u_x(x_0)(x + iy) + B + iD.$$

Dit d'una altra manera,

$$f(x, y) = \alpha z + \beta, \quad \text{on } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ i } \beta \in \mathbb{C}.$$

3.2.8. (a) *Determineu els nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ pels quals*

$$v_\lambda(x, y) = 2 \sin x \sinh y + x^3 - \lambda xy^2 + y$$

és la part imaginària d'una funció entera f_λ i calculeu f_λ .

(b) *Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre determinat en a). És*

$$g_\lambda = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - i \frac{\partial v_\lambda}{\partial y}$$

una funció entera? Quina relació hi ha entre g_λ i f_λ ?

◁

Solució: (a) $\lambda = 3$ i $f_3 = u_3 + iv_3$ amb $u_3(x, y) = -2 \cos x \cosh y - 3x^2y + x + y^3 + C$, on $C \in \mathbb{R}$; (b) g_λ és entera ja que $ig_\lambda(z) = f'_\lambda(z)$.

3.2.9. *Decidiu on són holomorfes les funcions següents*

$$a) \frac{1}{z-2+3i}, \quad b) \frac{iz^3+2z}{z^2+1}, \quad c) \frac{3z-1}{z^2+z+4}, \quad d) \frac{z^2}{(2z^2-3z+1)^2}. \quad \triangleleft$$

Solució:

$$a) \mathbb{C} \setminus \{2-3i\}, \quad b) \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}, \quad c) \mathbb{C} \setminus \{-1/2 \pm i\sqrt{15}/2\}, \quad d) \mathbb{C} \setminus \{1, 1/2\}.$$

3.2.10. *Sigui*

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Demostreu que

a) $f(z)$ satisfà les equacions de Cauchy-Riemann a tot punt $z \in \mathbb{C}$.

b) f no és contínua al 0 i, per tant, f no és holomorfa a un entorn del 0. $\triangleleft$

Solució: Podem fer el càlcul i la comprovació de que es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann amb Sage. Fem-ho a mà i comprovem que $f_x + if_y = 0$, que equival a les equacions de Cauchy-Riemann. Tenim que

$$f_x(z) = e^{-1/z^4} \left(\frac{-1}{z^4} \right)_x = e^{-1/z^4} \left(\frac{4z^3 z_x}{z^8} \right) = 4e^{-1/z^4} \frac{1}{z^5}.$$

Anàlogament $f_y(z) = 4e^{-1/z^4} \frac{i}{z^5}$. Llavors $f_x + if_y = 0$ i es compleixen les equacions. No obstant si ens acostem a 0 seguint l'eix de les x el límit és 0 i si ens acostem seguint el raig $\lambda(1+i)$, $\lambda > 0$ el valor de f s'acosta a infinit. Llavors f no és contínua en 0 i no pot ser holomorfa.

3.2.11. Si u i v s'expressen respecte a les coordenades polars (r, θ) , proveu que les equacions de Cauchy-Riemann es poden expressar de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Indicació: estudieu el límit incremental seguint $\arg z = \theta_0$ i $|z| = r_0$. $\triangleleft$

Solució: (proposada per Tomàs Planelles Alonso)

Podem expressar $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en polars fent el canvi $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Aplicant la regla de la cadena tenim que

$$u_r := \frac{\partial u(r \cos \theta, r \sin \theta)}{\partial r} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta,$$

$$u_\theta := \frac{\partial u(r \cos \theta, r \sin \theta)}{\partial \theta} = -u_x r \sin \theta + u_y r \cos \theta,$$

on u_x i u_y són les parcials respecte de x i y . Notem que per v són les mateixes expressions canviant u_x i u_y per v_x i v_y respectivament.

Assumim que es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann. Aleshores,

$$ru_r = ru_x \cos \theta + ru_y \sin \theta \stackrel{\text{C.R.}}{=} rv_y \cos \theta - rv_x \sin \theta = v_\theta$$

i

$$rv_r = rv_x \cos \theta + rv_y \sin \theta \stackrel{\text{C.R.}}{=} -ru_y \cos \theta + ru_x \sin \theta = -u_\theta.$$

Hem arribat a les relacions de l'enunciat.

Recíprocament, si es compleix la relació de l'enunciat, escrivint $s_\theta := \sin \theta$ i $c_\theta := \cos \theta$,

$$\begin{cases} ru_r = v_\theta \\ rv_r = -u_\theta \end{cases} \iff \begin{cases} u_x c_\theta + u_y s_\theta = v_y c_\theta - v_x s_\theta \\ v_x c_\theta + v_y s_\theta = u_x s_\theta - u_y c_\theta. \end{cases}$$

Multiplicant la primera equació per s_θ i la segona per c_θ i sumant-les ens queda $u_y = -v_x$. Finalment, multiplicant la primera per c_θ i la segona per $-s_\theta$ i sumant-les, ens queda $u_x = v_y$. En resum, tenim que

$$(C.R.): \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

3.2.12. Quina part del pla es contreu i quina part es dilata si la transformació es realitza mitjançant la funció:

$$\begin{array}{lll} a) w = z^2; & c) w = \frac{1}{z}; & d) w = e^z; \\ b) w = z^2 + 2z; & & e) w = \log(z - 1). \end{array} \quad \triangleleft$$

Solució: a) $|w'| = 2|z| < 1$ si i només si $|z| < 1/2$ és la zona on es contreu, si $|z| > 1/2$ s'expandeix. b) $|w'| = |2z + 2| < 1$ si i només si la distància a -1 és menor que $1/2$, es contreu en el disc de radi $1/2$ al voltant de -1 . c) Es contreu si $|z| > 1$. d) $|w'| = e^x$, si $x > 0$ expansió, si $x < 0$ contracció. e) $|w'| = |1/(z - 1)| < 1$ fora del disc de radi 1 al voltant de 1, és on es contreu. La zona de dilatació és a l'interior d'aquest. Cal treure en els dos casos la branca que no és del domini de $\log(z - 1)$, és la branca $\{x \leq 1, y = 0\}$.

3.2.13. Demostreu que, si f és diferenciable en z_0 , aleshores la diferencial és $\mathbb{C}$ -lineal si i només si $\bar{\partial}f(z_0) = 0$, si i només si f és $\mathbb{C}$ -derivable en z_0 . $\triangleleft$

3.3. Càlcul de les derivades de Wirtinger

3.3.1. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i f una funció holomorfa en Ω . Definim $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Omega\}$ i $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$ donada per $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Proveu que f^* és holomorfa en Ω^* . $\triangleleft$

Solució: Primer argument: Considerem les descomposicions en parts reals i imaginàries $f^* := u^* + iv^*$, i $f = u + iv$. Segons l'enunciat, tenim que $u^*(x + iy) = u(x - iy)$ i $v^*(x + iy) = -v(x - iy)$. Comprovem les equacions de Cauchy-Riemann de f^* usant les de f :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x}(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x - iy) \stackrel{CR}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x - iy) = -\frac{\partial v^*}{\partial y}(x + iy)(-1) = \frac{\partial v^*}{\partial y}(x + iy),$$

i

$$\frac{\partial u^*}{\partial y}(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial y}(x - iy)(-1) \stackrel{CR}{=} \frac{\partial v}{\partial x}(x - iy) = -\frac{\partial v^*}{\partial x}(x + iy).$$

Segon argument: apliquem la regla de la cadena complexa. Considerem la funció conjuguar $g(z) = \bar{z}$. Notem que $\partial g = 0$ i $\bar{\partial}g = 1$. Aleshores tenim que $f^* = g \circ f \circ g$ i aplicarem dues vegades la regla de la cadena complexa: en primer lloc

$$\bar{\partial}f^* = \partial g \bar{\partial}(f \circ g) + \bar{\partial}g \bar{\partial}(\overline{f \circ g}) = 0 \bar{\partial}(f \circ g) + 1 \overline{\partial(f \circ g)},$$

així que només cal calcular el segon sumand. Continuant l'argument, obtenim

$$\bar{\partial}f^* = \overline{\partial(f \circ g)} = \overline{\partial f \partial g + \bar{\partial} f \bar{\partial} g} = \overline{\partial f} 0 + \bar{\partial} f \bar{1} = \bar{\partial} f.$$

Com que f és holomorfa, per les equacions de Cauchy-Riemann tenim que $\bar{\partial}f = 0$, és a dir, f^* també és holomorfa.

3.3.2. Trobeu els punts on la funció f té derivada complexa (i calculeu-la si escau) en els següents casos. (Podeu fer servir si cal que $f' = f_x$.)

- | | |
|---|---|
| a) $f(z) = z ^4$; | e) $f(z) = z $; |
| b) $f(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$; | f) $f(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$; |
| c) $f(z) = z + \frac{1}{z}$; | g) $f(z) = \cos z ^2$; |
| d) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$; | h) $f(z) = z + z\bar{z}$. ◁ |

Solució: (a) 0; (b) $\mathbb{C}$ i $f'(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$; (c) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; $f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$; (d) $\mathbb{C} \setminus \{1, \pm\sqrt{2}i\}$ i $f'(z) = \frac{-4z^2+2z-4}{(z-1)^3(z^2+2)^2}$; (e) $\emptyset$; (f) $\mathbb{C}$ i $f'(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$; (g) $\{z = re^{it} : r^2 \in \pi\mathbb{N} \cup \{0\}\}$; (h) 0.

Il·lustrem com resoldre en els casos c, d, e i g. Notem que $f(z) = z + 1/z$ és la suma de dues funcions holomorfes a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Per tant, f és també holomorfa. Com que per funcions holomorfes tenim que $f' = f_x$ (és a dir, que podem derivar usant les regles habituals respecte a la z), podem calcular

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = 1 - \frac{1}{z^2}.$$

En el cas $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$ també tenim un polinomi, que és una funció holomorfa, al denominador. Per tant, f és holomorfa allà on està definida, que és el pla complex llevat dels zeros del polinomi en qüestió. Així, el domini és $\{z \in \mathbb{C} : (z-1)^2(z^2+2) \neq 0\}$, és a dir $\mathbb{C} \setminus \{1, \pm\sqrt{2}i\}$. Aquí podem derivar també usant les regles de càlcul per trobar

$$f'(z) = \frac{-2(z-1)(z^2+2) - (z-1)^2 2z}{(z-1)^4(z^2+2)^2} = \frac{-4z^2+2z-4}{(z-1)^3(z^2+2)^2}.$$

Per (e), quan $z = 0$, podem procedir per definició.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

Observem que aquest límit no existeix (si h pren valors reals positius el límit és diferent a si pren valors reals negatius, per exemple). Per tant, no és derivable en $z = 0$. Per $z \neq 0$, podem fer una reducció a l'absurd. Suposem que f sí que és $\mathbb{C}$ -derivable en aquest punt z i arribarem a contradicció. Per la regla de la cadena, com que f és $\mathbb{C}$ -derivable en z i la funció z^2 és entera, $g(z) := |z|^2$ és $\mathbb{C}$ -derivable en z (per composició). Però sabem que

$g(z) := |z|^2 = z\bar{z}$, i $\bar{\partial}g = z \neq 0$, ja que $z \neq 0$. Per tant, arribem a absurd i provem el que volíem, que la funció no és $\mathbb{C}$ -derivable enlloc.

En el cas (g) tenim que $f(z) = \cos|z|^2 = \cos(z\bar{z}) = F(z, \bar{z})$, on $F(z, w) := \cos(zw)$. Aquesta funció és la composició de la funció $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, que és holomorfa, amb el polinomi en dues variables zw , que és holomorf respecte a z i respecte a w . Per tant, F és holomorfa respecte a les dues variables. Per tant, les derivades de Wirtinger de f es poden calcular usant que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial F}{\partial z}(z, \bar{z})$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(z, \bar{z}).$$

Les darreres derivades, en ser F holomorfa respecte a les dues variables, es poden calcular per les regles habituals. Així

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z, w) = -\sin(zw)w$$

i

$$\frac{\partial F}{\partial w}(z, \bar{z}) = -\sin(z\bar{z})z.$$

Obtenim que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial F}{\partial z}(z, \bar{z}) = -\bar{z} \sin(|z|^2)$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(z, \bar{z}) = -z \sin(|z|^2).$$

Ens interessa només saber quan s'anul·la la darrera derivada. Serà doncs quan $z = 0$ (és a dir a l'origen) o bé quan $|z|^2 = k\pi$, és a dir si $x^2 + y^2 = k\pi$, amb $k \in \mathbb{N}$. En aquests punts, precisament

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = -\bar{z} \sin(|z|^2) = 0.$$

3.3.3. Donat un polinomi de dues variables reals $P(x, y)$, demostreu que identificant $z = x + iy$ són equivalents:

1. P es pot expressar com un polinomi en z .
2. P és una funció entera.
3. $\bar{\partial}P = 0$ en $\mathbb{C}$.

◁

Solució:

1. $\implies$ 3., ja que per la proposició 3.27 tenim que $\bar{\partial}P = 0$.
3. $\implies$ 2. pel teorema 3.13 és una funció entera.
2. $\implies$ 1., ja que $P(x, y) = P((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/(2i)) = Q(z, \bar{z})$, on $Q \in \mathbb{C}[z, w]$. Pel teorema 3.13 tenim que $\bar{\partial}Q = 0$ i la proposició 3.27 diu que el polinomi Q és independent de $\bar{z}$.

3.4. Funcions analítiques

3.4.1. Discutir l'analiticitat de

- a) $8\bar{z} + i$, e) $x^2 + y^2 + y - 2 + ix$,
 b) $\frac{z}{\bar{z} + 2}$, f) $\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$,
 c) $\frac{z^3 + 2z + i}{z - 1}$ (vegeu la figura 3.7), g) $|z|^2 + 2z$,
 d) $x^2 - y^2 + 2xyi$, h) $\frac{|z|^2 + z}{2}$. ◁

Solució: a) No, b) No, c) Sí, excepte a $z = 1$, d) Si, és z^2 , e) No es compleixen C.R. enlloc, f) Si, excepte a $z = 0$: és $z + 1/z$, g) No, h) No.

3.4.2. Trobeu la suma de les sèries

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^n}{n!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ si $|z| < 1$. ◁

Solució: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n = 1/(1 - (1+i)/3) - 1 = (1+i)/(2-i)$, b) $e^{(3+i)} - 1$, c) $z/(1-z)^2$.

3.4.3. Sigui $f(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ per $|z| < R$ on R és el radi de convergència de la sèrie. Demostreu que si $f(z_k) = 0$ per una successió $(z_k)_k$ tal que $z_k \neq 0$ i $z_k \rightarrow 0$ quan $k \rightarrow \infty$, aleshores $f(z) \equiv 0$ (i.e. $c_n = 0$ per a tot $n \geq 0$). Indicació: Calculeu $f(0)$ i considereu la sèrie $f(z)/z$. ◁

Solució: Com que f és holomorfa (és una sèrie de potències) també és contínua. Aleshores

$$f(0) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} z_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

D'altra banda

$$0 = f(0) = c_0 + c_1 0 + c_2 0^2 + \dots = c_0$$

i, per tant, $c_0 = 0$. Suposem ara que haguéssim demostrat que $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ i anem a veure que $c_{n+1} = 0$ també. Escrivim

$$f(z) = c_{n+1}z^{n+1} + c_{n+2}z^{n+2} + \dots = z^{n+1}(c_{n+1} + c_{n+2}z + \dots) =: z^{n+1}g(z).$$

Per hipòtesi, per a tota $k \in \mathbb{N}$

$$0 = f(z_k) = z_k^{n+1}g(z_k).$$

Atès que $z_k \neq 0$, això implica que $g(z_k) = 0$ per a tots els punts de la successió. La funció g és també contínua al 0 i pel mateix raonament anterior veiem que

$$0 = g(0) = c_{n+1},$$

com volíem demostrar. Aquest raonament per inducció prova que $c_n = 0$ per a tota n i que per tant $f \equiv 0$.

3.4.4. *Demostreu que si dues sèries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ i $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ són convergents i tenen la mateixa suma per a una successió $(z_k)_k$ tal que $z_k \neq 0$ i $z_k \rightarrow 0$ quan $k \rightarrow \infty$ aleshores $a_n = b_n$ per a tot $n \geq 0$.* $\triangleleft$

Solució: Siguin $S(z) := \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ i $T(z) := \sum_{n \geq 0} b_n z^n$, i considerem $f(z) := S(z) - T(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n - b_n) z^n$. Aleshores $f(z_k) = S(z_k) - T(z_k) = 0$ per hipòtesi. L'exercici anterior ens implica que $a_n - b_n = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ o, equivalentment, que $f(z) \equiv 0$ o que $S \equiv T$.

3.4.5. *Calculeu la suma de les sèries de potències de l'exercici 2.7.1.* $\triangleleft$

Solució: (a) $-\text{Log}(1 - z)$;

(b) La suma és $(1 - z)(\text{Log}(1 - z) - 1) + 1$, si $z \in \mathbb{D} \setminus \{1\}$ i és 1 si $z = 1$;

(c) La suma és

$$-\frac{1}{3}\text{Log}(1 - z) - \frac{e^{i2\pi/3}}{3}\text{Log}(z - e^{i2\pi/3}) - \frac{e^{i4\pi/3}}{3}\text{Log}(z - e^{i4\pi/3}) - \frac{\pi\sqrt{3}}{9} :$$

Si anomenem $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$, a l'interior del conjunt, tenim que $S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n}$. Calculem-ne la primitiva: sabem que

$$S'(z) = \frac{1}{1 - z^3} = \frac{A}{1 - z} + \frac{B}{e^{\frac{2\pi i}{3}} - z} + \frac{C}{e^{\frac{-2\pi i}{3}} - z}.$$

Sumant i igualant numeradors, obtenim

$$A(1 + z + z^2) + B(1 - z)(e^{\frac{-2\pi i}{3}} - z) + C(1 - z)(e^{\frac{2\pi i}{3}} - z) = 1.$$

Substituïnt $z = 1$ obtenim

$$3A = 1.$$

Substituïnt $z = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ obtenim

$$B(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}})(e^{\frac{4\pi i}{3}} - e^{\frac{2\pi i}{3}}) = 1,$$

és a dir

$$1 = Be^{\frac{4\pi i}{3}}(e^{\frac{4\pi i}{3}} - 1)(e^{\frac{2\pi i}{3}} - 1) = 3Be^{\frac{4\pi i}{3}},$$

i $3B = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Anàlogament $3C = e^{\frac{-2\pi i}{3}}$. Hem vist que

$$3S'(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{e^{\frac{2\pi i}{3}} - z} + \frac{e^{\frac{-2\pi i}{3}}}{e^{\frac{-2\pi i}{3}} - z}.$$

Per tant

$$3S(z) = -\text{Log}(1-z) - e^{\frac{2\pi i}{3}} \mathcal{L}_1(e^{\frac{2\pi i}{3}} - z) - e^{\frac{-2\pi i}{3}} \mathcal{L}_2(e^{\frac{-2\pi i}{3}} - z) + C.$$

Notem que les determinacions del logaritme $\mathcal{L}_j$ en els dos darrers casos es pot prendre qualsevol determinació a $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, en particular podem agafar $\mathcal{L}_j(z) := \text{Log}(-z) + \pi i$. Trobem doncs

$$3S(z) = -\text{Log}(1-z) - e^{\frac{2\pi i}{3}} (\text{Log}(z - e^{\frac{2\pi i}{3}})) - e^{\frac{-2\pi i}{3}} (\text{Log}(z - e^{\frac{-2\pi i}{3}})) + C.$$

Per tenir $S(0) = 0$, cal

$$0 = -\text{Log}(1) - e^{\frac{2\pi i}{3}} (\text{Log}(e^{\frac{-\pi i}{3}})) - e^{\frac{-2\pi i}{3}} (\text{Log}(e^{\frac{-\pi i}{3}})) + C = 0 - e^{\frac{2\pi i}{3}} \frac{-\pi i}{3} - e^{\frac{-2\pi i}{3}} \frac{\pi i}{3} + C.$$

Obtenim

$$C = \frac{\pi i}{3} (e^{\frac{-2\pi i}{3}} - e^{\frac{2\pi i}{3}}) = \frac{\pi i}{3} 2i \text{Im}(e^{\frac{-2\pi i}{3}}) = \frac{-\sqrt{3}\pi}{3}.$$

Per continuïtat, aquesta funció s'estén a tot el domini de convergència de S .

(d) $\text{Log}(1+z)$:

Si anomenem $S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n$, aleshores $S(z) = -T(-z)$, on $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ és la sèrie estudiada a l'apartat (a). Així deduïm que S té suma $S(z) = -T(-z) = -(-\text{Log}(1+z)) = \text{Log}(1+z)$.

(e) $\frac{1}{5(1-\frac{z-i}{5})^2}$.

Estudiem la sèrie $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$. Definim $T(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{5^n}$. Aleshores T té el mateix radi de convergència que S , que és $R = 5$. A l'interior del disc tenim que $T'(z) = S(z)$, i

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{5^n} = \frac{1}{1-\frac{z-i}{5}} = \frac{5}{5+i-z}.$$

Per tant,

$$S(z) = T'(z) = \frac{5}{(5+i-z)^2}.$$

3.4.6. *Considereu la sèrie*

$$S(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n-1}}{2n}.$$

a) *Estudieu-ne la convergència puntual i uniforme sobre compactes.*

b) *Calculeu quant val la suma per tot z del disc de convergència.*

c) Doneu el valor de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n9^n}. \quad \triangleleft$$

Solució: a) El radi de convergència és 1. En la circumferència unitat tenim una sèrie divergent quan $z = \pm 1$, ja que

$$S(\pm 1) = \sum_{n \geq 1} \frac{(\pm 1)^{2n-1}}{2n} = \sum_{n \geq 1} \frac{\pm 1}{2n} = \pm \infty.$$

En canvi, si $z \neq \pm 1$, aleshores tenim que

$$\left| \sum_{n=1}^N z^{2n-1} \right| = |z| \left| \frac{1 - z^{2N}}{1 - z^2} \right| \leq \frac{2|z|}{|1 - z^2|}.$$

Tenim, pel criteri de Dirichlet, que $S(z)$ convergeix uniformement en qualsevol compacte de $\mathbb{D} \setminus \{-1, 1\}$;

b) Tal com hem fet a l'exercici anterior, podem justificar que $zS(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n}}{2n}$, amb radi de convergència $R = 1$. Aleshores, en l'interior del disc tenim que

$$(zS(z))' = \sum_{n \geq 1} z^{2n-1} = \frac{z}{1 - z^2}.$$

Per tant,

$$zS(z) = -\frac{\text{Log}(1 - z^2)}{2} + C,$$

és a dir

$$S(z) = -\frac{\text{Log}(1 - z^2) + C}{2z}.$$

Com que $S(0) = 0$ i $\text{Log}(1 - 0^2) = 0$, inferim que cal $C = 0$ per garantir la continuïtat de S a l'origen. Per tant,

$$S(z) = -\frac{\text{Log}(1 - z^2)}{2z}.$$

c)

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n9^n} &= 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(i/3)^{2n}}{2n} = \frac{2i}{3} \sum_{n \geq 1} \frac{(i/3)^{2n-1}}{2n} \\ &= \frac{2i}{3} S(i/3) = -\frac{2i}{3} \frac{\text{Log}(1 - (i/3)^2)}{2(i/3)} = -\text{Log}(1 + 1/9) = -\ln(10/9). \end{aligned}$$

3.4.7. Considereu la sèrie de potències

$$\sum_{n \geq 1} n(n+1)z^n.$$

a) Estudieu la seva convergència.

b) Calculeu la seva suma.

c) Quant val $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}$?

<

Solució: a) Pel criteri del quocient, el radi de convergència és 1. A la frontera $\{|z| = 1\}$, tenim que

$$S(z) = \sum_{n \geq 1} n(n+1)z^n$$

el terme general $|n(n+1)z^n| = n(n+1)$ no convergeix a zero i, per tant, mai podrà ser convergent. Així, la sèrie convergeix absolutament a $\mathbb{D}$ i ho fa de manera uniforme als compactes continguts al disc, o el que és el mateix, convergeix absolutament en tot disc $D_r(0)$ amb $r < 1$.

b) Si prenem $T(z) = \sum_{k \geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}$ per $z \in \mathbb{D}$, aleshores

$$\frac{2z}{(1-z)^3} = zT''(z) = z \sum_{k \geq 2} k(k-1)z^{k-2} = \sum_{k \geq 2} k(k-1)z^{k-1} = \sum_{n \geq 1} (n+1)nz^n = S(z).$$

Tenim doncs que

$$S(z) = \frac{2z}{(1-z)^3}.$$

c) Trobem

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n} = S(-1/2) = \frac{-1}{(3/2)^3} = -8/27.$$

3.4.8. Considereu la sèrie de potències

$$S(z) = 2\pi i + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (2z+1)^n}{n}.$$

(a) Calculeu la seva suma i el seu domini de convergència, especificant amb precisió totes les funcions involucrades. Indicació: Per especificar un logaritme, cal donar un domini de definició i la imatge d'un punt.

(b) Calcula la solució (si existeix) de l'equació $S(z) = e$.

<

Solució: (a) Amb el mètode habitual trobem $S(z) = -\text{Log}(2z+2) + C$ per $z \in D_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2})$. Igualant en $z = -\frac{1}{2}$ amb la sèrie donada trobem $C = 2\pi i$. La sèrie és convergent en compactes de $\overline{D_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2})} \setminus \{-1\}$, usant altra vegada els mètodes habituals. També es pot resoldre per un canvi de variable $w = -2z - 1$, relacionant-la amb el $\text{Log}(1-w)$ (Exercici 3.4.5, apartat a).

(b) No té solució, ja que $\text{Im}(\text{Log}(2z+2)) \in [-\pi, \pi]$, mentre que $\text{Im}(2\pi i - e) = 2\pi$, de manera que no poden coincidir.

3.5. Algunes funcions holomorfes importants

3.5.1. *Demostreu que:*

(i) $\sin z$ i $\cos z$ són funcions enteres amb

$$(\sin z)' = \cos z; \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

(ii) $\cos(-z) = \cos z$, i també $\sin(-z) = -\sin z$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(iv) Per a tot $z, w \in \mathbb{C}$, $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$. $\triangleleft$

Solució: i) Són suma de funcions exponencials compostes amb funcions $\mathbb{C}$ -lineals. Per tant són enteres. Vegem per exemple la derivada del sinus:

$$\sin'(z) = \frac{e^{iz}i - e^{-iz}(-i)}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z).$$

ii) $\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos(z)$. El sinus es veu anàlogament.

iii)

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{-4} + \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2}{4} = \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$$

iv) Raonant de la mateixa manera tenim que

$$\cos z \cos w - \sin z \sin w = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw})}{4} - \frac{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})}{-4} = \cos(z+w)$$

i anàlogament pel sinus.

3.5.2. *Resoleu les següents equacions:*

a) $\sin z = 4$

b) $\cos z = i$. $\triangleleft$

Solució: (a) $z = \pi/2 + 2k\pi \pm i \operatorname{arccosh} 4$, $k \in \mathbb{Z}$ (dos valors per cada k); vegeu l'apartat d) de l'exercici 2.2.3.

(b) $z = \pi/2 + 2k\pi - i \operatorname{arcsinh} 1$; $z = 3\pi/2 + 2k\pi + i \operatorname{arcsinh} 1$.

3.5.3. a) *Proveu que $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$ i que $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$.*

b) *Trobeu tots els zeros de les funcions sinus i cosinus.*

c) *Deduïu de (b) que, per a $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, es verifica:*

i) $\cos z_1 = \cos z_2$ si, i només si, $z_2 \pm z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

ii) $\sin z_1 = \sin z_2$ si, i només si, $z_2 - z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$ o bé $z_2 + z_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

d) Proveu que per a tot $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se satisfà:

i) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ (vegeu l'exercici 1.3.2).

ii) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

iii) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

iv) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

e) Sobre quines rectes està fitada la funció sinus? I la funció cosinus? ◁

Solució: a) És conseqüència directa del fet que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

b) Vegeu l'apartat d) de l'exercici 2.2.3: Per fer $\cos z = 0$, posem $w = e^{iz}$, resollem l'equació de segon grau que obtenim i resulta $w = \pm i = e^{\pm i\pi/2}$. Per tant, $z = \pm\pi/2 + 2k\pi - i \ln(1) = \pm\pi/2 + k\pi$. De la mateixa manera, pel sinus obtenim $\sin z = 0 \iff z = k\pi$.

c) Expressem $z_1 = \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1-z_2}{2}$ i $z_2 = \frac{z_1+z_2}{2} - \frac{z_1-z_2}{2}$. Aleshores, per l'exercici 3.5.1, tenim que

$$\begin{aligned}\cos(z_1) &= \cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \cos\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right) + \sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)\end{aligned}$$

i anàlogament,

$$\cos(z_2) = \cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)$$

De les identitats

$$\cos z_1 - \cos z_2 = -2 \sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$$

deduïm que $\cos z_1 = \cos z_2$ si i només si

$$z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{o} \quad z_1 + z_2 \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

De la mateixa manera,

$$\sin z_1 - \sin z_2 = 2 \cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right),$$

i per tant $\sin z_1 = \sin z_2$ si i només si

$$z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{o} \quad z_1 + z_2 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

d) Es tracta d'un mer càlcul usant els resultats de 1.3.2 que deixem al lector.

3.5.4. (a) Proveu que per a cada $w \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, l'equació $\tan z = w$ té infinites solucions, que són la funció multivaluada

$$\arctan w := \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i-w}{i+w} \right).$$

Vegeu també que per a $w = \pm i$ l'equació no té cap solució.

(b) Vegeu que dues determinacions contínues de $\arctan w$ en un conjunt connex $E \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ difereixen de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Vegeu que no hi ha cap determinació contínua de $\arctan w$ als anells $\{r < |w-i| < R\}$, $\{r < |w+i| < R\}$, $0 < r < R < 2$, però que sí que n'hi ha si $2 < r < R < +\infty$. $\triangleleft$

Solució: a) Si $w = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)}$. Aleshores, aïllant e^{2iz} trobem

$$e^{2iz} = \frac{1 + iw}{1 - iw} = \frac{i - w}{i + w},$$

és a dir, que

$$2iz = \log \left(\frac{i - w}{i + w} \right).$$

Per tant, podem definir la funció multivaluada

$$\arctan w := \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i - w}{i + w} \right).$$

També es pot resoldre tenint en compte que $\tan(z) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$, on $f_1(z) = 2iz$ és una funció $\mathbb{C}$ -lineal bijectiva, $f_2(\zeta) = e^\zeta$ és una funció $2\pi i$ -periòdica i que pren imatge a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, de manera bijectiva en franges horitzontals semiobertes d'amplada 2π , i $f_3(\zeta) = -i \frac{\zeta-1}{\zeta+1}$. D'aquí també recuperem l'expressió de l'arctangent, però a més a més podem argumentar per què $\pm i \notin \tan(\mathbb{C})$:

Notem que $f_3(\zeta) = w$ equival a $\zeta = \frac{i-w}{i+w} = f_3^{-1}(w)$, i que si $w = -i$ no existeix ζ tal que $f_3(\zeta) = -i$, ja que $\zeta - 1 \neq \zeta + 1$. Finalment, si $w = +i$, aleshores necessàriament tenim que $\zeta = 0 \notin f_2(\mathbb{C}) = f_2 \circ f_1(\mathbb{C})$. En particular, $f_3 : \mathbb{C} \setminus \{0, -1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ és bijectiva, i

$$\tan z = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) = \pm i$$

no pot tenir solucions.

b) Si h_j són determinacions de l'arctangent amb $j \in \{1, 2\}$, volem veure que $h_1(w) - h_2(w) = k\pi$. Notem que $f_3 : \mathbb{C} \setminus \{0, -1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ és bijectiva, tal com hem vist abans. Per tant,

$$\tan(h_1(w)) = \tan(h_2(w)) \iff f_2 \circ f_1(h_1(w)) = f_2 \circ f_1(h_2(w)) \iff e^{2ih_1(w)} = e^{2ih_2(w)}$$

Per acabar, usem la proposició 1.45: cal que

$$h_1(w) = h_2(w) + k\pi.$$

c) Suposem que $\tan(h(w)) = w$ per tot $w \in A_{\pm} = \{r < |w \pm i| < R\}$ amb $r < R$ i $2 < r$ o bé $R < 2$. Aleshores, com que f_3 és bijectiva en la preimatge de l'anell, trobem que per cada w existeix un únic ζ amb $f_3(\zeta) = w$ i, per tant,

$$e^{f_1(h(f_3(\zeta)))} = f_2(f_1(h(f_3(\zeta)))) = f_3^{-1}(\tan(h(w))) = \zeta.$$

Per tant, $f_1 \circ h \circ f_3$ és una determinació contínua del logaritme en $f_3^{-1}(A)$. Notem que en l'eix imaginari tenim que

$$f_3^{-1}(iy) = \frac{i - iy}{i + iy} = \frac{1 - y}{1 + y}.$$

Per tant, $f_3^{-1}(i(-1, 1)) = \mathbb{R}_+$, mentre que $f_3^{-1}(i[(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)]) = \mathbb{R}_-$.

Quan $r > 2$ tenim que

$$A \cap i\mathbb{R} \subset i[(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)]$$

i, per tant, $f_3^{-1}(A_{\pm}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$. En canvi, si $R < 2$, aleshores A_- talla $i(-1, 1)$ i també $i(-\infty, -1)$, i A_+ talla $i(-1, 1)$ i també $i(1, +\infty)$. Per tant, hi ha una corba en A que té per preimatge una corba que rodeja l'origen, on no hi pot haver una determinació de l'argument i, per tant, no n'hi pot haver del logaritme. Així, hem arribat a una contradicció i h no pot existir.

3.5.5. *Demostreu que el domini de continuïtat de la branca principal de l'arctangent*

$$\operatorname{Arctan} w := \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{i - w}{i + w} \right)$$

és $\mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)\}$. ◁

Solució: Vegeu el darrer apartat de l'exercici anterior:

$$f_3^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \geq 1\}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

i aquesta regió és precisament l'obert maximal on tenim definida la branca contínua del logaritme principal.

3.5.6. a) *Sigui $\mathcal{L}$ la determinació del logaritme en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ que compleix que $\mathcal{L}(1) = 4\pi i$. Definim $f(z) := -\mathcal{L}(2 - 2z)$. Demostreu que f és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Calculeu $f(0)$ i $f(-i)$.*

b) *Considereu la sèrie de potències*

$$S(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(2z - 1)^n}{n}.$$

Demostreu que $S(z) = -\operatorname{Log}(2 - 2z)$, per tot $z \in D := D_{1/2}(1/2)$, on Log és la determinació principal del logaritme.

c) Quina relació hi ha entre $S(z)$ i $f(z)$? Indicació: Relacioneu primer $\mathcal{L}(z)$ amb $\text{Log}(z)$ per $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. $\triangleleft$

Solució: El primer apartat és molt similar a l'exercici 2.2.5, ara trobem $k = 2$. Per tant, $\mathcal{L}(z) = \text{Log}(z) + 4\pi i$, i trobem $f(z) := -\text{Log}(2 - 2z) - 4\pi i$. Per tant $f(0) = -\ln(2) - 4\pi i$ i $f(-i) = -\text{Log}(2 + 2i) - 4\pi i = -\ln(2\sqrt{2}) - i\frac{17\pi}{4}$.

Pel segon apartat,

$$S(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{2^n (z - 1/2)^n}{n}.$$

és una sèrie centrada en el punt $1/2$ i amb radi de convergència $1/2$. Notem que

$$S'(z) = \sum_{n \geq 1} 2(2z - 1)^{n-1} = 2 \sum_{n \geq 0} (2z - 1)^n = \frac{2}{1 - (2z - 1)} = \frac{2}{2 - 2z}.$$

Per tant, en el disc de convergència trobem

$$S(z) = C - \text{Log}(2 - 2z).$$

Per expressar S com a funció contínua, ens cal observar que el centre del disc és $1/2$ i el radi de convergència és també $R = 1/2$. Així, $2 - 2z = 1 + 2(1/2 - z)$ té part real positiva:

$$\text{Re}(2 - 2z) = 1 + 2\text{Re}(1/2 - z) \geq 1 - 2|1/2 - z| \geq 1 - 2 \cdot 1/2 = 0.$$

Per tant, té sentit prendre la branca principal del logaritme, ja que hi és contínua. Per determinar la constant, notem que

$$S(1/2) = 0$$

i

$$\text{Log}(2 - 2(1/2)) = \text{Log}(1) = 0.$$

Troblem $C = 0$ i

$$S(z) = -\text{Log}(2 - 2z),$$

tal com volíem veure.

Del primer apartat sabem que $\mathcal{L} = \text{Log} + 4\pi i$. Tenim doncs que

$$f(z) = S(z) - 4\pi i.$$

3.5.7. Sigui $\sqrt{\cdot}$ la determinació de l'arrel quadrada en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ que compleix que $\sqrt{-1} = i$ i sigui $f(z) = \sqrt{3z + 2}$.

1. Expresseu $\sqrt{\cdot}$ en termes d'una determinació del logaritme i argument.

Recordem que

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z| + i \arg z)}.$$

2. Quina és la regió més gran on f és holomorfa? Quina és la imatge? Existeix z tal que $f(z) = -i$?

3. Què val $f(\frac{i-2}{3})$? ◁

Solució:

1. Observem que $3z + 2 \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ si i només si $z \in \mathbb{C} \setminus [-2/3, \infty)$. Per tant, el domini de f és $\mathbb{C} \setminus [-2/3, \infty)$.

Per a determinar la imatge, observem que donat que $\sqrt{-1} = i$, s'ha de complir que $i = e^{\frac{1}{2}((2k+1)\pi i)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Per tant, cal que k sigui un múltiple de 2 i podem triar $\arg z$ que sigui la determinació de l'argument en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ tal que $\arg z \in (0, 2\pi)$ (observeu que si triem una altra determinació de la forma $\arg z + 4\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, llavors les corresponents arrels quadrades coincideixen).

2. El domini ja l'hem comentat. Com que $\arg z \in (0, 2\pi)$, $\frac{1}{2} \arg z \in (0, \pi)$ i, per tant, la imatge de f és el semiplà superior. En particular, no hi ha cap z tal que $f(z) = -i$.

3. $f(\frac{i-2}{3}) = \sqrt{i-2+2} = \sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3.5.8. Els polinomis de Legendre² $P_j(\zeta)$ són els coeficients de z^j en el desenvolupament de Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta z+z^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\zeta) z^j.$$

Provar que $P_j(\zeta)$ és un polinomi de grau j i calcular P_0, P_1, P_2 i P_3 . ◁

Solució:

$$\begin{aligned} (1-2\zeta z+z^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} z^n (z-2\zeta)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} z^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^{n-k} \zeta^k z^{n-k} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{-1/2}{n} z^{n+k} \zeta^k = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\zeta) z^j. \end{aligned}$$

Si $n+k=j$ amb $k \leq n$, el valor més gran de $n-k$ és j que s'assoleix quan $n=j$ i $k=0$ llavors $P_j(\zeta)$ pot tenir grau com a molt j . De fet

$$P_j(\zeta) = (-2)^j \binom{-1/2}{j} \zeta^j + \dots$$

Els polinomis que es demanen són

$$1, \quad \zeta, \quad \frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{2}\zeta^3 - \frac{3}{2}\zeta.$$

Els polinomis de Legendre es fan servir en moltes disciplines, en particular en l'estudi de xarxes neuronals.

²Adrien-Marie Legendre, París, 1752 – 1833. https://ca.wikipedia.org/wiki/Adrien-Marie_Legendre

