

4.2.2. Sigui $\gamma = \partial D_r(0)$ recorreguda un cop amb l'orientació estàndard.. Calculeu, per a $n \in \mathbb{Z}$, $\int_{\gamma} z^n dz$. $\triangleleft$

Solució: Llavors, si $n \geq 0$, $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ és una primitiva holomorfa a $\mathbb{C}$. Per tant, $\int_{\gamma} z^n dz = 0$.

Si $n < -1$, $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ és una primitiva holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Per tant, $\int_{\gamma} z^n dz = 0$.

Finalment, si $n = -1$, parametritzem γ com $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Obtenim

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i.$$

4.2.3. Sigui $\gamma = [i+1, -i]$. Avalueu les següents integrals de línia:

$$a) \int_{\gamma} \sin(2z) dz, \quad b) \int_{|z|=1} ze^{z^2} dz, \quad c) \int_{|z-2|=1} \frac{1}{z} dz. \quad \triangleleft$$

Solució: (a) $(\cos(2+2i) - \cos(2i))/2$; (b) 0; (c) 0.

Es poden obtenir totes mitjançant el teorema fonamental del càlcul. Per exemple, la primitiva de $\sin(2z)$ és $-\cos(2z)/2$, així que

$$\int_{\gamma} \sin(2z) dz = [-\cos(2z)/2]_{i+1}^{-i} = -\cos(-2i)/2 + \cos(2(i+1))/2.$$

Alternativa: també podem usar la definició d'integral de línia: $\gamma(t) = (1-t)(1+i) + t(-i)$, $\gamma'(t) = -1 - 2i$. Així

$$\int_{\gamma} \sin(2z) dz = \int_0^1 \sin(2[(1-t)(1+i) + t(-i)])(-1-2i) dt.$$

Usant la regla de la cadena complexa, veiem que $-\cos(2[(1-t)(1+i) + t(-i)])/2$ és la primitiva de l'integrand, així que podem fer servir el teorema fonamental del càlcul en variable real per acabar el càlcul

$$\int_{\gamma} \sin(2z) dz = [-\cos(2[(1-t)(1+i) + t(-i)])/2]_0^1 = -\cos(-2i)/2 + \cos(2(i+1))/2.$$

4.2.4. Avalueu les següents integrals.

$$a) \int_{\gamma} \left(\frac{6}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + 1 - 3(z-i)^2 \right) dz \text{ si } \gamma \text{ és } \{|z-i|=4\} \text{ recorreguda un cop amb l'orientació estàndard.}$$

$$b) \int_{\gamma} (x - 2xyi) dz \text{ al llarg del contorn } \gamma(t) = t + it^2 \text{ amb } t \in [0, 1].$$

- c) $\int_{\gamma} (|z-1+i|^2 - z) dz$ al llarg de la semicircumferència $\gamma(t) = 1 - i + e^{it}$ on $t \in [0, \pi]$.
- d) La funció no analítica $f(z) = x^2 + iy$ (per què?) al llarg de $\{|z| = 1\}$ recorreguda un cop en sentit antihorari. $\triangleleft$

Solució: a) $1/(z-i)^2$ i $(z-i)^2$ tenen antiderivada en un entorn obert del disc de vora C llavors les integrals corresponents són zero, en canvi $1/(z-i)$ no i cal integrar amb una parametrització. Posem $z = i + 4e^{it}$ amb $t \in [0, 2\pi)$. Finalment la integral val $4\pi i$.

b) La funció no és holomorfa, no té antiderivada, cal substituir. Val $13/10 + i/6$.

c) Sobre la corba la integral és la de $(1-z)$ fem la primitiva i obtenim $-2i$.

d) No satisfà les equacions de Cauchy-Riemann, no pot ser holomorfa i, per tant, tampoc analítica. Considerem $z = \cos t + i \sin t$, substituïm $x = \cos t$, $y = \sin t$ calculem i obtenim $-\pi i$.

4.2.5. Calculeu les següents integrals al llarg del camí γ que s'indica.

- a) $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ per qualsevol contorn en el semiplà dret que va de $-3i$ a $3i$. Quin problema tenim si seguim un contorn pel semiplà esquerre? Indicació: considereu la determinació principal del logaritme en la qual el logaritme no està definit si $y = 0, x \leq 0$.
- b) $\int_{\gamma} e^z \cos z dz$ per un camí d'origen $a = i$ i final $b = \pi$.
- c) $\int_{\gamma} z^{1/2} dz$ per la branca principal de $z^{1/2}$ per un camí d'origen $a = i$ i final $b = \pi$ que no talli la semirecta $(-\infty, 0]$. $\triangleleft$

Solució: a) Pel costat on $x > 0$ no tenim problema ja que $1/z$ té per primitiva la branca principal del logaritme, llavors la integral val $[\text{Log}(z)]_{-3i}^{3i} = \text{Log}(3i) - \text{Log}(-3i) = \pi i/2 - (-\pi i/2) = \pi i$. Per l'altra banda cal fer la integral directament o jugar amb el teorema integral de Cauchy. Sigui C la circumferència de radi 3 centrada en l'origen recorreguda en sentit antihorari tenim que $\int_C 1/z = 2\pi i$. Si γ_1 és un camí de $-3i$ a $3i$ pel costat dret i γ_2 pel costat esquerre, aleshores $C = \gamma_1 \vee \gamma_2^-$ i

$$2\pi i = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} - \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \pi i - \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}.$$

Per tant,

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = -\pi i.$$

Llavors la integral de $-3i$ a $3i$ pel costat esquerre és $-\pi i$. Notem que, globalment, no hi ha independència del camí, aquesta només apareix quan ens restringim a un subconjunt del pla complex on la primitiva existeix.

b) La funció és entera, una primitiva és $\frac{1}{2}(\cos(z) + \sin(z))e^z$, llavors la integral val $-\frac{1}{2}e^{\pi} - \frac{1}{2}\cosh(1)e^i - \frac{1}{2}ie^i \sinh(1)$ (encara podem simplificar més).

c) El camí està en el domini de la branca principal de l'arrel quadrada. Tenim primitiva. La integral val

$$2/3(e^{\frac{3}{2}\text{Log } \pi} - e^{\frac{3}{2}\text{Log } i}) = 2/3(\pi^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3}{2}i\text{Arg } i}) = 2/3(\pi^{\frac{3}{2}} - e^{\frac{3\pi}{4}i}) = 2/3\left(\pi^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)\right).$$

4.2.6. Considerem la determinació de l'arrel $\sqrt{z^2 - 1}$ que és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ i positiva a $(1, \infty)$.

(a) Vegeu que $z + \sqrt{z^2 - 1}$ omet l'eix real negatiu si $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$, de manera que la determinació principal $\text{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ està definida a Ω .

(b) Vegeu que $\text{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ és una primitiva de $\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}$ a Ω .

(c) Avalueu $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$, on γ és el tros de cercle $|z - 1| = \sqrt{2}$ que va de i a $-i$ passant pel semiplà de la dreta ($\text{Re } z > 0$).

Indicació: comproveu que $\sqrt{z^2 - 1} = e^{\frac{1}{2}(\text{Log}(z-1) + \text{Log}(z+1))}$ s'estén a $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ de manera contínua. $\triangleleft$

Solució:

Observem que les expressions

$$\sqrt{z^2 - 1} = e^{\frac{1}{2}(\log(z-1) + \log(z+1))},$$

on $\log w$ és alguna determinació del logaritme, són arrels de $z^2 - 1$ en alguna regió del pla. Si triem el logaritme principal tenim directament que

$$\sqrt{z^2 - 1} = e^{\frac{1}{2}(\text{Log}(z-1) + \text{Log}(z+1))}$$

és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$ i positiva a $(1, +\infty)$.

Comprovem en primer lloc que efectivament aquesta és la funció de la que ens parla l'enunciat.

Mètode 1: Si ens hi fixem, veurem que també ho és als punts reals $x < -1$. Escrivint $\text{Log } w = \ln |w| + i\text{Arg } w$, veiem que per a comprovar això només cal demostrar que

$$F(z) := e^{\frac{i}{2}(\text{Arg}(z-1) + \text{Arg}(z+1))}$$

és contínua a aquests punts $x < -1$. Si ens acostem a x pel semiplà de dalt tenim que

$$F(x + i0^+) = e^{\frac{i}{2}(\pi + \pi)} = e^{i\pi} = -1,$$

i si ens hi acostem pel semiplà de baix tenim anàlogament

$$F(x + i0^-) = e^{\frac{i}{2}(-\pi - \pi)} = e^{-i\pi} = -1.$$

Per tant hi ha continuïtat de F aquests punts. Un cop hem vist que la funció és contínua, l'holomorfia de l'arrel $\sqrt{z^2 - 1}$ definida a dalt a tot $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ se segueix: per $z_0 \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, podem trobar $\delta > 0$ tal que si $z \in B(z_0, \delta)$, aleshores $|z^2 - z_0^2| < |z_0^2 - 1|$ per continuïtat i, en particular, $0 \neq z^2 - 1$. Així, com que $F(z)$ té només dues alternatives que són nombres complexos oposats, l'elecció està unívocament determinada quan $z \in B(z_0, \delta)$ i, donada una determinació del logaritme $\log$ a $B(z_0^2 - 1, |z_0^2 - 1|)$, F ha de coincidir amb $e^{\frac{1}{2} \log(z^2 - 1)}$ o bé amb el seu oposat, és a dir, $F(z) = \pm e^{\frac{1}{2} \log(z^2 - 1)}$. En qualsevol cas, la seva derivada és $F'(z) = \pm e^{\frac{1}{2} \log(z^2 - 1)} \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{zF(z)}{F(z)^2} = \frac{z}{F(z)}$.

Mètode 2: Prenent una determinació del logaritme a $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, tenim que per $z \notin [-1, \infty)$ la funció

$$e^{\frac{1}{2}(\log(z-1)+\log(z+1))}$$

està ben definida i, si $z \notin \mathbb{R}$ tenim que $\log(z-1) = \text{Log}(z-1) + 2k\pi i$ i $\log(z+1) = \text{Log}(z+1) + 2k\pi i$, amb k constant en els semiplans de part imaginària positiva i negativa. Aleshores tenim que

$$e^{\frac{1}{2}(\log(z-1)+\log(z+1))} = e^{\frac{1}{2}(\text{Log}(z-1)+\text{Log}(z+1))+2k\pi i} = F(z).$$

Però aquesta segona definició és contínua i holomorfa a $z \notin [-1, \infty)$, mentre que la definició amb logaritmes principals és contínua i holomorfa a $z \notin (\infty, 1]$. Així doncs F és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. A més

$$F'(z) = e^{\frac{1}{2}(\log(z-1)+\log(z+1))} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right) = F(z) \frac{z}{F(z)^2} = \frac{z}{F(z)},$$

i el mateix podem fer amb els logaritmes principals de manera que la derivada de F és $\frac{z}{F(z)}$ a tot arreu on la tenim definida.

(a) Mirem per a quins punts $z \in \mathbb{C}$ tenim que $z + \sqrt{z^2 - 1} \in (-\infty, 0]$, i veurem que cap d'aquests punts no és a Ω . L'equació

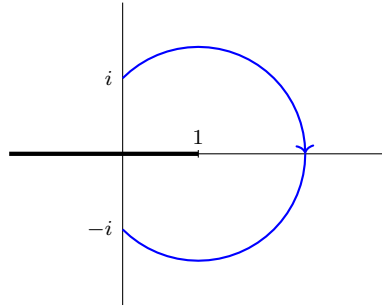
$$z + \sqrt{z^2 - 1} = -x, \quad x > 0,$$

dona per solució $z = -\frac{1+x^2}{2x}$. Observem que tots aquests punts són reals negatius i, per tant, queden fora d' Ω .

(b) Ara sabem que aquesta funció és holomorfa, ja que és composició de funcions holomorfes (tant l'arrel com el logaritme són holomorfs allà on no tenen discontinuïtats). Per tant, per la regla de la cadena,

$$(\text{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1}))' = \frac{1}{z + F(z)} (1 + F'(z)) = \frac{1}{z + F(z)} \left(1 + \frac{z}{F(z)} \right) = \frac{1}{F(z)}.$$

(c) L'arc d'integració (en blau) és dins del domini on la primitiva de la funció a integrar és holomorfa.



Utilitzant el teorema 4.9, és a dir, la regla de Barrow de les integrals de línia, i dient $G(z) = \text{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ tenim:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = G(-i) - G(i) = \text{Log}(-i + \sqrt{(-i)^2 - 1}) - \text{Log}(i + \sqrt{i^2 - 1}).$$

Notem que la notació $\sqrt{(-i)^2 - 1}$ es refereix a una funció avaluada en $z = -i$, que no coincideix en principi (de fet, no coincideix) amb $\sqrt{i^2 - 1}$! En realitat, per ser rigorosos, haurem de parlar de $F(i)$ i $F(-i)$. Aquí

$$\begin{aligned} \sqrt{i^2 - 1} &= e^{\frac{1}{2}(\text{Log}(i-1) + \text{Log}(i+1))} = e^{\frac{1}{2}(\ln \sqrt{2} + i \text{Arg}(i-1)) + \ln \sqrt{2} + i \text{Arg}(i+1))} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\ln 2 + i \frac{3\pi}{4} + i \frac{\pi}{4})} = i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Anàlogament, es comprova que,

$$\sqrt{(-i)^2 - 1} = -i\sqrt{2}.$$

Llavors

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \text{Log}(-i - i\sqrt{2}) - \text{Log}(i + i\sqrt{2}).$$

Tenim que

$$\text{Log}(-i - i\sqrt{2}) = \ln|-i - i\sqrt{2}| + i \text{Arg}(-i - i\sqrt{2}) = \ln(1 + \sqrt{2}) - i\frac{\pi}{2},$$

i anàlogament

$$\text{Log}(i + i\sqrt{2}) = \ln(1 + \sqrt{2}) + i\frac{\pi}{2}.$$

Finalment

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \ln(\sqrt{2} - 1) - i\frac{\pi}{2} - \ln(\sqrt{2} - 1) - i\frac{\pi}{2} = -i\pi.$$

4.2.7. *Siguin $\gamma_1 := \{|z| = 1 : \text{Im } z \geq 0\}$ i $\gamma_2 := \{|z| = 2 : \text{Re } z, \text{Im } z \geq 0\}$. Demostreu que:*

$$a) \left| \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2 + 2} \right| \leq \pi,$$

$$c) \left| \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz \right| \leq 2\pi e,$$

$$b) \left| \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3},$$

$$d) \left| \int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{z^2} dz \right| \leq \pi e^2. \quad \triangleleft$$

Solució: Afitem com a exemple la integral

$$\left| \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz \right| \leq \int_{|z|=1} \left| \frac{\sin z}{z^2} \right| |dz| \leq ML(\gamma) = 2\pi M$$

on γ és la circumferència unitat i

$$M = \max_{|z|=1} \frac{|\sin z|}{|z|^2} = \max_{|z|=1} |\sin(z)|.$$

Sabem que si $z = x + iy$ aleshores

$$|\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y).$$

El primer terme té 1 com a valor màxim, mentre que el segon terme és una funció creixent per $y \geq 0$ i parell. Donat que $|z| = 1$ tenim que $y \leq 1$ i per tant

$$|\sin(z)| = \sqrt{\sin^2(x) + \sinh^2 y} \leq \sqrt{1 + \sinh^2 1} = \sqrt{(2 + e + e^{-1})/2} \leq \sqrt{e},$$

ja que $e^{-1} < 0.5$ i $2.5 < e$. Concloem doncs que $M \leq e$ i, per tant, l'afitació queda provada.

4.2.8. (a) *Sigui γ un camí en $\mathbb{C}$. Proveu que si f és una funció contínua en γ^* llavors*

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})} dz.$$

(b) *Deduïu que si f és una funció contínua en el cercle unitat llavors*

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z) dz} = - \int_{|z|=1} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}. \quad \triangleleft$$

Solució: Escrivim $f = u + iv$ i $\gamma = r + is$ per les parts reals i imaginàries. Aleshores tenim que $\bar{\gamma} = r - is$, i

$$\begin{aligned} \overline{\int_{\gamma} f(z) dz} &= \int_a^b \overline{f \circ \gamma(t) \gamma'(t)} dt = \int_a^b (u(\gamma(t)) - iv(\gamma(t)))(r'(t) - is'(t)) dt \\ &= \int_a^b (u(\bar{\gamma}(t)) - iv(\bar{\gamma}(t)))(\bar{\gamma}'(t)) dt = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})} dz. \end{aligned}$$

Per l'apartat b), si considerem $\gamma = e^{it}$ la circumferència unitat resseguida en sentit antihorari, aleshores $\bar{\gamma} = e^{-it}$ és el mateix camí resseguit en sentit horari, i

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})} dz = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})} (-ie^{-it}) dt$$

és a dir, que

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = - \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})} (ie^{it}) \frac{dt}{e^{2it}} = - \int_{\gamma} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

4.3. Teorema de Cauchy

4.3.1. Demostreu el teorema de Cauchy per oberts estrellats. ◁

4.3.2. Recordeu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(a) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = \sqrt{\pi}$ per a tot $a > 0$. Indicació: Apliqueu el teorema de Cauchy al rectangle $[-R, R] \times [0, a]$.

(b) Proveu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(nx) dx = \sqrt{2\pi} e^{-n^2/2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ◁

Solució:

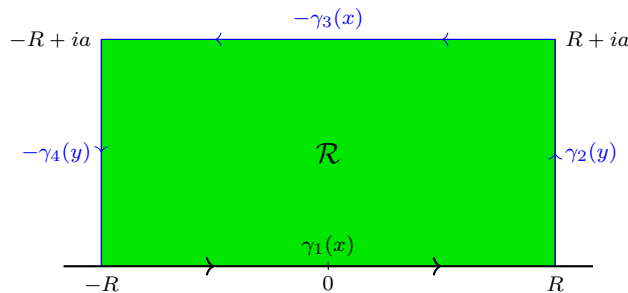
(a) Considerem la funció entera $f(z) = e^{-z^2}$ i apliquem el teorema de Cauchy a la vora del rectangle $\mathcal{R}$ que donen a la *Indicació*:

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z) dz = 0.$$

Parametritzem cadascun dels quatre costats del rectangle:

- 1) $\gamma_1(x) = x$, amb $x \in [-R, R]$. Aquí $dz = dx$.
- 2) $\gamma_2(y) = R + iy$, amb $y \in [0, a]$. Aquí $dz = i dy$.
- 3) $\gamma_3(x) = x + ia$, amb $x \in [-R, R]$. Ara $dz = dx$.
- 4) $\gamma_4(y) = -R + iy$, amb $y \in [0, a]$. Aquí $dz = i dy$.

Amb aquestes parametritzacions tenim, tenint en compte l'orientació, que $\partial\mathcal{R} = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$.



Aleshores

$$0 = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \int_0^a e^{-(R+iy)^2} i dy - \int_{-R}^R e^{-(x+ia)^2} dx - \int_0^a e^{-(-R+iy)^2} i dy.$$

Observem que les dues integrals en y , corresponents als costats del rectangle, tendeixen a 0 quan R tendeix a $+\infty$: $(\pm R + iy)^2 = R^2 - y^2 \pm 2iyR$, de manera que

$$|e^{-(\pm R+iy)^2}| = e^{-R^2+y^2} \leq e^{-R^2} e^{a^2}.$$

Aleshores

$$\left| \int_0^a e^{-(\pm R+iy)^2} i dy \right| \leq \int_0^a e^{-R^2} e^{a^2} dy = a e^{a^2} e^{-R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Per tant, passant al límit la igualtat anterior obtenim

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx$$

i, per tant,

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx.$$

(b) Utilitzem l'apartat anterior, reescalant x per a tenir $x^2/2$. És a dir, fem primer el canvi $x = t/\sqrt{2}$; $dt = \sqrt{2} dx$. Aleshores, de l'apartat (a) tenim que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{t}{\sqrt{2}}+ia)^2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Prenem ara $a = n/\sqrt{2}$, amb $n \geq 1$ (per a tenir $a > 0$). Llavors

$$\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + ia\right)^2 = \left(\frac{t}{\sqrt{2}} + i\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{n^2}{2} + i tn$$

i, per tant,

$$e^{n^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-itn} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Prenent les parts reals d'aquesta igualtat obtenim el resultat demanat, per a $n \geq 1$. Per a $n \leq -1$, observem que $\cos(nx) = \cos(-nx)$ i, per tant, el valor de la integral que obtenim per a aquest n és el mateix que prenent $-n = |n|$. Per a $n = 0$ el resultat és la indicació que ens donen a l'apartat (a).

4.3.3. *Determineu el domini d'holomorfia de les funcions f donades i digueu per què $\int_{|z|=2} f(z) dz = 0$.*

$$a) f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - 6z + 10};$$

$$b) f(z) = \operatorname{Log}(z + 3). \quad \triangleleft$$

Solució: a) És holomorfa allà on el denominador és diferent de zero, és a dir a $\mathbb{C}$ excepte $z = 3 \pm i$. El circuit d'integració no envolta la singularitat llavors pel teorema de Cauchy la integral és zero.

b) El domini d'holomorfa de la funció és $D = \mathbb{C} \setminus \{x \leq -3, y = 0\}$ llavors $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\} \subset D$ i la integral és zero pel teorema de Cauchy.

4.3.4. Sigui $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funció harmònica en un disc D , és a dir, tal que $\Delta u = 4\bar{\partial}\partial u = 0$. Demostreu que existeix una funció $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmònica tal que $(u + iv)$ és holomorfa. L'anomenem harmònica conjugada. Indicació: Demostreu que les equacions de Cauchy-Riemann per $F = U + iV$ es poden escriure com $\partial F = 2\partial U$ o com $\bar{\partial} \bar{U} = -i\bar{\partial} V$. Indicació: Vegeu la secció 5.5. $\triangleleft$

Solució: Si $F = U + iV$ satisfà que

$$\bar{\partial} F = 0 \iff \bar{\partial} \bar{U} = \bar{\partial} U = -i\bar{\partial} V = i\bar{\partial} \bar{V},$$

vegeu l'observació 3.25. Com que U i V prenen valors reals tenim que $\bar{U} = U$ i $\bar{V} = V$, i trobem

$$\bar{\partial} F = 0 \iff \bar{\partial} \bar{U} = -i\bar{\partial} V \iff \partial U = i\partial V \iff \partial F = 2\partial U.$$

Considerem u harmònica. Aleshores $f = 2\partial u$ és holomorfa. Pel teorema de Cauchy té una primitiva holomorfa $F = U + iV$, que ha de satisfer que $\bar{\partial} F = 0$ i $\partial F = f$. Prenem doncs $v = V$. Aleshores per Cauchy-Riemann tenim que

$$\bar{\partial}(u + iV) \stackrel{\text{CR}}{=} \bar{\partial} u - \bar{\partial} \bar{U} \stackrel{\text{CR}}{=} \bar{\partial} u - \frac{\bar{\partial} F}{2} = \frac{\bar{f}}{2} - \frac{\bar{f}}{2} = 0.$$

Per veure que V és harmònica, notem que

$$4\bar{\partial}\partial V \stackrel{\text{CR}}{=} 4\bar{\partial}(-i\partial U) \stackrel{\text{CR}}{=} -2i\bar{\partial}\partial F = -2i\bar{\partial} f = 0.$$

4.3.5. El teorema de Green diu que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert i $U \subset \Omega$ és un obert fitat prou regular (per exemple amb frontera C^1) i tal que $\bar{U} \subset \Omega$, aleshores tot camp vectorial $F = (F_1, F_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ amb $F \in C^1(\Omega)$ satisfà que

$$\int_U (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) \, dm = \int_{\partial U} (F_1 \, dx + F_2 \, dy).$$

Demostreu la fórmula de Green en variable complexa (4.1). $\triangleleft$

Solució: Suposem que $f = u + iv$ i $g = \tilde{u} + i\tilde{v}$. Aleshores

$$\textcircled{\text{I}} = \int_{\partial U} (f \, d\bar{z} - g \, dz) = \int_{\partial U} ((u + iv)(dx - idy) - (\tilde{u} + i\tilde{v})(dx + idy)).$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{I}} &= \int_{\partial U} (u dx - iu dy + iv dx + v dy - \tilde{u} dx - i\tilde{u} dy - i\tilde{v} dx + \tilde{v} dy) \\ &= \int_{\partial U} (u dx + v dy - \tilde{u} dx + \tilde{v} dy) + i \int_{\partial U} (-u dy + v dx - \tilde{u} dy - \tilde{v} dx). \end{aligned}$$

Apliquem ara el teorema de Green als camps $(u - \tilde{u}, v + \tilde{v})$ i $(v - \tilde{v}, -u - \tilde{u})$. Obtenim

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{I}} &= \int_U (-u_y + v_x + \tilde{u}_y + \tilde{v}_x + i(-u_x - v_y - \tilde{u}_x + \tilde{v}_y)) dm \\ &= \int_U (-f_y + g_y + i(-f_x - g_x)) = -i \int_U (f_x - if_y + g_x + ig_y) dm \\ &= -2i \int_U (\partial f + \bar{\partial} g) dm. \end{aligned}$$

4.3.6. Continuant amb l'exercici 4.3.5, demostreu la fórmula de Cauchy generalitzada, coneguda com a fórmula de Cauchy-Pompeiu¹, que diu que si $\phi \in C^1(\Omega)$ i $z_0 \in U$, aleshores

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\phi(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} dm(z).$$

Notem que el cas particular $\phi \in C_c^1(U)$ ens diu $\phi = \mathcal{C}(\bar{\partial}\phi)$, on $\mathcal{C}$ indica la transformada de Cauchy

$$\mathcal{C}\psi(z_0) := -\frac{1}{\pi} \int_U \frac{\psi(z)}{z - z_0} dm(z). \quad \triangleleft$$

Solució: Prenem $U_\varepsilon = U \setminus B_\varepsilon(z_0)$ amb ε prou petit (tal que $B_\varepsilon(z_0) \subset U$). Aleshores prenent $g(z) = \frac{\phi(z)}{z - z_0}$ a (4.1), com que $\bar{\partial}g(z) = \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0}$ en U_ε , obtenim

$$2i \int_{U_\varepsilon} \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} dm = \int_{\partial U} \frac{\phi(z)}{z - z_0} dz - \int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{\phi(z)}{z - z_0} dz.$$

Com que $\bar{\partial}\phi$ és contínua, és fitada en un entorn de z_0 ; sigui $M > 0$ tal que $|\bar{\partial}\phi(z)| \leq M$ en $B_{\varepsilon_0}(z_0)$. Aleshores, per $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\left| \left(\int_U - \int_{U_\varepsilon} \right) \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} dm(z) \right| \leq M \int_{B_\varepsilon(z_0)} \frac{dm(z)}{|z - z_0|} = 2\pi M\varepsilon \rightarrow 0,$$

i, per tant,

$$2i \int_{U_\varepsilon} \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} dm \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2i \int_U \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} dm.$$

D'altra banda, pel teorema del valor mitjà,

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \sup_{B_\varepsilon(z_0)} |\nabla\phi| \int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} |dz| \leq \sup_{B_\varepsilon(z_0)} |\nabla\phi| 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

¹Dimitrie Pompeiu, Broscăuți, 1873–1954. https://ca.wikipedia.org/wiki/Dimitrie_Pompeiu

i

$$\int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{\phi(z_0)}{z - z_0} dz = \phi(z_0) \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{z} dz \stackrel{\text{Ex. 4.2.1}}{=} 2\pi i \phi(z_0).$$

Passant al límit, doncs, tot plegat ens queda

$$2i \int_U \frac{\bar{\partial}\phi(z)}{z - z_0} dm = \int_{\partial U} \frac{\phi(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i \phi(z_0).$$

4.4. Fórmula integral de Cauchy

4.4.1. Avalueu, usant la fórmula integral de Cauchy, les següents integrals:

- a) $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz;$ d) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+z+1};$ g) $\int_{|z|=3} \frac{3z-2}{z^2-z} dz;$
b) $\int_{|z|=1} \frac{\sin(e^z)}{z} dz;$ e) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2z-3};$ h) $\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1} dz.$ <
c) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1};$ f) $\int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\cos(z)}{z^2(z^2-\pi^2)} dz;$

Solució:

(a) Com que $1 \in D_2(0)$, la fórmula de Cauchy per a $f(z) = z^2$ dona

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1} dz = 2\pi i 1^2 = 2\pi i.$$

(b) Essent $0 \in \mathbb{D}$, podem aplicar la fórmula de Cauchy a $f(z) = \sin(e^z)$:

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(e^z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \sin 1.$$

(c) Descomponem en fraccions simples

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1}$$

tenim que

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2} \int_{|z|=2} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \int_{|z|=2} \frac{dz}{z+1} = \pi i - \pi i = 0.$$

Observem que

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i \text{Ind}(\gamma, 1),$$

on γ és la circumferència de radi 2. Anàlogament, l'altra integral dona $2\pi i \text{Ind}(\gamma, -1)$. És clar, tal com acabem de veure, que la diferència d'índexs és 0.

(d) Les arrels de $z^2 + z + 1 = 0$ són $\alpha = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ i $\beta = \bar{\alpha}$, totes dues dins el disc $D_2(0)$. Escrivint

$$\frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right)$$

tenim que

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + z + 1} &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\int_{|z|=2} \frac{dz}{z - \alpha} - \int_{|z|=2} \frac{dz}{z - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} (2\pi i - 2\pi i) = 0. \end{aligned}$$

Observem que, llevat del factor $2\pi i$, aquesta integral equival a la diferència de dos índexs de punts de l'interior del disc $D_2(0)$, i per tant val 0.

(e) Tenim que $z^2 + 2z - 3 = (z - 1)(z + 3)$. L'arrel 1 és dins $D_2(0)$, però l'arrel -3 és fora, de manera que la funció $1/(z + 3)$ és holomorfa en aquest disc. Aplicant la fórmula de Cauchy a aquesta funció tenim:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 2z - 3} = \int_{|z|=2} \frac{1/(z + 3)}{z - 1} dz = 2\pi i \frac{1}{1 + 3} = i\frac{\pi}{2}.$$

(f) (*proposada per Eric Benavente Carreira*): Considerem la integral

$$\int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\cos z}{z^2(z^2 - \pi^2)} dz.$$

Primer analitzem les singularitats del denominador:

$$z^2(z^2 - \pi^2) = z^2(z - \pi)(z + \pi),$$

que té singularitats en $z = 0$, $z = \pi$ i $z = -\pi$.

Tenint en compte que el contorn és el cercle $|z - 2| = \frac{3}{2}$, observem que:

$$|0 - 2| = 2 > \frac{3}{2}, \quad |-\pi - 2| > \frac{3}{2},$$

per tant $z = 0$ i $z = -\pi$ queden fora del contorn. En canvi,

$$|\pi - 2| < \frac{3}{2},$$

així que $z = \pi$ és l'única singularitat dins del contorn.

Aleshores, podem escriure la funció com

$$\frac{\cos z}{z^2(z^2 - \pi^2)} = \frac{f(z)}{z - \pi}, \quad \text{on} \quad f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z + \pi)}.$$

La funció $f(z)$ és holomorfa en un entorn de $z = \pi$, de manera que podem aplicar la fórmula integral de Cauchy:

$$\int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\cos z}{z^2(z^2 - \pi^2)} dz = 2\pi i f(\pi).$$

Calculem:

$$f(\pi) = \frac{\cos \pi}{\pi^2(2\pi)} = \frac{-1}{2\pi^3}.$$

Per tant,

$$\int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\cos z}{z^2(z^2 - \pi^2)} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{-1}{2\pi^3} \right) = -\frac{i}{\pi^2}.$$

g) Descomponem en fraccions simples

$$\frac{3z-2}{z^2-z} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z}.$$

Llavors tenim que

$$\int_{|z|=3} \frac{3z-2}{z^2-z} dz = \int_{|z|=3} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z} \right) dz = \int_{|z|=3} \frac{1}{z-1} dz + \int_{|z|=3} \frac{2}{z} dz = 6\pi i.$$

h)

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1} dz = \int_{|z+1|=1} \left(-\frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)} \right) dz = 2\pi i(-1/2) + 0 = -\pi i.$$

4.4.2. Resoleu els següent exercicis relacionats amb la fórmula integral de Cauchy.²

a) Calculeu $\oint_C \frac{z^2}{z^4-1} dz$ sobre la circumferència de radi 3 centrada en 0.

b) És cert que $\oint_C \frac{e^z}{z} dz = 0$ si C és tancada i simple?

◁

Solució: a)

$$\frac{z^2}{z^4-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right).$$

Obtenim

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2}{z^4-1} dz = \frac{1}{4} \left(\oint_{|z|=3} \frac{idz}{z-i} - \oint_{|z|=3} \frac{idz}{z+i} + \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z-1} - \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z+1} \right) = 0.$$

b) Si C no envolta el 0 és cert. Si C envolta el zero la integral val $2\pi i e^0 = 2\pi i$.

4.4.3. Sigui p un polinomi de grau n , amb tots els seus zeros continguts en $D_R(0)$. Demostreu que

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n.$$

◁

²De vegades es fa servir la notació $\oint$ per indicar que la integral és sobre un camí tancat.

Solució: Convé expressar el polinomi com a producte de monomis. Tenim que $p(z) = C \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$. Aleshores calculant la derivada del producte trobem que

$$p'(z) = C \sum_{k=1}^n \prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus k} (z - \alpha_i),$$

i obtenim

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - \alpha_k}.$$

Aplicant la fórmula integral de Cauchy a cada sumand obtenim el resultat demanat:

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \sum_{k=1}^n \int_{|z|=R} \frac{1}{z - \alpha_k} dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i = 2\pi i n.$$

4.4.4. *Segui $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Calculeu la integral de línia $\int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz$. Deduïu que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2) dt}{1+r^2-2r \cos(\theta-t)} = 2\pi, \quad \text{per a tot } 0 \leq r < 1 \text{ i } \theta \in \mathbb{R}. \quad \triangleleft$$

Solució: Aplicant la fórmula integral de Cauchy tenim que

$$\int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz = \int_{|z|=1} \frac{2 dz}{z-a} - \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2(2\pi i) - 2\pi i = 2\pi i.$$

Per altra part, sumant dins la integral i parametritzant $z = e^{it}$, obtenim

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz &= \int_{|z|=1} \frac{z+a}{z(z-a)} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+a}{e^{it}(e^{it}-a)} i e^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{1-|a|^2 + a e^{-it} - \bar{a} e^{it}}{|e^{it}-a|^2} dt. \end{aligned}$$

Observem que $a e^{-it} - \bar{a} e^{it} = 2i \operatorname{Im}(a e^{-it})$. Per tant, prenent les parts imaginàries a la igualtat anterior i utilitzant la igualtat que hem vist al principi obtenim,

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \frac{1-|a|^2}{|e^{it}-a|^2} dt.$$

Escrivint $a = r e^{i\theta}$, $r < 1$, obtenim el resultat, ja que

$$|e^{it}-a|^2 = 1 + |a|^2 - a e^{-it} - \bar{a} e^{it} = 1 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(a e^{-it}).$$

4.4.5. *Siguin $f, g \in H(\Omega)$, on Ω és un domini tal que $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Donat $a \in \mathbb{C}$ amb $|a| \neq 1$, calculeu*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{ag(w)}{aw-1} \right) dw. \quad \triangleleft$$

Solució: Separem dos casos:

(i) $|a| < 1$. Per la fórmula de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(w)}{w-a} dw = f(a).$$

Per altra part, com que $1/|a| > 1$ (el cas $a = 0$ és més fàcil, pel teorema de Cauchy),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{ag(w)}{aw-1} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{g(w)}{w-1/a} dw = 0.$$

(ii) $|a| > 1$. Aquí els papers d' a i $1/a$ es giren; com que $1/a \in \mathbb{D}$, tenim que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(w)}{w-a} dw = 0$$

i

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{ag(w)}{aw-1} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{g(w)}{w-1/a} dw = g\left(\frac{1}{a}\right).$$

Tot plegat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{ag(w)}{aw-1} \right) dw = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in \mathbb{D} \\ -g(1/a) & \text{si } a \notin \mathbb{D}. \end{cases}$$

4.4.6. *Demostreu (4.3) usant la fórmula integral de Cauchy centrada i el teorema de Cauchy en convexos.* $\triangleleft$

Solució: N'hi ha prou amb adaptar el mètode de la solució de l'exercici 4.6.3.

4.5. Sèries de potències

4.5.1. *Desenvolueu en sèrie de potències al voltant del punt a i doneu el radi de convergència de:*

- | | | |
|--------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|
| a) $1/z$, $a = 1$; | c) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $a = 0$; | e) $\frac{e^z}{1-z}$, $a = 0$; |
| b) $z^2 e^z$, $a = 0$; | d) $\frac{1}{(1-z)^3}$, $a = 0$; | f) $\frac{1}{1+e^z}$, $a = 0$. |

(en (e) i (f) només cal calcular els 3 primers termes). $\triangleleft$

Solució: (a) Si $f(z) = 1/z$, aleshores si $n \geq 1$ tenim que $f^{(n)}(z) = \frac{n!(-1)^n}{z^{n+1}}$, com podem veure per inducció sobre n . Aleshores $f^{(n)}(1) = n!(-1)^n$ per $n \geq 0$, i obtenim

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (z-1)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z-1)^n.$$

El radi de convergència és $R = 1$ pel criteri del quocient.

(b) Si $f(z) = z^2 e^z$, aleshores $f'(z) = (z^2 + 2z)e^z$, i si $n \geq 2$ tenim que $f^{(n)}(z) = (z^2 + 2nz + n(n-1))e^z$, com podem veure per inducció sobre n . Aleshores $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ i $f^{(n)}(0) = n(n-1)$ per $n \geq 2$, i obtenim

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!} z^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^{n+2}.$$

El radi de convergència és infinit pel criteri del quocient.

Aquesta sèrie també es pot calcular directament sabent que $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

(c) Ara tenim que $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$. Per tant,

$$f^{(n)}(z) = n!(-1)^n \left(\frac{1}{(z-2)^{n+1}} - \frac{1}{(z-1)^{n+1}} \right),$$

i se segueix que

$$f^{(n)}(0) = n! \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Així obtenim que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(2^{n+1} - 1)z^n}{2^{n+1}},$$

i $R = 1$.

(d) Ara tenim que $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$. Per tant,

$$f^{(n)}(z) = \frac{(n+2)!}{2} \frac{1}{(1-z)^{n+3}},$$

i se segueix que

$$f^{(n)}(0) = \frac{(n+2)!}{2}.$$

Així obtenim que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n,$$

i $R = 1$.

Alternativament, usant el teorema de Mertens (vegeu el teorema 1.22), com que sabem que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

aleshores

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \stackrel{\text{T.1.22}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n 1 \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n,$$

i

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{(1-z)^2} \cdot \frac{1}{1-z} \stackrel{\text{T.1.22}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+1) \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n.$$

(f) Ara tenim que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+e^z}, \\ f'(z) &= \frac{-e^z}{(1+e^z)^2}, \\ f''(z) &= \frac{e^{3z} - e^z}{(1+e^z)^4}, \end{aligned}$$

i

$$f'''(z) = \frac{(3e^{3z} - e^z)(1+e^z) - (e^{3z} - e^z)4e^z}{(1+e^z)^5}.$$

Obtenim que

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^3}{48} + O(z^4).$$

D'entrada no podem calcular R en no conèixer els coeficients. A la demostració del teorema 4.24, que dona el desenvolupament local en sèrie de potències, es demostra que si $D_r(0) \subset \Omega$, aleshores $R \geq r$. Per tant, com que la funció és holomorfa a tot arreu llevat dels pols $z = i\pi + 2k\pi i$ per tot $k \in \mathbb{Z}$, deduïm que $R \geq \pi$. A la vegada, precisament entorn del pol $i\pi$ la funció pren valors arbitràriament grans. Per tant la sèrie no pot ser uniformement convergent entorn del pol i , en particular $R \leq \pi$. Així, tenim que $R = \pi$.

4.5.2. Sigui $\alpha \in \mathbb{C}$, provar que si $(1+z)^\alpha$ es pensa com $e^{\alpha \text{Log}(1+z)}$ llavors per $|z| < 1$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots$$

(binomi de Newton³).

◁

Solució: Podem provar per inducció que $((1+z)^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1))(1+z)^{(\alpha-n)}$. D'aquí el resultat. Escrivim

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!}$$

si $n > 0$ i $\binom{\alpha}{0} = 1$.

4.5.3. Trobeu els desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt a de les següents funcions:

³Isaac Newton, Woolsthorpe-by-Colsterworth, Lincolnshire, 1642 – 1727. https://ca.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

$$a) f(z) = \cos^2 z, a = 0; \quad b) f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}, a = 1; \quad c) \sqrt[3]{z}, a = 1.$$

Aquí $\sqrt[3]{\cdot}$ és la determinació de l'arrel cúbica en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ que val $(-1 + i\sqrt{3})/2$ en $z = 1$. $\triangleleft$

Solució: (a) Mètode estàndard: Tenim que $f(z) = \frac{\cos(2z)+1}{2}$. Per tant,

$$f'(z) = -\sin(2z)$$

i per inducció veiem que si $n \geq 1$ tenim que

$$f^{(2n)}(z) = (-1)^n 2^{2n-1} \cos(2z)$$

$$f^{(2n+1)}(z) = (-1)^{n+1} 2^{2n} \sin(2z).$$

Avaluant en $a = 0$ tenim que

$$f(0) = 1,$$

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n 2^{2n-1},$$

i

$$f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

Per tant,

$$f(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}.$$

Mètode intel·ligent: Podem fer el càlcul directament notant que

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2z)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!}.$$

(b) Prenem $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2} = z^2 g(z)$, on $g(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$. Calculem per inducció

$$g^{(n)}(z) = \frac{(n+1)!(-1)^n}{(z+1)^{n+2}}.$$

Per fer aquests càlculs, normalment usem intuïció + inducció. La intuïció prové de calcular un parell o tres de derivades i detectar els patrons: $g'(z) = -2/(z+1)^3 = -2!/(z+1)^{(2+1)}$, $g''(z) = 6/(z+1)^4 = 3!/(z+1)^{(2+2)}$, ... Per la inducció notem en primer lloc que és cert per $n = 1$ tal com hem vist. D'altra banda, si per un $n \in \mathbb{N}$, efectivament, tenim $g^{(n)}(z) = \frac{(n+1)!(-1)^n}{(z+1)^{n+2}}$, aleshores pel següent nombre natural podem derivar un cop més i obtenim $g^{(n+1)}(z) = \frac{-(n+2)(n+1)!(-1)^n}{(z+1)^{n+3}} = \frac{((n+1)+1)!(-1)^{n+1}}{(z+1)^{(n+1)+2}}$, i es compleix el pas inductiu.

Un cop establerta la derivada n -èsima, és moment de calcular els valors que pren en $a = 1$:

$$g(1) = 1/4 \quad g^{(n)}(1) = \frac{(n+1)!(-1)^n}{2^{n+2}}.$$

Notem que per $n = 0$ les dues expressions coincideixen.

Escrivim ara la sèrie de potències:

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)!(-1)^n}{n!2^{n+2}}(z-1)^n$$

Simplificant els factorials i multiplicant per $z^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1$ obtenim

$$f(z) = ((z-1)^2 + 2(z-1) + 1) \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(-1)^n}{2^{n+2}}(z-1)^n.$$

Multiplicant terme a terme i reindexant, obtenim

$$f(z) = \sum_{n \geq 2} \frac{(n-1)(-1)^n}{2^n}(z-1)^n + \sum_{n \geq 1} \frac{2n(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n + \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(-1)^n}{2^{n+2}}(z-1)^n.$$

Ajuntant termes,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)(z-1) + \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{2^n} \left((n-1) - \frac{2n}{2} + \frac{n+1}{4}\right)(z-1)^n \\ &= \frac{1}{4} + \frac{z-1}{4} + \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n(n-3)}{2^{n+2}}(z-1)^n. \end{aligned}$$

(c) Anomenem $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Escrivim $z = 1 + w$ i desenvoluparem la funció $g(w) = \sqrt[3]{1+w} = (1+w)^{1/3}$ en $a = 0$, que serà vàlida per $|w| < 1$.

Aleshores

$$g(w) = g(0) + g'(0)w + \frac{g''(0)}{2}w^2 + \dots$$

Utilitzant la determinació que ens indiquen, tenim que

$$\begin{aligned} g(0) &= (1+0)^{1/3} = \sqrt[3]{1} = \zeta; \\ g'(w) &= \frac{1}{3}(1+w)^{-2/3}; \quad g'(0) = \frac{1}{3}(1)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\zeta; \\ g''(w) &= \frac{-2}{3^2}(1+w)^{-5/3} \quad g''(0) = \frac{-2}{3^2}(\sqrt[3]{1})^{\frac{1}{3}-2} = \frac{-2}{3^2}\zeta; \\ &\dots \\ g^{(n)}(w) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{3} - (n-1)\right) (1+w)^{\frac{1}{3}-n}; \\ g^{(n)}(0) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{3} - (n-1)\right) (1)^{\frac{1}{3}}(1)^{-n} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{3} - (n-1)\right) \zeta. \end{aligned}$$

En conseqüència

$$g(w) = \zeta + \sum_{n \geq 1} \binom{\frac{1}{3}}{n} \zeta w^n,$$

on definim

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}.$$

Desfent el canvi

$$f(z) = \zeta \left(1 + \sum_{n \geq 1} \binom{\frac{1}{3}}{n} (z-1)^n \right), \text{ per } |z-1| < 1.$$

Observem que $f(z) = \zeta(\tilde{f}(z))$ on $\tilde{f}(z)$ és la determinació de l'arrel cúbica tal que $\tilde{f}(1) = 1$.

4.5.4. Considereu la funció $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+i)z}$ i el punt $a = -1$.

1. "Sense fer cap càlcul", raoneu quin és el disc de convergència de la sèrie de potències de f al voltant del punt a .

2. Calculeu la sèrie de potències de f al voltant de a . $\triangleleft$

Solució: (a) Sabem que f és holomorfa a tot arreu llevat dels zeros del denominador, que són 0 , $-i$ i 1 . El més proper a -1 és l'origen, que està a distància 1 . Així doncs, com que la funció és holomorfa a $D_1(-1)$ obtenim que $R \geq 1$ i com que té un pol a l'origen no és uniformement convergent a $D_{1+\varepsilon}(-1)$ de manera que $R \leq 1$. Tenim doncs $R = 1$.

(b) Escrivim $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+i)z} = (z+1)g(z)$, on $g(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z}$. Per trobar les constants A , B i C , resolem

$$A(z+i)z + B(z-1)z + C(z-1)(z+i) = 1.$$

Avaluant a $z = 0$ obtenim $C = i$, a $z = -i$ obtenim $B = \frac{-i-1}{2}$ i a $z = 1$ trobem $A = \frac{1-i}{2}$. Tenim que

$$g^{(n)}(z) = (-1)^n n! \left(\frac{A}{(z-1)^{n+1}} + \frac{B}{(z+i)^{n+1}} + \frac{C}{z^{n+1}} \right),$$

i a $z = -1$ trobem

$$g^{(n)}(-1) = (-1)^n n! \left(\frac{A}{(-2)^{n+1}} + \frac{B}{(-1+i)^{n+1}} + \frac{C}{(-1)^{n+1}} \right),$$

és a dir

$$g^{(n)}(-1) = -n! \left(\frac{(i-1)/2}{2^{n+1}} + \frac{(-i-1)/2}{(1-i)^{n+1}} + i \right).$$

Les sèries de potències resultants seran

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} - \left(\frac{i-1}{2^{n+2}} + \frac{-i-1}{2(1-i)^{n+1}} + i \right) (z+1)^n$$

i

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} - \left(\frac{i-1}{2^{n+2}} + \frac{-i-1}{2(1-i)^{n+1}} + i \right) (z+1)^{n+1}.$$

4.5.5. a) Es pot desenvolupar $\sqrt{z}$ en sèrie de potències en un entorn de l'origen?

b) Quin és el disc màxim centrat a 0 on es pot desenvolupar $\cos(1/(z-1))$ en sèrie de potències?

c) I la funció $\frac{1}{2-z} + \frac{z}{3-z}$?

Solució: a) No hi ha cap disc al voltant de 0 on la funció sigui holomorfa, no ho podem fer. b) El disc més gran d'holomorfia al voltant de 0 és el disc de radi 1. c)

$$\frac{1}{2-z} + \frac{z}{3-z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} - 1 - \frac{1}{1-z/3}.$$

Cal que $|z/2| < 1$ i $|z/3| < 1$. Llavors el radi de convergència al voltant de 0 és 2.

4.5.6. Determineu com a mínim els coeficients a_1, a_2, a_3, a_4 de la sèrie de Taylor de $1/(1+z+z^4)$ centrada a l'origen. Expliqueu perquè el radi de convergència és com a mínim $2/3$.

Solució: Ho podem fer amb Sage, amb la comanda `taylor`. Fem-ho a mà.

$$\frac{1}{1+z+z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+z^4)^n = 1 - z + z^2 - z^3 + z^5 + \dots$$

i obtenim els coeficients demanats. Per controlar el radi de convergència cal que trobem el zero ω de $z^4 + z + 1$ més proper a l'origen. Llavors el radi de convergència serà $|\omega|$. Vegem si hi pot haver un zero a distància menor que $2/3$. Si $|z| < 2/3$ llavors $|z+z^4| < 2/3 + 16/81 < 1$ llavors no pot ser que $z^4 + z + 1 = 0$. Aleshores el radi de convergència és major que $2/3$. (de fet l'arrel més propera és aproximadament $-0.727 + 0.43i$ i la seva distància a l'origen és $0.8447 > 2/3$.)

4.5.7. Vegem com el teorema 4.24 és propi de l'anàlisi complexa. Una funció de variable real f és analítica en un interval obert $I \subset \mathbb{R}$ si es pot expressar localment com a sèrie de potències amb coeficients reals. Demostreu que si f és analítica en I aleshores hi és derivable. Trobeu una funció infinites vegades derivable en $\mathbb{R}$ que no hi sigui analítica. Trobeu una funció f analítica en $\mathbb{R}$ que tingui radi de convergència 1.

Solució: Si f es pot expressar com a sèrie de potències en un entorn de $x \in \mathbb{R}$, la mateixa sèrie serà convergent en un disc centrat en x pel teorema de Hadamard i, per tant, hi és holomorfa, de manera que la derivada $f'(x) = \partial f(x + 0i)$.

La funció $f(x) = e^{-1/x^2}$ és l'exemple més conegut de funció C^∞ de variable real que no és analítica en l'origen, ja que totes les derivades són zero i la sèrie no pot coincidir amb f que és positiva en tot punt llevat de l'origen.

La funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ és derivable en tota la recta real, amb sèrie $\sum (-1)^n x^{2n}$, que té radi de convergència 1. Els punts on l'extensió holomorfa deixa de ser contínua són $\pm i$, justificant també aquest radi tan petit. En general, per tot punt $a \in \mathbb{R}$, el radi de convergència de la sèrie corresponent serà la distància a $\pm i$, és a dir $\sqrt{a^2 + 1}$.

4.6. Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades i desigualtats de Cauchy

4.6.1. Donat $r > 0$ i $a \in \mathbb{C}$, calculeu

$$I = \int_{|z-a|=r} \frac{e^{2z}}{(z-a)^3} dz. \quad \triangleleft$$

Solució: Per la fórmula integral de Cauchy per derivades, si $f(z) = e^{2z}$ tenim que

$$\int_{|z-a|=r} \frac{e^{2z}}{(z-a)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(a) = \pi i 4e^{2a}.$$

4.6.2. Sigui $0 \leq m \leq n$ enters. Calculeu

$$\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{m+1}} dz. \quad \triangleleft$$

Solució: Sigui $f(z) = (1+z)^n$. Aleshores

$$f^{(m)}(z) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)(1+z)^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!} (1+z)^{n-m}.$$

Així

$$f^{(m)}(0) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

i per la fórmula integral de Cauchy per derivades tenim que

$$\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{m+1}} dz = \frac{2\pi i}{m!} f^{(m)}(0) = 2\pi i \frac{n!}{(n-m)!m!} = 2\pi i \binom{n}{m}.$$

4.6.3. Intentarem calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ fent servir la fórmula integral de Cauchy per derivades.

a) Considereu la semicircumferència C en el semiplà superior centrada a 0 amb radi R i tancada pel segment de l'eix OX . Calculeu $\int_C \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$.

b) Descomponeu $C = C_1 \cup C_2$ on C_1 és el segment de $-R$ a R i C_2 la part restant de C . Doneu una fita superior de $\left| \int_{C_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \right|$ fent servir la desigualtat triangular per integrals.

c) Fent servir els apartats anteriors calculeu $\int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$. Que passa si R tendeix a infinit? $\triangleleft$

Solució: a) La funció $f(z) = 1/(z+i)^2 \in H(\mathbb{C} \setminus \{-i\})$, és holomorfa a l'interior de la corba C llavors

$$\int_C \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz$$

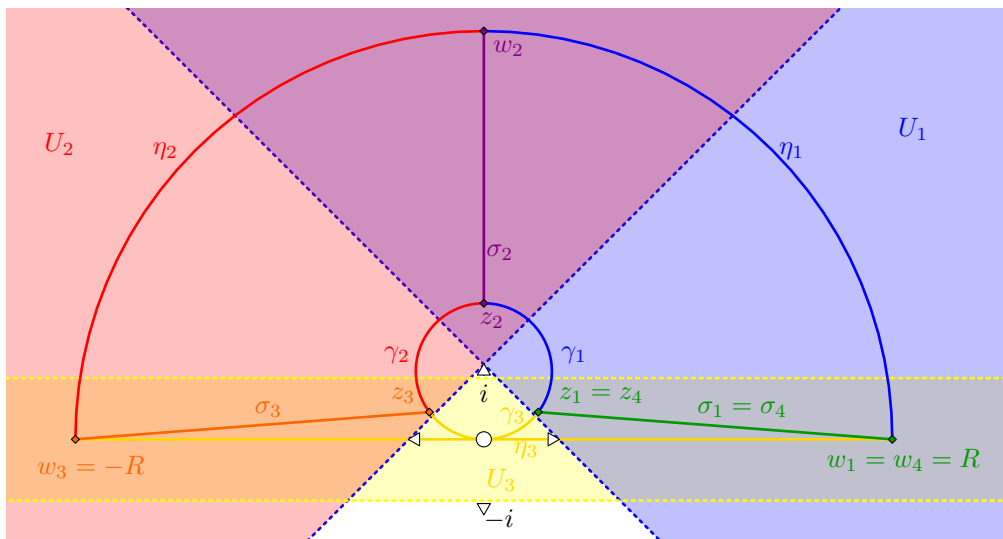
D'altra banda, la FIC dona per derivades

$$\int_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz = 2\pi i f'(i) = \pi/2.$$

Ens falta veure doncs que

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz = \int_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz.$$

Notem que l'integrand és holomorf en un entorn $\bar{\Omega}$, on Ω és el domini $\Omega = D \setminus \overline{B_1(i)}$ comprès entre la corba inicial C i la bola de radi 1 centrada en i . Ara com ara no podem garantir que existeixi una primitiva holomorfa en aquest entorn, ja que el domini Ω no és convex (ni simplement connex, de fet, vegeu la secció 5.4).



No obstant, sí que són convexas els semiplans i les interseccions de semiplans, així que definim

$$U_1 = \{z : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1 + \varepsilon\},$$

$$U_2 = \{z : \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 1 + \varepsilon\},$$

$$U_3 = \{z : -1 < \operatorname{Im} z < 1\}.$$

Aleshores, si escrivim $g(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$, i notant que $g \in H(U_j)$, podem aplicar el teorema de Cauchy en cada camí contingut en U_j .

Definim doncs $t_1 = -10\varepsilon$, $t_2 = \pi/2$, $t_3 = \pi + 10\varepsilon$ i $t_4 = 2\pi$, i escrivim

$$\gamma_j(t) := i + e^{it}, \quad \text{amb } t_j < t < t_{j+1},$$

$$z_j = i + e^{it_j},$$

$$w_1 = R + 0i, \quad w_2 = iR, \quad w_3 = -R + 0i \quad \text{i} \quad w_4 = w_1.$$

Aleshores prenem els segments

$$\sigma_j = [z_j, w_j]$$

i dividim el camí C en els fragments compresos entre els punts w_j , que anomenem η_j , amb

$$\eta_j(0) = w_j \quad \text{i} \quad \eta_j(1) = w_{j+1}.$$

Aleshores, per $j \in \{1, 2, 3\}$ tenim que

$$\Gamma_j := \sigma_j \vee \eta_j \vee \sigma_{j+1}^- \vee \gamma_j^- \subset U_j,$$

i pel teorema de Cauchy en cada U_j trobem

$$\int_{\Gamma_j} g(z) \stackrel{\text{T.4.17}}{=} 0.$$

Com que els camins es recorren en sentit antihorari, es cancel·len els valors dels fragments de camí en comú, és a dir les integrals en σ_j desapareixen, i obtenim

$$\int_C g(z) dz = \sum_{j=1}^3 \int_{\eta_j} g(z) dz = \sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_j} g(z) dz = \int_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz = \pi/2.$$

Notem que tot aquest procediment se simplificarà quan coneguem el teorema de Cauchy global. Aquest procediment modificat convenientment, permet també deduir la FIC per a derivades no centrada de la FIC per a derivades centrada.

b)

$$\left| \int_{C_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \right| \leq \int_{C_2} \frac{1}{|1+z^2|^2} |dz| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \rightarrow 0 \quad \text{si } R \rightarrow \infty$$

ja que $|1 + R^2 e^{i2t}| \geq R^2 - 1$ (R gran).

c) Llavors

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

4.6.4. *Sigui $\alpha > 0$ i $f \in H(\mathbb{D})$ tal que existeix $c > 0$ i per a tot $|z| < 1$, $(1 - |z|)^\alpha |f(z)| \leq c$. Demostreu que per a tot $n \geq 0$, $|f^{(n)}(0)| \leq cn! \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha (n + \alpha)^\alpha$.* $\triangleleft$

Solució: Sigui $0 < r < 1$. Llavors $\sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{c}{(1-r)^\alpha}$. Aplicant les desigualtats de Cauchy, obtenim que

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!c}{r^n(1-r)^\alpha} := \varphi(r).$$

Calculem el mínim de φ . Derivant,

$$\varphi'(r) = \frac{-n!c(nr^{n-1}(1-r)^\alpha - \alpha r^n(1-r)^{\alpha-1})}{(r^n(1-r)^\alpha)^2} = \frac{-n!c(n(1-r) - \alpha r)}{r^{n+1}(1-r)^{\alpha+1}}.$$

Per tant, $\varphi'(r) = 0$ en $(0, 1)$ si i només si, $r = \frac{n}{n+\alpha}$ i es verifica que

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!c}{\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^n \left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^\alpha} = cn! \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n/\alpha} \frac{(n+\alpha)^\alpha}{\alpha^\alpha} \leq cn! \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha (n+\alpha)^\alpha.$$

4.6.5. Sigui f una funció entera de manera que existeixen constants $C, M > 0$ tals que $|f(z)|e^{-C|z|} \leq M$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Demostreu que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leq CMe$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.

Indicació: Apliqueu la desigualtat de Cauchy al cercle centrat a z i de radi r per provar que $|f'(z)|e^{-C|z|} \leq \frac{M}{r}e^{Cr}$ per a tot $r > 0$ i $z \in \mathbb{C}$. Avalueu a $r = 1/C$. $\triangleleft$

Solució: Per la desigualtat de Cauchy tenim que per tot $r > 0$

$$|f'(z)| \leq \frac{\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z + re^{i\theta})|}{r} \leq \frac{M}{r} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{C|z+re^{i\theta}|} \leq \frac{M}{r} e^{C|z|+Cr}.$$

Per tant,

$$|f'(z)|e^{-C|z|} \leq \frac{M}{r}e^{Cr},$$

com proposa la indicació.

Un cop vist això, prenem $r = 1/C$ i trobem

$$|f'(z)|e^{-C|z|} \leq CMe.$$

Notem que $\frac{e^{Cr}}{r}$ té un mínim en $r = 1/C$, així que la cota no pot millorar, almenys seguint aquest mètode!

4.6.6. (a) Supposem que una funció f entera satisfà que $|f(z)| \leq M_R$ si $|z| = R$. Demostreu que els coeficients c_k de la seva sèrie de Taylor centrada a $a = 0$ compleixen

$$|c_k| \leq \frac{M_R}{R^k}.$$

(b) Supposem que el mòdul d'un polinomi $P(z)$ està fitat per 1 pels z al disc unitat. Demostreu que tots els coeficients de P tenen mòdul fitat per 1. $\triangleleft$

Solució: (a) Per les desigualtats de Cauchy tenim que

$$|c_k| = \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{M}{R^k}.$$

(b) Com abans tenim que

$$|c_k| \leq \frac{M_r}{r^k},$$

on $M_r = \sup_{|z|=r} |P(z)| \leq 1$. Prenent $r = 1$ obtenim la fita desitjada.

4.6.7. Proveu que si $f \in H(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \leq |e^{iz}|$ per a tot $z \in \mathbb{D}$, aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! e. \quad \triangleleft$$

Solució: Per les desigualtats de Cauchy tenim que

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{\sup_{\mathbb{D}} e^{|z|}}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow 1} n! e.$$

4.7. Teorema de Liouville i teorema fonamental de l'àlgebra

4.7.1. La funció $f(z) = 1/z^2$ tendeix a 0 quan $z \rightarrow \infty$ però no és una funció constant. Contradiu això el teorema de Liouville? $\triangleleft$

Solució: No el contradiu ja que $1/z^2$ no és entera, el 0 no és del seu domini.

4.7.2. Sigui f una funció entera. Usant el teorema de Liouville proveu que

(a) Si $|f| \geq 1$, llavors f és constant.

(b) Si $\operatorname{Re} f \geq 0$, llavors f és constant.

(c) Si $\operatorname{Im} f \leq 1$, llavors f és constant. $\triangleleft$

(d) Si $\operatorname{Re} f$ no té zeros, llavors f és constant.

Solució: (a) Amb aquesta condició f no té zeros i, per tant, $1/f$ és entera. La mateixa condició diu que $|1/f| \leq 1$, de manera que, pel teorema de Liouville, $1/f$ (i, per tant, f) és constant.

(b) Considerem $F(z) = e^{-f(z)}$. Tenim que $|F(z)| = e^{-\operatorname{Re} f(z)} \leq 1$, i per tant F és constant.

(c) Anàlogament al cas anterior, considerem $F(z) = e^{-if(z)}$. Tenim que $|F(z)| = e^{\operatorname{Im} f(z)} \leq e$, de manera que F (i, per tant, f) és constant.

(d) Com que $\operatorname{Re} f$ és contínua (de fet, fins i tot analítica), tenim que $\operatorname{Re} f > 0$ o bé $\operatorname{Re} f < 0$. Al primer cas apliquem (b), i al segon considerem $F(z) = e^{f(z)}$ i fem com al cas (b).

4.7.3. *Caracteritzeu les funcions enteres f tals que $|f'(z)| \leq |z|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.* $\triangleleft$

Solució: És clar que $f(z) = \alpha z^2 + \beta$ amb $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i $2|\alpha| \leq 1$ satisfà les hipòtesis. Vegem que no hi ha més solucions.

Si $|f'(z)| \leq |z|$, prenem $g(z) = f(z) - f(0)$ també satisfà les hipòtesis i $g(0) = 0$. Tenim que

$$|g''(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{g'(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=R} \frac{|w|}{|w-z|^2} |dw| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1.$$

Així que $g'' = f''$ és una funció entera i fitada. Pel teorema de Liouville, es tracta d'una funció constant, i f és un polinomi de grau dos. El terme lineal és zero aplicant la hipòtesi a l'origen, i el terme independent s'anul·la també aplicant la hipòtesi, per exemple, a la circumferència unitat.

4.7.4. *Suposem que f és entera. Provar que si $f^{(4)}(z)$ és fitada en el pla llavors f és un polinomi de grau 4 com a màxim.* $\triangleleft$

Solució: $f^{(4)}(z)$ fitada vol dir que el seu mòdul és fitat, pel teorema de Liouville $f^{(4)}(z) = c \in \mathbb{C}$. Integrem i obtenim un polinomi de quart grau com a màxim.

4.7.5. *Sigui f una funció entera. Per a $|a| < R$ i $|b| < R$ calculeu*

$$I = \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

Useu el resultat per demostrar el teorema de Liouville. $\triangleleft$

Solució: Si $a = b$, $I = 2\pi i f'(a)$ per la fórmula integral de Cauchy per derivades. Si $a \neq b$,

$$I = \frac{1}{a-b} \int_{|z|=R} \frac{(a-b)f(z) dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\int_{|z|=R} \frac{f(z) dz}{z-a} - \int_{|z|=R} \frac{f(z) dz}{z-b} \right),$$

i concloem per la fórmula integral de Cauchy que $I = \frac{2\pi i}{a-b} (f(a) - f(b))$.

Demostració del teorema de Liouville (*proposada per Abel Portas Puigdemont*)
Volem usar aquest fet per provar el teorema de Liouville. Suposem que f és fitada a $\mathbb{C}$. Posem $M := \sup_{z \in \mathbb{C}} \{|f(z)|\} < \infty$. Volem veure que $\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{C} : f(z) = f(a)\} = \mathbb{C}$. Notem que aquest no és buit, ja que $a \in \mathcal{A}$.

Suposem que existeix un punt $a \neq b \in \mathbb{C}$ tal que $b \notin \mathcal{A}$. Aleshores, $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \neq 0$. Pel resultat anterior,

$$0 \neq \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

Prenent normes,

$$\frac{|f(a) - f(b)|}{|a - b|} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{|f(z)|}{|z-a||z-b|} |dz| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z-b|}.$$

Com que $|a|, |b| < R$, sabem que $|z - a| \geq |z| - |a| = R - |a| > 0$ i $|z - b| \geq |z| - |b| = R - |b| > 0$. Per tant,

$$\frac{|f(a) - f(b)|}{|a - b|} \leq \frac{M}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z - a||z - b|} \leq \frac{M}{2\pi(R - |a|)(R - |b|)} \int_{|z|=R} |dz|.$$

D'aquí concloem que

$$\frac{|f(a) - f(b)|}{|a - b|} \leq \frac{M2\pi R}{2\pi(R - |a|)(R - |b|)} = \frac{MR}{(R - |a|)(R - |b|)}.$$

Fent tendir $R \rightarrow \infty$, $|f(a) - f(b)| \leq 0$, d'on tindriem que $f(a) = f(b)$, contradint el fet que $f(a) \neq f(b)$. Per tant, f és constant a $\mathbb{C}$, com volíem.

4.7.6. *Sigui f una funció entera tal que $|f(z)| \leq Ce^{\operatorname{Re} z}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$, on $C > 0$ és una constant. Què es pot dir de f ?* $\triangleleft$

Solució: Notem que $e^{\operatorname{Re} z} = |e^z|$. La funció e^{-z} és entera i, per tant, $e^{-z}f(z)$ és una funció entera i fitada per C . Per tant, és constant. Així doncs, $f(z) = ae^z$, amb $|a| \leq C$.

4.7.7. *Sigui f una funció entera tal que $|f'(z)| < |f(z)|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Què podem dir de f ?* $\triangleleft$

Solució: (proposada per Miguel Puelma Martínez)

La hipòtesi sobre f implica que per a tot $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| > 0$, per tant f no té zeros i aleshores $f'/f \in H(\mathbb{C})$. Com que a més per a tot $z \in \mathbb{C}$

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| < 1,$$

pel teorema de Liouville f'/f és constant, i.e., existeix $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f' = \lambda f$. Volem concloure d'aquí que f és de la forma $z \mapsto Ce^{\lambda z}$ per a algun $C \in \mathbb{C}$. Proposem dues maneres alternatives de veure-ho.

Alternativa 1: Com que f és entera, es pot expressar en sèrie de potències a tot $\mathbb{C}$ com

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \quad (*)$$

Per inducció immediata, de $f' = \lambda f$ obtenim $f^{(n)} = \lambda^n f$ i, per tant, $(*)$ esdevé

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = f(0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (\lambda z)^n = f(0)e^{\lambda z}$$

com volíem veure, amb $C = f(0)$.

Alternativa 2: Si ja hem intuït que les solucions seran d'aquesta forma, l'únic que cal veure és que $g: z \mapsto f(z)e^{-\lambda z}$ és constant —o equivalentment, que té derivada 0, perquè $\mathbb{C}$ és connex—. Efectivament,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad g'(z) = f'(z)e^{-\lambda z} - \lambda f(z)e^{-\lambda z} = 0.$$

Finalment, dels candidats a solució, els que verifiquen $|f'/f| < 1$ són

$$f(z) = Ce^{\lambda z}, \quad C \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{D},$$

ja que $|f'/f| = |\lambda|$ per a tots els candidats.

Nota: com que $\mathbb{C}$ és simplement connex (vegeu la secció 5.4) i f no s'hi anul·la, existeix una determinació $F(z)$ de $\log f(z)$, com veurem a la proposició 5.28. Usant això se simplifica la prova i estalviem l'argument de compacitat.

4.8. Teorema de Morera

4.8.1. *Demostreu la continuïtat de f en el principi de reflexió de Schwarz.* ◁

4.8.2. *Sigui $f(z) = 1/z^2$. Comproveu que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ per a tot camí tancat γ que no passi per 0, però f no és analítica en 0. Contradiu això el corol·lari 4.36 del teorema de Morera?* ◁

Solució: Definim $F(z) = \frac{-1}{z}$. F és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i la seva derivada és $F'(z) = f(z)$. Per tant, si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ és un camí tancat, aleshores

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(b)) = 0.$$

Com que f no és contínua a l'origen, tampoc pot ser analítica.

El corol·lari del teorema de Morera diu que si una funció és holomorfa en un obert llevat d'un punt però que la funció és contínua en aquest punt, aleshores la funció és holomorfa en tot l'obert. En aquest cas falla la hipòtesi de la continuïtat i falla també la conclusió, ja que f no és analítica a l'origen i, per tant, no és holomorfa.

4.8.3. (a) *Sigui h una funció contínua a $\mathbb{R}$ amb suport compacte (és a dir, existeix $K \subset \mathbb{R}$ compacte tal que $h(x) = 0$ si $x \notin K$) i sigui*

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{-itz} dt.$$

(Quan ens restringim a $z \in \mathbb{R}$, H s'anomena transformada de Fourier de h ; si prenem iz en el lloc de z , H s'anomena transformada de Laplace⁴ bilateral de h .) Proveu que H és una funció entera amb creixement exponencial: existeixen $A, C > 0$ tals que $|H(z)| \leq Ce^{A|\operatorname{Im} z|}$.

(b) *Sigui h una funció contínua a $[0, 1]$. Demostreu que la seva transformada de Hilbert⁵*

$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t - z} dt$$

és analítica per a $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$. ◁

⁴Pierre-Simon Laplace, Beaumont-en-Auge, 1749–1827. https://ca.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace

⁵David Hilbert, Königsberg, 1862–1943. https://ca.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

Solució: (a) En primer lloc comprovem que la integral és finita per a tot $z \in \mathbb{C}$. Sigui $A > 0$ tal que $\text{supp}(h) \subset [-A, A]$. Passant el mòdul dins la integral tenim que

$$|H(z)| \leq \int_{-A}^A |h(t)| |e^{-itz}| dt.$$

Essent h contínua i de suport compacte, existeix $M = \max_{t \in \mathbb{R}} |h(t)| < +\infty$. Per altra part

$$|e^{-itz}| = |e^{-it(\text{Re}(z) + i\text{Im}(z))}| = e^{t\text{Im}(z)}.$$

Amb tot això tenim que

$$|H(z)| \leq \int_{-A}^A M e^{t\text{Im}(z)} dt \leq M \int_{-A}^A e^{A|\text{Im}(z)|} dt = M(2A)e^{A|\text{Im}(z)|}.$$

Per a veure que H és holomorfa utilitzarem el teorema de Morera. Haurem de veure per tant que H és contínua i que la integral al llarg de la vora de qualsevol triangle dona 0.

Que H és contínua és immediat, ja que la funció que integrem és contínua i ho fem a un conjunt compacte:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} H(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \int_K h(t) e^{-itz} dt = \int_K h(t) \left(\lim_{z \rightarrow z_0} e^{-itz} \right) dt = \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{-itz_0} dt = H(z_0).$$

Sigui ara T un triangle qualsevol de $\mathbb{C}$. Per Fubini i pel teorema de Cauchy aplicat a les funcions enteres $f_t(z) = e^{-itz}$, tenim que

$$\int_{\partial T} H(z) dz = \int_{\mathbb{R}} h(t) \left(\int_{\partial T} e^{-itz} dz \right) dt = \int_{\mathbb{R}} h(t) 0 dt = 0.$$

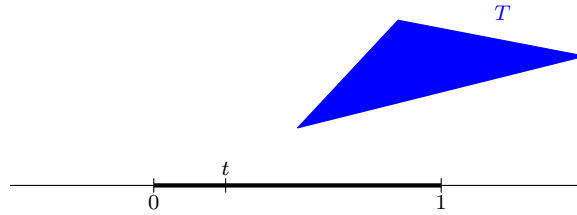
(b) Fem anàlogament a l'apartat anterior. Diem $d(z)$ a la distància de $z \notin [0, 1]$ a aquest interval. Passant el mòdul dins la integral i utilitzant que h és una funció contínua al compacte $[0, 1]$, veiem de seguida que la integral és finita:

$$|H(z)| \leq \int_0^1 \frac{|h(t)|}{|t-z|} dt \leq \frac{1}{d(z)} \int_0^1 |h(t)| dt.$$

Per veure que és holomorfa apliquem de nou el teorema de Morera. Si $z_0 \notin [0, 1]$ existeix $\epsilon > 0$ tal que $D_\epsilon(z_0) \cap [0, 1] = \emptyset$. Aleshores, prenent $z \in D_\epsilon(z_0)$ tenim que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} H(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z} dt = \int_0^1 \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(t)}{t-z} dt = \int_0^1 \frac{h(t)}{t-z_0} dt = H(z_0).$$

Sigui ara T un triangle completament contingut a $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$. Observem que per als punts $t \in [0, 1]$, $\frac{1}{t-z} \in H(\mathbb{C} \setminus [0, 1])$ i, pel teorema de Morera (o el de Cauchy en un disc convenient), obtenim



$$\int_{\partial T} H(z) dz = \int_0^1 \left(\int_{\partial T} \frac{dz}{t-z} \right) h(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Nota: en ambós casos podem recórrer al teorema de derivació sota el signe integral (vegeu la secció 4.9) per evitar usar Morera.

4.8.4. *Sigui f holomorfa en un obert Ω , i sigui $z_0 \in \Omega$ amb $f'(z_0) \neq 0$. Demostreu que existeix $r_0 > 0$ de manera que, per $0 < \varepsilon < r_0$, es compleix la identitat*

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

Indicació: proveu primer que la funció G definida per

$$G(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

és holomorfa en Ω . ◁

Solució: Com que f és holomorfa, la funció G és clarament holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$. Vegem que G és contínua en z_0 . Com que f és holomorfa en z_0 , tenim que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} G(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = G(z_0).$$

Per tant, $G \in C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{z_0\})$, i això implica que G és holomorfa en Ω pel corollari 4.36.

Com que $G(z_0) = f'(z_0) \neq 0$, per continuïtat, existeix $r_0 > 0$ de manera que $G(z) \neq 0$ per $z \in D_{r_0}(z_0)$. Llavors la funció

$$H(z) = \frac{1}{G(z)}, \quad z \in D_{r_0}(z_0)$$

és holomorfa en $\Omega_1 = D_{r_0}(z_0)$. Sigui $\varepsilon > 0$ amb $0 < \varepsilon < r_0$. Com que $\overline{D_\varepsilon(z_0)} \subset \Omega_1$, aplicant la fórmula integral de Cauchy obtenim

$$H(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{H(z)}{z - z_0} dz.$$

És a dir,

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \frac{2\pi i}{G(z_0)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{G(z)(z - z_0)} = \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

4.9. Derivació sota el signe integral i fórmula integral de Cauchy per derivades

4.9.1. Avalueu, usant la fórmula de Cauchy per a les derivades

$$a) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z - 1/2)^2} dz. \quad b) \int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{(3z - 2)^4} dz. \quad c) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} e^{e^{i\theta}} d\theta. \quad \triangleleft$$

Solució:

$$a) 2\pi i \sqrt{e}. \quad b) \frac{-\pi i \cos(2/3)}{3^5}. \quad c) 2\pi.$$

4.9.2. Demostreu la fórmula integral de Cauchy per derivades no centrada usant la fórmula integral de Cauchy per derivades centrada i el teorema de Cauchy en convexos. $\triangleleft$

Solució: Vegeu la solució de l'exercici 4.6.3, per exemple.

4.10. Zeros de funcions holomorfes i principi de prolongació analítica

4.10.1. Trobeu els zeros, amb l'ordre corresponent, de les següents funcions:

$$a) \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}; \quad b) z^2 \sin z; \quad c) \frac{1}{z} + \frac{1}{z^5}. \quad \triangleleft$$

Solució:

- a) Té zeros simples a $\pm i$.
- b) Té un zero d'ordre 3 a l'origen i zeros simples a $k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- c) Té 4 zeros simples: $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$.

4.10.2. Trobeu la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció entera $f(z) = 2 \cos z^3 + z^6 - 2$. $\triangleleft$

Solució: (proposada per Clara Valls Moreso) Trobem la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció:

$$f(z) = 2 \cos(z^3) + z^6 - 2.$$

Recordem que:

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + O(z^6)$$

Per tant,

$$\cos(z^3) = 1 - \frac{z^6}{2!} + \frac{z^{12}}{4!} + O(z^{18})$$

Llavors:

$$2 \cos(z^3) = 2 - z^6 + \frac{z^{12}}{12} + O(z^{18})$$

I per tant:

$$f(z) = 2 \cos(z^3) + z^6 - 2 = \left(2 - z^6 + \frac{z^{12}}{12} + O(z^{18})\right) + z^6 - 2 = \frac{z^{12}}{12} + o(z^{17})$$

Per tant, $z = 0$ és un zero de multiplicitat 12.

4.10.3. Trobeu tots els zeros de les següents funcions holomorfes i calculeu-ne les seves multiplicitats:

$$a) f(z) = z^2(e^{z^2} - 1); \quad b) f(z) = \frac{z^2 - \pi^2}{z} \sin z; \quad c) f(z) = (\sqrt{z} - 2)^3.$$

Aquí $\sqrt{\cdot}$ és la determinació de l'arrel quadrada en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ que val -1 en $z = 1$. $\triangleleft$

Solució:

(a) Tenim que $e^{z^2} - 1 = 0$ si i només si $z^2 = \log 1 = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, és a dir, $z_k^\pm = \pm \sqrt{2\pi i k}$.

Considerem primer l'arrel que correspon a $k = 0$, és a dir $z_0 = 0$. Prenent la sèrie de l'exponencial a l'entorn del 0 tenim que $e^{z^2} - 1 = z^2 + \dots$ i, per tant, $z^2(e^{z^2} - 1) = z^4 + \dots$. Així doncs, $z_0 = 0$ és una arrel de multiplicitat 4.

Per a $k \neq 0$ les arrels són de multiplicitat 1. Sigui z_k alguna de les arrels de dalt amb $k \neq 0$. Tenim que $e^{z_k^2} = 1$. Desenvolupem $g(z) = e^{z^2} - 1$ a l'entorn de z_k . Tenim que $g'(z) = e^{z^2} 2z$ i, per tant, $g'(z_k) = 2z_k \neq 0$. El desenvolupament dona doncs

$$g(z) = g(z_k) + g'(z_k)(z - z_k) = 2z_k(z - z_k) + \dots$$

Per altra part, a l'entorn de z_k tenim que $z = z_k + (z - z_k)$, i tot plegat

$$f(z) = [z_k + (z - z_k)]^2 [2z_k(z - z_k) + \dots] = 2z_k^2(z - z_k) + \dots$$

la qual cosa mostra que la multiplicitat de z_k és efectivament 1.

(b) La funció $\sin z$ s'anul·la als punts $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, i el factor $z^2 - \pi^2 = (z - \pi)(z + \pi)$ s'anul·la $z_{\pm 1} = \pm \pi$. Considerem doncs diferents $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $k = 0$. Tenim que $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots$ i, per tant, $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots$. Amb això

$$(z^2 - \pi^2) \frac{\sin z}{z} = -\pi^2 + \left(1 + \frac{\pi^2}{3!}\right) z^2 + \dots$$

i, per tant, $z_0 = 0$ no és de fet un zero de la funció donada.

(ii) $k = \pm 1$. Suposem $k = 1$; el cas $k = -1$ es fa anàlogament. Fent Taylor a l'entorn de $z_1 = \pi$, trobem que

$$\sin z = -(z - \pi) + \frac{1}{3!}(z - \pi)^3 + \cdots = (z - \pi)h(z),$$

amb h holomorfa i $h(\pi) \neq 0$. Per tant

$$f(z) = (z - \pi)(z + \pi) \frac{(z - \pi)h(z)}{z} = (z - \pi)^2 \frac{(z + \pi)h(z)}{z}.$$

El segon factor en aquest producte és una funció holomorfa no nul·la l'entorn de π i, per tant, $z_1 = \pi$ és un zero de multiplicitat 2.

(iii) $z_k = k\pi$, $k \neq 0, \pm 1$. Desenvolupant per Taylor a l'entorn de z_k com al cas anterior, tenim que

$$\sin z = (-1)^k(z - k\pi) + \frac{(-1)^{k+1}}{3!}(z - k\pi)^3 + \cdots = (z - k\pi)h(z),$$

amb h holomorfa i $h(k\pi) \neq 0$. Aleshores

$$f(z) = (z - k\pi) \frac{(z^2 - \pi^2)h(z)}{z},$$

i el segon factor en aquest producte és una funció holomorfa i no nul·la un entorn de $z_k = k\pi$. Per tant, z_k és un zero de multiplicitat 1.

(c) En primer lloc mirem a quina determinació de l'argument $\arg(z)$ correspon l'arrel donada. Essent el semieix de discontinuïtats $(-\infty, 0]$ tenim que

$$\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

on $\text{Arg}(z)$ denota l'argument principal (amb angle a $(-\pi, \pi)$). Aleshores

$$\sqrt{1} = e^{\frac{1}{2}(\ln|1| + i\text{Arg}(1) + 2i\pi k)} = e^{i\pi k}.$$

Ens diuen que $\sqrt{1} = -1$, d'on deduïm que $k = 1$ (o qualsevol altre k senar que vulguem; hi ha dues arrels, la que correspon als k parells, i aquesta, que correspon als k senars). Amb això, l'argument triat és tal que

$$\arg(z) \in (\pi, 3\pi).$$

Aleshores

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z| + i\arg(z))} = \sqrt{|z|} e^{i\frac{\arg(z)}{2}}$$

és un nombre complex amb arguments a $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. En particular, veiem que $\sqrt{z}$ no pot ésser 2 (és l'altra arrel que pot valdre 2, però no aquesta) i, per tant, la funció $f(z)$ no té cap zero.

4.10.4. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini. Demostreu que l'anell de funcions holomorfes $H(\Omega)$ és un domini d'integritat, és a dir, si $f, g \in H(\Omega)$ amb $fg \equiv 0$ aleshores $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$.* ◁

Solució: En efecte, suposem que existeix $z_0 \in \Omega$ i $f(z_0) \neq 0$. Llavors, per continuïtat, existeix $r > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ si $z \in D_r(z_0) \subset \Omega$. Per hipòtesi, $f \cdot g \equiv 0$ i, per tant, $g \equiv 0$ en $D_r(z_0)$. Aplicant el Principi de Prolongació analítica, com que Ω és una regió, es compleix que $g \equiv 0$ en Ω .

Com a alternativa, raonem per contradicció. Si f i g no són idènticament nul·les, els seus conjunts de zeros $Z(f)$ i $Z(g)$ són successions de punts aïllats i, en particular, conjunts com a molt numerables. Aleshores $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$ també seria numerable, en contra de la hipòtesi.

4.10.5. Sigui $\{a_n\}_n$ una successió estrictament decreixent de nombres reals $a_n \in (0, 1)$ i tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}$. Demostreu que:

(a) Si $f(a_n) \in \mathbb{R}$ per a tot n , aleshores $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ per a tot $z \in \mathbb{D}$.

(b) Si a més $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$ per a tot n , aleshores f és constant. ◁

Solució:

(a) Observem en primer lloc que la funció $h(z) := \overline{f(\bar{z})}$ és holomorfa a $\mathbb{D}$. Amb la intenció de veure que $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$, considerem primer $g(z) = f(\bar{z})$. Com que f és holomorfa tenim que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, i per tant $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$. Aleshores

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial g}{\partial z}} = \bar{0} = 0.$$

Per tant la funció $F(z) = \overline{f(\bar{z})} - f(z)$ és holomorfa a $\mathbb{D}$. Per a veure que $F \equiv 0$ utilitzarem el principi de prolongació analítica, és a dir, que el conjunt de zeros d'aquesta funció no pot tenir punts d'acumulació a $\mathbb{D}$, llevat que sigui 0. Observem però que, per hipòtesi,

$$F(a_n) = f(a_n) - f(a_n) = 0.$$

Com que $\{a_n\}_n$ s'acumula a 0, deduïm que necessàriament $F \equiv 0$, com volíem.

(b) De l'apartat (a) en tenim que si $x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{D}$ aleshores $f(x) \in \mathbb{R}$. Per tant, mirant la funció només a la recta real i aplicant el teorema de Rolle tenim que existeixen punts $\beta_n \in (a_{2n+1}, a_{2n})$ tals que $f'(\beta_n) = 0$. Com que $\lim_n a_n = 0$, necessàriament també $\lim_n \beta_n = 0$. Ara el principi de prolongació analítica, aplicat a la funció $f' \in H(\mathbb{D})$, implica que $f' \equiv 0$ i, per tant, f és constant.

4.10.6. Trobeu totes les funcions holomorfes a $\mathbb{D}$ tals que:

(a) $|f(1/n)| \leq 1/2^n$, per a tot nombre natural $n \geq 2$.

(b) $f(1/n) = \ln(1 + n^3) - 3 \ln n$ per a $n > 1$. ◁

Solució: a) És clar que $f(0) = 0$ per continuïtat. Vegem que, de fet, $f \equiv 0$. Ho farem raonant per l'absurd, factoritzant el zero de l'origen: sabem que existeix n_0 i $a_{n_0} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ amb

$$f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n z^n = a_{n_0} z^{n_0} + \mathcal{O}(|z|^{n_0+1}).$$

Així, per z prou petit (podem prendre $|z| < \frac{|a_{n_0}|}{2C}$, amb C determinat a la següent línia), tenim que

$$|f(z)| = |a_{n_0}z^{n_0} + \mathcal{O}(|z|^{n_0+1})| \geq |a_{n_0}z^{n_0}| - C|z|^{n_0+1} \geq \frac{|a_{n_0}|}{2}|z|^{n_0}.$$

Combinant-ho amb la hipòtesi, obtenim

$$\frac{1}{2^n} \geq \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \geq \frac{|a_{n_0}|}{2}(1/n)^{n_0},$$

és a dir,

$$\frac{n^{n_0}}{2^n} \geq \frac{|a_{n_0}|}{2},$$

la qual cosa contradiu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n_0}}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n_0(\log_2 n) - n} = 0.$$

b) $f(z) = \text{Log}(z^3 + 1)$ i PPA.

4.10.7. Trobeu totes les funcions f holomorfes en el disc $D_2(0)$ tals que $f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ per a tot $\theta \in [0, 2\pi)$, i a més $f(0) = 0$. ◁

Solució: Tenim que $f(z) = z^2$ per a tots els $|z| = 1$. Pel principi de prolongació analítica, això força que $f(z) = z^2$ a tot el disc (ja que $f(z)$ i z^2 coincideixen en un conjunt no numerable i amb punts d'acumulació a l'interior de $D_2(0)$). A més, $f(0) = 0$.

4.10.8. (a) Sigui f una funció entera tal que existeixen constants $n \in \mathbb{N}$, $C > 0$ i $R > 0$ tals que $|f(z)| \leq C|z|^n$, per a $|z| \geq R$. Demostreu que f és un polinomi de grau més petit o igual que n .

(b) Deduïu que si f és una funció entera amb $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$, llavors f és un polinomi.

Indicació: Demostreu que f només té un nombre finit de zeros $a_1, \dots, a_n$ (comptant multiplicitats) i apliqueu l'apartat (a) a la funció $F = P/f$, on $P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$. ◁

Solució: (a) Escrivim f en sèrie de potències al voltant del 0: $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m$. Per les desigualtats de Cauchy:

$$|a_m| = \frac{|f^{(m)}(0)|}{m!} \leq \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r^m}, \quad \forall r > 0.$$

Prenem $r \geq R$, de manera que valgui la fita que dona l'enunciat; aleshores,

$$|a_m| \leq \frac{Cr^n}{r^m}.$$

Veiem per tant que si $m > n$, fent $r \rightarrow +\infty$, obtenim $a_m = 0$. Tornant a la sèrie inicial, queda

$$f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n.$$

(b) Per hipòtesi existeix $R > 0$ tal que $|f(z)| \geq 1$ si $|z| \geq R$. Mirem ara f a $\overline{D_R(0)}$. Com que la funció no s'anul·la la frontera del disc, el nombre de zeros que té f a $D_R(0)$ és necessàriament finit (recordem que el principi de prolongació analítica diu que els zeros són aïllats i, per tant, només es podrien acumular a la frontera).

Diem doncs $a_1, \dots, a_n$ als zeros de f , comptats tantes vegades com la seva multiplicitat. Aquests punts són tots a $D_R(0)$. Aleshores la funció

$$F(z) = \frac{(z - a_1) \cdots (z - a_n)}{f(z)}$$

és holomorfa als punts a_j , $j = 1, \dots, n$ i, per tant, a tot arreu.

Amb la intenció d'aplicar l'apartat (a), diem $M = \max_j |a_j|$ i acotem,

$$|F(z)| \leq \frac{(|z| + |a_1|) \cdots (|z| + |a_n|)}{|f(z)|} \leq \frac{(|z| + M)^n}{|f(z)|}.$$

Prenem $R \geq M$ tal que $|f(z)| \geq 1$ si $|z| \geq R$. Aleshores, per a $|z| \geq R$ tenim que

$$|F(z)| \leq \frac{(2|z|)^n}{1} = C|z|^n, \quad C = 2^n,$$

de manera que podem aplicar l'apartat (a) i concloure que F és un polinomi. Com que F no té zeros, pel teorema fonamental de l'àlgebra, concloem que F és constant i, per tant, $f = C(z - a_1) \cdots (z - a_n)$.

4.10.9. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (obert connex) tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Suposem que tenim $f, g, h \in H(\Omega)$ i $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tals que per $x + iy \in \Omega$ tenim*

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

i per $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$ tenim

$$u(x, 0) = g(x) \quad v(x, 0) = h(x).$$

Demostreu que

$$f(z) = g(z) + ih(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

◁

Solució: Com que Ω és obert i toca la recta real, la intersecció és un obert relatiu i, per tant, té punts d'acumulació. Com que per tot $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$ tenim que

$$f(x) = u(x, 0) + iv(x, 0) = g(x) + ih(x).$$

Dit d'una altra manera, per tot $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$ tenim que

$$f(z) = g(z) + ih(z).$$

En ser funcions holomorfes, i coincidir en un conjunt amb punts d'acumulació en Ω , pel PPA han de coincidir en tot Ω .

4.11. El principi del mòdul màxim

4.11.1. Cerqueu l'enunciat del teorema de Stone⁶-Weierstrass i compareu-lo amb l'exemple 4.55. ◁

4.11.2. Trobeu el màxim de:

a) $|\cos z|$ i $|\sin z|$ a $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

b) $|e^z|$ i $|e^{z^2}|$ a $|z| \leq 1$. ◁

Solució: (a) Pel principi del mòdul màxim, el màxim de $f(z) = |\cos z|$ a $\bar{\Omega} = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ s'assoleix a la frontera. Estudiem doncs el comportament d'aquesta funció als quatre costats del quadrat donat.

(i) $y = 0$; $x \in [0, 2\pi]$. Aquí tenim que $f(x) = |\cos x|$, i el màxim s'assoleix als punts $x = 0, \pi, 2\pi$. En aquests punts el valor de la funció és 1.

(ii) $x = 0, 2\pi$, $y \in [0, 2\pi]$. Aquí, per la periodicitat de $\cos z$, tenim que $f(2\pi + iy) = f(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$. Aquesta funció és creixent, i per tant té el màxim a 2π . Per tant el

valor màxim en aquest segments correspon a $f(2\pi i) = f(2\pi + 2\pi i) = \frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{2}$.

(iii) $y = 2\pi$, $x \in [0, 2\pi]$. Aquí $f(x + 2\pi i) = \frac{e^{ix}e^{-2\pi} + e^{-ix}e^{2\pi}}{2}$. Amb això

$$|\cos(x + 2\pi i)|^2 = \frac{1}{4}(e^{-4\pi} + e^{-2ix} + e^{2ix} + e^{4\pi}) = \frac{1}{4}(e^{4\pi} + e^{-4\pi} + 2\cos(2x)).$$

Això és màxim quan $\cos(2x) = 1$, és a dir, als punts $x = 0, \pi, 2\pi$. El valor màxim és aleshores $|\cos(2\pi i)| = \frac{1}{2}(e^{2\pi} + e^{-2\pi})$.

Com que $\frac{1}{2}(e^{2\pi} + e^{-2\pi}) > 1$, el valor màxim és $\frac{1}{2}(e^{2\pi} + e^{-2\pi})$ i s'assoleix als punts $2\pi i$, $2\pi + 2\pi i$ i $\pi + 2\pi i$.

El cas $|\sin z|$ es fa anàlogament.

(b) Pel principi del màxim

$$\max_{|z| \leq 1} |e^z| = \max_{|z|=1} |e^z| = \max_{|z|=1} e^{\operatorname{Re} z}.$$

Com que la funció exponencial (real) és creixent, és clar que el màxim s'assolirà al punt del cercle on $\operatorname{Re} z$ sigui màxim, és a dir, al punt $z = 1$.

Anàlogament, si posem $z = x + iy$, tenim que

$$\max_{|z| \leq 1} |e^{z^2}| = \max_{|z|=1} |e^{z^2}| = \max_{|z|=1} e^{\operatorname{Re} z^2} = \max_{|z|=1} e^{x^2 - y^2}.$$

Aquí és clar que el màxim s'assoleix quan x^2 és màxim i y^2 mínim, és a dir, als punts $z = \pm 1$.

⁶Marshall Harvey Stone, New York City, 1903–1989. https://en.wikipedia.org/wiki/Marshall_H._Stone

4.11.3. Trobeu totes les funcions holomorfes en $\mathbb{D}$ tals que $f(1/2) = 3$ i $|f(z)| \leq 3$ si $|z| < 1$. $\triangleleft$

Solució: Només pot ser $f(z) = 3$ per a tot $z \in \mathbb{D}$ pel principi del mòdul màxim.

4.11.4. Considereu $f(z) = e^{\cos(z)} z^2$ i el disc D de radi 2 centrat a 5. Proveu que $f(z)$ assoleix el valor màxim i mínim del mòdul en $\overline{D}$ a la frontera. Indicació: considereu $1/f(z)$. $\triangleleft$

Solució: La funció és holomorfa al disc donat ja que és producte d'holomorfes, llavors, pel principi del mòdul màxim, el màxim de $|f(z)|$ s'assoleix a la frontera. Com que la funció $f(z)$ només és zero quan $z = 0$ i 0 no és del disc, la funció $f(z)$ no s'anulla mai en aquest disc, llavors la funció $g(z) = 1/f(z)$ hi és holomorfa i el seu mòdul assoleix el màxim a la frontera. Com que el màxim de $|g| = 1/|f|$ és el mínim de $|f|$ hem acabat.

4.11.5. Sigui f una funció holomorfa en el disc $D_R(0)$, $R > 0$. Definim

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < R.$$

Demostreu que si f no és constant, aleshores $M(r)$ és estrictament creixent a $[0, R)$. $\triangleleft$

Solució: Aplicació del principi del mòdul màxim.

4.11.6. Sigui f una funció holomorfa en un obert connex Ω i D un disc obert tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Supposeu que $|f(z)| = c$ per tot $z \in \partial D$, on c és una constant. Proveu que f té almenys un zero en D o bé f és constant en Ω . Indicació: Distingiu segons si $c = 0$ o $c > 0$. En el segon cas, proveu que si f no té zeros en D , aleshores f és constant en D . $\triangleleft$

Solució: Supposem que f no té cap zero a D i veurem que necessàriament ha de ser constant. En aquest supòsit sabem que $1/f \in H(D)$, i pel principi del mòdul màxim

$$\max_{\overline{D}} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \max_{\partial D} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \frac{1}{c}.$$

Amb això tenim que $|f(z)| \geq c$ per a tot $z \in D$. Però per hipòtesi (i pel principi del mòdul màxim), per a aquests z :

$$|f(z)| \leq \max_{\partial D} |f(z)| = c.$$

Tot plegat $|f(z)| = c$ per a tot $z \in D$. Com ja vam veure, tota f holomorfa de mòdul constant és constant (conseqüència de les equacions de Cauchy-Riemann). Per tant f és constant a D . Però el principi de prolongació analítica obliga a que aleshores f sigui constant a tot Ω (la component connexa del domini de definició de f que conté D).

4.11.7. Sigui f una funció holomorfa i no constant en un obert connex $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supposeu que existeix $a \in \Omega$ tal que $|f(a)| \leq |f(z)|$ per a tot $z \in \Omega$. Proveu que aleshores $f(a) = 0$. $\triangleleft$

Solució: Suposem que $f(a) \neq 0$. Aleshores $1/f$ seria holomorfa ja que no hi hauria cap zero de f en Ω . Per tant, pel principi del mòdul màxim, al tenir $1/f$ un extrem a l'interior ha de ser constant, en contradicció amb la hipòtesi de l'enunciat.

4.11.8. *Segui $f \in H(\Omega)$ en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $f \circ f = f$. Demostreu que o bé f és constant, o bé és la identitat.* $\triangleleft$

Solució: Suposem que f no és constant. Aleshores $f(\Omega)$ és un obert. Per $y \in f(\Omega)$ tenim que $y = f(z)$ i, per tant, $f(y) = f(f(z)) = f(z) = y$. Per tant, f és la identitat en un obert no buit. Pel PPA, f és la identitat en Ω .

4.11.9. *Segui $f \in H(\mathbb{C})$ no constant. Demostreu que, per a tot $c > 0$,*

$$\overline{\{z; |f(z)| < c\}} = \{z; |f(z)| \leq c\}. \quad \triangleleft$$

Solució: Feu servir el teorema de l'aplicació oberta.

La inclusió $\overline{\{z; |f(z)| < c\}} \subset \{z; |f(z)| \leq c\}$ és conseqüència de la continuïtat de f .

Per veure la inclusió contrària, suposem que $z \in \mathbb{C}$ tal que $|f(z)| = c$. Aleshores, com que f no és constant, el teorema de l'aplicació oberta diu que $f(D_{1/n}(z))$ és un obert. Com que conté $f(z)$, contindrà una bola centrada en $f(z)$ i en particular conté $(1 - \varepsilon)f(z)$ per un cert ε prou petit, és a dir, existeix $z_n \in D_{1/n}(z)$ tal que

$$|f(z_n)| = (1 - \varepsilon)|f(z)| < c.$$

Per construcció tenim que $z_n \rightarrow z$, i hem vist que $z_n \in \{z; |f(z)| < c\}$. Per tant, $z \in \overline{\{z; |f(z)| < c\}}$, tal com volíem veure.

5. Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

5.1. Índex d'una corba tancada respecte d'un punt

5.1.1. Considerem el camí $\gamma(t) = 4e^{it} \cos \frac{2}{3}t$, ($0 \leq t \leq 6\pi$). Calculeu $\text{Ind}(\gamma, 3)$ i $\text{Ind}(\gamma, 1)$.

◁

Solució: Resolem aquí l'exercici usant només la definició:

$$\text{Ind}(\gamma, 3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-3}.$$

Com que la primitiva és un logaritme, per poder fer el càlcul cal trencar la integral en trossos cada vegada que $z-3$ talli la semirecta dels reals positius, per exemple, en aquest cas per poder usar alguna determinació del logaritme $\log$ en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Busquem doncs solucions de

$$4e^{it} \cos \frac{2}{3}t - 3 = x$$

amb $x > 0$. En particular, tindrem que $4e^{it} \cos \frac{2}{3}t \in \mathbb{R}$ amb $4e^{it} \cos \frac{2}{3}t > 3$. Això passa quan $e^{it} = \pm 1$ i el cosinus contribueix favorablement, ja que quan $\cos \frac{2}{3}t = 0$ la segona condició no pot ocórrer. Vegem primer els valors de t tals que $\gamma(t)$ és un nombre real no nul:

- $t = 0$: $\gamma(t) = 4 \cos 0 = 4$, $\text{Im}(\gamma'(t)) = \text{Im}(4ie^{i0} \cos 0 - 4e^0 \sin 0) = 4$. Creua doncs del semiplà de part imaginària negativa cap al de part imaginària positiva.
- $t = \pi$: $\gamma(t) = -4 \cos \frac{2\pi}{3} = -4(-1/2) = 2$, $\text{Im}(\gamma'(t)) = 4e^{i\pi} \cos \frac{2}{3}\pi > 0$. Ara també creua de baix a dalt. Notem que no hi ha cap contradicció, entremig ha creuat l'origen perquè s'ha anul·lat el cosinus!
- $t = 2\pi$: $\gamma(t) = -4 \cos \frac{4\pi}{3} = 4(-1/2) = -2$, $\text{Im}(\gamma'(t)) < 0$.
- $t = 3\pi$: $\gamma(t) = -4 \cos \frac{6\pi}{3} = -4$, $\text{Im}(\gamma'(t)) < 0$.
- $t = 4\pi$: $\gamma(t) = -4 \cos \frac{8\pi}{3} = 4(-1/2) = -2$, $\text{Im}(\gamma'(t)) < 0$.
- $t = 5\pi$: $\gamma(t) = -4 \cos \frac{10\pi}{3} = -4(-1/2) = 2$, $\text{Im}(\gamma'(t)) > 0$.
- $t = 6\pi$: $\gamma(t) = -4 \cos \frac{12\pi}{3} = 4$, $\text{Im}(\gamma'(t)) > 0$.

Vegem que en estudiar l'índex de γ respecte a 3, no cal fer res, ja que la determinació del logaritme només falla als extrems d'integració:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(\gamma, 3) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-3} = \frac{1}{2\pi i} [\log(\gamma(t)-3)]_0^{6\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\lim_{t \nearrow 6\pi} \log(\gamma(t)-3) - \lim_{t \searrow 0} \log(\gamma(t)-3) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} [\ln 1 + i(2\pi + 2\pi k_0) - \ln 1 - i(2\pi k_0)] = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1.\end{aligned}$$

Per calcular els límits laterals, hem usat que la corba creua els dos cops de baix cap a dalt, i això determina l'argument en els valors propers.

Per calcular l'índex al voltant de 1, ara creuarem tres vegades la semirecta $[1, \infty)$, però el primer camí no fa cap volta, ja que roman a la part imaginària positiva i el darrer camí roman a la part real negativa, i cada vegada haurem acumulat un argument de 2π , ja que en tots els casos, el camí creua de la part imaginària negativa cap a la positiva. Així,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(\gamma, 1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} = \frac{1}{2\pi i} \left([\log(\gamma(t)-1)]_0^{\pi} + [\log(\gamma(t)-1)]_{\pi}^{5\pi} + [\log(\gamma(t)-1)]_{5\pi}^{6\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} ([i2k\pi] + [i2k\pi] + [i2k\pi]) = \frac{6\pi i}{2\pi i} = 3.\end{aligned}$$

5.1.2. Considerem el camí $\gamma(t) = (1 + e^{it} + e^{-it})e^{it}$, ($0 \leq t \leq 2\pi$). Esbosseu el dibuix de la corba i calculeu-ne l'índex en cada component connexa del complementari de la seva imatge. Calculeu

$$\int_{\gamma} \frac{3z-3}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} dz. \quad \triangleleft$$

Solució: La corba és una corba parametritzada en polars: $1 + e^{it} + e^{-it} = 1 + 2\cos t$, talla l'eix real a l'origen per $t = 2\pi/3$ i $t = 4\pi/3$, en el punt $x = 3$ per $t = 0$ i en $x = 1$ per $t = \pi$. Podem comprovar gràficament que té índex 2 respecte de la component interior i índex 1 respecte la component intermèdia, en particular $\operatorname{Ind}(\gamma, 1/2) = 2$ i $\operatorname{Ind}(\gamma, 2) = 1$. Finalment, trobem que

$$\int_{\gamma} \frac{3z-3}{(z-\frac{1}{2})(z-2)} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z-\frac{1}{2}} dz + 2 \int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz = 2\pi i(1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 8\pi i.$$

5.2. El teorema global de Cauchy

5.2.1. Considerem el camí $\gamma(t) = (2\sin(2t - \frac{\pi}{3}), 2\sin(3t))$, amb $t \in [0, 2\pi]$. Esbosseu el camí, calculeu l'índex de la corba en cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, i trobeu el valor de

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2+1} dz. \quad \triangleleft$$

Solució:

Es tracta d'una corba mecànica anomenada corba de Lissajous¹, vegeu https://ca.wikipedia.org/wiki/Corba_de_Lissajous. L'índex és 0 a les components que contenen ± 1 , és 0 a la component no fitada, i és ± 1 a les altres components. En particular, $\text{Ind}(\gamma, i) = -1$ i $\text{Ind}(\gamma, -i) = 1$, mentre que $\text{Ind}(\gamma, \pm 1) = 0$. Considerem $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ i trobem que $\Gamma \approx 0$ en Ω . Com que

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2+1} dz = \int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}/2i}{z-i} dz - \int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}/2i}{z+i} dz,$$

definint $h(z) = e^{\frac{1}{z^2-1}}/2i \in H(\Omega)$, per la FIC global trobem

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2+1} dz = 2\pi i (\text{Ind}(\gamma, i)h(i) - \text{Ind}(\gamma, -i)h(-i)) = -\frac{2\pi}{\sqrt{e}}.$$

5.3. Homotopia i teorema de Cauchy**5.4. Dominis simplement connexos**

5.4.1. *Siguin $f, g \in H(\mathbb{C})$ tals que $f^2 + g^2 \equiv 1$. Demostreu que existeix $h \in H(\mathbb{C})$ tal que $f = \cos(h)$ i $g = \sin(h)$.* $\triangleleft$

Solució: Tenim

$$(f + ig)(f - ig) = 1.$$

Com que $\mathbb{C}$ és simplement connex, $f + ig \in H(\mathbb{C})$ i $f + ig : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, de la proposició 5.28 n'inferim que existeix una funció $\mathcal{L} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$e^{\mathcal{L}(z)} = f(z) + ig(z).$$

A més, com que

$$f(z) - ig(z) = \frac{1}{f(z) + ig(z)} = e^{-\mathcal{L}(z)},$$

sumant i restant convenientment trobem que

$$f(z) = \frac{e^{\mathcal{L}(z)} + e^{-\mathcal{L}(z)}}{2} = \cos(-i\mathcal{L}(z)),$$

i

$$g(z) = \frac{e^{\mathcal{L}(z)} - e^{-\mathcal{L}(z)}}{2i} = \sin(-i\mathcal{L}(z)).$$

¹Jules Antoine Lissajous, Versailles 1822 – 1880. https://ca.wikipedia.org/wiki/Jules_Antoine_Lissajous

5.4.2. [Determinació de l'arrel en dominis simplement connexos] Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, i $f \in H(\Omega)$ amb $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Vegeu que existeix $g \in H(\Omega)$ amb

$$g(z)^2 = f(z) \quad \text{per a tot } z \in \Omega.$$

A més, si $z_0 \in \Omega$ i tenim que $w_0^2 = f(z_0)$, podem escollir g de manera que $g(z_0) = w_0$. $\triangleleft$

Solució: Prenem la determinació $\mathcal{L}_f$ del logaritme de f donada per la proposició 5.28 i definim

$$g(z) = e^{\frac{1}{2}\mathcal{L}_f(z)}.$$

5.5. Funcions harmòniques

5.5.1. Demostreu el lema 5.34 usant les equacions de Cauchy-Riemann directament. $\triangleleft$

Solució: Tenim

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y \stackrel{\text{CR}}{=} (v_y)_x - (v_x)_y = 0,$$

on hem usat el teorema d'igualtat de les derivades creuades. De la mateixa manera,

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = (v_x)_x + (v_y)_y \stackrel{\text{CR}}{=} -(u_y)_x + (u_x)_y = 0.$$

5.5.2. Demostreu que la funció $u(z) = \frac{1}{2} \ln(z\bar{z})$ és harmònica, però no té harmònica conjugada a $\mathbb{C}^*$. $\triangleleft$

Solució: Notem que $u(z) = \ln|z|$. Per tant, per tot disc que no toqui l'origen té com a conjugada $\mathcal{A}(z)$ per alguna determinació de l'argument. De fet, podem prendre l'argument principal a $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Però aquesta no és holomorfa a $\mathbb{C}^*$. Si n'hi hagués una, hauria de coincidir amb l'argument principal (mòdul constant additiva) en tot el domini llevat de la recta, i obtindríem discontinuïtats en els reals negatius.

5.5.3. Si f és analítica, són harmòniques $|f(z)|$, $\text{Arg}f(z)$ i $\ln|f(z)|$? $\triangleleft$

5.5.4. Proveu el principi del màxim per funcions harmòniques: sigui u harmònica al domini Ω llavors

- si $z_0 \in \Omega$ i u té un màxim o un mínim relatiu a z_0 llavors u és constant en algun disc centrat a z_0 .
- Si el domini Ω és fitat, connex i $u \in C(\bar{\Omega})$, llavors el màxim i el mínim absoluts de u s'asoleixen a $\partial\Omega$.

Indicació: seguiu la demostració del principi del màxim per $|f|$ amb f analítica fet en capítols anteriors. $\triangleleft$

5.5.5. Determineu quines de les següents funcions u són harmòniques. Per cadascuna d'elles trobeu una conjugada harmònica v i expresseu la funció analítica $f(z) = u + iv$ com a funció de z .

a) $3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$

c) $xe^x \cos y - ye^x \sin y$

b) $2xy + 3xy^2 - 2y^3$

d) $e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2).$

<

5.5.6. Calculeu per $n = 1, 2, 3, 4$ els polinomis harmònics $p_n(x, y), q_n(x, y)$ definits per la igualtat $z^n = p_n + iq_n$. Trobar la forma general de p_n, q_n en coordenades polars (r, θ) . <

5.5.7. Sigui Ω un domini simplement connex, i sigui $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ una aplicació de Riemann, és a dir un homeomorfisme holomorf entre $\mathbb{D}$ i Ω amb inversa holomorfa, vegeu el teorema 7.6. Suposem que φ s'estén contínuament a $\partial\mathbb{D}$, que φ^{-1} s'estén contínuament a $\partial\Omega$ i que les seves derivades s'estenen contínuament a $\partial\mathbb{D}$ i a $\partial\Omega$ respectivament (sense anular-s'hi). Demostreu que existeixen determinacions del logaritme i l'argument de manera que

$$\mathcal{L}_{\varphi'}(z_0) = \operatorname{Re} \mathcal{L}_{\varphi'}(0) + \frac{i}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{A}_{\varphi'}(z) H(z, z_0) |dz|. \quad <$$

Solució: Notem que $\varphi' \neq 0$ per hipòtesi, i $\mathbb{D}$ és simplement connex. Per la proposició 5.28 existeix una determinació del logaritme $\mathcal{L}_{\varphi'}$ i prenem $\mathcal{A}_{\varphi'} = \operatorname{Im} \mathcal{L}_{\varphi'}$. Com que $\mathcal{L}_{\varphi'}$ és holomorfa, obtenim el resultat per la fórmula de representació de Herglotz aplicada a $\mathcal{L}_{\varphi'}$. Notem que aquesta serà per radis menors que 1, però es pot estendre usant el teorema de convergència dominada a radi 1.

5.6. El problema de Dirichlet

5.6.1. La fita 5.5 es pot millorar: demostreu que

$$\int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0| > \delta} P(z, z_0) |dz| \leq (1 - |z_0|) \mathcal{O}(1/\delta).$$

Indicació: Feu la integral en anells $2^j\delta < |z - z_0| \leq 2^{j+1}\delta$ i sumeu. <

Solució: (proposada per Abel Portas Puigdemont) Definim, per cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A_j = \{z \in \partial\mathbb{D}: 2^j\delta < |z - z_0| \leq 2^{j+1}\delta\}$. Notem que, per $j = 0, \delta < |z - z_0| \leq 2\delta$. Així, $\cup_{j \geq 0} A_j = \{z \in \partial\mathbb{D}: |z - z_0| > \delta\}$. En particular,

$$\int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0| > \delta} P(z, z_0) |dz| = \int_{\cup_{j \geq 0} A_j} P(z, z_0) |dz| \leq \sum_{j \geq 0} \int_{A_j} P(z, z_0) |dz|.$$

Per definició del nucli de Poisson, $P(z, z_0) = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2}$. Com la integral és sobre A_j , podem expressar aquest nucli com $P(z, z_0) = \frac{1 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2}$, ja que $z \in \partial\mathbb{D}$. A més, podem escriure la diferència del numerador com $1 - |z_0|^2 = (1 - |z_0|)(1 + |z_0|)$. Així doncs, com que $z_0 \in \mathbb{D}$, obtenim que $1 - |z_0|^2 \leq 2(1 - |z_0|)$. Fixem-nos, de fet, que, com que $2^j\delta < |z - z_0|$, sabem que $2^{2j}\delta^2 \leq |z - z_0|^2$. Per tant, $\frac{1}{|z - z_0|^2} \leq \frac{1}{2^{2j}\delta^2}$. En resum,

$$\int_{A_j} P(z, z_0) |dz| \leq \frac{(1 - |z_0|)}{2^{2j-1}\delta^2} \int_{A_j} |dz|.$$

Notem que, per cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A_j \subset D_{2^{j+1}\delta}(z_0)$. Per tant, $L(A_j) \leq 2\pi 2^{j+1}\delta$. Aleshores,

$$\int_{A_j} P(z, z_0) |dz| \leq \frac{(1 - |z_0|)}{2^{2j-1}\delta^2} 2\pi 2^{j+1}\delta = \frac{8\pi(1 - |z_0|)}{2^j\delta}.$$

Finalment,

$$\int_{z \in \partial\mathbb{D}: |z-z_0|>\delta} P(z, z_0) |dz| \leq \frac{8\pi(1 - |z_0|)}{\delta} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2^j} = \frac{16\pi(1 - |z_0|)}{\delta} = (1 - |z_0|)\mathcal{O}(1/\delta)$$

com volíem demostrar.

5.6.2. *Suposem que $\phi_1, \phi_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ són harmòniques a Ω i contínues fins a $\partial\Omega$ i que $\phi_1 = \phi_2$ a la vora $\partial\Omega$. Proveu que si Ω és simplement connex i fitat, aleshores $\phi_1 = \phi_2$ en tot punt d' Ω . Indicació: trobeu la funció v harmònica conjugada de $\phi_1 - \phi_2$ i apliqueu el principi del màxim (mínim) a $\phi_1 - \phi_2 + iv$.* $\triangleleft$

Solució: Considerem la funció conjugada v de $\phi_1 - \phi_2$. Aleshores la funció $e^{\phi_1 - \phi_2 + iv}$ és holomorfa en Ω . Pel principi del mòdul màxim i mínim, els extrems s'assoleixen a la vora, on tenim que

$$|e^{\phi_1 - \phi_2 + iv}| = 1.$$

Per tant, $\phi_1 - \phi_2$ és constant. Com que s'anullla a la frontera, aquesta constant és 0.

5.6.3. *Una distribució estacionària T de la temperatura en una regió Ω és una funció harmònica i contínua fins la frontera. Trobeu la temperatura T a l'interior d'un disc de radi 1 si sabem que la temperatura val $\operatorname{Im} z$ als dos primers quadrants de la circumferència de frontera i 0 a la resta de punts de la vora. En particular vegeu que la temperatura al centre del disc és $1/\pi$.* $\triangleleft$

Solució: Per l'exercici anterior, estem buscant la solució del problema de Dirichlet amb dada de frontera $T(x + iy) = y\chi_{y>0}$. Pel teorema 5.40, i argumentant per continuïtat, per a $z_0 \in \mathbb{D}$, la temperatura ve donada per

$$T(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin t P(e^{it}, z_0) dt.$$

En particular,

$$T(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{1}{\pi}.$$

6. Sèries de Laurent

6.1. Sèries de Laurent i singularitats

6.1.1. Calculeu la sèrie de Laurent de

$$a) \frac{z-1}{z(z-4)^3} \text{ a } 0 < |z-4| < 4. \quad b) 1/e^{(1-1/z)} \text{ per } |z| > 0. \quad \triangleleft$$

Solució:

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z(z-4)^3} &= \frac{1}{(z-4)^3} \left(1 - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{(z-4)^3} \left(1 - \frac{1}{4 + (z-4)}\right) = \\ &= \frac{1}{(z-4)^3} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{1}{1 + (z-4)/4}\right) = \frac{1}{(z-4)^3} \left(1 - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-4)^n}{4^n}\right) = \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{(z-4)^3} + \frac{1}{16} \frac{1}{(z-4)^2} - \frac{1}{64} \frac{1}{z-4} + \sum_{n \geq 3} (-1)^{n+1} \frac{(z-4)^{n-3}}{4^{n+1}}. \end{aligned}$$

Nota: amb Sage podem fer servir `taylor`.

b) Està centrada al zero,

$$\frac{1}{e^{1-1/z}} = e^{1/z-1} = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad 0 < |z| < \infty.$$

6.1.2. Per a la funció $f(z) = \frac{\sin z \cos 3z}{z^4}$

1. Trobeu els primers termes no nuls de la part central de la seva sèrie de Laurent a $z = 0$.

2. Calculeu $\oint f(z) dz$ si es recorre $|z| = 1$ un cop i en sentit antihorari. $\triangleleft$

Solució: a) Si fem servir la identitat $2 \cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$ podem escriure $\sin z \cos 3z = \frac{1}{2}(\sin(4z) - \sin(2z))$ llavors

$$\begin{aligned} \sin z \cos 3z &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(4z)^{2n-1}}{(2n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2z)^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{4^{2n-1} - 2^{2n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}. \end{aligned}$$

Llavors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2z^4} \left(2z - \frac{4^3 - 2^3}{3!} z^3 + \sum_{n \geq 3} (-1)^{n-1} \frac{4^{2n-1} - 2^{2n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1} \right) = \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{14}{3} \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^{n-1}}{2} \frac{4^{2n-1} - 2^{2n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-5}. \end{aligned}$$

b) La integral és $2\pi i(-14/3)$.

6.1.3. Trobeu el desenvolupament en sèrie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ a les corones:

a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$;

c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$;

b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$;

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$. $\triangleleft$

Solució: a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, el centre és $z = 0$

$$-\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} (1 + z + z^2 + \dots) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$$

b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$, el centre és $z = 1$

$$\frac{1}{z-1} \frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{z-1} (1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} (z-1)^n.$$

c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, sigui $w = 1/z$, desenvolupem al voltant de $w = 0$ (z amb centre a ∞)

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{w^2}{1-w} = w^2 \left(\sum_{n \geq 0} w^n \right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$. Aquí posem $z-1 = 1/w$ i

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{w^2}{1+w} = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} - \dots$$

6.1.4. Siguin $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$, doneu les sèries de Laurent per les tres corones centrades a 0 allà on f és analítica ($|z| < 1$, $1 < |z| < 3$ i $|z| > 3$). $\triangleleft$

Solució: Primer vegem que $\frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-3}$. Tenim casos

- Si $|z| < 1$, $\frac{1}{z-1} = -\sum_{n \geq 0} z^n$.

- Si $|z| > 1$, $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-1/z)} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^n}$.
- Si $|z| < 3$, $\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-z/3} = -\frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{3^n}$.
- Si $|z| > 3$, $\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z(1-3/z)} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{z^n}$.

Combinem aquestes expressions i obtenim

a) Si $|z| < 1$

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} z^n - \frac{1}{2} \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$$

b) Si $1 < |z| < 3$

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{6} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{3^n}.$$

c) Si $|z| > 3$,

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{-1 + 3^{n-1}}{z^n}.$$

6.1.5. Doneu els primers termes de la sèrie de Laurent de

$$a) f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{3z}\right) \text{ per } |z| > 0. \quad b) f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \text{ per } 0 < |z| < R. \quad \triangleleft$$

Solució: a) La singularitat es dona quan $z = 0$, fem el canvi $z = 1/w$, llavors

$$f(z) = f(1/w) = \frac{1}{w^2} \cos(w/3) = \frac{1}{w^2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n w^{2n}}{3^{2n}(2n)!} = z^2 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{3^{2n}(2n)!} \frac{1}{z^{2(n-1)}}.$$

b) Veiem que les singularitats es donen quan $e^z = 1$. Això passa si $e^{x+iy} = 1$ que equival a $x = 0$, $y = 2k\pi$. Com que el terme no nul més proper al zero i que anul·la el denominador és $\pm 2\pi i$ tenim que $R = 2\pi$ i la sèrie de Laurent la tenim per $0 < |z| < 2\pi$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^z - 1} &= \frac{1}{z + z^2/2! + z^3/3! + \dots} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + z/2 + z^2/3! + \dots} = \\ &= \frac{1}{z} \left(1 - (z/2 + z^2/3! + \dots) + (z/2 + z^2/3! + \dots)^2 - (z/2 + z^2/3! + \dots)^3 + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{720}z^4 + \dots\right). \end{aligned}$$

Nota: els coeficients (multiplicats per $n!$) de la sèrie de $z/(e^z - 1)$ són els famosos nombres de Bernoulli, molt importants en teoria de nombres.

6.1.6. Quina és la corona (o anell) de convergència de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$? ◁

Solució: Estudiem la part regular i la part singular.

- Regular. $1 + z/2 + z^2/2^2 + z^3/2^3 + \dots$
- Singular $\frac{1}{2z} + \frac{1}{2^2 z^2} + \frac{1}{2^3 z^3} + \dots$

Fem servir el criteri del quocient per trobar el radi de convergència:

- Per la part regular volem que z sigui tal que $\lim |c_{n+1}/c_n| < 1$. Tenim que

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(z^{n+1}/2^{n+1})}{(z^n/2^n)} \right| = |z/2| < 1.$$

Hi ha convergència si $|z| < 2$.

- Per la part singular fem el mateix

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(1/2^{n+1} z^{n+1})}{(1/2^n z^n)} \right| = |1/(2z)| < 1.$$

Hi ha convergència si $|z| > 1/2$.

L'anell de convergència és $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}$.

6.2. Singularitats aïllades de funcions holomorfes

6.2.1. Construcció de funcions

- a) Trobeu una funció f que tingui un pol d'ordre 2 a $z = 1 + i$ i singularitats essencials a $z = 0, 1$.
- b) Trobeu una funció f que tingui una singularitat evitable a $z = 0$, un pol d'ordre 6 a $z = 1$ i una singularitat essencial a $z = i$. ◁

Solució: a) Per exemple

$$f(z) = \frac{1}{(z-1-i)^2} + e^{1/z} + e^{1/(z-1)}.$$

b) Per exemple

$$g(z) = \frac{e^z - 1}{z} + \frac{1}{(z-1)^6} + e^{1/(z-i)}.$$

6.2.2. Sigui f analítica amb zero d'ordre n a z_0 i g analítica amb zero d'ordre m a z_0 . Si $h(z) = f(z)/g(z)$ proveu que

a) si $n > m$ $h(z)$ s'estén a una funció holomorfa amb un zero d'ordre $n - m$ a z_0 ,

b) si $n < m$ $h(z)$ té un pol d'ordre $m - n$ a z_0 ,

c) si $n = m$ $h(z)$ s'estén a una funció holomorfa i no nul·la a z_0 . ◁

Solució: Per hipòtesi $f(z) = a_n(z - z_0)^n + \dots$ i $g(z) = c_m(z - z_0)^m + \dots$ amb $a_n, c_m \neq 0$. Aleshores

$$h(z) = \frac{a_n(z - z_0)^n}{c_m(z - z_0)^m} \lambda(z) = \frac{a_n(z - z_0)^n}{c_m(z - z_0)^m} (d_0 + d_1(z - z_0) + \dots)$$

amb $\lambda(z)$ holomorfa a z_0 amb $\lambda(z_0) = d_0 \neq 0$. D'aquí es dedueix a) b) i c).

6.2.3. Determineu les singularitats de les funcions següents. Si a és una singularitat evitable de f , calculeu el valor que cal donar a $f(a)$ per tal que f sigui holomorfa en un entorn d' a , i si a és un pol de f , determineu la part singular de f en a (la part de la sèrie amb índexs negatius).

a) $f(z) = z \cos(1/z)$.

$$c) f(z) = \frac{1}{(1 - e^z)^2}.$$

$$b) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3(z - 1)^2}.$$

Solució: (a) L'única possible singularitat és a $z = 0$, ja que la funció $\cos z$ és entera. Utilitzem la sèrie del cosinus: $\cos w = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{w^2}{2} + \dots$ Prenent $w = 1/z$ obtenim

$$f(z) = z \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-1}}.$$

Per tant, el punt $z = 0$ és una singularitat essencial.

(b) Tenim una funció racional i, per tant, les úniques singularitats són els zeros del denominador: $z = 0$ i $z = 1$.

$z = 0$. La funció $g(z) := \frac{1 + z^2}{(z - 1)^2}$ és holomorfa a un entorn de 0 i té $g(0) = 1 \neq 0$. Per tant, tenim que

$$f(z) = \frac{1}{z^3} g(z),$$

i deduïm que f té un pol de multiplicitat 3 a $z = 0$. Trobem la part singular del desenvolupament a partir del desenvolupament de g a l'entorn de 0: si $g(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ aleshores

$$f(z) = \frac{1}{z^3} [a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots] = \frac{a_0}{z^3} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + \dots$$

Cal doncs trobar $a_0 = g(0)$, $a_1 = g'(0)$ i $a_2 = g''(0)/2$. Utilitzant l'expressió de g i derivant, veiem que aquests valors són $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_2 = 4$, de manera que la part singular de la sèrie de Laurent al pol $z = 0$ és

$$\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z}.$$

$z = 1$. Procedim com al cas $z = 0$. La funció $h(z) := \frac{1+z^2}{z^3}$ és holomorfa a l'entorn de 1, amb valor $h(1) = 2$. Tenim doncs que $z = 1$ és un pol de multiplicitat 2:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} h(z),$$

i la part singular de la sèrie de Laurent a aquest punt sortirà de mirar el desenvolupament de h a l'entorn del punt 1. Derivant h i avaluant al punt 1 tenim que

$$h(z) = 2 - 4(z-1) + \dots$$

i, per tant la part singular de la sèrie de Laurent a aquest punt és

$$\frac{2}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}.$$

(c) La funció $1 - e^z$ és entera; per tant les singularitats de f es troben només allà on $e^z - 1 = 0$, és a dir, als punts $z_k = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Mirem quin tipus de singularitat tenim a cada punt z_k . Desenvolupant e^z al punt z_k tenim que

$$e^z = e^{z_k} + e^{z_k}(z - z_k) + \frac{e^{z_k}}{2}(z - z_k)^2 + \dots = 1 + 1(z - z_k) + \frac{1}{2}(z - z_k)^2 + \dots$$

i, per tant,

$$e^z - 1 = (z - z_k) \left[1 + \frac{1}{2}(z - z_k) + \dots \right] = (z - z_k) g(z),$$

amb g holomorfa a l'entorn de z_k i amb $g(z_k) = 1 \neq 0$. Amb això veiem que

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_k)^2} \frac{1}{g^2(z)},$$

i $1/g^2$ és una funció holomorfa a l'entorn del punt z_k , amb $1/g^2(z_k) = 1 \neq 0$.

Per tant z_k és un pol de multiplicitat 2. La part singular la trobem mirant el desenvolupament a l'entorn de z_k de la funció $h = 1/g^2$. Tenim que $h(z_k) = 1$. Derivant,

$$h'(z_k) = -\frac{2}{g^3(z_k)} g'(z_k) = -1,$$

ja que, pel que veiem al desenvolupament de g , tenim que $g(z_k) = 1$ i $g'(z_k) = 1/2$.

Per tant

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_k)^2} [1 - (z - z_k) + \dots],$$

i la part singular de la sèrie de Laurent a aquests punts és

$$\frac{1}{(z - z_k)^2} - \frac{1}{z - z_k}.$$

6.2.4. *Segui $f \in H(D_r(a) \setminus \{a\})$. Suposem que existeix una successió $(z_n)_n$ tal que $z_n \rightarrow a$ i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e^{f(z_n)}| = 0, \quad \left| f\left(z_n + \frac{1}{n}\right) \right| \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determineu el tipus de singularitat que té la funció f en el punt a . ◁

Solució: Determinem el tipus de singularitat mirant el comportament de f al voltant del punt a .

La primera condició diu que $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} f(z_n) = -\infty$ i, per tant, la singularitat no és evitable.

Per altra part, els punts $z_n + 1/n$ tendeixen a a , i en aquests punts la funció té un mòdul proper a 1; això exclou que a pugui ser un pol. Si ho fos, tindríem $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ i, per tant, per a tot $M > 0$ existiria $\epsilon > 0$ tal que

$$|f(z)| \geq M, \quad \text{per a tot } z \text{ amb } 0 < |z - a| < \epsilon.$$

Això donaria, per a n prou avançat,

$$|f(z_n + \frac{1}{n})| \geq M,$$

en contra de la hipòtesi.

Per tant, a és una singularitat essencial.

6.2.5. *a) La funció $\tan(1/z)$ té una singularitat aïllada al 0? De quin tipus?*

b) Segui 0 singularitat aïllada de $f(z)$. Suposem que $|f(z)| \leq |z|^{-\alpha}$ on $0 < \alpha < 1$. Demostreu que 0 és una singularitat evitable. ◁

Solució: a) $\tan(1/z) = \sin(1/z)/\cos(1/z)$, tenim singularitat a $z = 0$, les altres singularitats són quan $\cos(1/z) = 0$, és a dir, quan $1/z = \pi/2 + n\pi$, llavors les tenim quan $z = 1/(\pi/2 + n\pi) =: z_n$. Això és una successió de singularitats que tendeixen a 0. Llavors la singularitat $z = 0$ no és aïllada. Els pols a z_n són simples. En efecte

$$\lim_{z \rightarrow z_n} \frac{(z - z_n) \sin(1/z)}{\cos(1/z)} = (-1)^n \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{(z - z_n)}{\cos(1/z)} = (-1)^n \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{z^2}{\sin(1/z)} = z_n^2 \neq 0$$

i si $n > 1$

$$\lim_{z \rightarrow z_n} \frac{(z - z_n)^n \sin(1/z)}{\cos(1/z)} = (-1)^n \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{(z - z_n)^n}{\cos(1/z)} = (-1)^n \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{z^{2n} (z - z_n)^{n-1}}{\sin(1/z)} = 0$$

i els pols són simples als z_n . Notem que $z = 0$ no és una singularitat aïllada de $\tan(1/z)$, i no té sentit classificar-la com a evitable, pol o essencial. Els punts z_n són pols simples que s'acumulen a 0.

b) Volem veure si $b_n = 0$ per a qualsevol n . Recordem que

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f(w) w^{n-1} dw.$$

Però

$$\begin{aligned} \left| \oint_{C_r} f(w) w^{n-1} dw \right| &\leq \oint_{C_r} |f(w)| |w^{n-1}| |dw| \\ &\leq \oint_{C_r} |w|^{-\alpha} |w^{n-1}| |dw| = \int_0^{2\pi} |re^{it}|^{-\alpha} |re^{it}|^{n-1} |d(re^{it})| = 2\pi r^{n-\alpha} \end{aligned}$$

que tendeix a zero si $r \rightarrow 0$ ja que $n \geq 1$ i $0 < \alpha < 1$. Llavors $b_n = 0$.

6.2.6. (a) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$. Supposem que $f(a_n) = 0$ per una successió $a_n \in \mathbb{D}^*$ tal que $a_n \rightarrow 0$. Demostreu que $f \equiv 0$ o bé $z = 0$ és una singularitat essencial de f .

(b) Sigui f una funció holomorfa en $\mathbb{D}^*$ tal que per a tot $n \geq 2$, f no té zeros sobre les corbes $|z| = 1/n$ i a més

$$\int_{|z|=1/n} \frac{1}{f(z)} dz \neq \int_{|z|=1/(n+1)} \frac{1}{f(z)} dz.$$

Demostreu que $z = 0$ és una singularitat essencial de f . Indicació: Utilitzeu el teorema de deformació i l'apartat anterior. $\triangleleft$

6.3. Teorema dels Residus

6.3.1. Existeix alguna funció f amb pol simple a z_0 tal que $\text{Res}(f, z_0) = 0$? Si el pol és d'ordre 2, pot passar que $\text{Res}(f, z_0) = 0$? $\triangleleft$

Solució: a) Si f té pol simple a z_0 llavors la part $b_1/(z - z_0)$ de la seva sèrie de Laurent és no nul·la, llavors $b_1 \neq 0$ i $b_1 = \text{Res}(f, z_0) \neq 0$. b) Sí que pot passar, per exemple $f(z) = 1/z^2$ té residu 0 a $z = 0$.

6.3.2. Determineu els residus de f a 0 i a 1 en l'exercici 6.1.3. Quines de les sèries que vau calcular cal usar? $\triangleleft$

6.3.3. Calculeu els residus de les funcions següents en els punts indicats:

$$a) f(z) = \frac{1}{e^z - 1}, z_0 = 0.$$

$$b) f(z) = \frac{1 + e^z}{z^4}, z_0 = 0. \quad \triangleleft$$

Solució: (a) 1; (b) 1/6

6.3.4. Decidiu si són certes o falses les següents afirmacions. Doneu els arguments que provin les afirmacions o trobeu contraexemples.

1. Si f, g tenen un pol a z_0 llavors $f + g$ té un pol a z_0 .
2. Si f, g tenen un pol a z_0 i en els dos casos el residu és no nul llavors $f \cdot g$ té un pol a z_0 amb residu no nul.
3. Si f té una singularitat essencial a $z = 0$ i g un pol d'ordre finit a $z = 0$ llavors $f + g$ té singularitat essencial a $z = 0$.
4. Si f té un pol d'ordre m a $z = 0$ llavors $f(z^2)$ té un pol d'ordre $2m$. $\triangleleft$

Solució: a) Falsa, exemple $f(z) = 1/z, g(z) = -1/z$.

b) Falsa, exemple $f(z) = 1/z = g(z)$.

c) Per ser la singularitat de f essencial resulta

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{z^n} + \text{Part regular}$$

amb infinits b_n no nuls. I per ser la de g d'ordre finit k

$$g(z) = \sum_{n=1}^k \frac{c_n}{z^n} + \text{Part regular}.$$

Llavors

$$(f + g)(z) = \sum_{n > k} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=1}^k \frac{b_n + c_n}{z^n} + \text{Part regular}$$

i $f + g$ té singularitat essencial a 0.

d) L'enunciat diu que $f(z) = h(z)/z^m$ amb h holomorfa tal que $h(z) \neq 0$. Llavors

$$f(z^2) = h(z^2)/z^{2m}$$

i l'ordre del pol de $f(z^2)$ a 0 és $2m$.

6.3.5. Supposem que f és holomorfa amb un zero d'ordre m a z_0 . Proveu que $g(z) = f'(z)/f(z)$ té un pol simple a z_0 amb $\text{Res}(g, z_0) = m$. $\triangleleft$

Solució: Si f té zero d'ordre m a z_0 resulta que existeix h amb $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ amb $h(z_0) \neq 0$ i holomorfa. Llavors

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1}h(z) + (z - z_0)^m h'(z)}{(z - z_0)^m h(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Com que $h(z_0) \neq 0$ el quocient h'/h és analític a z_0 i $\text{Res}(f'/f, z_0) = m$.

6.3.6. a) Proveu que si $g(z)$ té un zero simple a z_0 , llavors $1/g(z)$ té un pol simple a z_0 .

b) Proveu que $\text{Res}(1/g, z_0) = 1/g'(z_0)$.

c) Sigui $f(z) = 1/\sin(z)$, trobeu els seus pols i proveu que són simples. Trobeu els residus. <

Solució: a) Com que g té un zero simple a z_0 , podem escriure

$$g(z) = (z - z_0)h(z),$$

amb h holomorfa i $h(z_0) = g'(z_0) \neq 0$. Llavors

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{h(z)},$$

i com que $1/h$ és holomorfa en un entorn de z_0 , $1/g$ té un pol simple. A més,

$$\text{Res}(1/g, z_0) = \frac{1}{h(z_0)} = \frac{1}{g'(z_0)}.$$

b) Això ja s'ha obtingut a l'apartat anterior:

$$\text{Res}(1/g, z_0) = \frac{1}{g'(z_0)}.$$

c) Mirem els zeros de $\sin z$, són a $z = n\pi$ per $n \in \mathbb{Z}$. Llavors, per l'apartat anterior $\text{Res}(1/\sin z, n\pi) = 1/\cos(n\pi) = (-1)^n$.

6.3.7. Trobeu i classifiqueu les singularitats aïllades de cadascuna de les funcions següents. Calculeu el residu a cada singularitat.

$$a) f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2(z + 1)}; \quad b) g(z) = \frac{1}{e^z - 1}; \quad c) h(z) = \cos(1 - 1/z). \quad <$$

Solució: a) La funció f té singularitats a $z = 0, -1$. Quan $z = -1$ la singularitat és evitable ja que $\lim_{z \rightarrow -1} f(z) = 3 \neq \infty$, llavors $\text{Res}(f, -1) = 0$. Com que f té un pol d'ordre 2 a l'origen, $\text{Res}(f, 0) = g'(0)$, amb $g(z) = z^2 f(z)$. Derivem

$$g'(z) = \left(\frac{z^3 + 1}{z + 1} \right)'_{z=0} = -1$$

i $\text{Res}(f, 0) = -1$.

b) Els pols són a $z = 2\pi ni$. Estudiem $\lim_{z \rightarrow 2\pi ni} (z - 2\pi ni)g(z)$. Resulta

$$\lim_{z \rightarrow 2\pi ni} (z - 2\pi ni)g(z) = \frac{0}{0} = \lim_{z \rightarrow 2\pi ni} \frac{1}{e^z} = 1$$

on hem fet servir la regla de l'Hôpital. Llavors $\text{Res}(g(z), 2\pi ni) = 1$.

c) La singularitat és a $z = 0$. Tenim que

$$\begin{aligned} \cos(1 - 1/z) &= \cos(1) \cos(1/z) + \sin(1) \sin(1/z) = \\ &= \cos(1)(1 - 1/(2z^2) + \dots) + \sin(1)(1/z - 1/(6z^3) + \dots) = \dots + \sin(1)/z + \dots \end{aligned}$$

i el residu que volíem calcular és $\sin(1)$.

6.3.8. Avalueu $\oint \frac{1}{(z+1)(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)} dz$ al llarg de la corba $|z-3| = 3$ recorreguda en sentit antihorari. $\triangleleft$

Solució: L'interior de la corba d'integració conté els pols simples $z = 1, 2, 3, 4, 5$. Calculem els residus en aquests punts fent servir que per un pol simple $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$. Llavors

$$\text{Res}(f, 1) = \frac{1}{48}, \quad \text{Res}(f, 2) = \frac{-1}{18}, \quad \text{Res}(f, 3) = \frac{1}{16}, \quad \text{Res}(f, 4) = \frac{-1}{30}, \quad \text{Res}(f, 5) = \frac{1}{144},$$

i la integral val $\pi i/360$.

6.3.9. Avalueu les següents integrals

$$a) \oint_{|z|=5} \frac{\sin z}{z^2 - 4} dz, \quad c) \oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z^2(z-2)(z+5i)} dz. \quad \triangleleft$$

$$b) \oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz,$$

Solució: a) Té pols simples a $z = \pm 2$, calculem els residus i valen els dos $\sin(2)/4$, aplicant la fórmula del residus veiem que la integral és $\pi i \sin(2)$.

b) Els pols són simples i són les arrels cúbiques de la unitat diferents de 1, és a dir $\omega_1 = e^{i2\pi/3}$ i $\omega_2 = e^{-2\pi i/3}$. Els residus són $\pm 1/(\omega_1 - \omega_2)$ respectivament. Llavors la integral és 0.

c) Els pols a l'interior de la corba $|z| = 3$ són $z = 2$ i $z = 0$. El primer és un pol simple amb residu $e^{2i}(2 - 5i)/116$. A $z = 0$ tenim un pol d'ordre 2 llavors per calcular el residu hem d'anar més en compte.

$$\text{Res}(f, 0) = (z^2 f(z))'_{z=0} = \dots = \frac{12 - 5i}{-100}.$$

Finalment tenim que la integral és

$$\pi i \left(\frac{e^{2i}(2 - 5i)}{58} - \frac{12 - 5i}{50} \right).$$

Nota: Amb Sage podem fer `f.maxima_methods().residue(z,a)`

6.3.10. Calculeu $\int_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{z-a} dz$ pels diferents valors d' $a \in \mathbb{C}$ tals que $|a| \neq 1$. $\triangleleft$

Solució: Si $a = 0$, $I = 2\pi i$; si $|a| > 1$, $I = 2\pi i(1 - e^{1/a})$; si $0 < |a| < 1$, $I = 2\pi i$.

6.3.11. Calculeu la integral de la funció $f(z) = \frac{1+z}{1+\sin z}$ sobre la vora del disc $D_7(0)$. $\triangleleft$

Solució: Segons el teorema dels residus

$$\int_{\partial D_7(0)} f(z) dz = 2\pi i \sum_a \text{Res}(f, a) ,$$

o a recorre els pols de f dins el disc $D_7(0)$.

Els pols de f són els punts on $1 + \sin z = 0$, és a dir, els punts de la forma $z = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. D'aquesta família, només $a_1 = -\pi/2$ i $a_2 = 3\pi/2$ són dins el disc $D_7(0)$. Per tant

$$\int_{\partial D_7(0)} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, a_1) + \text{Res}(f, a_2)) .$$

Per trobar els valors d'aquests residus mirem quin és el desenvolupament de Laurent a cadascun dels punts.

Punt a_1 . Desenvolupant la funció $\sin z$ a l'entorn d'aquest punt tenim

$$\sin z = -1 + \frac{1}{2}(z - a_1)^2 - \frac{1}{4!}(z - a_1)^4 + \dots$$

i, per tant,

$$1 + \sin z = \frac{1}{2}(z - a_1)^2 - \frac{1}{4!}(z - a_1)^4 + \dots = (z - a_1)^2 h(z) ,$$

on $h(z)$ és holomorfa a l'entorn de a_1 i a més $h(a_1) = 1/2$, $h'(a_1) = 0$.

Amb això tenim, a l'entorn de a_1 :

$$f(z) = \frac{1}{(z - a_1)^2} \frac{1 + z}{h(z)} .$$

Aquest segon factor és holomorf a l'entorn de a_1 , així que té un desenvolupament en sèrie de la forma

$$F(z) := \frac{1 + z}{h(z)} = b_0 + b_1(z - a_1) + b_2(z - a_1)^2 + \dots$$

Així doncs, localment a l'entorn de a_1

$$f(z) = \frac{b_0}{(z - a_1)^2} + \frac{b_1}{z - a_1} + b_2 + \dots$$

i, per tant, $\text{Res}(f, a_1) = b_1 = F'(a_1)$. Derivant tenim que

$$F'(z) = \frac{h(z) - (1 + z)h'(z)}{(h(z))^2} ,$$

i avaluant a a_1

$$\text{Res}(f, a_1) = F'(a_1) = \frac{1}{h(a_1)} = 2 .$$

Punt a_2 . Procedint de manera anàloga es veu que $\text{Res}(f, a_2) = 2$.

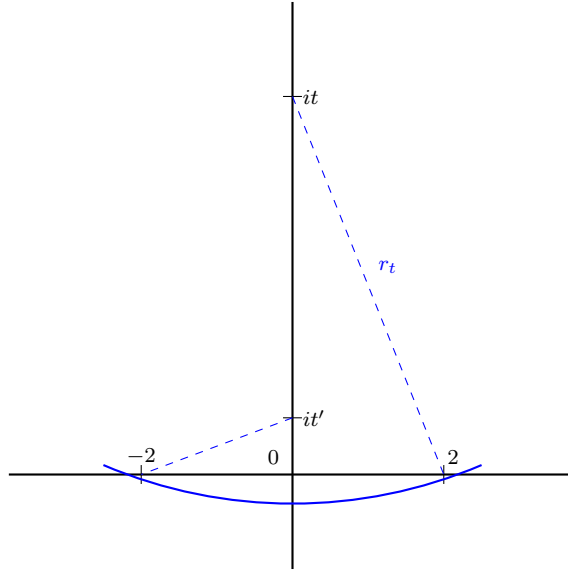
Tot plegat

$$\int_{\partial D_7(0)} f(z) dz = 2\pi i (2 + 2) = 8\pi i .$$

6.3.12. Per a $t > 0$, sigui C_t la circumferència de centre it que passa pels punts -2 i 2 . Calculeu

$$f(t) = \int_{C_t} \frac{e^{i\pi z} + 1}{z(z-t)} dz, \quad \text{per a } t \neq 2. \quad \triangleleft$$

Solució: La circumferència de centre it que passa per ± 2 té radi $r_t = |it - 2| = \sqrt{4 + t^2}$.



Els pols de f són $z_0 = 0$ i $z_1 = t$, i els residus respectius

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{e^{i\pi 0} + 1}{(0 - t)} = -\frac{2}{t},$$

$$\text{Res}(f, t) = \frac{e^{i\pi t} + 1}{t}.$$

Observem que $z_0 = 0$ sempre és dins el disc $D_{r_t}(it)$:

$$|0 - it| = t < r_t = \sqrt{4 + t^2}.$$

Per altra part $z_1 \in D_{r_t}(it)$ si i només si

$$|t - it| = t\sqrt{2} < r_t = \sqrt{4 + t^2},$$

és a dir, si i només si $t < 2$.

Separem per tant dos casos:

(i) $t < 2$. Aquí

$$f(t) = 2\pi i [\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, t)] = 2\pi i \left[-\frac{2}{t} + \frac{e^{i\pi t} + 1}{t} \right] = \frac{2\pi i}{t} (e^{i\pi t} - 1).$$

(ii) $t > 2$. Ara

$$f(t) = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = -\frac{4\pi i}{t}.$$

6.4. Residu a l'infinit

6.4.1. Trobeu el valor la integral $\oint_{|z|=2} \frac{5z-1}{z(z-1)} dz$ calculant el residu de l'integrand a l'infinit. ◁

Solució: La funció f que integrem té dues singularitats aïllades, a $z = 0, 1$. Llavors la integral és $2\pi i(\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, 1)) = -2\pi i \text{Res}(f, \infty)$. Fem el canvi $z = 1/w$ llavors

$$\frac{1}{w^2} \frac{5(1/w) - 1}{(1/w)((1/w) - 1)} = \frac{5 - w}{w(1 - w)}$$

i

$$\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}\left(\frac{5 - w}{w(1 - w)}, 0\right) = -5.$$

La integral és llavors igual a $10\pi i$.

6.4.2. Sigui $a \in \mathbb{R}$, calculeu, estudiant el residu a l'infinit, $I = \oint_C \frac{a^2 - z^2}{z(z^2 + a^2)} dz$ on C és una corba simple que envolta les singularitats de l'integrand. ◁

Solució: Sabem que $I = -2\pi i \text{Res}(f, \infty) = 2\pi i \text{Res}(f(1/w)/w^2, 0)$. Tenim que

$$\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{a^2 w^2 - 1}{w(1 + a^2 w^2)}.$$

Llavors $\text{Res}(f(1/w)/w^2, 0) = -1$ i $I = -2\pi i$.

6.4.3. Avalueu $\oint_{|z|=1} e^{1/z} \sin(1/z) dz$. ◁

Solució:

$$\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2} e^w \sin(w) \sim \frac{1}{w}$$

i el residu a l'infinit és -1 . Llavors la integral és $2\pi i$.

6.5. Aplicació al càlcul d'integrals

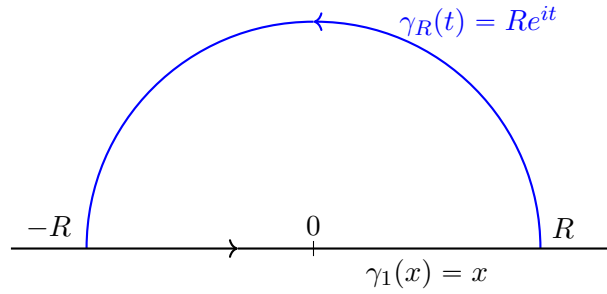
6.5.1. Demostreu que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \triangleleft$$

Solució: Considerem la funció $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ que és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ excepte en les arrels quartes de -1 , que són pols simples de f . Aquestes singularitats són

$$a_k = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Si $R > 1$, sigui $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R$ el semicercle



Com que només a_0 i a_1 es troben a l'interior del semicercle, pel teorema dels residus, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, a_0) + \text{Res}(f, a_1)).$$

Calculem aquests residus. Com que són pols simples,

$$\text{Res}(f, a_0) = \lim_{z \rightarrow a_0} (z - a_0) f(z) = a_0^2 \lim_{z \rightarrow a_0} \frac{(z - a_0)}{1 + z^4} = \frac{1}{4a_0}.$$

De manera semblant, tenim que

$$\text{Res}(f, a_1) = \lim_{z \rightarrow a_1} (z - a_1) f(z) = \frac{1}{4a_1}.$$

Aleshores

$$\text{Res}(f, a_0) + \text{Res}(f, a_1) = \frac{1}{4} (e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}) = -i \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Per tant

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \pi \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

D'altra banda, posant $I_R = \int_{\gamma_R} f$, tenim que

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{x^2}{1 + x^4} dx + I_R.$$

Si veiem que $I_R \rightarrow 0$ quan $R \rightarrow \infty$, llavors fent $R \rightarrow \infty$ en la identitat anterior, obtindrem el resultat desitjat (donat que és una integral impròpia convergent)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Tenim

$$I_R = \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2it}}{1 + R^4 e^{4it}} i R e^{it} dt.$$

Per tant

$$|I_R| \leq R^3 \int_0^{\pi} \frac{dt}{|1 + R^4 e^{4it}|} \leq \frac{\pi R^3}{R^4 - 1} \rightarrow 0.$$

6.5.2. Per $r > 0$, considerem la corba $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $\gamma_r(t) = re^{it}$, i sigui

$$I(r) = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Demostreu que $\lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = 0$. ◁

Solució: Provarem que $|I(r)| \rightarrow 0$ quan $r \rightarrow \infty$. Parametritzant la corba, tenim que

$$I(r) = \int_0^\pi \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^\pi e^{ire^{it}} dt.$$

Per tant

$$|I(r)| \leq \int_0^\pi |e^{ire^{it}}| dt.$$

Com que

$$e^{ire^{it}} = e^{ir \cos t - r \sin t},$$

llavors

$$|e^{ire^{it}}| = |e^{ir \cos t}| e^{-r \sin t} = e^{-r \sin t}.$$

Per tant

$$|I(r)| \leq \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt.$$

Posem

$$\int_0^\pi e^{-r \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin t} dt + \int_{\pi/2}^\pi e^{-r \sin t} dt$$

Fent el canvi $s = \pi - t$, i fent servir que $\sin(\pi - s) = \sin s$, veiem que

$$\int_{\pi/2}^\pi e^{-r \sin t} dt = \int_{\pi/2}^0 e^{-r \sin(\pi-s)} (-ds) = \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin s} ds.$$

Per tant

$$|I(r)| \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin t} dt$$

Fent servir la desigualtat

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

tenim

$$e^{-r \sin t} \leq e^{-\frac{2r}{\pi} t}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Per tant,

$$\begin{aligned} |I(r)| &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2r}{\pi} t} dt = \left[-\pi \frac{e^{-\frac{2r}{\pi} t}}{r} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{r} (1 - e^{-r}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quan $r \rightarrow +\infty$.

6.5.3. Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3} dx$$

i calculeu-ne el seu valor (cal justificar tots els passos). ◁

Solució: $\pi/\sqrt[4]{12}$.

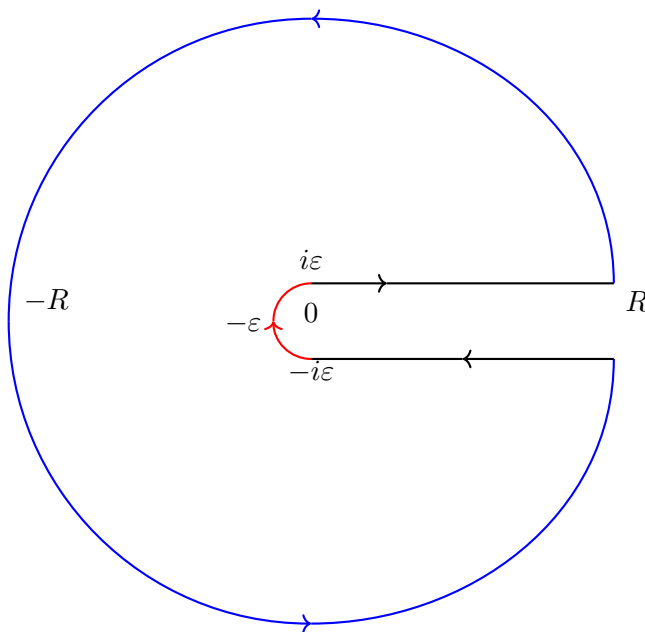
6.5.4. Calculeu

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$
◁

Solució: Considerem la funció

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(1+z^2)}, \quad \sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\mathcal{L}z},$$

amb $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$, amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$. Llavors aquesta branca de $\sqrt{z}$ és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. En aquest cas, prenem $R > 1$ prou gran, i $0 < \varepsilon < 1/2$ prou petit, i integrem f en el recinte “comecocos” γ de la figura



Tenim $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$, amb

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x + i\varepsilon; & x &\in [0, R^*]; \\ \gamma_2(t) &= Re^{it}; & t &\in [\varepsilon^*, 2\pi - \varepsilon^*] \\ \gamma_3(x) &= x - i\varepsilon; & x &\in [0, R^*]; \\ \gamma_4(t) &= \varepsilon e^{it}; & t &\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

amb $R^* \rightarrow \infty$ quan $R \rightarrow \infty$, i també $\varepsilon^* \rightarrow 0$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$.

Les singularitats de f a l'interior del recinte γ són $z = i$ i $z = -i$, que són pols de f d'ordre 1. Pel teorema dels residus, tenim que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}(1+z^2)} = 2\pi i \left(\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i) \right).$$

Com que $z = i$ és un pol d'ordre 1, tenim que

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{\sqrt{z}(z + i)} = \frac{1}{\sqrt{i} 2i},$$

amb

$$\sqrt{i} = e^{\frac{1}{2}\mathcal{L}i} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

De manera semblant, tenim que

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{\sqrt{z}(z - i)} = -\frac{1}{\sqrt{-i} 2i},$$

amb

$$\sqrt{-i} = e^{\frac{1}{2}\mathcal{L}(-i)} = e^{\frac{i}{2}\mathcal{A}(-i)} = e^{\frac{3\pi i}{4}}.$$

Llavors

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{-i}} \right) = \frac{1}{2i} (e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{3\pi i}{4}}) \\ &= \frac{1}{2i} e^{-i\frac{\pi}{2}} (e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = e^{-i\frac{\pi}{2}} \sin(\pi/4) = -i \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}(1+z^2)} = \pi \sqrt{2}.$$

D'altra banda, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + I_R - \int_{\gamma_3} f(z)dz - I_{\varepsilon},$$

amb

$$I_R = \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\varepsilon^*}^{2\pi - \varepsilon^*} \frac{iRe^{it} dt}{\sqrt{Re^{it}}(1 + R^2e^{2it})}$$

i

$$I_{\varepsilon} = \int_{\gamma_4} f(z)dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{i\varepsilon e^{it} dt}{\sqrt{\varepsilon e^{it}}(1 + \varepsilon^2 e^{2it})}$$

Tenim

$$|I_R| \leq \frac{R}{\sqrt{R}} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1 + R^2 e^{2it}|} \leq 2\pi \frac{\sqrt{R}}{R^2 - 1} \rightarrow 0$$

quan $R \rightarrow \infty$. També

$$|I_\varepsilon| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dt}{|1 + \varepsilon^2 e^{2it}|} \leq \pi \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 - \varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{quan } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Per tant,

$$\lim_{R \rightarrow \infty; \varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_3} f(z) dz \right) = \pi \sqrt{2}.$$

Ara, pel teorema de la convergència dominada, tenim que

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^{R^*} \frac{dx}{\sqrt{x + i\varepsilon} (1 + (x + i\varepsilon)^2)} \rightarrow \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x} (1 + x^2)},$$

quan $\varepsilon \rightarrow 0$, ja que, per $x > 0$, tenim que $\mathcal{A}(x + i\varepsilon) \rightarrow 0$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$ i, per tant,

$$\sqrt{x + i\varepsilon} = e^{\frac{1}{2}\mathcal{L}(x+i\varepsilon)} = e^{\frac{1}{2}(\ln|x+i\varepsilon| + i\mathcal{A}(x+i\varepsilon))} \rightarrow e^{\frac{1}{2}\ln x} = \sqrt{x} \quad \text{quan } \varepsilon \rightarrow 0.$$

També, com que per $x > 0$, tenim que $\mathcal{A}(x - i\varepsilon) \rightarrow 2\pi$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$, tenim que

$$\sqrt{x - i\varepsilon} = e^{\frac{1}{2}\mathcal{L}(x-i\varepsilon)} = e^{\frac{1}{2}(\ln|x-i\varepsilon| + i\mathcal{A}(x-i\varepsilon))} \rightarrow e^{\frac{1}{2}(\ln x + 2\pi i)} = \sqrt{x} e^{\pi i} = -\sqrt{x} \quad \text{quan } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Per tant, usant el TCD

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_0^{R^*} \frac{dx}{\sqrt{x - i\varepsilon} (1 + (x - i\varepsilon)^2)} \rightarrow - \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x} (1 + x^2)},$$

quan $\varepsilon \rightarrow 0$. Tot plegat, tenim que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_3} f(z) dz \right) = 2 \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} (1 + x^2)},$$

d'on obtenim

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} (1 + x^2)} = \frac{\pi \sqrt{2}}{2}.$$

6.5.5. Calculeu

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1 + x^2} dx.$$

<

Solució:

Posem $f(z) = \frac{(\mathcal{L}z)^2}{1+z^2}$, on $\mathcal{L}z = \ln|z| + i\mathcal{A}z$ amb $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$, i integrem la funció f en la regió “comecocos” del cas anterior.

Pel teorema dels residus, tenim que

$$\int_\gamma \frac{(\mathcal{L}z)^2 dz}{1 + z^2} = 2\pi i \left(\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i) \right).$$

Com que $z = i$ és un pol d'ordre 1, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(\mathcal{L}z)^2}{z + i} = \frac{(\mathcal{L}i)^2}{2i},$$

amb $\mathcal{L}i = i\frac{\pi}{2}$. De manera semblant, tenim que

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(\mathcal{L}z)^2}{z - i} = -\frac{(\mathcal{L}(-i))^2}{2i},$$

amb $\mathcal{L}(-i) = \frac{3\pi i}{2}$. Llavors

$$\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i) = \frac{1}{i} \left(\frac{-\pi^2}{8} + \frac{9\pi^2}{8} \right) = \frac{\pi^2}{i},$$

i, per tant,

$$\int_{\gamma} \frac{(\mathcal{L}z)^2 dz}{1 + z^2} = 2\pi^3.$$

Es compleix que si $z \in \gamma_1^*$, $z = x + i\varepsilon$, així que $\mathcal{L}z \rightarrow \ln x$ si $\varepsilon \rightarrow 0$ i si $z \in \gamma_3^*$, $z = x - i\varepsilon$, de manera que $\mathcal{L}z \rightarrow \ln x + 2\pi i$ si $\varepsilon \rightarrow 0$.

A més,

$$I_R = \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\varepsilon^*}^{2\pi - \varepsilon^*} \frac{(\mathcal{L}(Re^{it}))^2 dt}{1 + R^2 e^{2it}}.$$

Per tant, tenim que

$$|I_R| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R(|\ln R + it|)^2 dt}{|1 + R^2 e^{2it}|} \leq 2\pi \frac{R(\ln R + 2\pi)^2}{R^2 - 1} \rightarrow 0$$

quan $R \rightarrow \infty$.

D'altra banda,

$$|I_{\varepsilon}| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\varepsilon(|\ln \varepsilon + it|)^2 dt}{|1 + \varepsilon^2 e^{2it}|} \leq \pi \frac{\varepsilon(|\ln \varepsilon| + 2\pi)^2}{1 - \varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{quan } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Per tant

$$2\pi^3 = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{(\mathcal{L}z)^2}{1 + z^2} dz = \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x - (\ln x + 2\pi i)^2}{1 + x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{4\pi^2 - 4\pi i \ln x}{1 + x^2} dx.$$

Prenent part imaginària, deduïm que

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2} dx = 0.$$

6.5.6. *Justifiqueu la integrabilitat (Lebesgue o impròpia Riemann) i calculeu les següents integrals (en el tercer apartat, $n = 0, 1, 2, \dots$):*

$$\begin{array}{lll}
 a) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4 \cos t} dt; & c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2 + \cos t} dt; & e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1} dx; \\
 b) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx; & d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx; & f) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^5}.
 \end{array}$$

Solució: $\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4 \cos t} dt}$

Utilitzem que

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

Parametritzant la circumferència unitat de la manera habitual, $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, tenim que

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4 \cos t} dt &= \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{e^{it} - 1/e^{it}}{2i}\right)^2}{5 + 2(e^{it} + 1/e^{it})} dt = \int_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z-1/z}{2i}\right)^2}{5 + 2(z + 1/z)} \frac{dz}{iz} \\
 &= -\frac{1}{4i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2 - 1)^2 dz}{z^2(5z + 2z^2 + 2)} = -\frac{1}{8i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2 - 1)^2 dz}{z^2(z + 1/2)(z + 2)}.
 \end{aligned}$$

Diem $f(z) = \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+1/2)(z+2)}$. Aquesta funció té dues singularitats dins el disc unitat (0 i $-1/2$); per tant, pel teorema dels Residus,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4 \cos t} dt = -\frac{\pi}{4} [\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -1/2)]$$

Escrivint

$$f(z) = \frac{1}{z + 1/2} \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z + 2)}$$

veiem que

$$\text{Res}(f, -1/2) = \frac{((-1/2)^2 - 1)^2}{(-1/2)^2(-1/2 + 2)} = \frac{3}{2}.$$

Per altra part, escrivint

$$f(z) = \frac{1}{z^2} g(z), \quad g(z) = \frac{(z^2 - 1)^2}{(z + 1/2)(z + 2)}$$

veiem que

$$\text{Res}(f, 0) = g'(0).$$

Derivant g tenim que

$$g'(z) = \frac{4z(z^2 - 1)}{(z + 1/2)(z + 2)} - \frac{(z^2 - 1)^2}{(z + 1/2)^2(z + 2)} - \frac{(z^2 - 1)^2}{(z + 1/2)(z + 2)^2},$$

i avaluant a 0,

$$g'(0) = 0 - 2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Tornant a l'expressió de dalt, obtenim finalment

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4 \cos t} dt = -\frac{\pi}{4} \left[\frac{3}{2} - \frac{5}{2} \right] = \frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx}$$

Solució: $\pi/2$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2 + \cos t} dt}$$

Observem que $\operatorname{Re}(e^{int}) = \cos(nt)$ i, per tant, serà suficient calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2 + \cos t} dt.$$

Expressant $\cos t = 1/2(e^{it} + e^{-it})$ i parametritzant la vora del disc unitat amb $\zeta = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ tenim que

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2 + \cos t} dt = \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{(2 + \frac{e^{it} + e^{-it}}{2})e^{it}} ie^{it} dt = \frac{2}{i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^n}{(4 + \zeta + 1/\zeta)\zeta} d\zeta.$$

Factoritzant $\zeta^2 + 4\zeta + 1 = (\zeta + 2 - \sqrt{3})(\zeta + 2 + \sqrt{3})$ obtenim finalment

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2 + \cos t} dt = \frac{2}{i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^n}{(\zeta + 2 - \sqrt{3})(\zeta + 2 + \sqrt{3})} d\zeta.$$

La funció $f(\zeta) = \frac{\zeta^n}{(\zeta + 2 - \sqrt{3})(\zeta + 2 + \sqrt{3})}$ té una única singularitat a $\mathbb{D}$, al punt $a = -2 + \sqrt{3}$. Per tant, segons el teorema dels residus,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2 + \cos t} dt = \frac{2}{i} 2\pi i \operatorname{Res}(f, a) = 4\pi \operatorname{Res}(f, a).$$

La funció $g(\zeta) = \frac{\zeta^n}{\zeta + 2 + \sqrt{3}}$ és holomorfa a un entorn de $a = -2 + \sqrt{3}$ i, per tant, s'expressa com una sèrie de potències a l'entorn d'aquest punt. Aleshores, a l'entorn de a ,

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{\zeta - a} g(\zeta) = \frac{1}{\zeta - a} \left[g(a) + g'(a)(\zeta - a) + \frac{g''(a)}{2}(\zeta - a)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{g(a)}{\zeta - a} + g'(a) + \frac{g''(a)}{2}(\zeta - a) + \dots \end{aligned}$$

i, per tant, $\text{Res}(f, a) = g(a) = \frac{(-2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} = (-1)^n \frac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$. Amb això tenim finalment

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{2 + \cos t} dt = 4\pi(-1)^n \frac{(2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(-1)^n(2 - \sqrt{3})^n.$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx}$$

Solució: $5\pi/12$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1} dx}$$

Solució: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sin(1/2)e^{-\sqrt{3}/2}$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^5}}$$

Considerem la funció $f(z) = \frac{1}{1+z^5}$, i integrem aquesta funció en el recinte γ amb $n = 5$. Obtenim

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{5}}) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{5}}} (z - e^{i\frac{\pi}{5}}) f(z) = \frac{2\pi i}{5} e^{-\frac{4\pi i}{5}}.$$

Posant $\gamma_R = Re^{it}$ per $t \in [0, \frac{2\pi}{5}]$, tenim que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{[0, R]} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz - \int_{[0, Re^{\frac{2\pi i}{5}}]} f(z) dz.$$

Tenim

$$\int_{[0, R]} f(z) dz = \int_0^R \frac{dx}{1+x^5} \longrightarrow I \quad \text{quan } R \rightarrow \infty.$$

Ara, el segment $[0, Re^{\frac{2\pi i}{5}}]$ ve parametritzat per $\sigma(t) = te^{\frac{2\pi i}{5}}$ per $t \in [0, R]$. Llavors

$$\int_{[0, Re^{\frac{2\pi i}{5}}]} f(z) dz = \int_0^R \frac{1}{1 + (te^{\frac{2\pi i}{5}})^5} e^{\frac{2\pi i}{5}} dt = e^{\frac{2\pi i}{5}} \int_0^R \frac{dt}{1+t^5} \longrightarrow e^{\frac{2\pi i}{5}} I \quad \text{quan } R \rightarrow \infty.$$

Si veiem que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$

llavors obtindrem

$$\frac{2\pi i}{5} e^{-\frac{4\pi i}{5}} = (1 - e^{\frac{2\pi i}{5}}) I.$$

Per tant

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^5} = \frac{2\pi i}{5e^{\frac{4\pi i}{5}}(1 - e^{\frac{2\pi i}{5}})} = \frac{2\pi i e^{\frac{\pi i}{5}}}{5(e^{\frac{2\pi i}{5}} - 1)} = \frac{\pi}{5 \sin(\pi/5)}.$$

Finalment, com que

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_0^{\frac{2\pi}{5}} \frac{i R e^{it} dt}{1 + R^5 e^{5it}},$$

tenim

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi}{5} \frac{R}{R^5 - 1} \longrightarrow 0 \quad \text{quan } R \rightarrow \infty.$$

6.5.7. Donat $a \in (0, 1)$ calculeu el valor de la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2} dx. \quad \triangleleft$$

Solució: Aplicant el criteri de comparació per pas al límit amb la funció $1/x^{2-a}$ veiem que aquesta integral impròpia és convergent.

Considerem la funció $f(z) = \frac{z^a}{1+z^2} = \frac{e^{a\mathcal{L}z}}{1+z^2}$, on el logaritme és l'associat a l'argument $\mathcal{A}z \in (0, 2\pi)$. Donats $\epsilon, R > 0$ considerem també la corba $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ diferenciable a trossos i tancada formada pels trossos:

- $\gamma_1(x) = x + i\epsilon$, amb $x \in [0, R^*]$, on $R^* := \sqrt{R^2 - \epsilon^2}$.
- $\gamma_2(\theta) = R e^{i\theta}$, amb $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$, on δ és l'argument del punt $z = R^* + i\epsilon$ ($\delta = \arctan(\epsilon/R^*)$).
- $\gamma_3(x) = x - i\epsilon$, amb $x \in [0, R^*]$.
- $\gamma_4(\theta) = \epsilon e^{i\theta}$, amb $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

Com que la funció f té els dos pols $a_1 = i$, $a_2 = -i$ dins la regió tancada per γ , el teorema dels residus dona:

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{e^{a\mathcal{L}(x+i\epsilon)}}{1+(x+i\epsilon)^2} dx + \int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{e^{a\mathcal{L}(R e^{i\theta})}}{1+(R e^{i\theta})^2} i R e^{i\theta} d\theta - \int_0^R \frac{e^{a\mathcal{L}(x-i\epsilon)}}{1+(x-i\epsilon)^2} dx - \\ - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{a\mathcal{L}(\epsilon e^{i\theta})}}{1+(\epsilon e^{i\theta})^2} i \epsilon e^{i\theta} d\theta = 2\pi i [\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)] \end{aligned}$$

Essent $f(z) = \frac{e^{a\mathcal{L}z}}{(z-i)(z+i)}$ veiem que

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \frac{e^{a\mathcal{L}i}}{i+i} = \frac{e^{ai\pi/2}}{2i} \\ \text{Res}(f, -i) &= \frac{e^{a\mathcal{L}(-i)}}{-i-i} = \frac{e^{ai3\pi/2}}{-2i}, \end{aligned}$$

així que

$$2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)) = \pi (e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2}).$$

Per altra part és clar que les integrals dels trossos γ_2 i γ_4 tendeixen a 0 quan $\epsilon \rightarrow 0$ i $R \rightarrow +\infty$, ja que passant els mòduls a dins de la integral tenim:

$$\left| \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{e^{a\mathcal{L}(Re^{i\theta})}}{1 + (Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{a \ln R}}{R^2 - 1} R d\theta = \frac{2\pi R^{1+a}}{R^2 - 1}$$

i

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{e^{a\mathcal{L}(\epsilon e^{i\theta})}}{1 + (\epsilon e^{i\theta})^2} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{e^{a \ln \epsilon}}{1 - \epsilon^2} \epsilon d\theta = \frac{\pi \epsilon^{a+1}}{1 - \epsilon^2}.$$

Pel que fa al tros corresponent a γ_3 tenim que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^R \frac{e^{a\mathcal{L}(x-i\epsilon)}}{1 + (x-i\epsilon)^2} dx = \int_0^\infty \frac{e^{a(\ln x + i2\pi)}}{1 + x^2} dx = e^{2\pi ia} \int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^2} dx.$$

Tot plegat tenim doncs

$$(1 - e^{2\pi ia}) \int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^2} dx = \pi(e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2}),$$

d'on deduïm que

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^2} dx = \pi \frac{e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2}}{1 - e^{2\pi ia}}.$$

Podem comprovar que aquest és un nombre real positiu efectuant la divisió:

$$\begin{aligned} \frac{e^{ai\pi/2} - e^{ai3\pi/2}}{1 - e^{2\pi ia}} &= \frac{e^{ai\pi}(e^{-ai\pi/2} - e^{ai\pi/2})}{e^{ai\pi}(e^{-ai\pi} - e^{ai\pi})} = \frac{\sin(a\pi/2)}{\sin(a\pi)} = \frac{\sin(a\pi/2)}{2\sin(a\pi/2)\cos(a\pi/2)} \\ &= \frac{1}{2\cos(a\pi/2)}. \end{aligned}$$

6.5.8. *Siguin $f(z) = e^z/z^2$ i la recta $\gamma = \{1 + it; t \in (-\infty, +\infty)\}$.*

a) *Calculeu (justificant tots els passos)*

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

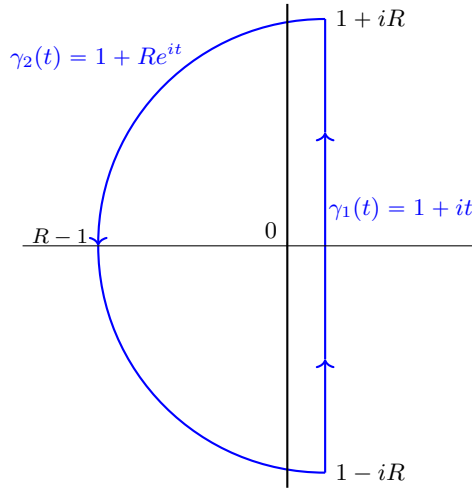
Indicació: *integreu f sobre la vora del semidisc de centre $z_0 = 1$ i radi R amb $\operatorname{Re} z \leq 1$.*

b) *Deduïu que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(t) + 2t\sin(t)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2\pi}{e}$.*

◁

Solució: (a) Per a cada $R > 0$ considerem la corba tancada $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, on

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= 1 + it, & t &\in [-R, R], \\ \gamma_2(t) &= 1 + Re^{it}, & t &\in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{aligned}$$



Com que f té una única singularitat, al punt $a = 0$, el teorema dels residus ens dona

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

Desenvolupat $e^z = 1 + z + z^2/2 + \dots$ a l'entorn de 0 veiem que $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$.

Per altra part, la integral a γ_2 tendeix a 0 a mesura que R es fa gran: si $z = 1 + Re^{it}$ aleshores

$$|e^z| = |e^{R \cos t} e^{iR \sin t}| \leq e,$$

ja que $\cos t \leq 0$. Per tant

$$\left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(1 + Re^{it}) iRe^{it} dt \right| \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e}{(R-1)^2} R dt = \frac{\pi e R}{(R-1)^2}$$

efectivament tendeix a 0 quan $R \rightarrow +\infty$.

Per tant, passant al límit també la integral

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{1+it}}{(1+it)^2} i dt$$

obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{1+it}}{(1+it)^2} i dt = 2\pi i.$$

(b) Com que

$$\frac{1}{1+it} = \frac{1-it}{|1+it|^2} = \frac{1-it}{1+t^2},$$

obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{1+it}(1-it)^2}{(1+t^2)^2} dt = 2\pi.$$

Utilitzant que

$$\operatorname{Re} [e^{1+it}(1-it)^2] = e(\cos t(1-t^2) + 2t \sin t)$$

i igualant parts reals obtenim finalment

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e(\cos t(1-t^2) + 2t \sin t)}{(1+t^2)^2} dt = 2\pi.$$

6.5.9. Considereu la funció $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$.

(a) Determineu les singularitats de f .

(b) Calculeu la part singular del desenvolupament de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(c) Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor.

◁

Solució: (a) La funció $f(z)$ és racional i té com a úniques singularitats les arrels del denominador. Factoritzant $z^2 + 9 = (z + 3i)(z - 3i)$ i $z^2 + 4 = (z + 2i)(z - 2i)$, veiem que aquestes són $z = \pm 3i$ (pols simples), $z = \pm 2i$ (pols d'ordre 2).

(b) Tenim que

$$f(z) = \frac{z^2}{(z + 3i)(z - 3i)(z + 2i)^2(z - 2i)^2} = \frac{1}{(z - 2i)^2} h(z),$$

on

$$h(z) = \frac{z^2}{(z + 3i)(z - 3i)(z + 2i)^2} = \frac{z^2}{(z^2 + 9)(z + 2i)^2}$$

és holomorfa a un entorn de $z = 2i$ i amb $h(2i) \neq 0$. Desenvolupant en sèrie aquesta funció a l'entorn d'aquest punt tindrem doncs

$$h(z) = h(2i) + h'(2i)(z - 2i) + \frac{h''(2i)}{2}(z - 2i)^2 + \dots$$

i, per tant,

$$f(z) = \frac{h(2i)}{(z - 2i)^2} + \frac{h'(2i)}{z - 2i} + \frac{h''(2i)}{2} + \dots$$

Aleshores, la part singular del desenvolupament de Laurent de f al voltant de $z = 2i$ serà

$$\frac{h(2i)}{(z - 2i)^2} + \frac{h'(2i)}{z - 2i}.$$

Directament de la definició de h tenim que

$$h(2i) = \frac{4i^2}{(4i^2 + 9)(4i)^2} = \frac{1}{20}.$$

Derivant tenim també que

$$h'(z) = \frac{2z}{(z^2 + 9)(z + 2i)^2} \left[1 - \frac{z^2}{z^2 + 9} - \frac{z}{z + 2i} \right],$$

d'on veiem que

$$h'(2i) = \frac{4i}{5(4i)^2} \left[1 + \frac{4}{5} - \frac{2i}{4i} \right] = \frac{13}{200i}.$$

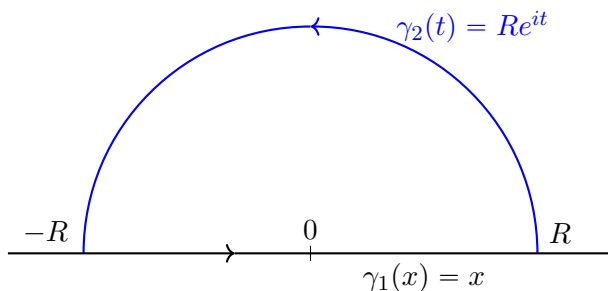
Tot plegat, la part singular buscada és

$$P_{2i}(z) = \frac{\frac{1}{20}}{(z - 2i)^2} - \frac{\frac{13i}{200}}{z - 2i}.$$

(c) La funció $f(x)$ és fitada a $[0, +\infty)$ i, per tant, només cal estudiar-ne la convergència a ∞ . Pel criteri de comparació per pas al límit veiem que la integral demanada té el mateix caràcter que $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4}$, és a dir, és convergent:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1/x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2} = 1.$$

Per calcular la integral utilitzarem el teorema dels residus a la funció $f(z)$ i el camí tancat $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, on $\gamma_1(x) = x$, $x \in [-R, R]$ és el segment $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ i $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ és la semicircumferència que va de R a $-R$ passant pel semiplà superior.



Les singularitats de f tancades per γ , si R és prou gran, són $z = 2i, 3i$ i, per tant, pel teorema dels residus,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 2i) + \text{Res}(f, 3i)).$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx$$

i

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^\pi f(Re^{it}) iRe^{it} dt.$$

Com que

$$\max_{t \in [0, 2\pi]} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|f(Re^{it})|}{1/R^4} \leq 1,$$

veiem que la integral a γ_2 tendeix a 0 quan $R \rightarrow \infty$:

$$\left| \int_0^\pi f(Re^{it}) iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi |f(Re^{it})| R dt \leq C\pi R \frac{1}{R^4}$$

Tornant a la igualtat de dalt i passant al límit quan $R \rightarrow \infty$ tenim doncs que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i (\text{Res}(f, 2i) + \text{Res}(f, 3i)).$$

A l'apartat (b) hem vist que

$$\text{Res}(f, 2i) = \frac{13}{200i}.$$

De manera anàloga, factoritzant el denominador de f com hem fet anteriorment, veiem que

$$\text{Res}(f, 3i) = \frac{(3i)^2}{(3i + 3i)((3i)^2 + 4)^2} = -\frac{3}{50i}.$$

Per tant,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \left(\frac{13}{200i} - \frac{3}{50i} \right) = \frac{\pi}{100}.$$

Com que la funció f és parell,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx,$$

i, per tant, finalment

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{200}.$$

6.5.10. Considereu

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)^2}.$$

(a) Trobeu la part singular de la sèrie de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(b) Justifiqueu la convergència de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

i calculeu-ne el seu valor (justifiqueu tots els passos).

◁

Solució: (a) $\frac{1/24}{(z-2i)^2} + \frac{5i/48}{z-2i}$; (b) $-\pi/24$.

6.5.11. Sigui $f(z) = e^{iz^2}$, i considereu el camí γ_R format per el segment que va de 0 a R ; l'arc del cercle $|z| = R$ que va de R a $Re^{i\pi/4}$, i el segment que va de $Re^{i\pi/4}$ a 0. Demostreu que

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0,$$

i utilitzeu-ho per a calcular les integrals de Fresnel

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx, \quad \int_0^\infty \sin(x^2)dx.$$

Observació: Podeu utilitzar que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ◁

Solució: Com que f és entera i γ_R és un camí tancat, aplicant el teorema de Cauchy per un disc (per exemple en $\Delta = D_{2R}(0)$), obtenim que

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

i, per tant,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

Per altra part, tenim que

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz - \int_{\gamma_{3,R}} f(z)dz$$

amb $\gamma_{1,R}(x) = x$, per $x \in [0, R]$; $\gamma_{2,R}(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi/4]$; i $\gamma_{3,R}(t) = te^{i\pi/4}$ per $t \in [0, R]$. Tenim que

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz = \int_0^R e^{ix^2} dx \longrightarrow \int_0^\infty e^{ix^2} dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx + i \int_0^\infty \sin(x^2) dx$$

quan R tendeix a $+\infty$. També, com que $e^{i\pi/2} = i$, tenim que

$$\int_{\gamma_{3,R}} f(z)dz = \int_0^R e^{i(te^{i\pi/4})^2} e^{i\pi/4} dt = e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-t^2} dt.$$

Per tant, com que $e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, tenim que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{3,R}} f(z)dz = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + i\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

Si podem veure que

$$I_R := \int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz \longrightarrow 0$$

quan $R \rightarrow \infty$, llavors

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx + i \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + i \frac{\sqrt{2\pi}}{4},$$

així que, igualant parts reals i imaginàries, obtenim

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Vegem que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$. Com que $\gamma_{2,R}(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \pi/4]$, tenim que

$$I_R = \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz = \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{2it}} iRe^{it} dt.$$

Llavors

$$|I_R| \leq R \int_0^{\pi/4} |e^{iR^2 e^{2it}}| dt = R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin(2t)} dt.$$

Aquesta integral no té primitiva elemental, així que l'acotem per una quantitat que puguem calcular i que tendeixi a zero quan R tendeixi a infinit. Sabem que $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ per $x \in [0, \pi/2]$, de manera que $\sin(2t) \geq \frac{4t}{\pi}$ per $t \in [0, \pi/4]$, obtenint que

$$e^{-R^2 \sin(2t)} \leq e^{-4R^2 t/\pi}, \quad t \in [0, \pi/4].$$

Per tant

$$|I_R| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-4R^2 t/\pi} dt = R \left[\frac{\pi e^{-4R^2 t/\pi}}{(-4R^2)} \right]_{t=0}^{t=\pi/4} = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2})$$

que tendeix a zero quan R tendeix a infinit.

6.5.12. Calculeu, justificant tots els passos, la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2 + x + 1} dx, \quad -1 < \alpha < 1.$$

Indicació: Considereu la funció $f(z) = \frac{z^\alpha}{z^2 + z + 1}$. Definiu una determinació del logaritme $\log(z)$ a $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ de manera que $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$. Finalment integreu la funció $f(z)$ a la mateixa regió que les integrals del tipus

$$\int_0^{+\infty} R(x) \ln(x) dx.$$

<

Solució: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}(\alpha+1))}{\sin(\pi(\alpha+1))}.$

6.6. Principi de l'argument

6.6.1. *Quines de les següents funcions són meromorfs a $\mathbb{C}$?*

- a) z^5 , b) $z^{5/2}$, c) $e^{1/z}$, d) $1/\sin(z)$. $\triangleleft$

Solució: a) La funció és entera, llavors meromorfa sense pols. b) No, hi ha una semi-recta de singularitats si prenem, per exemple, l'arrel quadrada principal. c) No, a 0 hi ha una singularitat essencial d) Sí, totes les seves singularitats (a $z = n\pi$) són pols simples.

6.6.2. *Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) amb part real positiva del polinomi $P(z) = z^6 - z^4 - 2z - 6$.*

I si alternativament el polinomi fos $Q(z) = z^6 - z^4 - 2z + 6$? $\triangleleft$

Solució: Considerem un semidisc tancat D , delimitat per la corba $\gamma = \gamma_1^- \vee \gamma_2$ on

$$\gamma_1(t) = it, t \in [-R, R]; \quad \gamma_2(t) = Re^{it}, t \in [-\pi/2, \pi/2],$$

amb R és prou gran per a que tots els zeros de P a $\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ estiguin dins de D .

Si mirem la imatge dels extrems de γ_1 veiem que

$$P(iR) \simeq -R^6 - 2iR; \quad P(-iR) \simeq -R^6 + 2iR,$$

d'on obtenim que

$$\mathcal{A}(P(iR)) = \pi - \epsilon; \quad \mathcal{A}(P(-iR)) = \pi + \epsilon,$$

per un cert $\epsilon \gtrsim 0$.

D'altra banda, si calculem la imatge sencera de γ_1 tenim que

$$P(\gamma_1(t)) = P(it) = -t^6 - t^4 - 6 - 2it.$$

Veiem que la part real no s'anul·la mai mentre que la part imaginària ho fa només per $t = 0$. Deduïm que $P(\gamma_1)$ no talla mai l'eix imaginari i només talla l'eix real una vegada, en el punt $P(\gamma(0)) = -6$.

Concloem per tant que l'increment de l'argument degut a γ_1^- és

$$\Delta(\gamma_1^-) = \pi + \epsilon - (\pi - \epsilon) = 2\epsilon.$$

La corba γ_2 és un semicercle i, per tant, recorre un argument de π . Donat que $|\gamma_2(t)| = R$ i R és molt gran, domina el terme de grau superior i, per tant,

$$P(\gamma_2(t)) \simeq \gamma_2(t)^6 = R^6 e^{6it},$$

on $6t \in [-3\pi, 3\pi]$, ja que $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Tenim doncs que

$$\Delta(\gamma_2) = 6 \times \pi - 2\epsilon = 6\pi - 2\epsilon,$$

on 2ϵ ve donat pel fet que $P(\gamma_2)$ ha de connectar $P(iR)$ i $P(-iR)$.

Concloem doncs que

$$\Delta(\gamma) = 2\epsilon + 6\pi - 2\epsilon = 6\pi,$$

i que per tant,

$$\text{Ind}(P(\gamma), 0) = \frac{6\pi}{2\pi} = 3.$$

El Principi de l'Argument ens diu aleshores que $P(z)$ té exactament 3 arrels dins de D comptades amb multiplicitat. Donat que R és arbitràriament gran, $P(z)$ té 3 arrels al semiplà de la dreta.

Si el polinomi fos $Q(z) = z^6 - z^4 - 2z + 6$, actuaria sobre $\gamma_1(t)$ com

$$Q(\gamma_1(t)) = Q(it) = -t^6 - t^4 + 6 + 2it$$

i, per tant, seguiria tallant l'eix real només per $t = 0$; però aquesta vegada ho faria en el punt $Q(0) = 6$. Independentment de quantes vegades pogués tallar l'eix imaginari, la corba imatge seria homòtopa a la de la figura 2 en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La diferència en el càlcul resideix en la variació de l'argument de la corba $Q(\gamma_1)$ que, al rodejar el zero, provoca un augment de l'argument en gairebé 2π . En efecte,

$$\Delta(\gamma_1) = 2\epsilon - 2\pi; \quad \Delta(\gamma_2) = 6\pi + 2\epsilon$$

i, per tant,

$$\Delta(\gamma) = 2\pi - 2\epsilon + 6\pi + 2\epsilon = 8\pi.$$

En conseqüència $\text{Ind}(Q \circ \gamma, 0) = 4$ i el polinomi Q té 4 zeros al semiplà de la dreta.

6.6.3. *Sigui f una funció entera tal que*

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Demostreu que f té, com a molt, un zero a tot $\mathbb{C}$.

◁

Solució: Notem primer que, per hipòtesi, f no pot ser constant. Considerem un cercle $\gamma(t) = Re^{it}$ amb $t \in [0, 2\pi]$ de radi arbitrari $R > 0$. Aquest cercle talla l'eix real en dos punts $\gamma(0) = R$, i $\gamma(\pi) = -R$. Per $t \neq 0, \pi$, $\gamma(t) \notin \mathbb{R}$.

Per hipòtesi, només els punts reals tenen imatge real. Així doncs, la corba $f(\gamma(t))$ talla l'eix real exactament en $t = 0$ i $t = \pi$, en dos punts $f(\pm R)$ que podrien ser iguals o diferents.

Aleshores, la corba parametritzada $f(\gamma(t))$ només pot donar com a molt una volta al punt $z = 0$, és a dir

$$\text{Ind}(f(\gamma(t)), 0) \leq 1. \quad (*)$$

Pel Principi de l'Argument, tenim doncs que f pot tenir com a molt un zero a $\{|z| \leq R\}$. Però com que R és arbitrari, això demostra que f té com a molt un zero a $\mathbb{C}$.

Nota: Per a demostrar (*) formalment, podem calcular l'índex amb la definició:

$$\text{Ind}(f(\gamma(t)), 0) = \frac{1}{2\pi}(a(2\pi) - a(0)),$$

on $a(t)$ és una determinació qualsevol de $\arg(f(\gamma(t)))$. Combinat amb el teorema de Bolzano, és fàcil veure que si la diferència entre els arguments és més gran de 2π , aleshores l'argument ha de prendre tots els valors al menys dues vegades, inclosos els valors 0 i π , que corresponen a punts de la recta real.

6.7. Teorema de Rouché

6.7.1. *Demostreu que l'equació $e^z = 2z + 1$ té exactament una solució en el disc unitat obert. Indicació: Proveu que $|e^z - 1| \leq e - 1$ si $|z| = 1$.* $\triangleleft$

Solució: Apliquem el teorema de Rouché al disc unitat i les funcions $f(z) = e^z - 2z - 1$ i $g(z) = -2z$. Per a $|z| = 1$, aplicant la *indicació*, tindrem,

$$|f(z) - g(z)| = |e^z - 1| \leq e - 1 < 2 = |g(z)|$$

i, per tant,

$$\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 1.$$

La indicació es pot provar directament amb la sèrie de l'exponencial: si $|z| = 1$

$$|e^z - 1| = \left| \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1 = e - 1.$$

6.7.2. *Sigui f una funció holomorfa en el disc unitat tancat tal que $|f(z)| < 1$, per a $|z| = 1$. Quants punts fixos té f ?* $\triangleleft$

Solució: Apliquem el teorema de Rouché a $F(z) = f(z) - z$ i $g(z) = -z$: per a $|z| = 1$

$$|F(z) - g(z)| = |f(z)| < 1 = |g(z)|.$$

Per tant

$$\#Z(F) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 1.$$

D'aquí veiem que f té un únic punt fix.

6.7.3. *Calculeu el nombre de solucions (comptant multiplicitats) de les següents equacions en el disc unitat:*

(a) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0.$

(b) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0.$

(c) $z^7 - 5z^4 + z^2 = 2.$ $\triangleleft$

Solució: (a) Apliquem el teorema de Rouché a $f(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$ i $g(z) = -8z$ (el terme de f amb coeficient més gran). Per a $|z| = 1$, tenim que

$$|f(z) - g(z)| = |z^9 - 2z^6 + z^2 - 2| \leq 1 + 2 + 1 + 2 = 6 < 8 = |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 1$.

(b) Apliquem el teorema de Rouché a $f(z) = 2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$ i $g(z) = 8$: per a $|z| = 1$,

$$|f(z) - g(z)| = |2z^5 - z^3 + 3z^2 - z| \leq 2 + 1 + 3 + 1 = 7 < 8 = |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 0$.

(c) Apliquem el teorema de Rouché a $f(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ i $g(z) = -5z^4$: per a $|z| = 1$,

$$|f(z) - g(z)| = |z^7 + z^2 - 2| \leq 1 + 1 + 2 = 4 < 5 = |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = 4$.

6.7.4. Quants zeros té $P(z) = z^4 + 6z^3 - 4z^2 + 1/8$ en la regió $\{z \in \mathbb{C}; \frac{1}{2} < |z| < 1\}$? $\triangleleft$

Solució: 1.

6.7.5. Considerem $P(z) = z^6 + 3z^4 + z^2 + z + 9$.

(a) Proveu que tots els zeros de $P(z)$ són a l'anell $1 < |z| < 2$.

(b) Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) de $P(z)$ al primer quadrant. $\triangleleft$

Solució: a) Aplicarem el teorema de Rouché dues vegades: al disc unitat $\mathbb{D}$ i al disc $D_2(0)$. Notem que P és un polinomi de grau 6, per tant té exactament 6 zeros comptats amb multiplicitat. Comencem pel disc $D_2(0)$. Definim $g(z) = z^6 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Hem de buscar els zeros de la funció $P \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a $D_2(0)$. Aplicarem el teorema de Rouché. Considerem $\gamma = \partial D_2(0)$ (corba simple). Notem que

$$|P(z) - g(z)| \leq 63 < 64 = |g(z)|, \quad \forall z \in \gamma.$$

Podem aplicar el teorema de Rouché que ens assegura que el nombre de zeros de g a $D_2(0)$ coincideix amb el nombre de zeros de P a $D_2(0)$ (comptant multiplicitats). Ara bé, g té 6 zeros a $D_2(0)$. Per tant, P té 6 zeros a $D_2(0)$.

D'una altra banda, considerem $f(z) = 9 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ i $\rho = \partial \mathbb{D}$ (corba simple). Notem que

$$|P(z) - f(z)| \leq 6 < 9 = |f(z)|, \quad \forall z \in \rho.$$

Podem aplicar el teorema de Rouché que ens assegura que el nombre de zeros de f a $\mathbb{D}$ coincideix amb el nombre de zeros de P a $\mathbb{D}$ (comptant multiplicitats). Ara bé, f no té zeros a $\mathbb{D}$. Per tant, P no té zeros a $\mathbb{D}$. Observem que la desigualtat estricta anterior sobre els punts de ρ ens assegura que P i f no s'anul·len en ρ . En resum, hem provat que P té 6 zeros al $D_2(0)$, P no té zeros al $\mathbb{D}$ (i tampoc a $|z| = 1$) i P té exactament 6 zeros al pla

complex. Així, P té tots els seus zeros (és a dir, 6 zeros) a l'anell $1 < |z| < 2$.

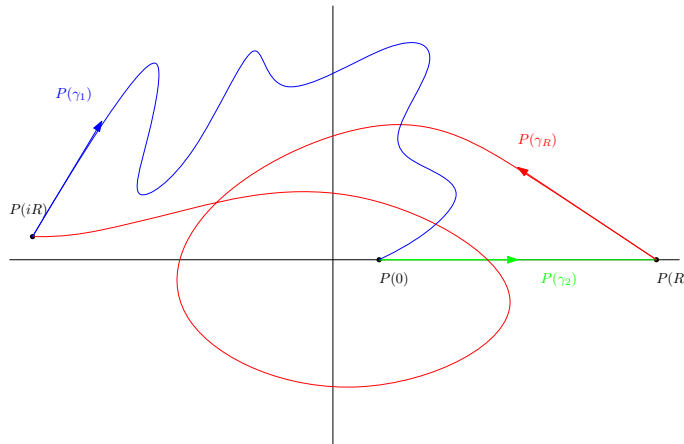
b) Anem a utilitzar el principi de l'argument per calcular el nombre de zeros de P al primer quadrant. Sigui $R > 0$ i Ω_R la regió que és intersecció del $D_R(0)$ amb el primer quadrant, és a dir,

$$\Omega_R = \{re^{it}, 0 < r < R, 0 < t < \pi/2\}.$$

Per a $R > 0$ prou gran (de fet $R \geq 2$), tots els zeros de P pertanyen al disc $D_R(0)$ i, per tant, tots els zeros de P en el primer quadrant pertanyen a Ω_R . Sigui $\gamma = \partial\Omega_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_R$, on $\gamma_1(t) = i(R-t)$, $t \in [0, R]$, $\gamma_2(t) = t$, $t \in [0, R]$ i $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$. Notem que P no té zeros sobre $\mathbb{R}_+$ i $i\mathbb{R}_+$ ja que $P(t) = t^6 + 3t^4 + t^2 + t + 9 \geq 9 > 0$ i $P(it) = -t^6 + 3t^4 - t^2 + 9 + it$. Per tant, $\text{Im}(P(it)) \neq 0$ per tot $t > 0$ i per a $t = 0$, $P(0) = 9 \neq 0$. Així, si R és prou gran (la corba γ_R no passarà per cap zero de P), P no té zeros sobre la corba γ . Pel principi de l'argument tenim que el nombre de zeros de P en el primer quadrant (comptats amb multiplicitat) és l'increment de l'argument de P sobre γ dividit per 2π (quan $R > 0$ és prou gran), és a dir, hem de mirar les voltes que dona la corba $\Gamma := P(\gamma)$ al voltant de 0 (que no és res més que $\text{Ind}(\Gamma, 0)$) quan $R \rightarrow \infty$. Anem a calcular aquesta quantitat:

$$\begin{aligned} \#(Z(P) \cap \{\text{Primer quadrant}\}) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Ind}(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_\gamma P \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} (\Delta_{\gamma_1} P + \Delta_{\gamma_2} P + \Delta_{\gamma_R} P). \end{aligned}$$

Anem a calcular cada tros. Sobre la corba γ_R , si R és prou gran, $P(z) \approx z^6$ i, per tant, $\Delta_{\gamma_R} P \rightarrow 6\frac{\pi}{2} = 3\pi$ (és a dir, la corba $P(\gamma_R)$ dona una volta i mitja al voltant del 0 amb punt inicial $P(R)$ i punt final $P(iR)$). Sobre la corba γ_2 , tenim que $P(\gamma_2) \in \mathbb{R}$ i $P(\gamma_2(t)) \geq 9 = P(0)$ per tot $t \in [0, R]$. Així, qualsevol determinació de l'argument de $P(\gamma_2)$ és constant i, per tant, $\Delta_{\gamma_2} P = 0$. Anem a treballar ara amb la corba γ_1 . Sigui $t \in [0, R]$, aleshores $\text{Im}(P(it)) > 0$ per tot $t > 0$ i val 0 si $t = 0$. Per tant, la corba $P(\gamma_1)$ viu en $\{\text{Im } z \geq 0\}$ i només toca la recta real en $t = 0$ i val $P(0) = 9$. A més a més, si $R \rightarrow \infty$, $P(iR) \approx -R^6 + iR$. Així, veiem que $\Delta_{\gamma_1} P \rightarrow -\pi$ quan $R \rightarrow \infty$ (veieu el dibuix).



Així, tenim que

$$\text{Ind}(\Gamma, 0) \rightarrow \frac{1}{2\pi}(0 - \pi + 3\pi) = 1, \quad R \rightarrow \infty.$$

Per tant, P té un zero al primer quadrant.

6.7.6. (a) Calculeu el nombre de solucions a $\mathbb{D}$ de l'equació $e^z = 4z + 1$.

(b) Demostreu que l'equació $e^z = 3z^n$ té n solucions en el disc unitat ($n = 1, 2, \dots$). $\triangleleft$

Solució: (a)

Apliquem el T. de Rouché a les funcions $g(z) = e^z - 4z - 1$ i $h(z) = -4z - 1$.

Tenim que, per $|z| = 1$:

$$|g(z) - h(z)| = |e^z| = e^{\text{Re } z} \leq e^1 = e.$$

D'altra banda,

$$|-4z - 1| = |4z + 1| \geq 4|z| - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Per tant, sobre la corba $|z|=1$,

$$|g - h| \leq e < 3 \leq |h|.$$

En conseqüència, g i h tenen el mateix nombre d'arrels dins del disc unitat. Com que $h(z) = -4z - 1$ té exactament una arrel en el disc unitat, concretament $z = -1/4$, també $g(z) = e^z - 4z - 1$ en té exactament una. Això equival a dir que $e^z = 4z + 1$ té exactament una solució en $\mathbb{D}$.

(b) Apliquem el teorema de Rouché a $f(z) = e^z - 3z^n$ i $g(z) = -3z^n$. Per a $|z| = 1$, tenim que

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| = e^{\text{Re } z} \leq e < 3 = |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap \mathbb{D} = \#Z(g) \cap \mathbb{D} = n$.

Es pot veure immediatament que les arrels són diferents, comprovant que $f(z)$ i $f'(z) = e^z - 3nz^{n-1}$ no tenen arrels comuns.

6.7.7. Sigui $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$, i $n \in \mathbb{N}$.

(a) Demostreu que l'equació

$$(z - 1)^n e^z = a$$

té exactament n arrels diferents al semiplà $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$. Indicació: Considereu un disc centrat a $z = 1$ i de radi $R = 1$ primer, després mireu de modificar el camí augmentant el radi sense sortir del semiplà tancat de la dreta.

(b) Proveu que si, a més, $|a| \leq 1/2^n$, llavors totes aquestes arrels són al disc $D_{1/2}(1)$. $\triangleleft$

Solució: (a) Apliquem el teorema de Rouché al disc $D_1(1)$ i les funcions

$$f(z) = (z - 1)^n e^z - a$$

i

$$g(z) = (z - 1)^n e^z.$$

Per a $|z - 1| = 1$, tenim que

$$|f(z) - g(z)| = |a| < 1 \leq e^{\operatorname{Re} z} \leq |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap D_1(1) = \#Z(g) \cap D_1(1) = n$. Com que $D_1(1)$ és contingut al semiplà $\operatorname{Re} z > 0$, ja tenim el que demana l'enunciat. A la vora de $D_R(1) \cap \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, també tenim que

$$|f(z) - g(z)| = |a| < 1 \leq e^{\operatorname{Re} z} \leq |g(z)|,$$

de manera que a tot el semiplà hi ha exactament n solucions comptant multiplicitats.

Que les arrels són diferents es veu immediatament, comprovant que $f(z)$ i $f'(z) = (z - 1)^{n-1}e^z(n + z - 1)$ no tenen arrels comuns.

(b) En cas que $|a| \leq 1/2^n$, apliquem el teorema de Rouché a $D_{1/2}(1)$ i les mateixes funcions d'abans:

$$|f(z) - g(z)| = |a| \leq \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} e^{1/2} \leq \frac{1}{2^n} e^{\operatorname{Re} z} \leq |g(z)|.$$

Per tant $\#Z(f) \cap D_{1/2}(1) = \#Z(g) \cap D_{1/2}(1) = n$.

6.7.8. Demostreu que per a tot $R > 0$ existeix $n(R) \geq 0$ tal que si $n > n(R)$

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

no té zeros al disc $\{|z| \leq R\}$. ◁

Solució: Observem que $P_n(z) \rightarrow e^z$ uniformement en compactes del pla quan $n \rightarrow \infty$. Per tant, $|P_n(z) - e^z|$ és arbitràriament petit en el compacte $\{|z| \leq R\}$, si n és prou gran.

Aplicarem el teorema de Rouché, comparant P_n i $f(z) = e^z$. Veiem que si $|z| = R$ llavors $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \geq e^{-R}$. Doncs sigui $n(R)$ tal que

$$|P_n(z) - e^z| < e^{-R} \text{ per a tot } n \geq n(R).$$

Aleshores, si $|z| = R$,

$$|P_n(z) - e^z| < e^{-R} \leq |e^z|,$$

i pel teorema de Rouché, e^z i $P_n(z)$ tenen el mateix nombre de zeros dins del disc de radi R , sempre que $n > n(R)$.

6.7.9. Sigui f_n una successió de funcions holomorfes en un domini Ω tals que $f_n \rightarrow f$ uniformement en compactes d' Ω , per una certa funció f .

1. (Corol·lari de Hurwitz) Deduïu que si $f_n(z) \neq a$ per a tot $z \in \Omega$ i tot $n \in \mathbb{N}$, aleshores, $f \equiv a$ o bé $f(z) \neq a$ en Ω .
2. Proveu que si f_n és injectiva en Ω per a tot $n \geq 0$, aleshores f és constant o bé f és injectiva en Ω . Indicació: Argumenteu per reducció a l'absurd, i utilitzeu l'apartat anterior.

3. *Proveu que si f té un zero d'ordre m en $a \in \Omega$, aleshores existeix $\rho_0 > 0$ tal que per tot $\rho < \rho_0$ i per tot $n > n_\rho$, f_n té exactament m zeros en $D_\rho(a)$ comptant multiplicitats.*

◁

Solució: Comencem observant que f és holomorfa en Ω pel teorema de Weierstrass.

1. Immediat considerant $g_n(z) = f_n(z) - a$ i $g(z) = f(z) - a$ i aplicant el teorema de Hurwitz.
2. Suposem que $f(z_1) = f(z_2) = a$ tot i que $z_1 \neq z_2$. Considerem D_1 i D_2 dos discs tancats a Ω que continguin z_1 i z_2 respectivament. Aleshores, si f no és constant igual a a , per l'apartat anterior $f_n(z) = a$ ha de tenir almenys una solució en D_1 i una altra en D_2 si n és prou gran (si no en tingues cap, $f(z) = a$ tampoc en tindria). Però això contradiu que f_n sigui injectiva per a tot n .
3. Prenem ρ de manera que f no tingui cap zero en l'adherència de $D_\rho = D_\rho(a) \setminus \{a\}$. Aleshores anomenem $\delta := \inf_{\partial D_\rho} |f| > 0$. Per la convergència uniforme existeix n_ρ tal que per $n > n_\rho$ tenim que $\sup_{\partial D_\rho} |f_n - f| < \delta/2 < \inf_{\partial D_\rho} |f|$ i, per tant, podem aplicar el teorema de Rouché.

7. Representació Conforme

7.1. El teorema de l'aplicació de Riemann

7.2. Projecció estereogràfica i circumferències generalitzades

7.2.1. *Sigui p la projecció estereogràfica. Demostreu que $\lambda = \frac{1}{1-u}$, i que la inversa de p és*

$$p^{-1}(x + iy) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} (x, y, x^2 + y^2). \quad \triangleleft$$

Solució: (proposada per Marta Merino Sánchez) El segment que connecta $(0, 0, 1)$ amb $(x, y, 0)$ és $Q(t) = (0, 0, 1) + t[(x, y, 0) - (0, 0, 1)] = (tx, ty, 1 - t)$ i volem que compleixi l'equació de l'esfera S^2 , on $(x, y, z) \in S^2$ compleix l'equació:

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = z.$$

Perquè el punt $Q(t)$ pertanyi a l'esfera S^2 , hem de comprovar que compleixi l'equació corresponent:

$$(tx)^2 + (ty)^2 + (1 - t)^2 = 1 - t.$$

Aquesta equació es pot desenvolupar de la següent manera:

$$t^2x^2 + t^2y^2 + (1 - 2t + t^2) = 1 - t.$$

Simplificant:

$$t^2(x^2 + y^2 + 1) - t = 0$$

Aquesta equació té les solucions:

$$t(t(x^2 + y^2 + 1) - 1) = 0.$$

Per tant, les possibles solucions per a t són:

1. $t = 0$,
2. $t = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$.

Això implica que per a t dins de l'interval $[0, 1]$, hem de considerar la solució $t = \frac{1}{x^2+y^2+1}$.

Només ens queda substituir $Q(\frac{1}{x^2+y^2+1}) = (\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1}, 1 - \frac{1}{x^2+y^2+1}) = \frac{1}{x^2+y^2+1}(x, y, x^2+y^2+1-1)$

7.2.2. *Demostreu que l'equació d'una circumferència de centre $\alpha \in \mathbb{C}$ i radi r és*

$$|z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2, \quad z \in \mathbb{C},$$

i la d'una recta perpendicular a α passant per $z_0 \in \mathbb{C}$ és

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = m, \quad z \in \mathbb{C},$$

on m és una constant real que només depèn d' α i z_0 .

◁

Solució: (proposada per Tomàs Planelles Alonso) Sabem que l'equació d'una circumferència de centre $\alpha \in \mathbb{C}$ i radi $r \in \mathbb{R}_+$ és

$$|z - \alpha|^2 = r^2.$$

Així,

$$r^2 = |z - \alpha|^2 = (z - \alpha)\overline{(z - \alpha)} = (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = |z|^2 + |\alpha|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z,$$

és a dir

$$|z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2.$$

D'altra banda, identificant $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ tenim que

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z) = 2\langle z, \alpha \rangle \in \mathbb{R}.$$

Finalment, sigui r una recta perpendicular a α , és a dir,

$$r : z_0 + \operatorname{Vect}(\alpha)^\perp,$$

on $z_0 \in \mathbb{C}$. Tenim que

$$z \in r \iff \langle z - z_0, \alpha \rangle = 0 \iff \langle z, \alpha \rangle = \langle z_0, \alpha \rangle \iff 2\langle z, \alpha \rangle = 2\langle z_0, \alpha \rangle =: m \in \mathbb{R},$$

i.e.,

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = m.$$

7.3. Transformacions de Möbius

7.3.1. Donada una homografia $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, definim $A_T := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que està definit mòdul constant multiplicativa. Per exemple, les matrius $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ corresponen respectivament a la translació $z \mapsto z + b$, a la dilatació $z \mapsto az$ i a la inversió $z \mapsto 1/z$.

a) Donades $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$, demostreu que $A_{T_2 \circ T_1} = A_{T_2} A_{T_1}$ (mòdul constant multiplicativa).

b) Trobeu T^{-1} i relacioneu-la amb A_T . ◁

Solució: (proposada per Ada López del Castillo Avilés)

a) Per demostrar que

$$A_{T_2 \circ T_1} = A_{T_2} A_{T_1},$$

veurem que els dos costats de la igualtat donen el mateix. Anomenem

$$T_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad T_2(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

Per la primera part de la igualtat, hem de calcular la matriu de la composició:

$$(T_2 \circ T_1)(z) = T_2(T_1(z)) = \frac{a'(\frac{az+b}{cz+d}) + b'}{c'(\frac{az+b}{cz+d}) + d'} = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)}.$$

Per la segona part de la igualtat hem de calcular el producte de les dues matrius:

$$A_{T_2} A_{T_1} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'a + b'c & ba' + db' \\ c'a + d'c & d'd + bc' \end{bmatrix}.$$

Ja veiem que és el mateix.

b) Calculem T^{-1} :

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \implies w \cdot (cz+d) = az+b \implies dw - b = z \cdot (a - cw) \implies \frac{dw - b}{a - cw} = z.$$

Per tant la inversa és:

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Notem que coincideix amb la inversa matricial mòdul una constant multiplicativa no nul·la (el determinant!).

7.3.2. Demostreu que tota $T \in \mathcal{M}$ es pot escriure com a composició de dilatacions, translacions i inversions. ◁

Solució: (proposada per Marta Merino Sánchez) Utilitzem la següent nomenclatura per

- la dilatació $D_a(z) = az$,

- la translació $T_b(z) = z + b$
- la inversió $I(z) = \frac{1}{z}$

Tenim que $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

Si suposem que $c \neq 0$, llavors fem la divisió i tenim que

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}(cz+d)^{-1}$$

Per tant, ho podem escriure com la composició següent

$$T = T_{\frac{a}{c}} \circ D_{\frac{bc-ad}{c}} \circ I \circ T_d \circ D_c$$

Ara, si $c = 0$, tenim que $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ i, per tant ho podem escriure com la composició següent

$$T = T_{\frac{b}{d}} \circ D_{\frac{a}{d}}.$$

Solució alternativa: (proposada per Tomàs Planelles Alonso) Identifiquem, mòdul constant multiplicativa, l'aplicació $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, on $ad-bc \neq 0$ amb la matriu

$$A_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com en l'exercici 7.3.1.

Com que A_T és invertible ja que $\det(A_T) = ad-bc \neq 0$ tenim que A_T és producte de matrius elementals. Si relacionem cada matriu elemental amb una de les tres homografies elementals —translacions, dilatacions i inversions— ja ho tindrem ja que el producte de matrius correspon, sota la identificació anterior, a la composició d'homografies.

Recordem quines són les matrius elementals de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: Siguin $\mu, \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$P(1, 2) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(1, \lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(2, \lambda) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$E(1, 2, \mu) := \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } E(2, 1, \mu) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}.$$

Clarament, $P(1, 2)$, $D(1, \lambda)$ i $E(1, 2, \mu)$ són les corresponents a les homografies elementals. D'altra banda, al tenir una correspondència mòdul constant multiplicativa, tenim que les matrius

$$D(2, \lambda) \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

s'identifiquen amb la mateixa homografia, $\lambda^{-1}z$. Així doncs, només queda veure qui és $E(2, 1, \mu)$. Fixem-nos, però, que

$$P(1, 2)E(1, 2, \mu)P(1, 2) = E(2, 1, \mu).$$

Per tant, substituint les matrius $D(2, \lambda)$ i $E(2, 1, \mu)$ si cal, la descomposició d' A_T ens dona una descomposició de T en homografies elementals.

7.3.3. Trobeu una descomposició en dilatacions, translacions i una inversió de la transformació

$$T(z) = \frac{2z + i}{(1 - i)z + 3i}. \quad \triangleleft$$

Solució: (proposada per Tomàs Planelles Alonso) Tal i com s'ha vist a l'exercici 7.3.2, tenim que

$$T(z) = \frac{2z + i}{(1 - i)z + 3i} = 1 + i + \frac{3 - 2i}{(1 - i)z + 3i}.$$

Per tant, seguint la notació de la solució de l'exercici 7.3.2,

$$T = T_{1+i} \circ D_{3-2i} \circ I \circ T_{3i} \circ D_{1-i}.$$

7.3.4. Demostreu que tota $T \in \mathcal{M}$ envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades. $\triangleleft$

Solució: (proposada per Tomàs Planelles Alonso) Com que tota homografia es pot descompondre en translacions, dilatacions i inversions i les dilatacions i translacions porten rectes a rectes i circumferències a circumferències, només hem de comprovar com actua la inversió sobre circumferències generalitzades.

Sigui $T(z) = 1/z$ i r una recta d'equació

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = m$$

on $\alpha \in \mathbb{C}^*$ i $m \in \mathbb{R}$, vegeu l'exercici 7.2.2. Recordem que, si escrivim $w := T(z) = z^{-1}$, aleshores

$$w = |w|^2 \bar{z},$$

i.e.,

$$z = |z|^2 \bar{w}.$$

Així, si $m \neq 0$,

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = m \iff \bar{\alpha}\bar{w} + \alpha w = |w|^2 m.$$

Podem arreglar-ho un pèl més per tal de tenir exactament l'equació descrita a l'apartat (a) de l'exercici 7.2.2:

$$|w|^2 - \left(\frac{\bar{\alpha}}{m}\right)\bar{w} - \overline{\left(\frac{\bar{\alpha}}{m}\right)}w = \left|\frac{\bar{\alpha}}{m}\right|^2 - \left|\frac{\bar{\alpha}}{m}\right|^2,$$

que és l'equació d'una circumferència de centre $\bar{\alpha}/m$ i radi $|\alpha/m|$, en particular passa per l'origen i la tangent a l'origen té el pendent conjugat al de la recta original.

Si $m = 0$, per a tot $z \neq 0$ tenim que

$$\bar{\alpha}\bar{w} + \bar{\alpha}w = 0,$$

que és una recta perpendicular a $\bar{\alpha}$ (i també conté $T(0) = \infty$). Per tant, té el pendent conjugat al de la recta original.

És a dir, T envia rectes a circumferències generalitzades. D'altra banda, sigui C una circumferència d'equació

$$|z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2,$$

on $\alpha \in \mathbb{C}$ i $r \in \mathbb{R}_+$. Tenim que, escrivint $w := T(z)$, si $r^2 - |\alpha|^2 \neq 0$,

$$|z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - |\alpha|^2 \iff 1 - \alpha w - \bar{\alpha}\bar{w} = |w|^2(r^2 - |\alpha|^2).$$

Així,

$$|w|^2 - \left(\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2} \right) w - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2} \bar{w} = \frac{1}{r^2 - |\alpha|^2},$$

és a dir, obtenim una circumferència. Si la circumferència original talla la circumferència unitat en dos punts, aleshores les imatges d'aquests dos punts són els seus conjugats i, per tant, la circumferència imatge té també dos punts de tall conjugats als primers. Si l'original fos tangent exterior, aleshores la imatge seria tangent interior amb punt de tangència conjugat.

Si $r^2 - |\alpha|^2 = 0$, que equival a $0 \in C$, aleshores per tot $z \neq 0$ tenim que

$$\bar{\alpha}w + \alpha\bar{w} = 1,$$

una recta (i també conté $T(0) = \infty$). Notem que aquesta recta té el pendent conjugat al de la tangent a l'origen de la recta original.

En resum, T envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades. Per tant, tota $T \in \mathcal{M}$ envia circumferències generalitzades a circumferències generalitzades.

7.3.5. Doneu la imatge per $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ i per $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$ de

- a) la recta real, b) $\partial D_2(0)$, c) $\partial \mathbb{D}$, d) l'eix imaginari. $\triangleleft$

Solució:

- a) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_\infty \setminus \{1\}$, $g(\mathbb{R}) = \partial \mathbb{D} \setminus \{1\}$,
b) $f(\partial D_2(0)) = \partial D_{4/3}(5/3)$ (talla $\mathbb{R}$ en angle recte a 3 i 1/3),
 $g(\partial D_2(0)) = \{\text{cercle que talla } \partial \mathbb{D} \text{ perpendicularment a } \frac{3+4i}{5}\}$
c) $f(\partial \mathbb{D}) = \{\text{eix imaginari}\} \cup \{\infty\}$, $g(\partial \mathbb{D}) = \{\text{eix imaginari}\} \cup \{\infty\}$,
d) $f(i\mathbb{R}) = \partial \mathbb{D} \setminus \{1\}$, $g(i\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

7.3.6. Trobeu l'homografia que envia $(i, 0, -1)$ a $(-i, 0, \infty)$. $\triangleleft$

Solució: $T(z) = \frac{z(-1-i)}{z+1}$.

7.3.7. Trobeu $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(1-i) = 1+i$, $T(2) = i$, $T(1+i) = -i$. $\triangleleft$

Solució: (*proposada per Miguel Puelma Martínez*)

Pel lema 7.15, sabem que hi ha homografies $S, U \in \mathcal{M}$ tals que $S(1-i) = 0$, $S(2) = 1$, $S(1+i) = \infty$, $U(1+i) = 0$, $U(i) = 1$ i $U(-i) = \infty$. Per tant, $T := U^{-1} \circ S$ és una homografia que compleix per construcció les condicions de l'enunciat. Recordem que l'homografia que envia $z_1 \mapsto 0$, $z_2 \mapsto 1$ i $z_3 \mapsto \infty$ té matriu

$$\begin{pmatrix} z_2 - z_3 & -(z_2 - z_3)z_1 \\ z_2 - z_1 & -(z_2 - z_1)z_3 \end{pmatrix}.$$

Substituint els valors, s'obté

$$A_S = \begin{pmatrix} 1-i & 2i \\ 1+i & -2i \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A_U = \begin{pmatrix} 2i & 2(1-i) \\ -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Per tant, només cal calcular

$$A_T = A_U^{-1} A_S = \begin{pmatrix} -i & -2(1-i) \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 2i \\ 1+i & -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-i & 6+4i \\ -1+i & 4+2i \end{pmatrix},$$

on les igualtats són a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*I_2 =: \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ —el grup projectiu lineal—, i.e., mòdul constants multiplicatives. Obtenim que

$$T(z) = \frac{(-5-i)z + 6 + 4i}{(-1+i)z + 4 + 2i}.$$

7.3.8. *Demostreu el corollari 7.16.* ◁

Solució: Sigui T_1 l'homografia que envia (z_1, z_2, z_3) a $(0, 1, \infty)$, i T_2 la que envia (w_1, w_2, w_3) a $(0, 1, \infty)$. Aleshores $T = T_2^{-1} \circ T_1$ envia (z_1, z_2, z_3) a (w_1, w_2, w_3) . Falta veure que és única. Si n'hi hagués una altra S , aleshores $T_2 \circ S \circ T_1^{-1}$ fixa $(0, 1, \infty)$ i, per tant, és la identitat, de manera que $S = T_2^{-1} \circ T_1 = T$.

7.3.9. *Trobeu una homografia que envii $\mathbb{D}$ a $\mathbb{H}_+ := \{\mathrm{Im} z > 0\}$.* ◁

Solució: Per exemple, $(1, i, -1) \mapsto (0, 1, \infty)$, i queda $T(z) = -i \frac{z-1}{z+1}$.

7.3.10. *Definim*

$$T_1(z) = \frac{z-1}{2z-i}, T_2(z) = \frac{z+1}{iz-1}, T_3(z) = \frac{iz}{(1+i)-z}.$$

Trobeu $T_3^{-1} \circ T_2 \circ T_1$. ◁

Solució: (proposada per Ada López del Castillo Avilés) Considerem les matrius associades a cada transformació, tenint en compte que en el cas de T_3 ens demana la inversa, llavors tenim:

$$A_{T_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -i \end{bmatrix}, \quad A_{T_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{T_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Per l'exercici 7.3.1, hem de resoldre el producte de les matrius, vigilant l'ordre:

$$A_{T_3^{-1} \circ T_2 \circ T_1} = A_{T_3}^{-1} A_{T_2} A_{T_1}.$$

Llavors, fent els càlculs, tenim:

$$A_{T_3}^{-1} \cdot A_{T_2} \cdot A_{T_1} = \begin{bmatrix} 3+3i & -2i \\ 2-2i & -1-i \end{bmatrix}.$$

7.3.11. Sigui $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ i definim $T(z) = \frac{z}{az+1}$. Trobeu $T^m, m \in \mathbb{Z}$. ◁

Solució: (proposada per Ada López del Castillo Avilés) La matriu associada de $T(z)$ és:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Si calculem T^2 , notem:

$$A_{T^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{bmatrix}.$$

Per inducció acabem veient que:

$$A_T^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ma & 1 \end{bmatrix}.$$

7.3.12. Trobeu totes les homografies que tinguin per punts fixos 0 i $-i$. ◁

Solució: (proposada per Ada López del Castillo Avilés i Miguel Puelma Martínez) Un punt fix és aquell que:

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \implies cz^2 + z(d-a) - b = 0.$$

Volem trobar a, b, c, d tals que $T(0) = 0$ i $T(-i) = -i$. Ho reescribim com

$$cz^2 + z(d-a) - b = c(z+0)(z+i) \implies cz^2 + z(d-a) - b = cz^2 + ciz.$$

Com que la matriu d'una homografia està determinada mòdul constant multiplicativa, podem dividir tots els coeficients per c sempre que $c \neq 0$ i suposar que $c = 1$. Així, si

$c \neq 0$, veiem que els valors que satisfan la igualtat són $b = 0$, $c = 1$ i $(d - a) = i$, per tant les transformacions que busquem són:

$$T(z) = \frac{az}{z + (i + a)} \quad \text{per a tot } a \in \mathbb{C}.$$

Si $c = 0$, aleshores $(d - a) = 0$ i $b = 0$, la transformació que busquem és:

$$T(z) = z$$

(tot i que en aquest cas 0 i $-i$ no són els únics punts fixos). Cal ometre els casos $a = 0$, $a = -1$ que anul·len el determinant.

Alternativa: en lloc de factoritzar el polinomi al principi del raonament, es pot substituir directament la primera identitat amb $T(0) = 0$ per trobar $b = 0$ i $T(-i) = -i$ per trobar $-c - i(d - a) = 0$.

7.3.13. *Siguin C_1 i C_2 dues circumferències generalitzades i $z_1 \in \mathbb{C}_\infty \setminus C_1$, $z_2 \in \mathbb{C}_\infty \setminus C_2$. Demostreu que existeix $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(C_1) = C_2$ i $T(z_1) = z_2$. Podeu fer servir l'Exercici 1.1.10. Trobeu-ne una en el cas particular*

$$C_1 = \{z : |z - 1| = 1\}, z_1 = 1; C_2 = \{z : \bar{z}i = z\}, z_2 = i. \quad \triangleleft$$

Solució: (proposada per Tomàs Planelles Alonso)

Considerarem primer uns quants casos i després els ajuntarem tots. Cal tenir present els resultats de l'exercici 7.3.4. Sigui r una recta, $\partial D_r(a)$ una circumferència i $z_1 \notin \partial D_r(a) \cup r$.

- Si considerem la recta r , notem que $0 \notin r - z_1$ —és a dir, estem en el cas $m \neq 0$ per la recta $r - z_1$ de l'exercici 7.3.4—. Per tant, la imatge de r per $I \circ T_{-z_1}$ és una circumferència per l'exercici 7.3.4 i $(I \circ T_{-z_1})(z_1) = \infty$.
- Si considerem la circumferència i $z_1 = \infty$ considerem $T := D_{1/r} \circ T_{-a}$, aleshores, $T(\partial D_r(a)) = \partial \mathbb{D}$ i $T(\infty) = \infty$.
- Si considerem la circumferència i $z_1 \neq \infty$ aleshores tenim que $I \circ T_{-z_1}$ verifica $(I \circ T_{-z_1})(z_1) = \infty$ i, ja que $0 \notin \partial D_r(a) - z_1$ —és a dir, estem en el cas $r^2 - |\alpha|^2 \neq 0$ per la circumferència $\partial D_r(a) - z_1$ de l'exercici 7.3.4—, $I \circ T_{-z_1}(\partial D_r(a))$ és una circumferència de radi r' i centre α' . Aleshores, $D_{1/r'} \circ T_{-\alpha'} \circ I \circ T_{-z_1}(\partial D_r(a)) = \mathbb{D}$ i $D_{1/r'} \circ T_{-\alpha'} \circ I \circ T_{-z_1}(z_1) = \infty$.

En resum, donada qualsevol circumferència generalitzada i qualsevol punt que no pertanyi a la circumferència generalitzada, existeix una homografia que porta aquesta circumferència generalitzada al disc $\partial \mathbb{D}$ i el punt a l'infinit. Com que tota homografia és invertible, tenim el que volíem demostrar.

Pel cas concret procedim igual. Tenim que $C_1 = \partial D_1(1)$ i $z_1 = 1$. Així, $T_{-1}(C_1) = \partial \mathbb{D}$ i, per l'exercici 7.3.4, $I(\partial \mathbb{D}) = \partial \mathbb{D}$, d'altra banda, $I \circ T_{-1}(z_1) = I(0) = \infty$. Hem arribat a on volíem. En segon lloc, l'equació de C_2 és

$$(1 - i)\bar{z} + (1 + i)z = 0.$$

Com que $z_2 = i$ considerem $r := T_{-i}(C_2)$ que és una recta del mateix pendent que passa pel $-i$, per tant, té equació

$$(1 - i)\bar{z} + (1 + i)z = 2.$$

Així, per l'exercici 7.3.4, $I(r) = \partial D_{1/\sqrt{2}}(1/2 + i/2)$. Aleshores, $(D_{\sqrt{2}} \circ T_{-1/2-i/2} \circ I \circ T_{-i})(C_2) = \partial \mathbb{D}$ i $(D_{\sqrt{2}} \circ T_{-1/2-i/2} \circ I \circ T_{-i})(z_2) = \infty$. Per tant,

$$(D_{\sqrt{2}} \circ T_{-1/2-i/2} \circ I \circ T_{-i})^{-1} \circ I \circ T_{-1}$$

és l'homografia que busquem. Usant que $T_a^{-1} = T_{-a}$, $D_r^{-1} = D_{1/r}$ i $I^{-1} = I$ podem calcular-la fàcilment.

7.4. Raó doble i simetria

7.4.1. *Sigui $T \in \mathcal{M}$ tal que $T(D_R(a)) = D_R(a)$. Demostreu que els punts fixos de T estan a $\partial D_R(a)$ o bé són simètrics respecte de $\partial D_R(a)$.* $\triangleleft$

7.5. Automorfismes

7.5.1. *Demostreu que tota representació conforme de $\mathbb{C}_\infty$ en $\mathbb{C}_\infty$ és una homografia.* $\triangleleft$

Solució: Sigui $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una representació conforme, que per tant és holomorfa i bijectiva a tot $z \in \mathbb{C}_\infty$. Si $f(\infty) = \infty$, aleshores $f|_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ també és una representació conforme i, per tant, $f(z) = az + b$ amb $a \neq 0$ pel teorema 7.26. Si, en canvi, $f(\infty) = c \neq \infty$, considerem $g(z) = \frac{1}{f(z)-c}$. Com que f és bijectiva, $f(z) \neq c$ al pla complex i, per tant, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ està ben definida, és holomorfa i bijectiva. Altra vegada pel teorema 7.26 tenim que $g(z) = az + b$ amb $a \neq 0$ i, per tant,

$$f(z) = \frac{1}{az + b} + c.$$

Si $c = 0$, aleshores ja hem acabat ja que $b \cdot 0 - 1 \cdot a = a \neq 0$. Si no,

$$f(z) = \frac{1 + caz + bc}{az + b},$$

que és una homografia perquè $ca \cdot b - a \cdot (1 + bc) = -a \neq 0$.

7.5.2. *Trobeu tots els automorfismes T de $\mathbb{D}$ tals que $T(1/2) = 1/3$.* $\triangleleft$

7.5.3. *Trobeu totes les representacions conformes del disc unitat en ell mateix que envien $1/2$ a 0 . N'existeix alguna que envii 0 a $-i/2$? I 0 a $-i/4$? Utilitzeu T per trobar una representació conforme S que envii $\partial \mathbb{D}$ a $\partial D_2(i)$ tal que $S(1/2) = i$ i $S(0) = 0$.* $\triangleleft$

Solució: Són $T(z) = e^{i\theta} \frac{2z-1}{2-z}$. Si prenem $\theta = \pi/2$, obtenim $T(z) = i \frac{2z-1}{2-z}$, amb $T(0) = -i/2$. No n'hi ha cap de les altres, ja que sigui qui sigui θ , sempre tenim que $|T(0)| = \frac{|-1|}{2} = 1/2$.

Per trobar S cal usar $f(z) = 2z + i$. Aleshores $f \circ T(1/2) = i$, i $f \circ T(0) = 0$. Prenem doncs $S = f \circ T$.

7.5.4. *Demostreu que el lloc geomètric de les imatges de qualsevol punt $b \in \mathbb{D}$ per les transformacions que fixen la imatge d'un altre punt, és a dir*

$$\{w \in \mathbb{D} : w = T(b) \text{ amb } T \in \text{Aut}(\mathbb{D}), T(a) = \tilde{a}\},$$

és una circumferència.

<

Solució: Notem que donada $T \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, $T(a) = \tilde{a}$, per la unicitat tenim que $T_{\tilde{a}} \circ T = e^{i\theta} T_a$, per algun θ . Per tant, escrivint

$$T_\theta = T_{\tilde{a}} \circ (e^{i\theta} T_a),$$

podem parametritzar el conjunt

$$F = \{w \in \mathbb{D} : w = T(b) \text{ amb } T \in \text{Aut}(\mathbb{D}), T(a) = \tilde{a}\}$$

en termes d'aquest angle:

$$F = \{w_\theta \in \mathbb{D} : w = T_\theta(b)\}.$$

Com que

$$e^{i\theta} T_a(b)$$

és una circumferència centrada a l'origen, F és la imatge d'aquesta circumferència per $T_{\tilde{a}}$, que és una homografia i envia circumferències que no passen per $T_{\tilde{a}}^{-1}(\infty) = 1/\tilde{a} \notin \mathbb{D}$ a circumferències.

7.6. Altres transformacions conformes

7.6.1. *Quina és la imatge del primer quadrant per z^3 ?*

<

Solució: Els tres primers quadrants (l'interior de la clausura, per ser precisos).

7.6.2. *Quina transformació pot enviar una banda horitzontal a un semiplà?*

<

Solució: L'exponencial.

7.6.3. *Trobeu una aplicació de Riemann del sector $\{0 < \text{Arg } z < \pi/8\}$.*

<

Solució: $\frac{z^8 - i}{z^8 + i}$.

7.6.4. *Es pot enviar el semiplà superior a un triangle mitjançant una homografia?*

<

Solució: No, perquè es preserven els angles a tot el pla. Cal una altra representació.

7.6.5. *Proveu que no existeix cap representació conforme del semiplà de la dreta en $D_1(1)$ que envii $1 \mapsto 1$, i que s'estengui a la frontera enviant $0 \mapsto 0$ i $\infty \mapsto 1+i$.* $\triangleleft$

7.6.6. *Demostreu que les transformacions conformes del semiplà superior $\mathbb{H}_+ := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ en $\mathbb{D}$ són de la forma $e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$ per alguna $a \in \mathbb{H}_+$ i algun $\theta \in \mathbb{R}$.* $\triangleleft$

7.6.7. *Trobeu una transformació de Möbius que envii el primer quadrant a $\mathbb{D}_+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$. Utilitzeu-la per a trobar una transformació conforme de $\mathbb{H}_+$ a $\{| \operatorname{Re} z | < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.* $\triangleleft$

Solució: Possible solució: Primera pregunta: $\frac{z-1}{z+1}$. Segona: $\left(\frac{1+e^{\pi iz}}{1-e^{\pi iz}}\right)^2$.

7.6.8. *Trobeu una representació conforme de $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$ en $\mathbb{D}$.* $\triangleleft$

Solució: Possible solució: $\frac{-ie^{2iz}-1}{-ie^{2iz}+1}$

7.6.9. *Trobeu una representació conforme d' Ω_1 en Ω_2 .*

a) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$, $\Omega_2 = \mathbb{H}_+$.

b) $\Omega_1 = \mathbb{D}$, $\Omega_2 = \mathbb{H}_+ \cap \overline{\mathbb{D}}^c$.

c) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \{\operatorname{Re} z > 1/2\}$, $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$.

d) $\Omega_1 = \mathbb{H}_+$, $\Omega_2 = \{| \operatorname{Re} z | < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

e) $\Omega_1 = \mathbb{D} \cap (-i\mathbb{H}_+)$, $\Omega_2 = \mathbb{D} \cap \{|z + 1/2| > 1/2\}$.

f) $\Omega_1 = D_{\sqrt{2}}(1) \cap D_{\sqrt{2}}(-1)$, $\Omega_2 = \mathbb{D}$, que deixi invariant el segment $(-i, i)$.

g) $\Omega_1 = \mathbb{D} \setminus [0, 1)$, $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

h) $\Omega_1 = \{|\operatorname{Im} z| < \pi/2\} \setminus ((-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty))$, $\Omega_2 = \mathbb{D}$. $\triangleleft$

8. Fluids

8.1. Qüestions generals. Escenari i notació.

8.1.1. Proveu que $\Gamma + iQ = \int_C \overline{\mathbf{V}} dz$. ◁

8.1.2. Proveu que la circulació $\Gamma = 0$ en un flux potencial (suposeu que la funció potencial és de classe C^2 com a mínim). ◁

Solució: Per ser flux potencial tenim que $\mathbf{V} = (V_1, V_2) = \nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$ llavors si apliquem el teorema de Green a $C = \partial\Omega$ tenim

$$\oint_C V_1 dx + V_2 dy = \oint_C \varphi_x dx + \varphi_y dy = \int_{\Omega} (\varphi_{yx} - \varphi_{xy}) dx dy = 0.$$

8.1.3. Proveu que per fluxos definits en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ que satisfan les quatre hipòtesis anteriors, la velocitat potencial $\varphi(x, y)$ és una funció harmònica. ◁

Solució: Estem suposant $\Gamma = Q = 0$, és a dir, que $\mathbf{V} = \nabla\varphi$ i que $(V_1)_x + (V_2)_y = 0$. Llavors

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = (V_1)_x + (V_2)_y = 0$$

i φ és harmònica.

8.1.4. Proveu que $\overline{\Phi'(z)} = \mathbf{V}(z) = V_1 + iV_2$. ◁

Solució:

$$\overline{\Phi'(z)} = \overline{(\varphi + i\psi)'} = \overline{\varphi_x + i\psi_x} = \overline{\varphi_x - i\varphi_y} = \varphi_x + i\varphi_y = V_1 + iV_2.$$

8.2. Fluxos bàsics.

8.2.1. Superposició. Sumant diferents potencials complexos es poden descriure fluxos més sofisticats. Un exemple important s'obté sumant una font al punt $-a$ amb una pica al punt a amb $a > 0$:

$$\Phi(z) = k \operatorname{Log} \left(\frac{z+a}{z-a} \right) \sim k \operatorname{Log}(z+a) - k \operatorname{Log}(z-a).$$

Trobeu l'expressió de $\mathbf{V}$, V , φ i ψ . Dibuixeu les línies de corrent ($\psi = c$), vegeu la figura 8.5. ◁

Solució: $\Phi(z) = k(\ln \left| \frac{z+a}{z-a} \right| + i \arg \left(\frac{z+a}{z-a} \right)) = \varphi + i\psi$. La condició $\psi = c$ equival a que $\text{Im}(\frac{z+a}{z-a})/\text{Re}(\frac{z+a}{z-a})$ és constant. Però

$$\frac{z+a}{z-a} = \frac{(z+a)(\bar{z}-a)}{|z-a|^2} = \frac{|z|^2 - a^2 + a(\bar{z}-z)}{|z-a|^2} = \frac{|z|^2 - a^2 - 2ia y}{|z-a|^2}$$

i les corbes de flux venen donades per equacions de la forma $|z|^2 - a^2 = Cy$. O bé

$$x^2 + (y - C/2)^2 = a^2 + C^2/4$$

que són circumferències que passen pels punts $-a$ i a . Pel flux resulta

$$\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = k \left(\frac{1}{\bar{z}+a} - \frac{1}{\bar{z}-a} \right) = \frac{-2ka}{(\bar{z}-a)(\bar{z}+a)} = -2ka \frac{z^2 - a^2}{|z-a|^2 |z+a|^2}.$$

i

$$\mathbf{V} = -\frac{2ka}{|z-a|^2 |z+a|^2} (x^2 - y^2 - a^2 + 2xyi).$$

Tenim

$$V = \frac{2|ka|}{|z-a||z+a|}.$$

8.2.2. En l'exercici anterior, fem $a \rightarrow 0$ i $k \rightarrow \infty$ de manera que $2ka = \mu$ sigui finit. Vegeu que al límit obtenim el potencial complex $\Phi(z) = \mu/z$ que s'anomena doblet o dipol. Ve a ser una font i una pica separades per una distància infinitesimal. La quantitat $2\pi\mu$ s'anomena moment del doblet. Trobeu l'expressió de $\mathbf{V}$, V , φ i ψ . Dibuixeu les línies de corrent ($\psi = c$). ◁

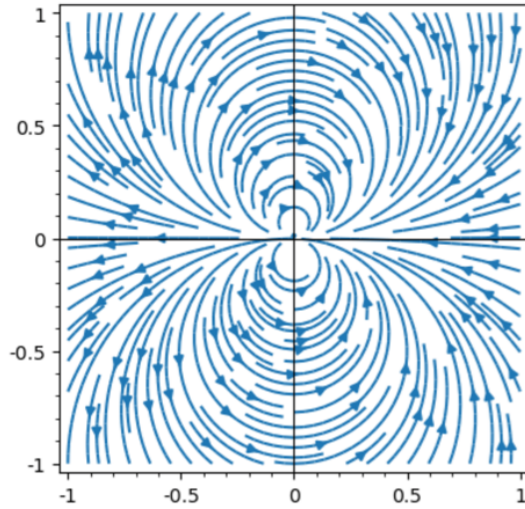
Solució: Fem el límit quan a tendeix a zero i $k = \mu/2a$. Tenim

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\mu}{2a} \text{Log} \left(\frac{z+a}{z-a} \right) = \frac{0}{0} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\mu (\text{Log} \left(\frac{z+a}{z-a} \right))'}{2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\mu}{2} \frac{z-a}{z+a} \frac{(z-a) - (-1)(z+a)}{(z+a)^2} = \frac{\mu}{z}.$$

Com que $\Phi(z) = \mu \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ resulta que $\varphi(x, y) = \frac{\mu x}{x^2+y^2}$ i $\psi(x, y) = -\frac{\mu y}{x^2+y^2}$. Les línies de flux ($\psi = c$) són les corbes de nivell de $y/(x^2+y^2)$, és a dir les donades per equacions $x^2 + y^2 + Cy = 0$ que podem escriure com $x^2 + (y + C/2)^2 = C^2/4$. Es tracta de circumferències amb centre a l'eix OY que passen per l'origen.

$$\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = -\frac{\mu}{z^2} = -\mu \frac{z^2}{|z|^4} = -\frac{\mu}{|z|^4} (x^2 - y^2 + 2ixy), \quad V = \frac{|\mu|}{|z|^2}.$$

El dibuix del flux és:



8.2.3. Font-remolí. *Estudieu el flux amb funció potencial $\Phi(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \text{Log}(z - a)$. Discutiu segons els valors de Γ (circulació o intensitat) i Q (potència). Feu dibuixos de les línies de camp segons els signes de Γ i Q .* ◁

Solució: Per simplificar l'estructura sigui $\lambda = \alpha + i\beta = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}$. Llavors

$$\Phi(z) = (\alpha \ln |z - a| - \beta \arg(z - a)) + i(\beta \ln |z - a| + \alpha \arg(z - a))$$

i

$$\varphi = \alpha \ln |z - a| - \beta \arg(z - a), \quad \psi = \beta \ln |z - a| + \alpha \arg(z - a).$$

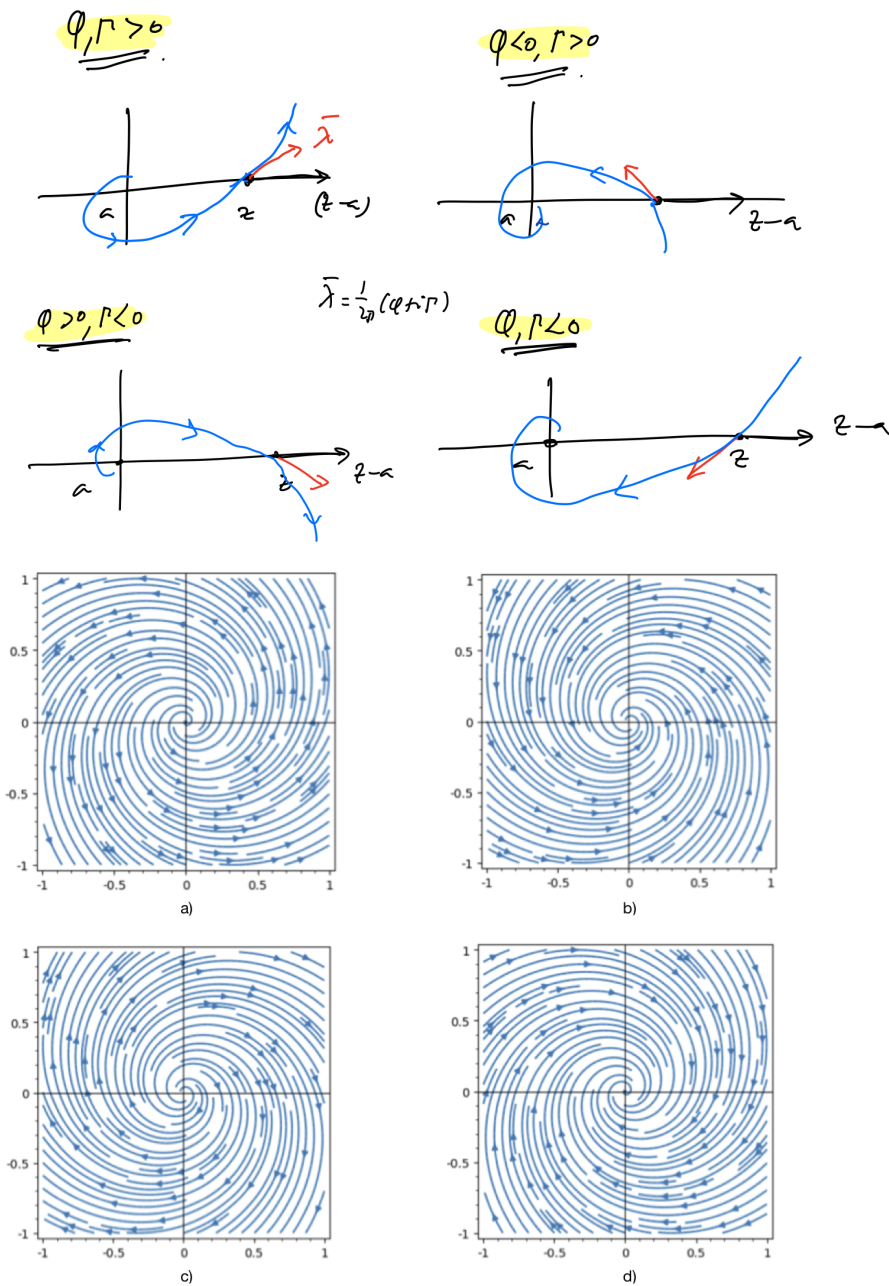
Com que $\Phi'(z) = \frac{\lambda}{z - a}$ resulta que

$$\oint_C \Phi'(z) dz = \Gamma + iQ$$

on C és un circuit al voltant de a recorregut en sentit antihorari. Pel camp tenim que

$$\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = \frac{\bar{\lambda}}{|z - a|^2} (z - a), \quad V = \frac{|\lambda|}{|z - a|}.$$

Veiem que la direcció de $\mathbf{V}$ en cada punt z s'obté girant i dilatant la direcció radial $z - a$ segons el que diu la constant $\bar{\lambda} = re^{-i\delta} = (Q + i\Gamma)/2\pi$. Vegeu les figures adjuntes.



8.3. Obstacles

8.3.1. Modifiquem el flux amb potencial donat per $f(z) = \text{Log}(z+2)$ que és una font sortint des del punt $z = -2$ (vist en un exemple anterior). Per això considerem la modificació

donada pel potencial

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \text{Log}(z+2) + \overline{\text{Log}\left(\frac{1}{\bar{z}} + 2\right)}.$$

a) Descomponeu Φ en fluxos coneguts.

b) Calculeu $\Phi'(z)$ i contrasteu-ho amb l'apartat anterior.

c) Vegeu que per z amb $|z|$ molt gran resulta $\Phi'(z) \approx \frac{1}{z+2}$ i que lluny de $z = -2$ el flux associat a Φ és com una font sortint de $z = -2$.

d) Mostreu amb un gràfic com eviten el disc unitari les línies de flux (feu servir `contour_plot` i `streamline_plot`). ◁

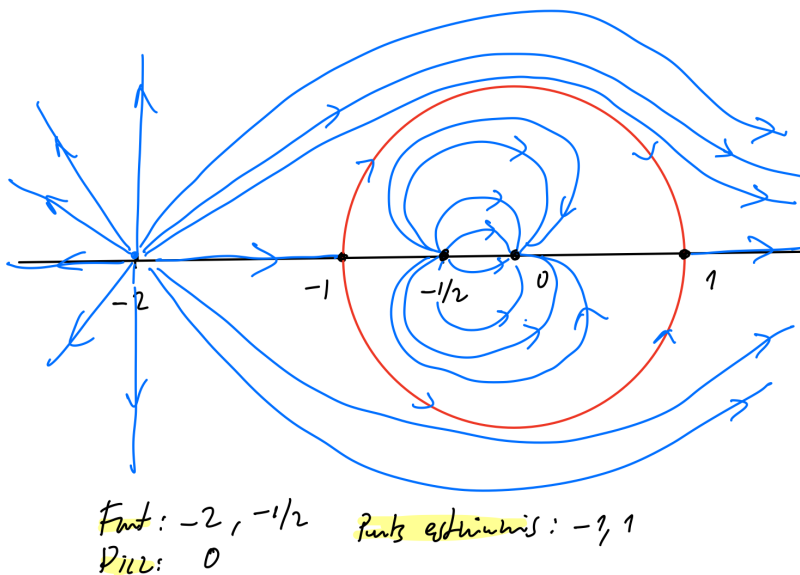
Solució: a) Abans de res observem que si $z = re^{i\theta}$ llavors $\overline{\text{Log}(z)} = \ln r - i\theta = \ln r + i(-\theta) = \text{Log}(\bar{z})$. Llavors $\overline{\text{Log}(1/\bar{z} + 2)} = \dots = \ln(2) - \text{Log } z + \text{Log}(z + 1/2)$ i

$$\Phi(z) = \text{Log}(z+2) + \text{Log}(z+1/2) - \text{Log}(z) + \ln(2).$$

Analitzem els quatre sumands

- $\text{Log}(z+2)$ és la font sortint original al punt -2 .
- $\text{Log}(z+1/2)$ és una font sortint al punt $-1/2$ dins de la circumferència invariant.
- $-\text{Log}(z)$ és una font entrant a l'origen.
- $\ln(2)$ és un terme constant que no afecta a les trajectòries (les corbes de nivell no canvien de forma, només de nivell d'energia).

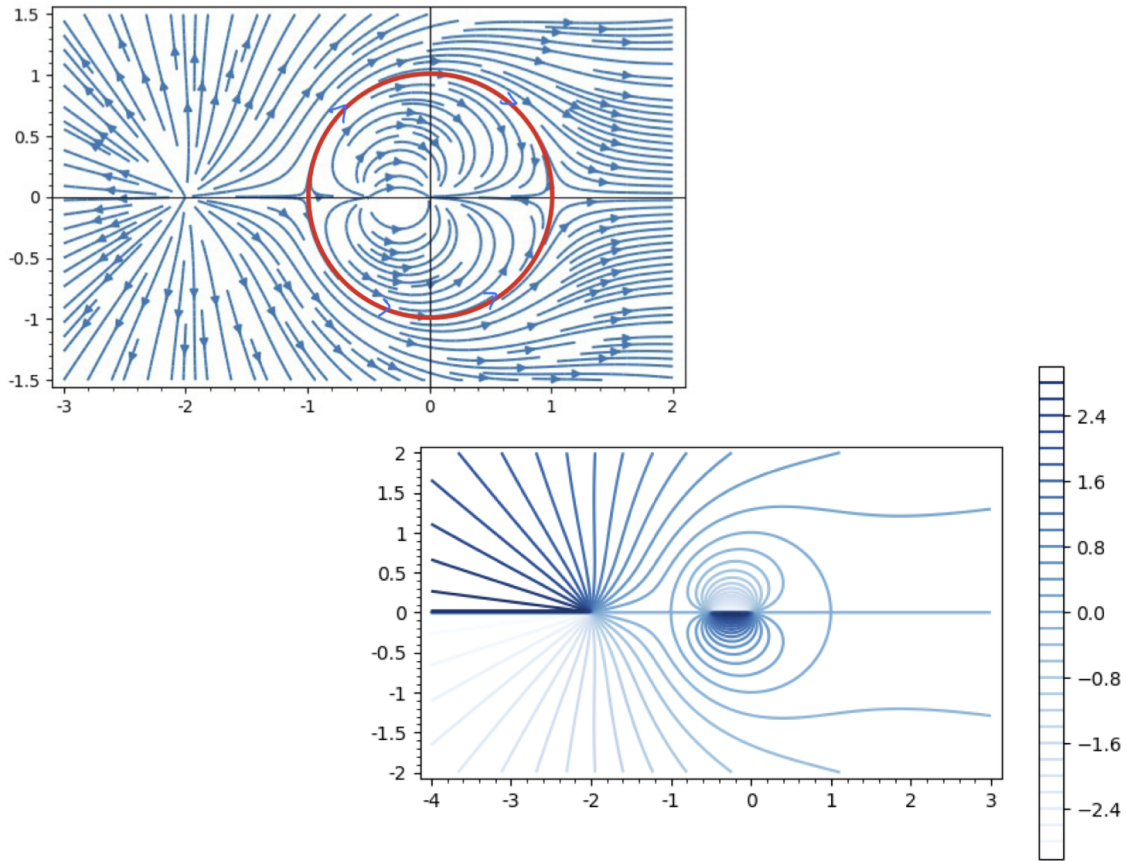
Podem fer un esquema gràfic com es veu a la figura:



b) $\Phi'(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+1/2} - \frac{1}{z}$ que correspon al que s'ha dit abans.

c) Quan $|z| \rightarrow \infty$ resulta que $\Phi(z) \approx \text{Log}(z+2)$ i la seva derivada s'acosta a $\frac{1}{z+2}$. Des de molt lluny el flux es veu com una font lineal des del punt $z = -2$.

d) El gràfics adjunts amb `streamline_plot` i amb `contour_plot` mostren clarament el comportament.



8.4. Expressió general (recapitulació).

8.4.1. Pels z on $V(z) = \overline{\Phi'(z)} = 0$ diem que hi ha un punt estacionari del corrent (per exemple és aquell punt d'un riu on una fulla petita s'ha quedat aturada però que al seu voltant circula l'aigua).

- Per $\Phi(z) = z^n$ el 0 és un punt estacionari d'ordre $n - 1$. Feu un dibuix amb les línies de flux i les línies equipotencials superposades per $n = 2, 3, 4$.
- Podeu deduir experimentalment quin angle formen les línies equipotencials i les línies de flux?
- Proveu que si un punt estacionari a és un zero d'ordre $n-1$ llavors les línies equipotencials i de corrent ($\varphi = \text{ct.}, \psi = \text{ct.}$) formen un angle $\pi/2n$ en el punt estacionari (feu-lo com