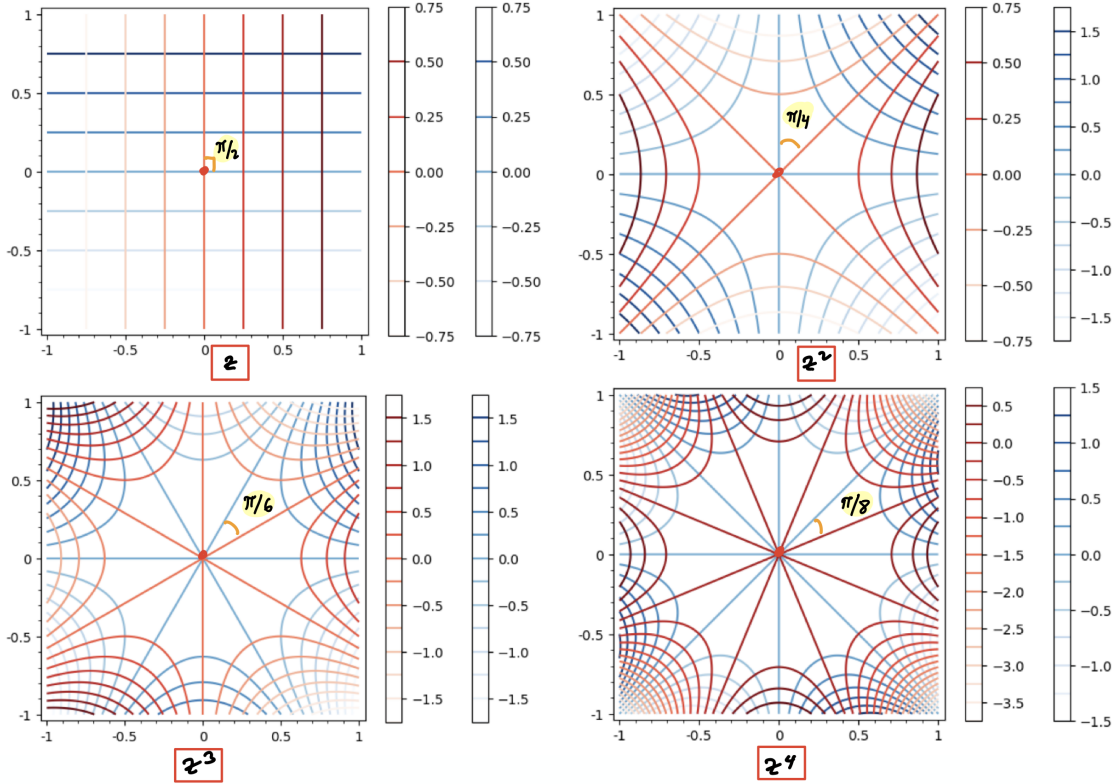


a mínim pel cas $\Phi'(z) = Cz^{n-1}, C \in \mathbb{C}$. Quin angle formen una línia de corrent i una línia equipotencial quan es creuen en un punt no estacionari? $\triangleleft$

Solució: a) Fem els gràfics de les corbes de nivell per φ (equipotencials, vermell) i per ψ (corrent, blau) per $z^n, n = 1, 2, 3, 4$:



b) Mirant els gràfics es dedueix que ha de ser $\pi/2n$.

c) Fem el cas $\Phi(z) = z^n$. Si $z = re^{i\theta}$ llavors $\Phi(z) = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$. Aleshores

$$\varphi(r, \theta) = r^n \cos n\theta, \quad \psi(r, \theta) = r^n \sin n\theta.$$

Les línies de corrent i les línies equipotencials que passen 0 són aquelles que $\varphi = 0 = \psi$ respectivament. És a dir, les equipotencials per 0 són aquelles que $\cos n\theta = 0$ que equival a $n\theta = \pi/2 + k\pi$ i les línies de corrent són les corbes donades per $n\theta = k\pi$.

- Equipotencials, $\varphi = 0$: $\theta = \pi/2n + k\pi/n, k = 0, \dots, 2n - 1$.
- Línies de corrent, $\psi = 0$: $\theta = r\pi/n, k = 0, \dots, 2n - 1$.

És clar que els angles entre línies de corrent i línies equipotencials consecutives és $\pi/2n$.

El cas general es pot fer amb arguments de continuïtat (no és simple).

En un punt no estacionari l'angle que formen les línies de flux i les equipotencials és $\pi/2$ (són ortogonals).

8.4.2. *Discutiu el moviment del fluid amb potencial complex igual a*

a) $\Phi(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \text{Log} \left(\frac{z-a}{z-b} \right)$ on $a, b \in \mathbb{C}$ i $Q, \Gamma \in \mathbb{R}$.

b) $\Phi(z) = az + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log}(z)$ on $a, \Gamma > 0$.

c) $\Phi(z) = az + \frac{Q}{2\pi} \text{Log}(z)$ on $a, Q > 0$.

d) $\Phi(z) = \frac{p}{2\pi z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log}(z)$ on $p, \Gamma > 0$. ◁

Solució:

a) Tenim pols a a i b on hi ha fonts-remolins. En efecte si $C = (\Gamma + iQ)/2\pi i$ llavors $\Phi' = C \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right)$ i si γ_a i γ_b són petits circuits al voltant de a, b respectivament

$$\oint_{\gamma_a} \Phi'(z) dz = \Gamma + iQ, \quad \oint_{\gamma_b} \Phi'(z) dz = -\Gamma - iQ.$$

Tenim fonts-remolins $(a; Q, \Gamma)$ i $(b; -Q, -\Gamma)$. Per exemple, si $\Gamma, Q > 0$ de a surt girant en sentit antihorari i a b arriba girant en sentit horari. Si $\Phi = \varphi + i\psi$ i $C = \alpha + i\beta$ llavors

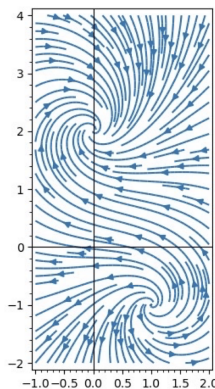
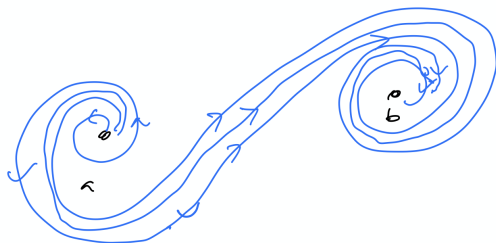
$$\varphi = \alpha \ln \left| \frac{z-a}{z-b} \right| - \beta \arg \left(\frac{z-a}{z-b} \right), \quad \psi = \alpha \arg \left(\frac{z-a}{z-b} \right) + \beta \ln \left| \frac{z-a}{z-b} \right|.$$

Si denotem $\frac{z-a}{z-b} = \rho e^{i\theta}$ les corbes de corrent $\psi = k$ venen donades per

$$\ln \rho = \frac{Q}{\Gamma} \theta + k$$

que són espirals logarítmiques entre a i b . També tenim que

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma - iQ}{-2\pi i} \frac{\bar{a} - \bar{b}}{(\bar{z} - \bar{a})(\bar{z} - \bar{b})}, \quad V = \frac{|\Gamma + iQ|}{2\pi} \frac{|a-b|}{|z-a||z-b|}.$$



$$\frac{3+2i}{2i} \cdot \log \left(\frac{z-1-i}{z-i} \right)$$