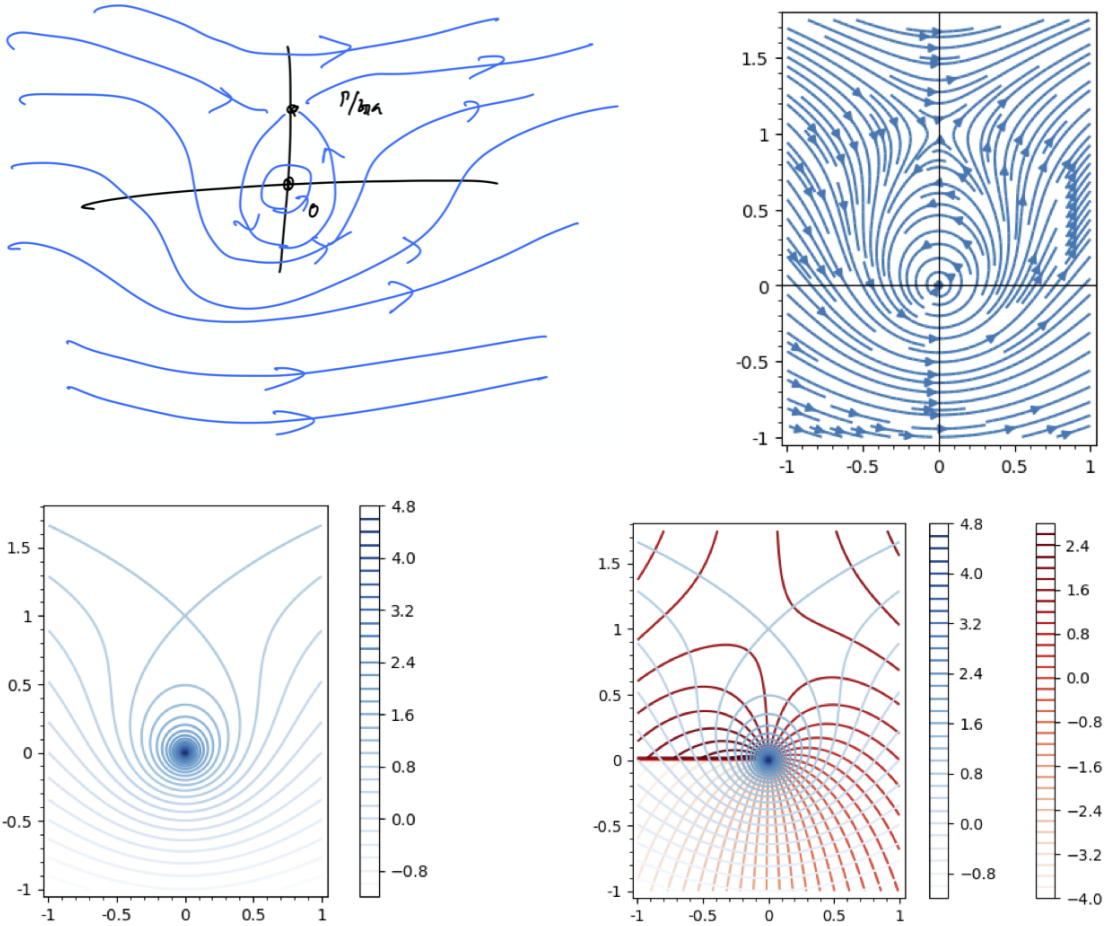


b) Aquí a $z = 0$ hi ha un remolí i quan $z \rightarrow \infty$ el flux potencial és com az , flux constant. De fet

$$\Phi'(z) = a + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}, \quad \mathbf{V} = a + \frac{\Gamma}{2\pi r} e^{i(\theta+\pi/2)}, \quad \mathbf{V}_\infty = a.$$

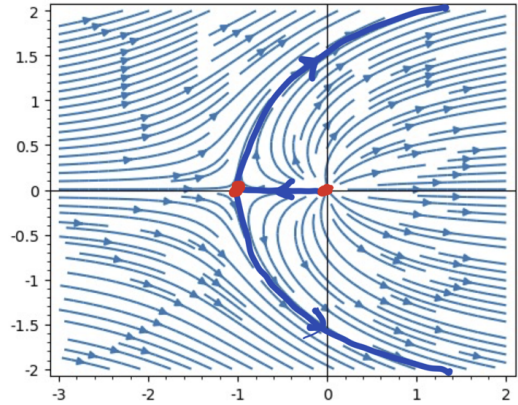
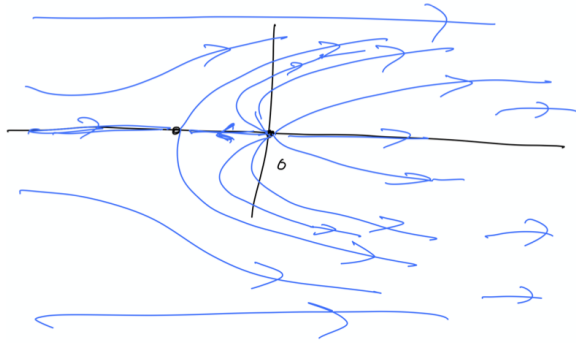
Veiem que a $z = \Gamma i / 2\pi a$ tenim un punt estacionari (on la velocitat es fa zero). Amb això podem fer un esboç del flux, vegeu la figura següent.



c) En aquest cas sumen un flux lineal (az) i una font/pica ($Q/2\pi \text{Log}(z)$). Tenim

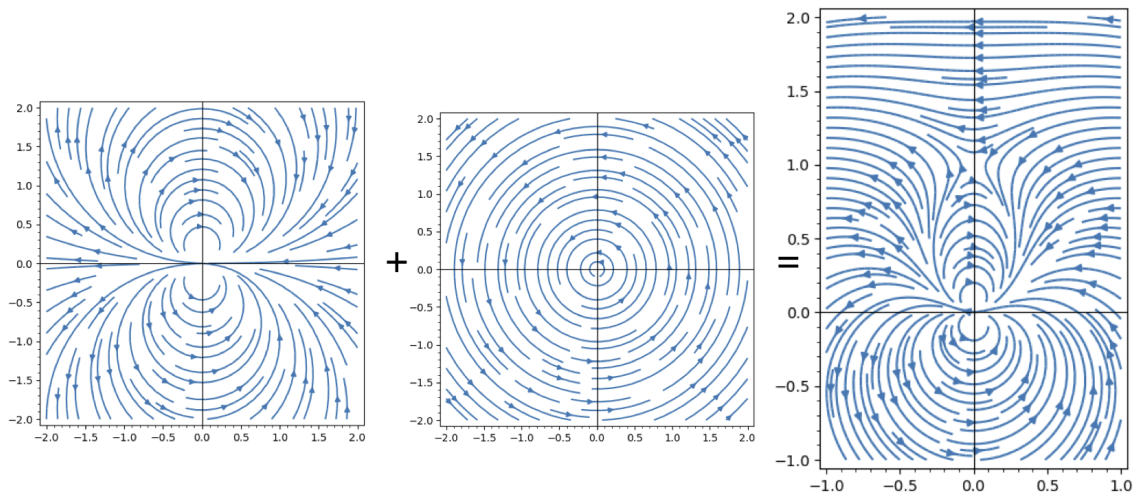
$$\Phi'(z) = a + \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z}, \quad \mathbf{V} = a + \frac{Q}{2\pi r} e^{i\theta}, \quad \mathbf{V}_\infty = a.$$

Vegeu la figura següent:

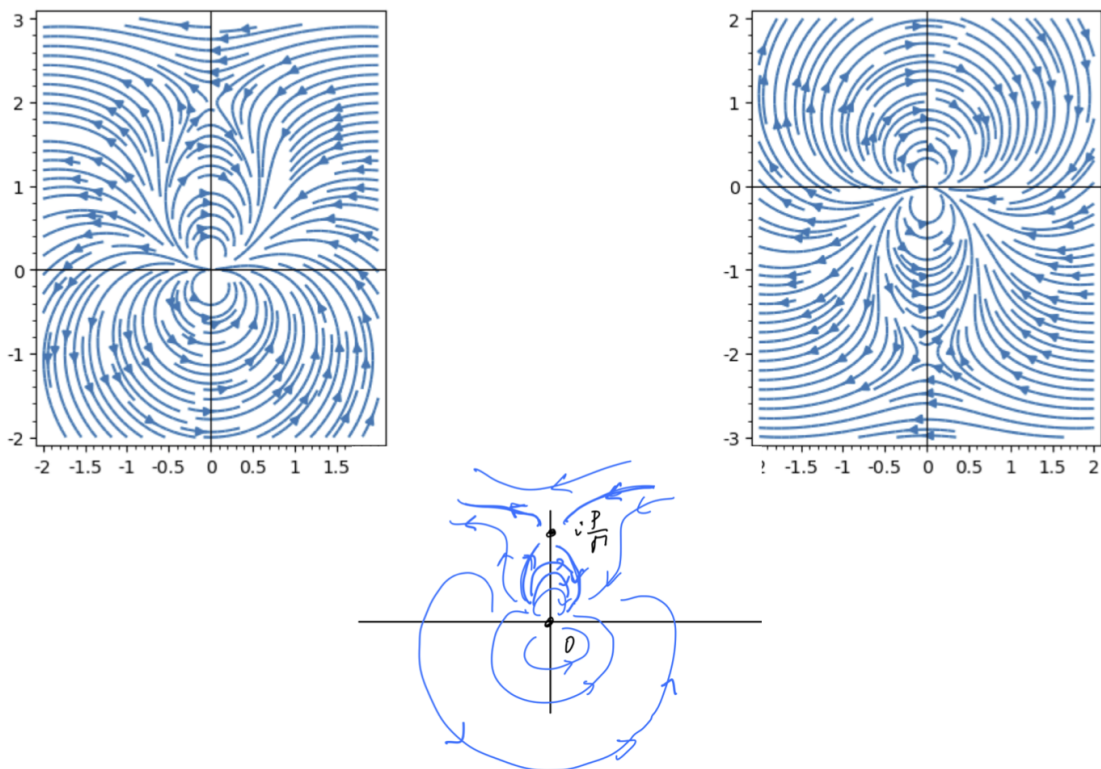


d) És la superposició d'un dipol i un remolí. Hi ha un pol a $z = 0$. Observem que $\Phi'(z) = -\frac{p}{2\pi} \frac{1}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}$. Llavors $\Phi'(z) = 0$ per $z = ip/\Gamma$. Vegeu les figures següents:

Suma d'un doblet i un remolí. Punt estacionari a ip/Γ :



Suma d'un doblet i un remolí. Punt estacionari a ip/Γ . A dalt o a baix segons els signes de



$\pi i \Gamma$:

8.4.3. *Discutiu el moviment del fluid amb potencial complex*

$$\Phi(z) = V_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log}(z), \text{ amb } \Gamma, V_0, R > 0.$$

Particularment estudieu els casos $\Gamma < 4\pi R V_0$, $\Gamma > 4\pi R V_0$ i $\Gamma = 4\pi R V_0$. Dibuixeu exemples de cadascun dels casos. ◁

Solució: És la superposició d'un flux lineal a l'infinit que 'supera' la circumferència $|z| = R$ i un remolí al zero. És un flux molt interessant ja que cobreix tots els possibles fluxos que tenen a $|z| = R$ com a línia de flux i a l'infinit tenen potencial complex que s'acosta a $V_0 z$ (veure Markushevich II, p. 193). Tenim

$$\Phi(z) = V_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + i \left(V_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \right).$$

Llavors

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= V_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi(x, y) &= V_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{aligned}$$

i les línies de flux venen donades per $V_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \beta$.

Quan $|z| = R$ resulta que $\psi = -\Gamma \ln R / 2\pi$ que és constant, llavors $|z| = R$ és una línia de corrent i el flux es pot pensar com un flux que circula al voltant de l'obstacle cilíndric donat per $|z| = R$. Ja hem dit que a l'infinit és el flux amb velocitat constant V_0 .

Els punts estacionaris o d'estancament es donen quan $\Phi'(z) = 0$ i això passa quan $\Phi'(z) = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} = 0$. Com que $z \neq 0$ així passa quan

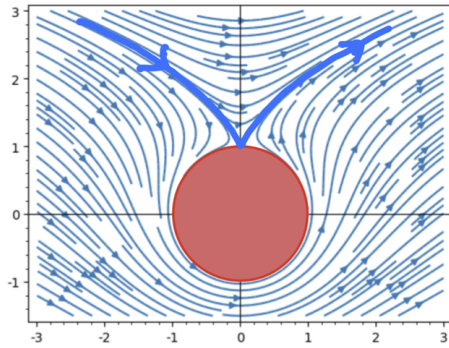
$$z = \frac{1}{4\pi V_0} \left(\pm \sqrt{16\pi^2 V_0^2 R^2 - \Gamma^2} + i\Gamma \right).$$

Tenim tres casos interessants

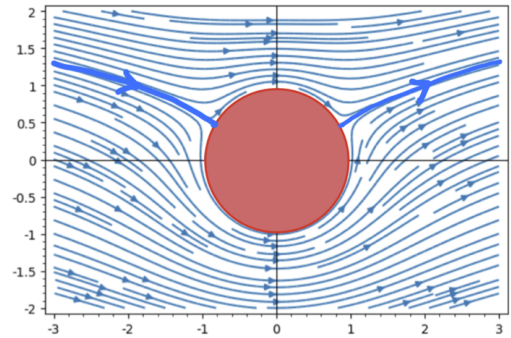
- $\Gamma = 4\pi V_0 R$. En aquest cas hi ha un únic punt estacionari a $z = i\Gamma / (4\pi V_0) = iR$ que està a la circumferència $|z| = R$.
- $\Gamma < 4\pi V_0 R$. Ara tenim com a punts estacionaris z_1, z_2 que són també a $|z| = R$, la seva part imaginària és $\Gamma / 4\pi V_0$ i les parts reals són simètriques respecte de l'eix OY .
- $\Gamma > 4\pi V_0 R$. Ara tenim un punt estacionari dins de $|z| = R$ i un altre fora, són

$$z_1, z_2 = \frac{1}{4\pi V_0} \left(\pm \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2 V_0^2 R^2} + \Gamma \right) i.$$

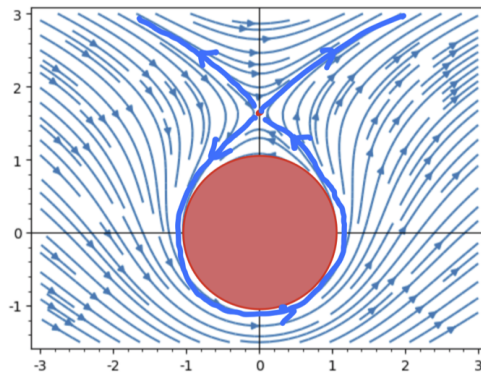
Podem veure els gràfics per cada cas a la figura següent:



$$\Gamma = 4\pi v_0, \quad \Gamma > 0$$



$$\Gamma < 4\pi v_0, \quad \Gamma > 0$$



$$\Gamma > 4\pi v_0, \quad \Gamma > 0$$

8.4.4. Doneu un potencial complex que tingui fonts-remolins $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k) : k = 1, \dots, n\}$ i velocitat $\mathbf{V}_\infty = V e^{i\alpha}$ a l'infinit. ◁

Solució:
$$\Phi(z) = V e^{-i\alpha} z + \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k + iQ_k}{2\pi i} \text{Log}(z - a_k).$$

