

## Problemes Aritmètica II

### Problemes Preparatoris

1. Calculeu la suma

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2 + n}.$$

en funció de  $m$ .

2. Demostreu que un  $n$ -agon (convex) té  $n(n-3)/2$  diagonals.
3. Volem trossejar una rajola de xocolata de mida  $n \times m$  i obtenir-ne els  $nm$  quadrats. Ho farem trencant les peces grosses en peces més petites, seguint les marques entre els quadradets. Demostreu que haurem de fer exactament  $nm - 1$  talls.
4. Demostreu que hi ha infinits primers que no acaben amb 1 (en base 10).

### Problemes d'Olimpíada

1. [XLIII 4] Sigui

$$\begin{aligned} S &= \frac{1 \cdot (n-2)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{(n-2) \cdot 1}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \sum_{j=2}^n \frac{(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)}. \end{aligned}$$

Demostreu que  $S = \frac{1}{6}$ .

2. [XLII 5] Trobeu una fórmula per calcular la suma

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n.$$

3. [LIV 3] Sigui  $(a_n)_{n \geq 1}$  una successió escricament creixent d'enters positius tals que per a tot  $n \geq 2017$  es compleix que  $a_n$  divideix  $(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$ . Proveu que existeix un enter positiu  $N$  tal que  $a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$  per a tot  $n > N$ .
4. [L 1] Sigui  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjunt dels  $n$  primers enters positius. Determineu, en funció de  $n$ , el nombre de progressions aritmètiques de tres termes, amb diferència positiva, que es poden formar amb els elements d'aquest conjunt.
5. [XXXII] Calculeu el màxim comú divisor de

$$\binom{n}{k}, \quad \binom{n+1}{k}, \quad \dots, \quad \binom{n+k}{k}$$

on  $n \geq k$  són nombres naturals.