

Problemes Combinatòria

Problemes Preparatoris

1. Si teniu dos conjunts finits A i B , digueu quin és el valor màxim i el valor mínim de $|A \cup B|$ i de $|A \cap B|$.
2. Determineu quants subconjunts hi ha d'un conjunt de n elements que tinguin un nombre senar d'elements, en funció de n .
3. Demostreu que, per a tot $n, m \geq 0$, tenim que

$$\sum_{i=0}^n \binom{m+i}{m} = \binom{n+m+1}{m+1}.$$

4. Calculeu la suma següent:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2.$$

en funció de n .

5. Considerem una successió c_n per $n \geq 0$ complint que $c_0 = 1$ i $c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}c_n$. Trobeu una fórmula tancada per c_n i comproveu que són tots enters.

Problemes d'Olimpíada

1. (LVI.4) Calculeu la suma següent:

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{n}{i} \binom{n}{j}.$$

2. (LIII.1) De quantes maneres diferents es pot expressar el nombre $n = 3499200$ com a producte de tres factors? Les representacions que es diferenciïn en l'ordre dels factors es consideraran diferents.
3. (LII.1) Direm que un nombre natural és ascendent si les seves xifres, escrit en base 10, compleixen, vistes d'esquerra a dreta, que cadascuna és més gran o igual que l'anterior i la més significativa no és zero.

Quants nombres ascendents de tres xifres hi ha? I de cinc xifres? I de k xifres?

4. (LVIII.1) Sigui $\mathcal{P}$ un polígon regular de n costats, $n \geq 6$. Trobeu el nombre de triangles que tenen vèrtexs en els vèrtexs del polígon i costats sobre les diagonals (no costats) de $\mathcal{P}$.
5. (XLIV.5) Un alfabet està constituït per tres lletres: I, X, V que s'escriuen amb barretes d'igual mida l. Si tenim n barretes i les utilitzem totes, quantes paraules diferents podem escriure? I si $n = 12$?
6. (LVIII.6) Volem pintar els nombres $1, 2, \dots, 2021$, cadascun de color blau o vermell, de manera que per cada conjunt de nombres consecutius la diferència entre la quantitat de nombres blaus i vermells (així com la diferència entre la quantitat de nombres vermells i blaus) sigui com a molt 2. De quantes maneres ho podem fer?