

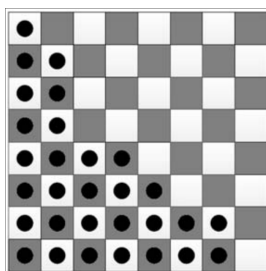
Problemes de jocs i invariants

Problemes Preparatoris

1. Tres granotes estan jugant a saltar unes per damunt de les altres. Cada granota pot saltar per sobre de qualsevol altra, sempre anant a parar a l'altre costat a la mateixa distància d'ella que abans (és a dir, al punt simètric al de partida respecte a la granota que s'ha saltat). Inicialment, les granotes ocupen posicions en els tres vèrtexs d'un quadrat. És possible que, durant el joc, una d'elles aparegui al quart vèrtex del quadrat?
2. L'Alba i el Bru estan jugant a un joc amb mongetes: d'una bossa amb n mongetes, cada jugador, en un moviment, pot treure d'una a quatre mongetes. Perd el jugador que es queda amb la bossa buida. Per a quins valors de n té l'Alba una estratègia guanyadora?
3. L'Arnau i la Berta estan jugant al següent joc: hi ha dues piles de monedes, amb n i m monedes cadascuna. Cada cop un dels jugadors pot treure la quantitat de monedes que vulgui, però només d'un pila. Perd qui ja no pot treure cap moneda. Podeu dir en funció de n i m quan té l'Arnau una estratègia guanyadora?
4. Es posen pedres distribuïdes en files de la següent manera: 1 a la primera fila, 3 a la segona, 5 a la tercera i 7 a la quarta. Dos jugadors, alternativament, poden a cada tirada agafar les pedres que vulguin d'una mateixa fila (n'han d'agafar almenys una). Guanya el jugador que agafa l'última pedra

Problemes d'Olimpíada

1. [LVI.6] En una convenció es troben $2n$ espies. A l'hora de sopar, seuen al voltant d'una taula rodona, però algunes parelles d'espies són rivals i volen enverinar-se entre ells. Si cada espia té com a molt $n - 1$ rivals, demostreu que es poden asseure a la taula sense que hi hagi dos rivals asseguts un al costat de l'altre.
2. [LV.3] Els números $1, 2, 3, \dots, 100$ estan escrits a la pissarra. S'elegeixen a l'atzar dos números a i b de la llista, s'esborren i s'escriu el número $a + b - 1$. Després de repetir aquesta operació 99 vegades, quin és el número que queda a la pissarra?
3. [LI.1] En Marc i la Clara han comprat una bossa de patates i volen repartir-se-les. La bossa és de 900 grams i cap de les patates pesa més de 450 grams. Demostreu que és possible repartir totes les patates de la bossa entre en Marc i la Clara de tal manera que o bé tots dos rebin el mateix pes, o bé que el qui rep més pes, en rebi com a molt 300 grams més que l'altre.
4. [LVIII.2] L'Alba i la Blanca juguen al joc següent. Hi ha dues piles de fitxes, inicialment amb 26 i 25 fitxes respectivament. Les jugadores s'alternen els torns, i a cada torn poden fer un dels moviments següents: treure una fitxa d'una de les piles, o bé treure una fitxa de cada pila, o bé moure una fitxa d'una pila a l'altra. Guanya la jugadora que deixa les dues piles sense fitxes. Demostreu que la jugadora que comença té una estratègia guanyadora.
5. [LVII.5] L'Anna i en Bernat juguen a un joc sobre un tauler d'escacs de dimensions 2020×2020 . Diem que una col·lecció de peces sobre el tauler està arraconada (a la cantonada inferior esquerra) si no hi ha cap casella buida tal que la casella immediatament al damunt o immediatament a la dreta contingui una peça, com es mostra a la figura.



Inicialment hi ha 2020 peces col·locades en una posició arraconada. En torns alternats, començant per l'Anna, cada jugador retira dues peces en caselles adjacents, amb la condició que la configuració restant segueixi sent arraconada. Perd el jugador que no pot fer cap moviment. Determineu quin dels dos jugadors guanyarà en funció de la posició inicial de les 2020 peces, suposant que tots dos juguen òptimament.