

Tallers de matemàtiques per a enginyers

Departament de Matemàtiques

Setembre 2022

1 Primera secció

Nombres, potències, arrels, nombres combinatoris, binomi de Newton. Polinomis, Ruffini.

1.- Opera dins els nombres reals i dóna el resultat exacte en la forma més simplificada possible de:

(a) $3 + 2 \cdot 4 - 63/7 + 4(345 - 98/7)$

(c) $3 + 2 \cdot 4 - 63/(7 + 4(345 - 98/7))$

(b) $(3 + 2 \cdot 4 - 63)/7 + 4(345 - 98/7)$

2.- Escriu en forma d'una sola potència:

(a) $2^6 \cdot 2^8$

(c) $3^4 \cdot 3^9$

(e) $\frac{4^5}{4^2}$

(g) $\frac{(-2)^7}{(-2)^3}$

(i) $[(-4)^3]^2$

(b) $5^4 \cdot 5^3$

(d) $\frac{3^9}{3^4}$

(f) $\frac{7^{10}}{7^6}$

(h) $\frac{3^5}{4^5}$

(j) $(2^{-3} \cdot 2^2 \cdot 2)^3$

3.- Expressa en forma d'una sola potència:

(a) $\frac{5^3 \cdot 5^{-4} \cdot 5^2}{5^4 \cdot 5^{-3}}$

(c) $\frac{3^3 \cdot 3^4}{5^{10} \cdot 5^{-3}}$

(e) $\frac{[(-3)^5 \cdot 2^5]^3}{(-2)^4 \cdot (-3)^4}$

(b) $\frac{5^3 \cdot 5^{-4} \cdot 5^{-2}}{5^2 \cdot 5^{-3} \cdot 5}$

(d) $\frac{(5^3 \cdot 3^2)^{-3}}{(3^{-2})^3}$

(f) $\frac{(2^3)^4 \cdot (3^6)^2}{(6^2)^3}$

4.- Expressa en forma d'una sola potència

(a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$

(c) $\left(\frac{4}{7}\right)^3 : \left(\frac{4}{7}\right)^4$

(b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$

(d) $\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6$

5.- Expressa en forma d'una sola potència:

$$(a) \left[\left(\frac{3}{4} \right)^5 \cdot \left(\frac{7}{3} \right)^5 \right]^{-2}$$

$$(c) \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^4}{\left(\frac{2}{3} \right)^{-3}}$$

$$(b) \left[\left(\frac{3}{4} \right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{-3} \right]^2 \cdot 4^4$$

$$(d) \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2}{\left(\frac{3}{2} \right)^5}$$

6.- Expressa en potències de 10

$$(a) 1\,000\,000$$

$$(d) 1000^5$$

$$(g) 0,001^{-3}$$

$$(b) \text{una mil.lèsima}$$

$$(e) 100000^{-4}$$

$$(h) 10^7/10^{-5}$$

$$(c) 0,0000001$$

$$(f) 0,001^4$$

7.- Opera dins els nombres reals i dóna el resultat exacte en la forma més simplificada possible de:

$$(a) \sqrt[898989]{(789077)^{898989}}$$

$$(e) \sqrt[77]{-23} \sqrt[77]{11}$$

$$(i) \pi^{1/7} \pi^2 \sqrt[7]{2\pi^6} / (\pi 2^{13/7})$$

$$(b) \sqrt[77]{23} \sqrt[77]{11}$$

$$(f) \sqrt[77]{-23} \sqrt[77]{-11}$$

$$(j) \frac{\sqrt{6} 2^{1/2} 3^{-2}}{4^{1/3} 2^{14/3}}$$

$$(c) 23^{1/77} 11^{1/77}$$

$$(g) \sqrt{2}^{\sqrt{2}} 2^{-\sqrt{2}}$$

$$(k) \left(-\frac{1}{3}\right)^{2003} \sqrt{3}^{2004} \sqrt[3]{3}^{3003}$$

$$(d) \sqrt[77]{-23} + \sqrt[77]{23}$$

$$(h) \pi^{1/7} \pi^2 \sqrt[7]{2\pi^6} / \pi \cdot 2^{13/7}$$

$$(l) \left(-\frac{1}{3}\right)^{2004} \sqrt{3}^{2003} \sqrt[3]{3}^{3004 + \frac{1}{2}}$$

8.- Opera dins els nombres reals i dóna el resultat exacte en la forma més simplificada possible de:

$$(a) \left(\left(\sqrt[5]{x^2} \right)^2 \right)^5$$

$$(b) \sqrt{8} - 2\sqrt{18} + \sqrt{32}$$

$$(c) \left[\left(\sqrt{a + \sqrt{a}} + \sqrt{a - \sqrt{a}} \right) \cdot \left(\sqrt{a + \sqrt{a}} - \sqrt{a - \sqrt{a}} \right) \right]^2$$

$$(d) 2^{\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + \frac{1}{5}\sqrt{75}}$$

$$(e) (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}) (\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{2})$$

$$(f) \sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{8}{27}}}$$

9.- Racionalitzeu els denominadors de les fraccions següents:

$$(a) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(c) \frac{a}{\sqrt[4]{a}}$$

$$(e) \frac{16}{2 + \sqrt{2}}$$

$$(b) \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$(d) \frac{x}{\sqrt[5]{x^3}}$$

$$(f) \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

10.- Desenvolupa els binomis següents utilitzant el mètode del binomi de Newton:

(a) $(x + 5)^3$

(c) $(4x^2 + 1)^6$

(e) $(a + 3b)^6$

(b) $(x^3 + 2x)^5$

(d) $(2x^2 - 5)^4$

(f) $(1/2 - x/3)^4$

11.- Quants termes té el desenvolupament de $(2x^2 + 3)^9$?

12.- Calcula directament (sense fer el desenvolupament complet) de:

(a) el cinquè terme de $(2x^2 + 3)^8$

(b) el terme central del desenvolupament de $(2a + 3b)^6$

13.- Troba les arrels dels polinomis següents:

(a) $x^2 + 2x + 1$,

(f) $x^4 + 4x^2 + 3$,

(b) $x^2 + 25$,

(g) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$,

(c) $x^2 + \sqrt{6}x + \frac{1}{3}$,

(h) $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$,

(d) $3x^2 + \sqrt{54}x + 1$,

(i) $12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$.

(e) $x^3 + 1$,

14.- Factoritzeu els polinomis anteriors en factors lineals (en cas de ser possible)

15.- Respon les qüestions següents:

(a) Són $x = 1$ i $x = -1$ arrels del polinomi $x^2 - 1$?

(b) Donat el polinomi $x^2 - 5x + 6$, quins dels nombres 1, 2, 3, 5 són arrels?

(c) Comprova si els polinomis següents tenen per factors els que s'indiquen i, en cas afirmatiu, troba l'altre factor del polinomi:

i. $x^{35} - 1$ té per factor $x - 1$

ii. $x^{35} + 1$ té per factor $x + 1$

iii. $x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 16$ té per factor $x - 4$

16.- El teorema del residu permet obtenir el residu de la divisió d'un polinomi per $x - a$ sense fer-la. Intenta aplicar-ho a aquests exercicis sense fer, per tant, la divisió:

(a) Quin és el residu de la divisió de $3x^3 - 4x^2 - 9x + 17$ per $x - 2$?

(b) Quin és el residu de la divisió de $x^{57} - x^{25} + 1$ per $x - 1$?

(c) El residu de la divisió de $3x^3 - 4x^2 - kx + 17$ per $x - 2$ és 5. Quan val k ?

(d) És exacta la divisió de $x^{10} - 1024$ per $x + 2$?

17.- El teorema del residu el podem utilitzar a l'inrevés: podem calcular el valor d'un polinomi sense necessitat de substituir els valors de la indeterminada. En concret, per a calcular $p(a)$ bastarà fer una divisió i llegir el residu.

Donat $p(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$, calcula, sense substituir, $p(1)$, $p(2)$, $p(5)$ i $p(-2)$

18.- Dividiu els polinomis següents

(a) $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ pel polinomi $x^3 + x^2 + x + 1$

(b) $4x^4 + x^2 + 2$ pel polinomi $x^2 + x + 1$.

19.- És el polinomi $x^2 + 4x + 3$ divisible per $x - 2$?

20.- Calculeu el polinomi $p(x)$ tal que

$$-2p(x) + 3q(x) - xr(x) = x^2 - 2$$

on $q(x) = x^2 + x + 4$ i $r(x) = 2x^3 - 4x - 3$

2 Segona secció

Fraccions algebraiques i desigualtats.

21.- Simplifiqueu $\frac{4x^2 - x^4}{x^2 - 4x + 4}$.

22.- Calculeu les operacions següents expressant el resultat com una fracció algebraica:

(a) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}$,

(b) $\frac{3}{x^2 + x + 1} + \frac{x^4 + 3}{x + 1}$,

(c) $\frac{x}{x^2 - 5x + 6} - \frac{2}{x - 2} + \frac{3}{x - 3}$.

23.- Calculeu les incògnites A, B, C, D que apareixen en les expressions algebraiques següents:

(a) $\frac{2x - 3}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}$,

(b) $\frac{x^3 + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}$,

(c) $\frac{x^3 + 1}{(x^2 + 1)(x - 2)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$.

24.- Expressiu les fraccions següents algebraiques com a suma de polinomis i fraccions simples:

(a) $\frac{x^4 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$,

(b) $\frac{x^3}{x^4 - 1}$.

25.- Resoleu les equacions algebraiques següents:

$$(a) \frac{3}{x^2 - 1} + \frac{5x}{x + 1} = \frac{2x}{x - 1} ,$$

$$(b) 2 - \frac{3x}{x + 1} = 0 ,$$

$$(c) \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} - 5 = x^2 - 1 ,$$

$$(d) \frac{5x - 2}{8} + \frac{1 - 2x}{4} = \frac{3x + 2}{8} - \frac{4 - 3x}{2} ,$$

$$(e) \frac{3x}{8 + 4x} = \frac{x - 2}{x} ,$$

$$(f) \frac{(x + 5)^2}{(2x - 3)^2} = 1 ,$$

$$(g) \frac{(x - 1)(x - 2)}{1 + \frac{x - 2}{1 - \frac{x - 3}{x}}} = 3 ,$$

$$(h) \frac{x}{x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1} ,$$

$$(i) \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x - 1} = 4(x + 1) .$$

26.- Resoleu les equacions següents irracionals:

$$(a) \sqrt{x + 1} = \frac{1}{2} ,$$

$$(b) x - \sqrt{25 - x^2} = 1 ,$$

$$(c) \sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x} ,$$

$$(d) \sqrt{2x - 1} + 2 = x ,$$

$$(e) \sqrt{2x - 4} - \sqrt{3x - 12} = \sqrt{5x - 16} ,$$

$$(f) \frac{1}{1 - \sqrt{x}} = 1 ,$$

$$(g) \sqrt{x + 1} = \sqrt{x^2 - 3} .$$

27.- Resoleu les desigualtats següents:

$$(a) 3x - 4 > 0 ,$$

$$(b) 2t + 7 < 0 ,$$

$$(c) -4x + 5 \geq 0 ,$$

$$(d) \frac{3}{4}y + 3 > 5 ,$$

$$(e) 8x - 1 < 9x + 3 ,$$

$$(f) -\frac{1}{3}z - 2 \leq -1 ,$$

$$(g) \frac{13x + 47}{24} + \frac{7x + 26}{21} \geq \frac{3x - 5}{56} ,$$

$$(h) \frac{13x - 3}{15} + \frac{x + 4}{35} > 15 - \frac{x}{25} ,$$

$$(i) 5x + \frac{2}{5} \geq 4x + 3 \text{ i } \frac{3x}{4} - 1 < \frac{5x}{12} + 10 ,$$

$$(j) 2x + 1 > x - \frac{3}{2} \text{ i } 2x - 1 < 1 - 3x ,$$

$$(k) (x + 1)(x - 3) > 0 ,$$

$$(l) x^2 - 4 \leq 2 ,$$

$$(m) \frac{x + 1}{x^2 - 4} < 0 ,$$

$$(n) 2x - 1 > 5x - 7 \text{ i } x^2 - x \geq (x - 1)(x + 2)$$

$$(o) x^2 - 3x < -5 ,$$

$$(p) x^2 - 4x \leq 0 ,$$

$$(q) 3x^2 + 6x + 3 < 0 \text{ i } 3x + 5 > 2x - 4 .$$

28.- Pregunta: És veritat que $\sqrt{x^2} = x$ per a tot $x \in \mathbb{R}$?

29.- Calculeu $|5 - 1| - (|15 - 4| - |2 - 41| + |9 - 2| - |2 - 5|)$.

30.- Resoleu les equacions següents en les que intervé el valor absolut:

- (a) $|x - 1| \leq 3$, (d) $3 \leq |x| \leq 4$,
 (b) $|3 - |x|| < 3$, (e) $|x + 1| \leq |x|$,
 (c) $2x + 1 - |x| > x$, (f) $|x^2 - 4| \geq 1$.

31.- Representeu gràficament els subconjunts següents de \mathbb{R}^2 :

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$, (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq |y|\}$,
 (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < 1\}$, (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > 2\}$.

3 Tercera secció

Exponencial i logaritmes. Trigonometria. Equacions trigonomètriques.

Recordatori

- Exponencial i logaritme: si $a > 0$ llavors $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$. Quan la base és e posarem simplement $\log y$.
- Propietats de l'exponencial i el logaritme:
 1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^0 = 1$
 2. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a 1 = 0$
 3. $c \cdot \log_a x = \log_a(x^c)$
- Per resoldre equacions recordem que $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ i que $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$
- Teorema del sinus: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.
- Teorema del cosinus: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
- Funcions trigonomètriques d'una suma:
 1. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ i
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.
 2. $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$,
 3. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ i
 $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$.

32. Resoldre les equacions exponencials següents:

- (a) $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$, (f) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$,
 (b) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$, (g) $3^x + 3^{1-x} = 4$,
 (c) $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$, (h) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$,
 (d) $2^x - 5 \cdot 2^{-x} + 4 \cdot 2^{-3x} = 0$, (i) $9^x - 3^x = 3(1 + 3^{x-1})$,
 (e) $1 + 2 + 4 + \dots + 2^x = 16383$, (j) $9^x + 81 = 2 \cdot 3^{x+2}$.

33. Resoldre els sistemes d'equacions següents:

(a) $2^x + 5^y = 9$
 $2^{x+2} - 5^{y+1} = -9$,

(c) $2^x + 3^y = 7$
 $2^{x+1} - 3^{y+1} = -1$,

(b) $3^x + 3^y = 36$
 $3^{x+y} = 243$,

(d) $5^{x+y} = 15625$
 $5^{x-y} = 25$.

34. Troba, sense fer servir la calculadora, els logaritmes següents:

(a) $\log_7 49$

(d) $\log_{11} \sqrt[3]{121}$

(g) $\log_{\frac{1}{5}} 125$

(b) $\log_3 729$

(e) $\log_2 256$

(h) $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt[7]{216}$

(c) $\log_9 \frac{1}{9}$

(f) $\log_{\frac{1}{3}} 27$

(i) $\log_{225} 15$

35. Calcula x en cadascuna de les igualtats següents

(a) $\log_3 x = 1$

(c) $\log_x 6^3 = -3$

(e) $\log x = -\frac{2}{3}$

(b) $\log_x \frac{1}{25} = -2$

(d) $\log_{10} x = \frac{1}{2}$

(f) $\log_{\sqrt{7}} x = -2$

36. Si $\log_{10} 3 = m$, expressa, en funció de m ,

(a) $\log_{10} 8100$

(c) $\log_{10} \sqrt[7]{0.27}$

(e) $\log_{10} 0.3$

(b) $\log_{10} \sqrt{3000}$

(d) $\log_{10} \frac{1}{729}$

(f) $\log_{10} 0.\widehat{3}$

37. Resol les equacions amb logaritmes decimals següents:

(a) $5 \log_{10} x - \log_{10} 32 = \log_{10}(x/2)$,

(b) $2 \log_{10} x - \log_{10}(x - 16) = 2$,

(c) $(x^2 - x - 3) \log_{10} 4 = 3 \log_{10} \frac{1}{4}$,

(d) $(2 + x) \log_{10} 2^{2-x} + \log_{10} 1250 = 4$,

(e) $2 \log_{10} x = \log_{10}(x/2) - 1/2$.

38. Determina la solució de les equacions logarítmiques següents,

(a) $\log_2 x^2 - \log_2(x - \frac{3}{4}) = 2$,

(b) $2(1 - \log_{10}(2x + 3)) = 4 \log_{10} \sqrt{5x - 3}$,

(c) $\frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2$.

39. Resoldre les equacions logarítmiques següents:

(a) $3 \log_x 5 = 1 + 2 \log_5 x$,

(b) $\log_x 10 = 5 - 4 \log_{10} x$,

(c) $\log_2(16 - x^2) = \log_2(5x - 4) + 1$,

(d) $(\log(x - 2) + \log(2x - 1)) \log_5 e = 1$.

40. Les puntes de les branques d'un compàs estan a 8 cm. i cada branca medeix 15 cm. Quin angle determina aquest compàs?

41. Resoleu les equacions trigonomètriques següents, expressant-ne, en cas de tenir-ne, totes les solucions en radians:

(a) $\sin(x) = -\sqrt{3}/2$,

(b) $\cos(x) = -\sqrt{2}/2$,

(c) $\tan(x) = -\sqrt{3}$,

(d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(x) + \cos(x)) = -1$,

(e) $\sin^2(x) + \sin(x) = 2 + \cos^2(x)$,

(f) $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = 2$.

42. Coneguda la raó trigonomètrica que es dona, calculeu les altres (suposeu tots els angles aguts).

(a) $\sin x = 0.3$,

(c) $\cos x = 0.54$,

(e) $\tan x = 2.3$,

(b) $\tan x = 5$,

(d) $\sin x = 2/3$,

(g) $\cos x = \sqrt{5}/3$.

43. Considereu un triangle tal que $\sin B = \frac{1}{5}$, $\cos A = \frac{2}{3}$ i $a = 2\sqrt{5}$. Calculeu b, c i $\sin C$.

44. Resoleu el triangle ABC sabent que $a = 8$, $b = 7$ i $c = 9$.

45. Verifica la identitat

$$\frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2}{\sin x}.$$

46. Les equacions trigonomètriques següents tenen solució immediata. Expressa, en cada cas, totes les solucions.

(a) $\tan x = -\sqrt{3}$

(b) $\sec x = -2$

(c) $\cot x = -1$

(d) $\csc x = 2$

47. Comprova que les igualtats següents són identitats

(a) $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$

(b) $\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} = 2 \sec^2 x$

(c) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha \cot \beta - 1}$

48. Calculeu

(a) $\sin(\arcsin(4/5))$,

(b) $\cos(\arctan(12/5))$,

(c) $\sin(\arctan x)$ en termes de x ,

(d) $\tan(\arccos x)$ en termes de x .

4 Quarta secció

Progressions i matrius

49.- Escriu els primers 8 termes d'una progressió aritmètica pels casos següents:

(a) $a_0 = 2$ i $d = 3$.

(b) $a_0 = 2\sqrt{a}$ i $d = a^{1/2}$ amb $a \geq 0$ fix.

50.- Calculeu la suma dels primers 50 nombres naturals.

51.- Calculeu la suma dels 20 nombres naturals parells més petits.

52.- Les edats de 4 germans formen 4 termes consecutius d'una progressió aritmètica. La suma d'aquests 4 valors és 32. Obtingueu les edats suposant que sabeu que el gran té 6 anys més que el més petit.

53.- Calculeu el terme nové a_8 d'una progressió geomètrica de raó $r = 1/3$ i primer terme $a_0 = 9$.

54.- En una progressió geomètrica es coneix $a_1 = 1/3$ i $r = 3$. Troba els termes cinquè i dotzè.

55.- Estableix l'expressió del terme general i troba la raó de la progressió geomètrica en que $a_1 = 3$ i $a_{11} = 81$.

56.- En una progressió geomètrica es coneixen les dades següents, trobeu el que se us demana:

(a) Dades: $a_0 = 3, r = 4$. Es demana: a_4 i $S_4 = a_0 + \dots + a_4$.

(b) Dades: $a_7 = \frac{7}{125}, r = \frac{1}{5}$. Es demana: a_0 i S_7 .

57.- Troba el producte de les sis primeres potències naturals de base 2.

58.- Calcula la suma de les deu primeres potències naturals de base 10.

59.- Determina tres nombres en progressió geomètrica tals que la seva suma és 42 i el seu producte és 512.

60.- Trobar la suma dels (infinit) termes de cada una de les progressions geomètriques següents:

(a) $3, 1, 1/3, 1/9, \dots$

(b) $6, 3, 3/2, 3/4, \dots$

(c) $1, 1/10, 1/100, 1/1000, \dots$

61.- La suma dels (infinit) termes d'una progressió geomètrica decreixent és 2 i el primer terme és $\frac{1}{2}$. Calculeu-ne la raó.

62.- Feu, en cas de ser possible, els càlculs següents:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2$.

(j) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$.

(k) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^7$.

(l) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(m) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

63.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ i la matriu $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Calculeu la segona fila de AB de dues maneres diferents: com un producte de matrius CB (per una matriu C convenient) i com a combinació lineal de les files de la matriu B .

(b) Calculeu la segona columna de AB de dues maneres diferents: com un producte de matrius AD per una matriu D convenient, i com a combinació lineal de les columnes de la matriu A .

64.- Calculeu els determinants següents

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

65.- Calculeu, en cas de ser possible, la inversa per les matrius:

$$(a) \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5 Cinquena secció

Equacions lineals. Rectes i plans.

66.- Resoleu els sistemes següents,

$$(a) \begin{cases} -3x + 2y = 4 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x - y + z + t = 4 \\ 2x + y - 3z + t = 3 \\ -3y + 5z + t = 5 \end{cases} .$$

$$(b) \begin{cases} 2x + 3y - 5z = -14 \\ x + y - z = -3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 7 \\ 7x - 8y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \\ -x + 17y - 16z = 15 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

67.- Estudieu segons els valors dels paràmetres si el sistema té solució o no en té, i en cas de tenir-ne, si és única o no n'és.

$$(a) \begin{cases} mx + 2y = 4 \\ mx + ny = 3 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y + 2z = a \\ x - z = b \\ 2x + y + z = c \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x + y + z = 2 \\ ax + by + z = 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 3x + 10y + 4z = 0 \\ ax + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ (a - 2)x - 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} mx + y = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$$

- 68.-** Resoleu els sistemes de l'exercici anterior pels valors dels paràmetres que feien que el sistema tingués una única solució (SCD).
- 69.-** Trobeu un vector perpendicular al vector $(2, -3, 1)$.
- 70.-** Escriviu de diferents maneres la equació de la recta que passa pel punt $(1, 1, 1)$ i té com a vector director $(1, -1, 0)$.
- 71.-** Trobeu la distància entre el punt $(1, 1, 1)$ al punt $(2, 3, -4)$.
- 72.-** Trobeu en el pla real \mathbb{R}^2 una recta paral.lela a $x + 1 - y = 0$.
- 73.-** Trobeu en \mathbb{R}^2 una recta perpendicular a $x + 1 - y = 0$.
- 74.-** Trobeu en \mathbb{R}^2 l'equació de la recta perpendicular a $3x + 2y = 3$ i que conté el punt $(3, 0)$.
- 75.-** Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $(1, 0, 1)$ i conté la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}.$$

- 76.-** Trobeu la distància entre el punt $(1, 1, 1)$ i el pla $x + y + z + 3 = 0$.
- 77.-** Calculeu la intersecció del pla $x + y - z + 1 = 0$ amb el pla $2x + z + 5 = 0$.
- 78.-** Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $(1, 0, 1)$ i és perpendicular a la recta $\frac{x-4}{1} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-81}{-1}$.
- 79.-** Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $(1, 1, 1)$ i és paral.lel al pla $3x + 5y - 7z + 9 = 0$.
- 80.-** Donades la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ i la recta $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$, trobeu l'equació del pla que passa per l'origen de coordenades i és paral.lel a les dues rectes.
- 81.-** Trobeu la distància entre els plans: $x + y - z + 5 = 0$ i $x + y - z - 1 = 0$.
- 82.-** Considerem les rectes $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ i $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$. Estudieu la posició relativa entre ambdues, i calculeu-ne la distància entre elles.

6 Sisena secció

Funcions. Límits i derivades de funcions.

- 83.-** Trobeu el domini i la imatge de $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
- 84.-** Trobeu el domini de $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+2)}$. Pertany 0 a la imatge? Indiqueu on és positiva i negativa la funció.
- 85.-** Estudieu el domini, la imatge i les simetries de $f(x) = \sqrt{\cos x}$. Si és periòdica doneu el període mínim.

86.- Trobeu el domini i la paritat de $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

87.- Trobeu el domini i la imatge de $f(x) = \sqrt{\arccos(x-1)}$.

88.- Trobeu una expressió més senzilla per a la funció $f(x) = \tan(\arcsin x)$. Doneu també el seu domini, imatge i simetria.

89.- Calculeu els límits següents:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 14x^2 + 12x}{x^3 - 10x^2 + 27x - 18}$,

(c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$,

(d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$,

(e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$.

90.- Calculeu

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + e^{1/x}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - 3x^3 + 4)^{\frac{1}{(x-1)^4}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^5 - 2)^{\frac{-2}{(x-1)^3}}$.

91.- Calculeu

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - x^3 - 5x^2}{2x^2 + 3x - 7}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{3x^3 + 2x - 4}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 - 7x - 3}{3x^2 + 5x - 6}$,

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} + x)$.

92.- Trobeu les derivades de les funcions següents:

(a) $f(x) = 5x^7 - 3x^4 + 2x + 1$

(b) $f(x) = (x^5 + 5x + 7)^{15}$

(c) $f(x) = (x^2 - x + 2)e^x$

(d) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 5}$

(e) $f(x) = 4^x - \log_7 x$

(f) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 7x - 2}$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

(h) $f(x) = e^x \log x$

(i) $f(x) = (2x^3 - x)^5$

(j) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + x^4}{e^x}$

(k) $f(x) = x \log x - x$

(l) $f(x) = \sqrt[5]{4x^2 - 3}$

(m) $f(x) = 4 \sqrt[13]{3x^2}$

(n) $f(x) = \frac{\sqrt[7]{x^2}}{\log x}$

(o) $f(x) = x^{1.3}$

93.- Calculeu les funcions derivades de les funcions següents:

- (a) $f(x) = 5 \tan(x) + \sqrt{x}$ (b) $f(x) = x^2 \sin x \tan x$
(c) $f(x) = \tan(3x^2 + x + \cot x)$ (d) $f(x) = 2^x \cot x$
(e) $f(x) = \frac{e^x}{\arcsin x}$ (f) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$
(g) $f(x) = \sqrt{\arccos x}$ (h) $f(x) = \log \cos x$
(i) $f(x) = \log(\arctan x)$ (j) $f(x) = \arccos \sqrt{x}$
(l) $f(x) = \arctan x + x^3$ (m) $f(x) = 3\sqrt{x} \arccos x$

94.- Fent servir derivació logarítmica, calculeu la funció derivada de les funcions següents,

- (a) $f(x) = (\log x)^{\ln x}$ per a $x > 1$
(b) $f(x) = (3x)^x$, per a $x > 0$
(c) $f(x) = (\cos x)^{3x}$, per a $\cos x > 0$

95.- Trobeu l'equació de la recta tangent de la funció $y = \cos x$ en el punt $x = \pi/6$.

96.- Donada la corba de l'equació $f(x) = \arccos x$ i la recta $y = -x + b$, trobeu el valor de b per a que la recta sigui tangent a la corba. Determineu també el punt de tangència.

97.- Determineu l'equació de la recta tangent a la corba de la funció $f(x) = \cos x$ en el punt d'abcisa $x = 0$.

98.- Calculeu l'equació de la recta tangent a la circumferència $x^2 + y^2 - x + 5y = -4$ en el punt $P = (2, -3)$

7 Setena secció

Dibuix de gràfiques de funcions. Màxims i mínims.

99.- Elaboreu les gràfiques de les funcions següents, indicant el domini, la taula de variació, els intervals de creixement i decreixement, els màxims i els mínims locals, els intervals de concavidad, i els possibles punts d'inflexió.

- (a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ (g) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$
(b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7x + 1$ (h) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$
(c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 12x + 2$ (i) $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$
(d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$ (j) $f(x) = 2x\sqrt{x + 3}$
(e) $f(x) = \frac{2x}{x - 1}$ (k) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$
(f) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 2}$

100.- Dibuxeu la gràfica de $f(x) = |x^2 - 4x|$ a partir de la paràbola $f(x) = x^2 - 4x$

- 101.-** Determineu el valor de les constants a i b per a que la funció definida per $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tingui un extrem relatiu al $(2, 3)$.
- 102.-** Per a cadascuna de les funcions donades a continuació, determineu els extrems absoluts de f en l'interval donat.
- (a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ en $[-3, 2]$
 (b) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ en $[-5, 4]$
 (c) $f(x) = (x + 1)^{\frac{2}{3}}$ en $[-2, 1]$
 (d) $f(x) = 1 - (x - 3)^{\frac{2}{3}}$ en $[-5, 4]$.
- 103.-** Es disposa d'una cartolina de 50 cm. de costat i es vol fer una caixa sense tapa retallant quadrats iguals a les cantonades (de la cartolina) i doblegant els costats. Quina ha de ser la longitud del costat del quadrat que es retalla per a que el volum de la caixa sigui màxim?
- 104.-** Tres quadrats grans de metall, cadascun de 100 cm. de costat, tenen retallats de les seves cantonades quatre petits quadrats. Els dotze petits quadrats resultants han de ser de la mateixa grandària. Les tres peces grans en forma de creu es dobleguen i se solden per a formar caixes sense tapa, i els dotze quadrats petits s'usen per a formar dos cubs petits. De quina longitud de costat s'han de retallar els quadrats petits per a maximitzar el volum de les cinc caixes?
- 105.-** Un filferro de 100 cm. de longitud es talla en dues parts, una es doblega per a formar un cercle i l'altra per a un triangle equilàter. On s'ha de fer el tall per a maximitzar la suma de les àrees del triangle i del cercle? On s'ha de fer el tall per a minimitzar la suma de les àrees?
- 106.-** Trobeu les dimensions del rectangle d'àrea màxima que es pot inscriure en l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ (suposeu que el rectangle té els costats paral·lels als eixos).
- 107.-** Entre tots els cilindres circulars rectes de volum fix V , trobeu el de menor superfície (incloent les superfícies de les cares inferior i superior).
- 108.-** Determineu les dimensions del cilindre circular recte de volum màxim que es pot inscriure en una esfera de radi a .
- 109.-** Determineu les dimensions del con circular recte de volum màxim que es pot inscriure en una esfera de radi a (el volum d'un con circular és $\pi hr^2/3$, on r és el radi de la base i h l'alçada).

8 Vuitena secció

Càlcul de primitives. Àrees i volums

- 110.-** Calculeu les primitives següents (canvi de variable):

(a) $\int (7x + 5)^8 dx$

(b) $\int 5xe^{3x^2+4} dx$

(c) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

(d) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

111.- Calculeu les primitives següents (per parts):

(a) $\int x \sin x dx$

(b) $\int (x^2 - 3x + 2)e^x dx$

(c) $\int x^2 \ln x dx$

(d) $\int \arcsin x dx$

112.- Calculeu les primitives següents (racionals):

(a) $\int \frac{3x^2+8x-1}{x+2} dx$

(b) $\int \frac{2x^2+9x-1}{x^2+2x-3} dx$

(c) $\int \frac{3x-10}{x^2+2x+1} dx$

(d) $\int \frac{x^2+4x+4}{x^2+2x-3} dx$

113.- Calculeu les primitives següents:

(a) $\int (2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x}) dx$

(b) $\int \frac{x^3+1}{x^5} dx$

(c) $\int \sin x \cos x dx$

(d) $\int \frac{3x^2}{(x^3+1)^2} dx$

(e) $\int x^2(1+x^3)^{\frac{1}{4}} dx$

(f) $\int \sqrt{1+\sin x} \cos x dx$

(g) $\int \cos^2(4x) dx$

(h) $\int \frac{1}{(4x+1)^2} dx$

114.- Calculeu les integrals definides següents:

(a) $\int_1^2 \frac{2-t}{t^3} dt$

(b) $\int_0^{-2} (x+1)(x-2) dx$

(c) $\int_0^{2\pi} \cos x dx$

(d) $\int_0^2 \sqrt{x} dx$

(e) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$

(f) $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

115.- Dibuixeu la gràfica de la funció $f(x) = 2 + x^3$ per a $x \in [0, 1]$ i trobeu l'àrea que queda sota la corba.

116.- Repetiu l'exercici anterior amb la funció $f(x) = \cos x$ per a $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$.

117.- Dibuixeu la regió fitada per les següents corbes i trobeu la seva àrea:

(a) $y = \sqrt{x}, y = x^2$

(b) $y = x + 1, y = \cos x, x = \pi$

(c) $y = x^2, y = -\sqrt{x}, x = 4$

118.- Obteniu els volums V_x i V_y dels cossos generats per la circumferència $(x-1)^2 + y^2 = 1$ al revolucionar entorn dels eixos de coordenades.

119.- Trobeu el volum del sòlid format en girar la regió limitada per les gràfiques de $y = x^{\frac{1}{2}}$ i $y = x^2$ entorn de l'eix d'abscisses.

120.- Sigui $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ i R la regió limitada per $x = 0, x = 1$, l'eix d'abscisses i la gràfica de la funció f .

(a) Trobeu l'àrea de R

(b) Calculeu el volum del cos engendrat per R en revolucionar entorn de l'eix d'abscisses.