

CONFIGURATIONS OF SINGULARITIES FOR QUADRATIC DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH TOTAL FINITE MULTIPLICITY LOWER THAN 2

JOAN C. ARTÉS¹, JAUME LLIBRE¹, DANA SCHLOMIUK² AND NICOLAE VULPE³

ABSTRACT. In [3] we classified globally the configurations of singularities at infinity of quadratic differential systems, with respect to the *geometric equivalence relation*. The global classification of configurations of finite singularities was done in [4] modulo the coarser *topological equivalence relation* for which no distinctions are made between a strong and a weak focus or between foci of different orders. However in this work we distinguish between focus and node which topologically are equivalent. These distinctions are however important in the production of limit cycles close to the foci in perturbations of the systems. The notion of *geometric equivalence relation* of configurations of singularities allows to incorporate all these important purely algebraic features. This equivalence relation is also finer than the *qualitative equivalence relation* introduced in [20]. In this article we initiate the joint classification of configurations of singularities, finite and infinite, using the finer *geometric equivalence relation*, for the subclass of quadratic differential systems possessing finite singularities of total multiplicity $m_f \leq 1$. We obtain 84 *geometrically distinct* configurations of singularities for this family. We also give here the global bifurcation diagram, with respect to the *geometric equivalence relation*, of configurations of singularities, both finite and infinite, for this class of systems. This bifurcation set is algebraic. The bifurcation diagram is done in the 12-dimensional space of parameters and it is expressed in terms of polynomial invariants. The results can therefore be applied for any family of quadratic systems, given in any normal form. Determining the configurations of singularities for any family of quadratic systems, becomes thus a simple task using computer algebra calculations.

RÉSUMÉ. Dans [3] nous avons classifié globalement les configurations de singularités à l'infini des systèmes différentiels quadratiques, par rapport à la *relation d'équivalence géométrique*. La classification globale des configurations de singularités finies a été donnée dans [2], modulo la *relation d'équivalence topologique*, pour laquelle aucune distinction n'a pas été faite entre un foyer ou un neud, ou entre un foyer fort et un foyer faible ou bien entre foyers d'ordre différents. Ces distinctions sont pourtant importantes dans la production de cycles limites proches des foyers, dans les perturbations de ces systèmes. La *relation d'équivalence géométrique* de configurations de singularités nous permet d'incorporer toutes ces caractéristiques importantes purement algébriques. Cette relation d'équivalence est aussi plus fine que la *relation d'équivalence qualitative* introduite dans [20]. Dans cet article nous initiions la classification globale de toutes les configurations de singularités, finies et infinies, utilisant la relation plus fine d'*équivalence géométrique*, pour la sous-classe de systèmes différentiels quadratiques possédant des singularités finies de multiplicité totale $m_f \leq 1$. Nous obtenons 84 configurations *distinctes géométriquement* de singularités pour cette famille. Nous donnons aussi le diagramme global de bifurcation, par rapport à la *relation d'équivalence géométrique* des configurations de singularités, finies et infinies, pour cette famille de systèmes. L'ensemble des points de bifurcation est algébrique. Le diagramme de bifurcation est réalisé dans l'espace 12-dimensionnel des paramètres et il est exprimé en termes de polynômes invariants. Les résultats peuvent donc être appliqués à toute famille de systèmes différentiels quadratiques avec $m_f \leq 1$, par rapport à n'importe quelle forme normale dans laquelle les systèmes nous sont présentés. Déterminer les configurations de singularités pour cette famille devient alors une simple tâche utilisant le calcul symbolique à l'ordinateur.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 58K45, 34C05, 34A34.

Key words and phrases. quadratic vector fields, infinite and finite singularities, affine invariant polynomials, Poincaré compactification, configuration of singularities, geometric equivalence relation.

The first two authors are partially supported by a MINECO/FEDER grant number MTM2008-03437 and an AGAUR grant number 2009SGR 410. The second author is also supported by ICREA Academia and FP7-PEOPLE2012-IRSES number 318999. The second and fourth authors are partially supported by the grant FP7-PEOPLE-2012-IRSES-316338. The third author is supported by NSERC. The fourth author is also supported by the grant 12.839.08.05F from SCSTD of ASM and partially by NSERC.