

Relaciones abelianas de webs del plano

David Marín

10 de octubre de 2007

1. Introducción

Un k -web \mathcal{W} del plano está dado localmente por k foliaciones $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$ en posición general. Si \mathcal{F}_i viene definida por una 1-forma $\omega_i = a_i(x, y)dx + b_i(x, y)dy$ entonces podemos presentar algebraicamente \mathcal{W} mediante una forma k -lineal simétrica

$$\prod_{i=1}^k (a_i(x, y)dx + b_i(x, y)dy) = A_0(x, y)dx^k + A_1(x, y)dx^{k-1}dy + \dots + A_k(x, y)dy^k.$$

De manera totalmente equivalente, podemos dar analíticamente \mathcal{W} por medio de una ecuación diferencial ordinaria implícita $F_{\mathcal{W}}(x, y, y') = 0$, con

$$F_{\mathcal{W}}(x, y, p) = A_0(x, y) + A_1(x, y)p + \dots + A_k(x, y)p^k \in \mathbb{C}\{x, y\}[p].$$

Consideremos la superficie $S_{\mathcal{W}} \subset \mathbb{C}^3$ de ecuación $F_{\mathcal{W}}(x, y, z) = 0$ juntamente con la proyección vertical $\pi : S_{\mathcal{W}} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$ y la distribución de contacto \mathcal{C} dada por la 1-forma diferencial $dy - zdx$. La restricción $\mathcal{C}|_{S_{\mathcal{W}}} = \mathcal{C} \cap TS_{\mathcal{W}}$ es una distribución unidimensional sobre $S_{\mathcal{W}}$ que determina una foliación $\mathcal{F}_{\mathcal{W}}$. Podemos recuperar geoméricamente nuestro web original \mathcal{W} como imagen directa de $\mathcal{F}_{\mathcal{W}}$ por π .

Los 1-webs (foliaciones) y los 2-webs son estructuras geométricas sin invariantes locales (como lo son las estructuras simplécticas, complejas, de contacto, etc). Sin embargo, la situación es completamente diferente para los k -webs con $k \geq 3$.

Analicemos con un poco de detalle el caso $k = 3$. Es fácil convencerse de que un 3-web del plano es una G -estructura de primer orden y grupo estructural $G = \mathbb{C}^* \text{Id} \subset \text{GL}_2(\mathbb{C})$. Es bien conocido que una tal estructura admite una única G -conexión sin torsión (llamada de Blaschke-Chern). Una manera alternativa de caracterizarla es mediante el requerimiento de que sea una conexión de Bott para cada foliación \mathcal{F}_i simultáneamente. La matriz de curvatura de dicha conexión es un invariante local y es de la forma κId , para una cierta 2-forma κ . Veamos cómo calcular explícitamente dicha 2-forma. Para ello, consideremos

1-formas ω_i definiendo \mathcal{F}_i normalizadas de manera que $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. Existe una única 1-forma γ tal que $d\omega_i = \gamma \wedge \omega_i$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces se tiene que $\kappa = d\gamma$, que es localmente exacta. Observemos que si $g\omega_1 + g\omega_2 + g\omega_3 = 0$ es otra normalización entonces $d(g\omega_i) = dg \wedge \omega_i + g d\omega_i = \left(\frac{dg}{g} + \gamma\right) \wedge (g\omega_i)$ y por tanto $\kappa = d\gamma = d\left(\frac{dg}{g} + \gamma\right)$ no depende de la normalización escogida.

Analicemos un ejemplo en el que \mathcal{F}_1 viene dada por $dx = 0$ y \mathcal{F}_2 por $dy = 0$. De hecho, un cambio adecuado de coordenadas permite siempre remitirnos a este caso. La tercera foliación vendrá definida por $\omega_3 = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy$. Tomemos la normalización dada por $\omega_1 = -f_1(x, y)dx$ y $\omega_2 = -f_2(x, y)dy$. Entonces

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \left(\frac{\partial_y f_1(x, y)}{f_1(x, y)} dy + \alpha(x, y)dx \right) \wedge \omega_1, \\ d\omega_2 &= \left(\frac{\partial_x f_2(x, y)}{f_2(x, y)} dx + \beta(x, y)dy \right) \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

de manera que $\gamma = \frac{\partial_x f_2(x, y)}{f_2(x, y)} dx + \frac{\partial_y f_1(x, y)}{f_1(x, y)} dy$ y consecuentemente

$$\kappa = d\gamma = \partial_x \partial_y \log \left(\frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} \right) dx \wedge dy.$$

La interpretación geométrica de esta curvatura viene dada en términos del concepto de hexagonalidad de un 3-web que presentamos a continuación. Para ello, dado un punto P denotaremos por $\mathcal{F}_i(P)$ la hoja de la foliación \mathcal{F}_i que pasa por P . Comenzamos fijando un punto O y un punto $P_0 \in \mathcal{F}_2(O)$. A continuación seguimos la hoja de \mathcal{F}_1 que pasa por P_0 hasta encontrar la hoja de \mathcal{F}_3 pasando por O en un punto P_1 . Formalmente, $\{P_1\} = \mathcal{F}_1(P_0) \cap \mathcal{F}_3(O)$. Ahora hacemos un permutación cíclica de las foliaciones \mathcal{F}_i y partiendo del punto P_1 obtenemos un nuevo punto P_2 . Iteramos este proceso tres veces más, obteniendo de esta manera los puntos:

$$\begin{aligned} \{P_1\} &= \mathcal{F}_1(P_0) \cap \mathcal{F}_3(O), \\ \{P_2\} &= \mathcal{F}_2(P_1) \cap \mathcal{F}_1(O), \\ \{P_3\} &= \mathcal{F}_3(P_2) \cap \mathcal{F}_2(O), \\ \{P_4\} &= \mathcal{F}_1(P_3) \cap \mathcal{F}_3(O), \\ \{P_5\} &= \mathcal{F}_2(P_4) \cap \mathcal{F}_1(O), \\ \{P_6\} &= \mathcal{F}_3(P_5) \cap \mathcal{F}_2(O). \end{aligned}$$

Se dice que el 3-web dado por las foliaciones \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 y \mathcal{F}_3 es hexagonal cuando la transformación local $\rho : (\mathcal{F}_2(O), O) \rightarrow (\mathcal{F}_2(O), O)$ que a cada P_0 lo envía a P_6 es la identidad para todo punto O . En la Figura 1 se muestran un 3-web hexagonal a la izquierda y uno que no lo es a la derecha.

Haciendo un cambio de coordenadas adecuado podemos suponer que \mathcal{F}_1 viene dado por dx , \mathcal{F}_2 por dy y \mathcal{F}_3 por df , con $f(x, y) = x + y + kxy(x - y) + \dots$, en cuyo caso el cálculo anterior muestra que $\kappa(0, 0) = 4k dx \wedge dy$. El desarrollo de Taylor de ρ en el origen comienza por $\rho(x) = x + 4kx^3 + \dots$, ver [7], lo que muestra que la curvatura de Blaschke-Chern κ de un 3-web es una medida infinitesimal de la dislocación de los hexágonos mostrados en la Figura 1.

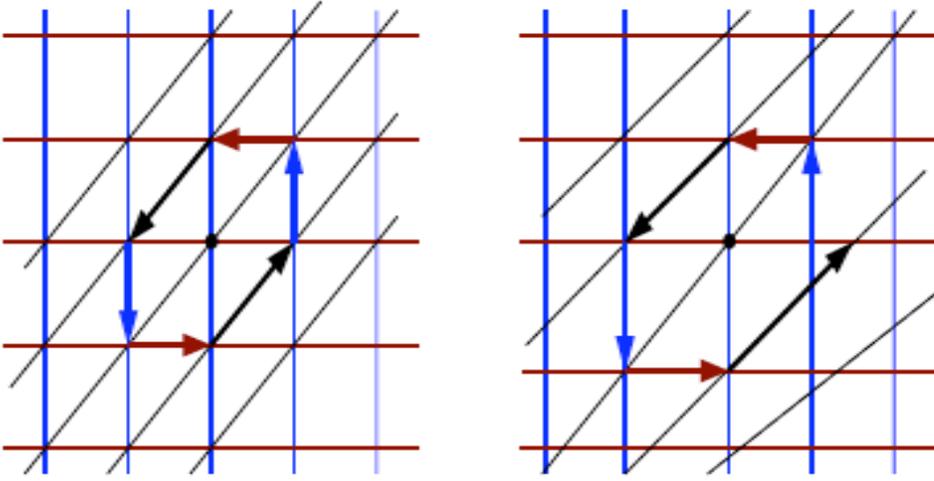


Figura 1: Un 3-web hexagonal a la izquierda y uno que no lo es a la derecha

1.1. Relaciones abelianas

Consideremos un k -web \mathcal{W} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con $k \geq 3$. Sean $F_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $i = 1, \dots, k$, integrales primeras locales de las foliaciones \mathcal{F}_i que definen \mathcal{W} . Como los “vectores normales” dF_1, \dots, dF_k a las hojas de $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ son linealmente dependientes, siempre existe una combinación lineal no trivial que se anula

$$\bar{g}_1 dF_1 + \bar{g}_2 dF_2 + \dots + \bar{g}_k dF_k = 0, \quad (1)$$

cuyos coeficientes \bar{g}_i pertenecen a $\mathbb{C}\{x, y\}$.

Definición 1.1. Una relación abeliana es una relación (1) cuyos coeficientes son parcialmente constantes a lo largo de las hojas de \mathcal{W} , es decir, verifican que $\bar{g}_i(x, y) = g_i(F_i(x, y))$

para ciertos $g_i(z) \in \mathbb{C}\{z\}$. El conjunto de todas las relaciones abelianas de un web \mathcal{W} dado forman de manera natural un \mathbb{C} -espacio vectorial que denotaremos por $\mathcal{A}(\mathcal{W})$.

A partir de una relación abeliana

$$g_1(F_1)dF_1 + g_2(F_2)dF_2 + \cdots + g_k(F_k)dF_k = 0 \quad (2)$$

de un k -web \mathcal{W} obtenemos por integración una relación funcional aditiva entre ciertas integrales primeras de \mathcal{W} :

$$\int g_1(F_1)dF_1 + \int g_2(F_2)dF_2 + \cdots + \int g_k(F_k)dF_k = \text{constante},$$

lo que explica en parte su nombre.

Es conveniente describir el espacio de relaciones abelianas de un k -web \mathcal{W} definido por $\omega_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, sin hacer referencia explícita a una elección concreta de las integrales primeras $F_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$ de \mathcal{F}_i , para lo cual sólo hemos de hacer notar que las formas cerradas son localmente exactas:

$$\mathcal{A}(\mathcal{W}) = \{(\eta_1, \dots, \eta_k) \in (\Omega_1)^k : \eta_i \wedge \omega_i = 0, d\eta_i = 0, \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_k = 0\}. \quad (3)$$

Observemos que si un 3-web admite una relación abeliana no trivial $g_1(F_1)dF_1 + g_2(F_2)dF_2 + g_3(F_3)dF_3 = 0$ entonces, como $d(g_i(F_i)dF_i) = 0$ existen funciones $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tales que $g_i(F_i)dF_i = df_i$, $i = 1, 2$ con $df_1 \wedge df_2 \neq 0$ en un entorno del origen. De esta manera podemos definir un difeomorfismo local $h(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ que transforma el 3-web original en $dx \cdot dy \cdot d(x + y) = 0$. De hecho, podemos presentar un resultado más completo.

Teorema 1.1 (Blaschke et al, 1930). *Para un 3-web \mathcal{W} las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (1) \mathcal{W} es hexagonal,
- (2) la curvatura de Blaschke-Chern κ de \mathcal{W} es cero,
- (3) el espacio de relaciones abelianas de \mathcal{W} es no trivial, i.e. $\mathcal{A}(\mathcal{W}) \neq 0$,
- (4) \mathcal{W} es localmente equivalente al 3-web definido por $dx \cdot dy \cdot d(x + y) = 0$.

Demostración. La implicación (1) \Rightarrow (2) es consecuencia del hecho que κ es una medida infinitesimal de la dislocación del hexágono descrito en la sección anterior. Para probar la implicación (2) \Rightarrow (3), recordemos que usando una normalización $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ adecuada de \mathcal{W} tenemos que existe una única 1-forma γ tal que $d\omega_i = \gamma \wedge \omega_i$ de manera que $\kappa = d\gamma$. Por hipótesis $\kappa = 0$, así que podemos escribir $\gamma = \frac{dg}{g}$, $g(0, 0) \neq 0$. Ello implica que las 1-formas $\eta_i := \frac{\omega_i}{g}$ son cerradas y determinan por tanto una relación abeliana no trivial de \mathcal{W} . La implicación (3) \Rightarrow (4) es la que hemos observado justo antes de enunciar el teorema mientras que la implicación (4) \Rightarrow (1) es evidente. \square

Teorema 1.2 (Bol, 1932). *Si \mathcal{W} es un k -web entonces la dimensión compleja de \mathcal{W} (llamada rango de \mathcal{W}) es finita y acotada por $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$.*

Idea de la demostración. Sea $\mathfrak{m} = (x, y) \subset \mathbb{C}\{x, y\}$ el ideal maximal en el origen y $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k \in \mathfrak{m}$ ecuaciones de las rectas tangentes a \mathcal{W} en el origen. Consideremos la filtración de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ dada por $\mathcal{A}^j(\mathcal{W}) := \ker \left(\mathcal{A}(\mathcal{W}) \rightarrow \left(\frac{\Omega^1}{\mathfrak{m}^j \Omega^1} \right)^k \right) \supset \mathcal{A}^{j+1}(\mathcal{W})$. No es difícil ver que

$$\dim(\mathcal{A}^j(\mathcal{W})/\mathcal{A}^{j+1}(\mathcal{W})) \leq k - \dim(\mathbb{C}\ell_1^{j+1} + \mathbb{C}\ell_2^{j+1} + \dots + \mathbb{C}\ell_k^{j+1}) = k - \min(j+2, k).$$

Consecuentemente

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{W}) \leq (k-2) + (k-3) + \dots + 1 = \frac{(k-1)(k-2)}{2}.$$

□

2. Webs del plano de rango máximo

En este punto, es natural preguntarse cuáles son los k -webs del plano que tienen rango máximo $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$. Para ello, comenzaremos analizando con más detalle el caso $k = 3$ para el que $\frac{(k-1)(k-2)}{2} = 1$. Es decir, un 3-web tiene rango máximo si y sólo si $\mathcal{A}(\mathcal{W}) \neq 0$. Gracias al Teorema 1.1, podemos hacer un cambio local de coordenadas de manera que \mathcal{W} venga definido por $dx dy d(x+y) = 0$. Las hojas de este 3-web son 3 familias de rectas paralelas, o equivalentemente, 3 haces de rectas en el plano proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ por los puntos $F_1 = [0, 1, 0]$, $F_2 = [1, 0, 0]$ y $F_3 = [1, -1, 0]$ alineados en la recta del infinito $z = 0$. Si consideramos cada uno de estos haces como una recta \check{F}_i del plano proyectivo dual $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ obtenemos que las hojas de \mathcal{W} por un punto $Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ son las rectas duales a los tres puntos de intersección de la curva $C := \check{F}_1 \cup \check{F}_2 \cup \check{F}_3$ con la recta dual $\check{Q} \subset \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ de $Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

2.1. Webs algebraicos del plano proyectivo

En este punto vamos a generalizar la descripción proyectiva del 3-web $dx dy d(x+y)$ dada anteriormente. Para ello consideremos una curva algebraica reducida C de grado k contenida en $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$. Si Q es un punto genérico de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ entonces la recta \check{Q} intersecta a la curva C en k puntos distintos que por dualidad determinan k rectas de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ pasando por Q . De esta manera podemos considerar el k -web \mathcal{W}_C obtenido integrando estos k campos de direcciones definidos en un abierto de Zariski U de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Dicho web se conoce como el web algebraico asociado a la curva C .

Observemos que si L es la recta dual de un punto $\check{L} \in \check{Q} \cap C$ entonces para todo punto Q' de L se tiene que \check{L} pertenece a $\check{Q}' \cap C$, de manera que L es una hoja de \mathcal{W}_C . Podemos concluir de manera más precisa, diciendo que las hojas de \mathcal{W}_C son exactamente las rectas tangentes a la curva dual $\check{C} \subset \mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ cuyo complementario es el abierto de Zariski U donde \mathcal{W}_C es regular.

Para cada $Q \in \mathbb{P}_\mathbb{C}^2 \setminus \check{C}$ definimos el conjunto $\{p_i(Q)\}_{i=1}^k$ de puntos de intersección de la recta \check{Q} y la curva C en $\check{\mathbb{P}}_\mathbb{C}^2$. Si denotamos por ω_C el haz dualizante de la curva reducida C (que coincide con Ω_C^1 cuando C es lisa) entonces podemos enunciar el teorema de Abel de la siguiente manera:

Teorema 2.1 (Abel). *Si $p_0 \in C$ y $\omega \in H^0(C, \omega_C)$ entonces $\sum_{i=1}^k \int_{p_0}^{p_i(Q)} \omega$ es constante, es decir, no depende del punto $Q \in \mathbb{P}_\mathbb{C}^2 \setminus \check{C}$.*

Como para todo $\omega \in H^0(C, \omega_C)$ se tiene que $d\omega = 0$ y $p_i^* \omega$ define localmente una de las foliaciones \mathcal{F}_i de \mathcal{W}_C resulta que $(p_1^* \omega_1, \dots, p_k^* \omega_k) \in \mathcal{A}(\mathcal{W}_C)$. Usando el teorema de Abel inverso podemos dar una descripción completa del espacio de relaciones abelianas de \mathcal{W}_C :

Corolario 2.1. *La aplicación que a cada 1-forma $\omega \in H^0(C, \omega_C)$ asocia la relación abeliana $(p_1^* \omega_1, \dots, p_k^* \omega_k) \in \mathcal{A}(\mathcal{W}_C)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular, el rango de \mathcal{W}_C es máximo pues coincide con el género aritmético $\dim H^0(C, \omega_C) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ de la curva C .*

2.2. Webs excepcionales

Desde el punto de vista local es claro que cualquier web que sea localmente equivalente a un web algebraico también será de rango máximo. Tales webs se suelen llamar algebrizables. La cuestión básica a la que queremos responder es la siguiente:

Problema 2.1. *¿Existen k -webs de rango máximo $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ que no sean algebrizables?*

El Teorema 1.1 responde negativamente a la pregunta cuando $k = 3$. El mismo resultado es cierto para $k = 4$:

Teorema 2.2 (Blaschke-Howe, Poincaré). *Todo 4-web de rango máximo 3 es algebrizable.*

En 1933 Blaschke anuncia un resultado similar para $k = 5$, sin embargo tres años más tarde Bol presenta un contraejemplo sencillo consistente en 4 haces de rectas por 4 puntos en posición general junto al haz de cónicas que determinan. De manera más explícita, el 5-web de Bol viene dado por las integrales primeras

$$F_1 = \frac{y}{x}, \quad F_2 = \frac{x+y-1}{y}, \quad F_3 = \frac{x-y}{1-y}, \quad F_4 = \frac{1-y}{x} \quad \text{y} \quad F_5 = \frac{x(1-x)}{y(1-y)}.$$

Dicho web es de rango máximo 6 porque los $\binom{5}{3} = 10$ sub-3-webs extraídos son todos hexagonales dando lugar a 5 relaciones abelianas linealmente independientes y además existe una relación abeliana adicional e independiente

$$\sum_{i=1}^5 \left(\frac{\log(1 - F_i)}{F_i} + \frac{\log(F_i)}{1 - F_i} \right) dF_i = 0$$

que una vez integrada da lugar a una relación funcional

$$\sum_{i=1}^5 \text{Li}_2(F_i) - \text{Li}_2(1 - F_i) = \text{constante},$$

del di-logaritmo $\text{Li}_2(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ (recordemos que $-\log(1 - z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$).

Por otra parte, el web de Bol no es algebrizable porque todo biholomorfismo local de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ que preserve 4 haces de rectas en posición general es la restricción de una homografía. Podemos enunciar de manera más precisa este hecho citando un resultado de [6]:

Teorema 2.3 (Nakai, 1987). *Si $\psi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ es un biholomorfismo local que con-
juga dos 4-webs lineales de rango máximo entonces ψ es la restricción de una homografía.*

El siguiente resultado de [3] es una generalización de un argumento que se remonta a Lie y Darboux afirmando que la única obstrucción a la *algebricidad* de un web de rango máximo es el hecho de que no pueda ser linealizado.

Teorema 2.4 (Griffiths, 1976). *Todo web linealizable de rango máximo es algebrizable.*

El web de Bol fue el único ejemplo conocido de web no algebrizable de rango máximo durante casi 70 años. Esta falta de ejemplos se pone de manifiesto en la siguiente cita de Chern y Griffiths en un trabajo de 1981, ver [2]:

(...) we cannot refrain from mentioning what we consider to be the fundamental problem on the subject, which is to determine the maximum rank non-linearizable webs. The strong conditions must imply that there are not many. It may not be unreasonable to compare the situation with the exceptional simple Lie groups.

A partir de entonces tales webs fueron cada vez más a menudo llamados excepcionales.

En 2001 L. Pirio y G. Robert independientemente prueban la excepcionalidad de una generalización del web de Bol propuesta por A. Hénaut usando la relación funcional de Spence-Kummer del tri-logaritmo, cf. [8, 12].

En 2004 L. Pirio y J.-M. Trépreau encuentran más ejemplos de 5-webs excepcionales de la forma $\mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, u(x) + u(y))$ usando funciones elípticas y sus degeneraciones,

cf. [9, 10]. Un ejemplo particularmente simple se obtiene tomando $u(z) = z^2$. Resulta curioso que hubiera que esperar hasta ese momento para obtener dicho ejemplo.

Hasta 2006 para $k > 5$ sólo eran conocidos por los especialistas un número finito y bastante reducido de k -webs excepcionales, todos ellos con $k \leq 10$.

3. Resultados principales

El resultado principal del trabajo [5] muestra que existen infinitos k -webs excepcionales (localmente no equivalentes) para cada $k \geq 5$. Más precisamente,

Teorema 3.1 (Pirio-Pereira-M, 2006). *Para todo $k \geq 5$ existe una familia de dimensión $\geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$ de k -webs globales excepcionales de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ que son dos a dos localmente no equivalentes. De hecho, existen otras $4k - 15$ familias de dimensión menor.*

Este resultado nos dice que el nombre de excepcional no es acertado y contrasta con la situación en dimensión superior, donde los k -webs de rango máximo son algebrizables si k es suficientemente grande, cf. [13]:

Teorema 3.2 (Trépreau, 2006). *Si $n \geq 3$ y $k \geq 2n$, cualquier k -web de rango máximo en \mathbb{C}^n es algebrizable.*

La característica común subyacente a los webs excepcionales conocidos es su alto grado de simetría. Teniendo en cuenta esta observación es bastante natural abordar el estudio de los webs que son lo más simétricos posible, es decir, aquellos que admiten un grupo uniparamétrico de simetrías. De manera más precisa, consideremos un k -web $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k$, dado localmente k foliaciones \mathcal{F}_i cada una de las cuales definida por una 1-forma ω_i . Supongamos que \mathcal{W} admite un automorfismo infinitesimal, es decir, un campo holomorfo local X tal que su flujo φ_t envía hojas de \mathcal{F}_i en hojas de \mathcal{F}_i para cada $i = 1, \dots, k$. Una caracterización algebraica equivalente de este hecho se expresa mediante la derivada de Lie: $L_X \omega_i \wedge \omega_i = 0$. Diremos que X es transverso a \mathcal{W} si es transverso a cada foliación \mathcal{F}_i , es decir, si $\omega_i(X) \neq 0$, en cuyo caso X define una foliación \mathcal{F}_X transversa a cada \mathcal{F}_i que podemos añadir a \mathcal{W} para obtener un $(k + 1)$ -web ampliado $\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X$. El siguiente resultado de [5] muestra la relación entre los rangos de \mathcal{W} y $\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X$:

Teorema 3.3. *Si \mathcal{W} es un k -web con un automorfismo infinitesimal transverso X y \mathcal{F}_X es la foliación que define entonces*

$$\text{rg}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) = \text{rg}(\mathcal{W}) + (k - 1).$$

En particular, $\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X$ es de rango máximo si y sólo si \mathcal{W} lo es.

Este resultado aparentemente anodino es clave para demostrar el Teorema 3.1, como veremos a continuación.

Demostración del Teorema 3.1 a partir del Teorema 3.3. Si una curva algebraica $C \subset \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ de grado k es invariante por una \mathbb{C} -acción $\check{\varphi}_t : \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ entonces su acción dual $\varphi_t : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ verifica la identidad $\check{\varphi}_t \circ p_i = p_i \circ \varphi_t$, donde las aplicaciones $p_i : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{C} \dashrightarrow C$ fueron introducidas anteriormente mediante la igualdad $\{p_i(Q)\}_{i=1}^k = C \cap \check{Q}$. Por tanto, φ_t preserva el k -web algebraico \mathcal{W}_C y $X = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\varphi_t$ es un automorfismo infinitesimal transverso de \mathcal{W}_C . El Teorema 3.3 implica entonces que el $(k+1)$ -web $\mathcal{W}_C \boxtimes \mathcal{F}_X$ tiene rango máximo. Por otro lado, si las órbitas de X no son rectas y $k \geq 4$ entonces $\mathcal{W}_C \boxtimes \mathcal{F}_X$ no es algebrizable gracias al Teorema 2.3. De manera más precisa, dicho resultado implica que si $\mathcal{W}_C \boxtimes \mathcal{F}_X$ es localmente equivalente a $\mathcal{W}_{C'} \boxtimes \mathcal{F}_{X'}$ entonces las curvas algebraicas C y C' son proyectivamente equivalentes. Para acabar, basta exhibir la familia de curvas quasi-homogéneas

$$C = \left\{ x^{\epsilon_1} y^{\epsilon_2} z^{\epsilon_3} \prod_{i=1}^s (x^a - \mu_i y^b z^{a-b}) \right\} \subset \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2,$$

con $\epsilon_i = 0, 1$, $\text{mcd}(a, b) = 1$, $a > 2b$ y la \mathbb{C} -acción $\check{\varphi}_t([x, y, z]) = [t^{b(a-b)}x, t^{a(a-b)}y, t^{ab}z]$ cuyo generador infinitesimal asociado es el campo radial con pesos $X = bx\partial_x + ay\partial_y$. \square

El resto de la sección está dedicado a dar una idea de la demostración del Teorema 3.3, la cual tiene dos ingredientes principales. El primero de ellos es el hecho de que la derivada de Lie $L_X = \iota_X d + d\iota_X$ actúa linealmente sobre el espacio de relaciones abelianas de \mathcal{W} puesto que envía 1-formas cerradas en 1-formas cerradas:

$$\mathcal{A}(\mathcal{W}) \ni (\eta_1, \dots, \eta_k) \longmapsto (L_X \eta_1, \dots, L_X \eta_k) \in \mathcal{A}(\mathcal{W}).$$

El segundo ingrediente proviene del hecho que X sea transverso a \mathcal{W} ya que en ese caso podemos considerar las 1-formas $\frac{\omega_i}{\omega_i(X)}$, $i = 1, \dots, k$, las cuales son cerradas. En efecto, si $X_i \neq 0$ es tangente a \mathcal{F}_i entonces X, X_i forman una base local de campos,

$$d\left(\frac{\omega_i}{\omega_i(X)}\right)(X, X_i) = X\left(\frac{\omega_i(X_i)}{\omega_i(X)}\right) - X_i\left(\frac{\omega_i(X)}{\omega_i(X)}\right) - \frac{\omega_i([X, X_i])}{\omega_i(X)} = -\frac{\omega_i([X, X_i])}{\omega_i(X)}$$

y

$$0 = (L_X \omega_i)(X_i) = X(\omega_i(X_i)) - \omega_i([X, X_i]) = -\omega_i([X, X_i]).$$

Este hecho permite considerar la siguiente definición:

Definición 3.1. *Existen funciones $u_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tales que $du_i = \frac{\omega_i}{\omega_i(X)}$ y a las cuales llamaremos integrales primeras canónicas de las foliaciones \mathcal{F}_i .*

Observación 3.1. *Las 1-formas du_i verifican las relaciones $\iota_X du_i = 1$ y $L_X du_i = 0$.*

Usando estas integrales canónicas podemos dar una forma normal de las relaciones abelianas de cualquier web que admita un automorfismo infinitesimal transverso:

Proposición 3.1. *Existe una base de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ de la forma*

$$\Gamma_{j\ell}^1 u_1^{\ell-1} e^{\lambda_j u_1} du_1 + \Gamma_{j\ell}^2 u_2^{\ell-1} e^{\lambda_j u_2} du_2 + \cdots + \Gamma_{j\ell}^k u_k^{\ell-1} e^{\lambda_j u_k} du_k = 0,$$

donde $\Gamma_{j\ell}^i \in \mathbb{C}$, $\ell = 1, \dots, \dim \mathcal{A}_j(\mathcal{W})$ y $\mathcal{A}_j(\mathcal{W})$ es el subespacio de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ asociado al valor propio λ_j de L_X .

Demostración. En primer lugar, usando la Observación 3.1 observamos que $L_X(g(u_i)du_i) = g'(u_i)du_i$. De manera que si $\{(f_{1j}(u_1)du_1, f_{2j}(u_2)du_2, \dots, f_{kj}(u_k)du_k)\}_{j=1}^r$ es una base de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ y M es la matriz $r \times r$ asociada a L_X en esta base, entonces la matriz funcional $k \times r$ dada por $(f_{ij}(t))$ satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}(f_{ij}(t)) = M \cdot (f_{ij}(t))$$

y por tanto,

$$(f_{ij}(t)) = \exp(tM) \cdot (f_{ij}(0)).$$

Escogiendo la base anterior de manera que la matriz M esté en forma de Jordan se obtiene que $f_{ij}(t) = \Gamma_{j\ell}^i t^{\ell-1} e^{\lambda_j t}$. \square

Ejemplo 3.1. *Podemos aplicar la proposición anterior al cálculo efectivo de las relaciones abelianas del 5-web excepcional de Pirio dado por las integrales primeras*

$$F_1 = x, \quad F_2 = y, \quad F_3 = x + y, \quad F_4 = x - y, \quad F_5 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

el cual es invariante por el campo radial $X = x\partial_x + y\partial_y$. Las integrales primeras canónicas son $u_i = \log F_i = \int \frac{dF_i}{F_i}$ y una base de relaciones abelianas está dada por

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 - F_3 &= 0, & F_1 - F_2 - F_4 &= 0, \\ F_1^2 + F_2^2 - F_5^2 &= 0, & 2F_1^2 + 2F_2^2 - F_3^2 - F_4^2 &= 0, \\ 5F_1^4 + 5F_2^4 + F_3^4 + F_4^4 - 6F_5^4 &= 0, & 8F_1^6 + 8F_2^6 + F_3^6 + F_4^6 - 10F_5^6 &= 0, \end{aligned}$$

ya que los valores propios de L_X en este caso son 1, 2, 4 y 6.

Sea $v \in \mathbb{C}\{x, y\}$ una integral primera local de \mathcal{F}_X . Por la Observación 3.1, para todo $j = 2, \dots, k$ se tiene que $\iota_X(du_1 - du_j) = 0$ y $L_X(du_1 - du_j) = 0$, por lo que existen $g_j(v) \in \mathbb{C}\{v\}$ tales que $du_1 - du_j - g_j(v)dv = 0$. Estas relaciones abelianas de $\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X$ generan un subespacio $K \subset \mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ de dimensión $k - 1$, donde $\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ denota el subespacio de $\mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ asociado al valor propio 0 de L_X .

Para concluir la demostración del Teorema 3.3 sólo quedan tres cosas por probar:

(a) El núcleo de la restricción de L_X a $\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ es K .

(b) La imagen de la restricción de L_X a $\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ es $\mathcal{A}_0(\mathcal{W})$.

(c) $\mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)/\mathcal{A}(\mathcal{W}) \cong \mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)/\mathcal{A}_0(\mathcal{W})$.

En efecto, combinando dichas afirmaciones concluimos que

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) - \dim \mathcal{A}(\mathcal{W}) \stackrel{(c)}{=} \dim \mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) - \dim \mathcal{A}_0(\mathcal{W}) \stackrel{(a)+(b)}{=} \dim K = k - 1.$$

Así pues, para finalizar probemos estos tres puntos:

(a) Si $(c_1(u_1)du_1, \dots, c_k(u_k)du_k, g(v)dv) \in \ker(L_X|_{\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)})$ entonces $c'_i(u_i) = 0$, es decir, cada función c_i es una constante. Aplicando ι_X a la relación $\sum_{i=1}^k c_i du_i + g(v)dv = 0$ se obtiene que $\sum_{i=1}^k c_i = 0$ y por tanto $(c_1 du_1, \dots, c_k du_k, g(v)dv) \in K$.

(b) Está claro que la imagen de $L_X|_{\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)}$ está contenida en $\mathcal{A}_0(\mathcal{W})$. Usando la Proposición 3.1 cualquier elemento de $\mathcal{A}_0(\mathcal{W})$ se expresa como combinación lineal de relaciones del tipo $(c_1 u_1^{\ell-1} du_1, \dots, c_k u_k^{\ell-1} du_k)$. Integrandó la relación $\sum_{i=1}^k c_i u_i^{\ell-1} du_i = 0$ obtenemos una constante $c_0 = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{\ell} u_i^\ell$. La 1-forma $\eta = \sum_{i=1}^k \left(\frac{c_i}{\ell} - \frac{c_0}{k} \right) du_i$ verifica que $\iota_X \eta = 0$ y $L_X \eta = 0$ de manera que existe $g(v) \in \mathbb{C}\{v\}$ tal que $\eta + g(v)dv = 0$. Así pues, la imagen por L_X del elemento

$$\left(\left(\frac{c_1}{\ell} u_1^\ell - \frac{c_0}{k} \right) du_1, \left(\frac{c_2}{\ell} u_2^\ell - \frac{c_0}{k} \right) du_2, \dots, \left(\frac{c_k}{\ell} u_k^\ell - \frac{c_0}{k} \right) du_k, g(v)dv \right) \in \mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$$

es igual a $(c_1 u_1^{\ell-1} du_1, \dots, c_k u_k^{\ell-1} du_k) \in \mathcal{A}_0(\mathcal{W})$.

(c) Sean $\mathcal{A}_*(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ y $\mathcal{A}_*(\mathcal{W})$ las sumas directa de todos los subespacios L_X -invariantes de $\mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ y $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ respectivamente, asociados a valores propios diferentes de cero. Como la restricción de L_X a $\mathcal{A}_*(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ es inyectiva resulta que los subespacios

$$L_X(\mathcal{A}_*(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)) \subset \mathcal{A}_*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{A}_*(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$$

son de la misma dimensión y por tanto iguales. Así pues,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)}{\mathcal{A}(\mathcal{W})} &\cong \frac{\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) \oplus \mathcal{A}_*(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)}{\mathcal{A}_0(\mathcal{W}) \oplus \mathcal{A}_*(\mathcal{W})} \cong \frac{\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)}{\mathcal{A}_0(\mathcal{W})} \oplus \frac{\mathcal{A}_*(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)}{\mathcal{A}_*(\mathcal{W})} \\ &\cong \frac{\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)}{\mathcal{A}_0(\mathcal{W})}. \end{aligned}$$

Referencias

- [1] S.-S. Chern and P.A. Griffiths, *Abel's theorem and webs*. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **80** (1978), pp. 13–110.
- [2] S.-S. Chern and P.A. Griffiths, *Corrections and addenda to our paper: "Abel's theorem and webs"*. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **83** (1981), pp. 78–83.
- [3] P. Griffiths, *Variations on a theorem of Abel*, Inventiones Math. **35** (1976), pp. 321–390.
- [4] A. Hénaut, *On planar web geometry through abelian relations and connections*. Ann. of Math. (2) **159** (2004), pp. 425–445.
- [5] D. Marín, J.V. Pereira and L.Pirio, *On planar webs with infinitesimal automorphisms*, Inspired by S.S. Chern, pp. 351–364, World Scientific, 2006.
- [6] I. Nakai, *Topology of complex webs of codimension one and geometry of projective space curves*, Topology **26** (1987), pp. 475–504.
- [7] I. Nakai, *Web geometry and the equivalence problem of the first order partial differential equations*, Web Theory and Related Topics, pp. 150–204, World Scientific, 2001.
- [8] L. Pirio, *Abelian functional equations, planar web geometry and polylogarithms*, Selecta Math. **11**, no. 3-4 (2005), pp. 453–489,
- [9] L. Pirio, *Équation fonctionnelle abélienne et géométrie des tissus*, Thèse de l'Université Paris VI, soutenue le 15 décembre 2004.
- [10] L. Pirio and J.-M. Trépreau, *Tissus Plans Exceptionnels et Fonctions Thêta*, Ann. Inst. Fourier **55** (2005), pp. 2209–2237.
- [11] O. Ripoll, *Détermination du rang des tissus du plan et autres invariants géométriques*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **341** (2005), pp. 247–252.
- [12] G. Robert, *Relations fonctionnelles polylogarithmiques et tissus plans*, Prépublication **146**, Université Bordeaux 1 (2002).
- [13] J.-M. Trepreau, *Algébrisation des tissus de codimension 1*, Inspired by S.S. Chern, pp.399–433, World Scientific, 2006.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
E-08193 Bellaterra (Barcelona) España
davidmp@mat.uab.es