# Interpolació per funcions harmòniques i positives

Daniel Blasi i Babot

*Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona,*

*08193 Bellaterra, Barcelona*

Abril, 2005

A tu, Jordi

”No tornaràs mai més, però perdures
en les coses i en mi de tal manera
que em costa imaginar-te absent per sempre.”

MIQUEL MARTÍ I POL

# Índex

# Agraïments

Voldria agrair al meu director Artur Nicolau la paciència i el temps que m'ha dedicat per tal que aquest treball es pogués dur a terme i la motivació que m'ha transmès en tot moment. També voldria donar les gràcies al Departament de Matemàtiques de la UAB per haver-me tractat tant bé durant aquest temps.

De forma molt especial agraeixo als meus pares i al meu germà la confiança i la il·lusió que m'han dipositat, així com l'esforç que han realitzat perquè pogués arribar fins aquí. Al meu germà Jordi un record molt sentit, després de nou anys és com si continuessis al meu costat.

No puc oblidar-me dels meus amics del poble amb qui he compartit tants bons moments, de l'esplai on he après tantes coses tot aportant un granet de sorra per fer d'aquest món un món millor, dels cims i les excursions els caps de setmana amb el Guillem i els Alberts o amb el 2x2 i com no dels companys del CAU a qui estaré sempre agraït pel rescat de fa un mes i mig al Coll de la Creueta. Una abraçada a la gent de Toulouse i especialment a en Pascal per la seva hospitalitat i la seva dedicació així com al Mathieu, una altra al grup "Vola-vola"perquè algun dia aconseguirem els nostres objectius seguint la nostra filosofia i pels companys del Setem també, segur que al setembre veurem el món amb uns altres ulls.

Per acabar, una salutació als amics que he fet durant la carrera i als companys de doctorat, sobretot al grup de "Paca"pels bons moments que hem passat junts; el tió, les discussions interminables, les expulsions, els infiltrats... i per damunt de tot el bon rotllo! Amb gent així és un plaer fer el doctorat.

*Daniel Blasi i Babot*

10 d'abril del 2005

# Introducció

Aquest treball té com a objectiu caracteritzar les successions d'interpolació per l'espai $h^+$ de funcions harmòniques i positives al disc unitat obert $\mathbb{D}$ del pla complex. La primera dificultat apareix a l'hora de definir aquestes successions de punts. Hom no pot esperar, que sobre una successió de punts $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ donada, es pugui interpolar una sucessió arbitrària de valors positius $\{w_n\}$, és a dir, que existeixi una funció $u \in h^+$, amb $u(z_n) = w_n$ $n = 1, 2, ....$ La raó és que la versió conformement invariant del lema de Harnack dóna que si $u \in h^+$, llavors el $\log u$ és una contracció en la mètrica hiperbòlica, és a dir,

$$|log_2 u(z) - log_2 u(w)| \leq \beta(z, w), \quad z, w \in \mathbb{D}$$

Aquí $\beta(z, w)$ denota la distància hiperbòlica entre $z$ i $w$. Així doncs, si $u \in h^+$ i $u(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, ...$, es té que

$$|log_2 w_j - log_2 w_k| \leq \beta(z_j, z_k), \quad j, k = 1, 2, ...$$

La primera temptavia consistiria en definir les successions d'interpolació per funcions harmòniques i positives com aquelles successions de punts $\{z_n\}$ tals que per tota successió de valors reals i positius $\{w_n\}$ complint la condició anterior, existís una funció $u \in h^+$ que interpolés als punts $z_n$ els valors $w_n$. Però resulta que aquesta definició és massa rígida i que no existeixen successions d'interpolació d'aquest tipus amb més de dos punts.

És natural doncs, introduir una constant $0 < \varepsilon < 1$ per deixar espai per interpolar. Així, direm que una successió de punts $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ és d'interpolació per funcions harmòniques i positives al disc unitat si existeix algun $0 < \varepsilon < 1$ tal que per tota successió de valors positius $\{w_n\}$ complint

$$|log_2 w_k - log_2 w_j| \leq \varepsilon \beta(z_k, z_j), \quad k, j = 1, 2, ..., \tag{1}$$

existeix una funció $u \in h^+$ amb $u(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, ....$

Direm també que una successió de punts $\{z_n\}$ és separada si $\inf_{n \neq m} \beta(z_n, z_m) > 0$. El resultat principal d'aquest treball és la següent descripció geomètrica de les successions d'interpolació:

**Teorema.** *Sigui $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ una successió separada, aleshores són equivalents:*

*(i) $\{z_n\}_n$ és d'interpolació per funcions harmòniques i positives*

*(ii) Existeixen constants $M > 0$, $0 < \alpha < 1$ tal que per totes $n, l > 0$ es compleix que*

$$\sharp\{z_k \text{ amb } \beta(z_k, z_n) \leq l\} \leq M 2^{\alpha l} \tag{2}$$

Observem que com és habitual en aquest tipus de problemes, les successions d'interpolació venen descrites per una condició de densitat. De fet, en cert sentit, la condició (2) indica que les successions d'interpolació per $h^+$ són "exponencialment més disperses"que una successió separada arbitrària. En efecte, $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ és una successió separada si i només si existeix una constant $M > 0$ tal que

$$\sharp\{z_k : \beta(z_k, z_n) \leq l\} \leq M2^l, \quad l = 1, 2, ...$$

La condició (2) dóna una potència menor que 1 de la cota anterior. A més, únicament s'imposa la condició (2) prenent com a punt base un punt $z_n$ de la successió i no un punt arbitrari del disc unitat. Aquesta és una diferència amb el problema anàleg a l'espai de Bloch estudiat a [BN1]. De fet, utilitzant la condició (2), es poden construir dues successions separades $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{D}$ d'interpolació per $h^+$ amb $\inf\{\beta(z, w) : z \in \Lambda_1,\ w \in \Lambda_2\} > 0$, de forma que $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ no és d'interpolació per $h^+$.

La prova de la necessitat de la condició (2) utilitza majorització harmònica i el lema de Hall. La prova de la suficiència és considerablement més complicada degut a la pobra estructura de l'espai $h^+$ que impedeix utilitzar mètodes de dualitat o de funcions especials que s'anul·len a una successió donada. Sense entrar en detall, podem estructurar la prova de la suficiència de la condició (2) en tres etapes:

1- Utilitzem el Teorema clàssic d'Anàlisi Convexa anomenat lema de Farkas-Minkowski per veure que és suficient demostrar el següent enunciat: donada una partició $\{z_n\} = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ de la successió $\{z_n\}$ i valors $\{w_n\}$ complint (1), existeix $u = u(\Lambda_1, \Lambda_2)$ harmònica i positiva tal que $u(z_n) \geq w_n$ si $z_n \in \Lambda_1$ i $u(z_n) \leq w_n$ si $z_n \in \Lambda_2$.

2- L'any 1975, L. Carleson i J. Garnett [CG1] van caracteritzar les successions d'interpolació per l'espai $h^\infty$ de funcions harmòniques i acotades al disc unitat. Utilitzant el seu resultat és fàcil veure que una successió complint la condició (2) és d'interpolació per $h^\infty$. Així doncs, existeixen una funció h harmònica i acotada ($h \in h^\infty$) i una constant $\delta > 0$ de forma que $||h||_\infty \leq 1$ amb $h(z_n) \geq \delta$ si $z_n \in \Lambda_1$ i $h(z_n) \leq -\delta$ si $z_n \in \Lambda_2$.

3- Una construcció de tipus probabilístic permet, donat $\varepsilon_0 > 0$, determinar conjunts $G_n \subset \partial\mathbb{D}$ dos a dos disjunts, tals que $\omega(z_n, \cup_{k \in A(n)} G_k) \geq 1 - \varepsilon_0$ i $\sum_{k \notin A(n)} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k) \leq \varepsilon_0$, on $A(n) = \{k : \beta(z_k, z_n) \leq N\}$, i $\eta > 0$ és un nombre suficient petit que depèn de $\varepsilon_0$ i dels quantificadors $M$ i $\alpha$ de la condició (2). Aquí $w(z, E)$ denota la mesura harmònica des del punt $z \in \mathbb{D}$ del conjunt $E \subset \partial\mathbb{D}$. Llavors es pot provar que la funció

$$u(z) = \sum_n w_n \int_{G_n} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2}(1 + h(\xi))\frac{d\xi}{2\pi}$$

compleix $u(z_n) \geq w_n$ per $z_n \in \Lambda_1$ i $u(z_n) \leq w_n$ per $z_n \in \Lambda_2$.

Com a conseqüència del resultat de caracterització de les successions d'interpolació per funcions harmòniques i positives, caracteritzem també les successions d'interpolació per funcions holomorfes, acotades i sense zeros al disc unitat.

El problema d'interpolació que hem considerat pot ser plantejat al semiplà o més generalment, a un semiespai $\mathbb{R}^{d+1}_+ = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^d, y > 0\}$. Anàlogament al cas de dimensió $d = 1$, una successió $\{z_n\} \subset \mathbb{R}^{d+1}_+$ es diu d'interpolació per $h_+$ si existeix $\varepsilon > 0$ tal que per tota successió $\{w_n\}$ de valors positius que compleixi

$$|log_2 w_k - log_2 w_j| \leq \varepsilon\beta(z_k, z_j), \quad k, j = 1, 2, ...,$$

existeix $u \in h_+$ amb $u(z_k) = w_k,\ k = 1, 2, ...$ Aquí $\beta(z, w)$ denota la distància hiperbòlica a $\mathbb{R}^{d+1}_+$ entre $z, w$ [A1].

En dimensió $d > 1$ no hem sabut provar una descripció anàloga al teorema de les successions d'interpolació per $h_+$. L'obstacle es troba a l'etapa 2 de la prova de la suficiència ja que no hi ha una descripció geomètrica de les successions d'interpolació per l'espai $h^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ de funcions harmòniques i acotades al semiespai $\mathbb{R}^{d+1}_+$ tret de quan d=1. Enunciem a continuació el millor resultat en aquesta línia que és degut a L. Carleson i J. Garnett:

**Teorema (L. Carleson, J. Garnett).** *Sigui* $\{z_n = (x_n, y_n) : y_n > 0, x_n \in \mathbb{R}^d\}$ *una successió de punts del semiespai* $\mathbb{R}^{d+1}_+$*,*

*(a) Si* $\{z_n\}$ *és una successió d'interpolació per* $h^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_+)$*, llavors* $\{z_n\}$ *és separada i* $\sum y_n^d \delta_{z_n}$ *és una mesura de Carleson, és a dir, existeix una constant* $C$ *tal que*

$$\sum_{z_n \in Q} y_n^d \leq C l(Q)^d \tag{3}$$

*per tot cub* $Q$ *de costat* $l(Q)$ *amb un costat sobre* $\{y = 0\}$*.*

*(b) Sigui* $d = 1$*, si* $\{z_n\}$ *és separada i compleix la condició* (3)*, aleshores* $\{z_n\}$ *és una successió d'interpolació per* $h^\infty(\mathbb{R}^2_+)$

*(c) Sigui* $d > 1$*, si* $\{z_n\}$ *és separada i compleix* (3) *llavors* $\{z_n\}$ *es pot descomposar en una unió finita de successions* $\Lambda_1, ..., \Lambda_N$*, és a dir,*

$$\{z_n\} = \Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_N,$$

*de forma que* $\Lambda_i \cup \Lambda_j$ *és d'interpolació per* $h^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ *per tot* $i, j = 1, ..., N$

No és conegut si la condició (3) implica que la successió $\{z_n\}$ sigui d'interpolació per $h^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_+)$. En canvi, és fàcil comprovar que la condició

$$\sharp\{z_k \text{ amb } \beta(z_k, z_n) \leq l\} \leq M 2^{d\alpha l} \tag{4}$$

implica (3). En dimensio $d > 1$, es pot veure que una successio d'interpolació per funcions harmòniques i positives ha de complir (4) però no hem sabut veure que una successió que compleixi (4) hagi de ser d'interpolació.

El treball està estructurat en cinc capítols; els dos primers són introductoris i en els altres tres presentem els resultats que hem obtingut en l'estudi.

- En el capítol 1 es defineixen alguns dels conceptes més rellevants que utilitzarem per treballar amb les successions d'interpolació per funcions harmòniques i positives i relacionem la distància hiperbòlica amb el teorema de Harnack.

- En el capítol 2 s'enuncien resultats de L. Carleson i J. Garnett relacionats amb les successions d'interpolació per funcions harmòniques i acotades i successions d'interpolació per funcions holomorfes i acotades. Aquests teoremes els utilitzarem en capítols posteriors per demostrar altres resultats.

- En el capítol 3 mostrem la problemàtica en què ens trobem a l'hora de definir les successions d'interpolació per funcions harmòniques i positives, donem una definició raonable i enunciem el teorema que permet caracteritzar aquest tipus de successions al disc unitat.

- El capítol 4 està destinat íntegrament a la demostració del teorema d'interpolació per funcions harmòniques i positives. Primer es mostra la necessitat de la condició (2) i a continuació la suficiència. El punt clau de la demostració està en la prova del lema 4.3.1 que serà l'eina que utilitzarem per provar la suficiència de la condició (2).

- Finalment, en el capítol 5, discutim el cas de les successions d'interpolació per funcions harmòniques i positives al semiespai $\mathbb{R}^{d+1}_+$ per dimensions superiors a 1 i caracteritzem les successions d'interpolació per funcions holomorfes i acotades, sense zeros al disc unitat.

Finalment voldria observar que tots els resultats que es mostren pel disc unitat del pla complex $\mathbb{D}$ tenen un anàleg al semipla i viceversa. Sovint enunciarem només el que més ens convingui per tal que la notació sigui més senzilla.

# Capítol 1

# Preliminars

## 1.1 Descomposició diàdica

**Definició 1.1.1.** *Donat $z \in \mathbb{D}$ qualsevol, denotem per $Q(z)$ el quadrat de Carleson de forma que $z$ és el centre de la seva tapa interior,*

$$Q(z) = \{re^{i\theta} : \ 0 < 1 - r \leq 1 - |z|, \ Arg(z) - \pi(1 - |z|) < \theta \leq Arg(z) + \pi(1 - |z|)$$

*i la seva longitud com $l(Q) = 1 - |z|$.*

**Definició 1.1.2.** *Donat un quadrat de Carleson $Q$, definim la seva descomposició diàdica com el conjunt de quadrats $\{Q_j^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, on fixada $n$, els quadrats $Q_j^n$ són els $2^n$ quadrats disjunts continguts a $Q$, de longitud $2^{-n}l(Q)$ i amb la base sobre $|z| = 1$.*

Mostrem com a exemple, la descomposició diàdica de $Q(0)$. Els quadrats de la descomposició són $\{Q_j^n = Q(2^{-n}\ e^{(\frac{\pi}{2^n} + \frac{j\pi}{2^{n-1}})i})\}$ per $n = 1, 2, \ldots$ i $j = 0, \ldots, 2^n - 1$

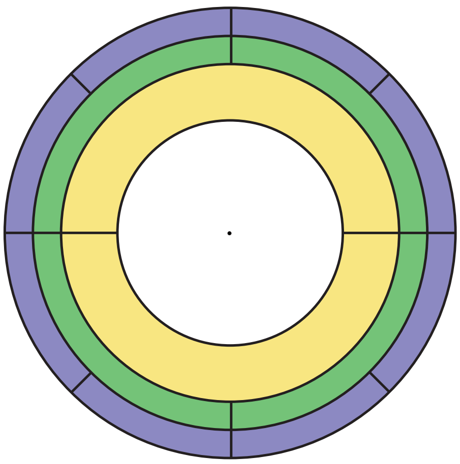

**Figura 1. Descomposició diàdica de $Q(0)$ al disc.**

## 1.2 Distància hiperbòlica

**Definició 1.2.1.** *Siguin $z, w \in \mathbb{D}$, definim la* ***distància hiperbòlica*** *entre aquests punts com:*

$$\beta(z,w) = \log_2 \frac{1+\rho(z,w)}{1-\rho(z,w)}, \quad \text{on } \rho(z,w) := \left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$$

Es pot veure que la distància hiperbòlica és efectivament una distància[A1] i que aquesta noció és conformement invariant, és a dir, $\beta(z,w) = \beta(\tau(z),\tau(w))$ si $\tau$ és un automorfisme del disc.
Sovint la distància hiperbòlica es defineix amb logaritme neperià en lloc de logaritme amb base 2, hem escollit aquesta normalització perquè s'ajusta bé amb la descomposició diàdica del disc.

**Observació 1.2.2.** *Si $z, w \in \mathbb{D}$ satisfan que $1-|w| = 2^{-k}(1-|z|)$ on $k$ és un nombre positiu i $|Argw - Argz| < 1-|z|$, llavors $\beta(z,w) = k + C$ on $C$ és una quantitat acotada per una constant universal que no depèn de $k$ $(-2 < C < 6)$.*

*Demostració.* Anem a verificar aquest resultat:

$$\beta(z,w) = log_2 \frac{1+\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|}{1-\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|} = 2log_2\left(1+\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|\right) - log_2\left(1-\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|^2\right)$$

$$\text{Ara,} \quad log_2\left(1-\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|^2\right) = log_2\left(\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{w}z|^2}\right) =$$

$$= log_2\left(\frac{(1-|z|^2)(1+|w|)2^{-k}(1-|z|)}{|1-\overline{w}z|^2}\right) =$$

$$= log_2(2^{-k}) + log_2((1+|w|)(1+|z|)) + log_2\left(\frac{(1-|z|)^2}{|1-\overline{w}z|^2}\right)$$

Utilitzant que $|Argw - Argz| < 1-|z|$ es pot veure que $\frac{1}{4} < \frac{1-|z|}{|1-\overline{w}z|} < 1$, i amb aquestes desigualtats obtenim que

$$\beta(z,w) = k + C, \text{ on } -2 < C < 6, \text{ que és el què volíem.}$$

□

**Definició 1.2.3.** *Donat un punt $z \in \mathbb{D}$ qualsevol i el seu corresponent quadrat de Carleson $Q(z)$, definim:*

- ***T(Q(z))*** $:= \{w \in Q(z)$ *tal que* $2(1-|w|) > 1-|z|\}$ *com la part superior de $Q(z)$*
- ***diam$_{hip}$T(Q)*** $:= sup_{\{z,w \in T(Q)\}} \beta(z,w)$ *com el diàmetre hiperbòlic de T(Q)*

**Observació 1.2.4.** *Per tot quadrat de Carleson $Q$ del disc unitat $\mathbb{D}$ es compleix que $diam_{hip}T(Q) < 18$*

*Demostració.* Observem que donat un quadrat de Carleson $Q$, podem expressar $T(Q)$ de la següent forma per certa $z \in \mathbb{D}$:

$$T(Q) = \{w \in \mathbb{D} : \frac{1-|z|}{2} < 1-|w| \leq 1-|z|,\ Argz-\pi(1-|z|) < Argw \leq Argz+\pi(1-|z|)\}$$

Distingim dos casos:

i) Si $|z| \leq 3/4$ és a dir, $1-|z| \geq 1/4$, aleshores per tots $z_1, z_2 \in T(Q)$, $\beta(z_1, z_2) \leq \beta(z_1, 0) + \beta(0, z_2) \leq 18$ per l'observació 1.2.2 ja que $1-|z_i| \geq \frac{1}{2^3}$ *per* $i = 1, 2$

ii) Si $|z| > 3/4$ considerem $z^* = (4|z|-3)e^{i\,Argz}$ que compleix $1-|z^*| = 4(1-|z|)$. Com abans, podem aplicar l'observació 1.2.2 i obtenim que per tots $z_1, z_2 \in T(Q)$, $\beta(z_1, z_2) \leq \beta(z_1, z^*) + \beta(z^*, z_2) \leq 18$ ja que $1-|z_i| \geq \frac{1}{2^3}(1-|z^*|)$ i a més a més, $|Argz_i - Argz^*| = |Argz_i - Argz| < \pi(1-|z|) = \frac{\pi}{4}(1-|z^*|) < 1-|z^*|$

Així doncs obtenim que $diam_{hip}T(Q) < 18$. □

## 1.3 El teorema de Harnack

Aquest apartat està dedicat al teorema de Harnack. Es tracta d'una propietat fonamental que compleixen les funcions harmòniques i positives, que ens servirà per caracteritzar, més endavant, les successions d'interpolació per funcions harmòniques i positives.

**Proposició 1.3.1 (Propietat de la mitja).** *Tenim les següents propietats:*

*(a) Sigui $u$ una funció real i contínua al cercle $\partial D(a; R)$. Si definim $u$ a l'interior de $D(a; R)$ a partir de la integral de Poisson:*

$$u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rRcos(\theta - t) + r^2} u(a + Re^{it})dt \quad per\ r < R, \qquad (1.1)$$

*aleshores $u$ és contínua al disc $\overline{D}(a; R)$ i harmònica en $D(a; R)$.*

*(b) D'altra banda, si $u$ és harmònica i real en un conjunt obert $\Omega$ i si $\overline{D}(a; R) \subset \Omega$, aleshores $u$ satisfà* (1.1) *en el $D(a; R)$.*

**Proposició 1.3.2 (Desigualtat de Harnack).** *Sigui $\Omega$ un conjunt obert del pla complex, $u$ una funció harmònica i positiva en $\Omega$ i $\overline{D}(a; R) \subset \Omega$. Aleshores*

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{u(a + re^{i\theta})}{u(a)} \leq \frac{R+r}{R-r}$$

*Demostració.* El nucli de Poisson satisfà les desigualtats següents:

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2-r^2}{R^2-2rRcos(\theta-t)+r^2} \leq \frac{R+r}{R-r}$$

per $r < R$, $\theta$ i t qualssevol. A més a més, l'apartat (b) de la proposició 1.3.1 ens diu que

$$u(a+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rRcos(\theta-t)+r^2} u(a+Re^{it})dt$$

Utilitzant aquestes dues desigualtats obtenim que

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a+re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a)$$

□

**Teorema 1.3.3 (Harnack).** *Sigui u una funció harmònica i positiva al disc, aleshores per tota parella de punts z,w del disc es compleix que*

$$|log_2 u(z) - log_2 u(w)| \leq \beta(z,w) \tag{1.2}$$

*Demostració.* Sense pèrdua de generalitat podem pensar $z = 0$. Si no, considerem un automorfisme del disc unitat $\tau_z$ que enviï el punt 0 al punt $z$. Llavors

$$|log_2 u(z) - log_2 u(w)| = |log_2 u \circ \tau_z(0) - log_2 u \circ \tau_z(\tau_z^{-1}(w))|$$

Utilitzant la invariància de la distància hiperbòlica per aplicacions de Möbius, serà suficient veure la desigualtat (1.2) pel cas $z = 0$.
Apliquem la desigualtat de Harnack 1.3.2 a $u(z)$ amb $a = 0$ i $r = 1$ :

$$\frac{1-|w|}{1+|w|}u(0) \leq u(w) \leq \frac{1+|w|}{1-|w|}u(0)$$

Per tant $|log_2(u(w)) - log_2(u(0))| \leq \beta(0,w)$

□

## 1.4 Interacció Harnack-distància hiperbòlica

Utilitzant el teorema de Harnack 1.3.3 i l'observació 1.2.4 sobre l'acotació del diàmetre hiperbòlic de la tapa interior d'un quadrat de Carleson qualsevol, observem que tenim un control pel què fa al valor de les imatges dels punts de la tapa per una funció $u$ harmònica i positiva al disc $\mathbb{D}$.

**Observació 1.4.1.** *Sigui* $u \in har^+(\mathbb{D})$. *Aleshores per tot quadrat de Carleson* $Q$ *del disc* $\mathbb{D}$ *es compleix que* $\frac{1}{C} \leq \frac{u(z_1)}{u(z_2)} \leq C$ *per tots* $z_1, z_2 \in T(Q)$, *on* $C$ *és una constant universal.*

*Demostració.* Donat un quadrat de Carleson $Q$ del disc unitat sabem, per l'observació 1.2.4, que $diam_{hip}T(Q) < 18$, i aplicant el teorema de Harnack 1.3.3 obtenim que $|log_2 u(z_1) - log_2 u(z_2)| \leq \beta(z_1, z_2) < 18$ per tota parella de punts $z_1, z_2 \in T(Q)$.

□

## 1.5 La mesura harmònica

Sigui $E$ un subconjunt compacte de $\overline{\mathbb{D}}$, la clausura dels disc unitat $\mathbb{D}$ al pla complex, tal que $0 \notin E$. La mesura harmònica des del punt 0 del conjunt $E$, que denotarem per $\omega(E) \equiv \omega(0, E, \mathbb{D} \setminus E)$ és, parlant de forma vaga, el valor al 0 de la funció harmònica a $\mathbb{D} \setminus E$ que pren el valor 1 a $E$ i 0 a $\mathbb{D} \setminus E$ (veure [MS1]). En el cas per exemple en què $E \subset \partial\mathbb{D}$, la mesura harmònica d'aquest conjunt coincideix amb $\omega(E) = |E|/2\pi$

Si considerem subconjunts $E$ de la vora del disc, podem pensar la mesura harmònica del conjunt $E$ des d'un punt $z$ de l'interior del disc de forma anàloga i es pot obtenir una forma explícita de la mesura harmònica, que enunciem a continuació en forma de definició (ídem en el cas $\{Imz > 0\}$).

**Definició 1.5.1.** *Si $E$ és un subconjunt del cercle, $E \subset \partial\mathbb{D}$, definim la mesura harmònica de $E$ en un punt $z$ qualevol del disc unitat $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ com*

$$\omega(z, E) = \int_E \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} \frac{|d\xi|}{2\pi}$$

**Definició 1.5.2.** *Si $E$ és un subconjunt de la recta, $E \subset \mathbb{R}$, definim la mesura harmònica de $E$ en un punt $z$ qualsevol del semipla $\{Imz > 0\}$ com*

$$\omega(z, E) = \int \chi_E(t)\ P_z(t)dt = \int_E \frac{Imz}{(Rez - t)^2 + (Imz)^2} \frac{dt}{2\pi}$$

# Capítol 2

# Alguns resultats previs

## 2.1 Interpolació per funcions holomorfes i acotades

**Definició 2.1.1.** *Diem que una successió de punts* $\{z_n\}_n$ *al semiplà superior és d'interpolació per funcions holomorfes i acotades si per tota col·lecció acotada de valors* $\{a_j\}_j$*, existeix una funció* $f$ *holomorfa i acotada al semiplà superior amb* $f(z_j) = a_j$*, per* $j = 1, 2, ...$

L'any 1958, L. Carleson va provar el seu famós resultat on caracteritza geomètricament aquestes successions.

**Teorema 2.1.2.** *(Interpolació per holomorfes i acotades a* $\mathbb{R}^2_+$*)[C1]*

*Si* $\{z_j\}$ *és una successió al semiplà superior, les següents condicions són equivalents:*

*(a) La successió és d'interpolació per funcions holomorfes i acotades*

*(b) Els punts* $z_j$ *estan separats, és a dir, existeix una constant* $a > 0$ *amb*

$$\rho(z_j, z_k) = \left| \frac{z_j - z_k}{z_j - \overline{z}_k} \right| \geq a, \text{ per } j \neq k$$

*i existeix una constant* $A > 0$ *tal que per tot quadrat de Carleson* $Q = \{x_0 < x \leq x_0 + l(Q),\ 0 < y \leq l(Q)\}$ *es compleix*

$$\sum_{z_j \in Q} y_j \leq Al(Q)$$

## 2.2 Interpolació per funcions harmòniques i acotades

**Definició 2.2.1.** *Diem que una successió separada de punts* $\{z_n\}_n$ *és d'interpolació per funcions harmòniques i acotades si per tota col·lecció acotada de valors* $\{w_n\}_n$*, existeix una funció harmònica i acotada que interpola els valors* $\{w_n\}_n$ *als punts* $\{z_n\}_n$*.*

**Definició 2.2.2.** *Diem que una succesió* $\{z_n\}_n \in \mathbb{R}^2_+$ *compleix la condició de Carleson si existeix una constant* $C$ *tal que per tot quadrat* $Q = \{(x, y)$ *tal que* $a < x \leq a + l(Q)$*,* $0 < y \leq l(Q)\}$*, es compleix que* $\sum_{z_k \in Q} y_k \leq Cl(Q)$

L'any 1975, L. Carleson i J. Garnett van provar el següent resultat que descriu les successions d'interpolació per funcions harmòniques i a cotades al semiespai $\mathbb{R}^2_+$.

**Teorema 2.2.3.** *(Interpolació per harmòniques i acotades a $\mathbb{R}^2_+$)[CG1]*
*Donada $\{z_n\}_n$ una successió separada a $\mathbb{R}^2_+$, són equivalents:*

*i)* $\{z_n\}$ *és d'interpolació per funcions harmòniques i acotades*

*ii)* $\{z_n\}$ *compleix la condició de Carleson*

De fet, [CG1] consideren nuclis més generals i obtenen un resultat de l'estil anterior per nuclis racionals de $L^1(\mathbb{R})$.

El resultat conegut a $\mathbb{R}^{d+1}$ amb $d > 1$ és més feble ja que la prova pel cas $d = 1$ utilitza eines de variable complexa. El resultat és el següent:

**Teorema 2.2.4.** *(Interpolació per harmòniques i acotades a $\mathbb{R}^{d+1}_+$)[CG1]*
*Donada $\{z_n = (x_n, y_n) : y_n > 0, x_n \in \mathbb{R}^d\}_n$ una successió separada a $\mathbb{R}^{d+1}_+$, amb $d > 1$, són equivalents:*

*i)* $\{z_n\}$ *compleix la condició de Carleson* $\sum_{z_n \in Q} y_n^d \leq Cl(Q)^d$ *per tot cub* $Q$ *de costat* $l(Q)$ *amb un costat sobre* $\{y = 0\}$.

*ii)* $\{z_n\}$ *es pot posar com una unió finita de successions de forma que la unió de dues d'elles qualssevol és una successió d'interpolació per funcions harmòniques i acotades*

No és conegut si la condició de Carleson implica que la successió sigui d'interpolació excepte en dimensió $d = 1$. En cas de tenir condicions més fortes sobre la successió, L. Carleson i J. Garnett van demostrar que la successió és d'interpolació.

**Teorema 2.2.5.** *[CG1] Donada una successió de punts $\{(x_k, y_k)\}$ de $\mathbb{R}^{d+1}_+$, suposem que existeixen unes constants $A, a > 0$ tals que per tota $k$, existeix un punt $b_k \in \mathbb{R}^d$, amb $|x_k - b_k| < Ay_k$ de forma que les boles $|x - b_k| < ay_k$ siguin disjuntes. Aleshores per tota successió de valors $\{a_k\}$ acotada per 1, existeix una funció harmònica i acotada a $\mathbb{R}^{d+1}_+$ que interpola els valors $a_k$ als punts $(x_k, y_k)$.*

# Capítol 3

# El problema d'interpolació a $har^+(\mathbb{D})$

Donada una successió separada $\{z_n\}_n \in \mathbb{D}$, estem interessats en identificar una classe natural de successions de valors $\{w_n\}_n$ positius de forma que existeixi una funció harmònica i positiva $u$ que interpoli aquests valors, és a dir, tal que $u(z_n) = w_n$ en tots els punts de la successió.

## 3.1 Plantejament del problema

Si u és una funció harmònica i positiva que interpola als punts $\{z_n\}$ els valors $\{w_n\}$, aplicant el teorema de Harnack 1.3.3, obtenim que s'ha de complir

$$|log_2(w_n) - log_2(w_m)| \leq \beta(z_n, z_m) \tag{3.1}$$

en tots els punts $z_n, z_m$ de la successió.

Així doncs hem trobat una condició necessària, però veurem ràpidament que si definíssim les successions d'interpolació com aquelles $\{z_n\}$ tals que per tota successió de valors $\{w_n\}$ complint (3.1) existeix una funció $u \in har^+(\mathbb{D})$ que interpola aquests valors, aleshores ens reduiríem a successions trivials formades per dos punts.

En efecte, pensem sense pèrdua de generalitat que $z_0 = 0$ $i$ $w_0 = 1$. Escrivim $u(z) = \int_{-\pi}^{\pi} P_z(e^{i\theta})d\mu(e^{i\theta})$ on $d\mu$ és una mesura positiva al cercle unitat

$$u(z) = \int_{-\pi}^{\pi} P_z(e^{i\theta})d\mu(e^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}d\mu(\theta) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = \frac{1+|z|}{1-|z|} = 2^{\beta(z,0)}$$

$$u(z) \leq 2^{\beta(z,0)} \; per \; tot \; z \in \mathbb{D}$$

Si interpolem en el punt $z_1$ el valor extremal $w_1 = 2^{\beta(0,z_1)}$ tindrem igualtat en el punt $z_1$, en particular:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z_1|^2}{|e^{i\theta}-z_1|^2}d\mu(\theta) = \frac{1+|z_1|}{1-|z_1|}$$

Veurem que això implica que $\mu = \delta_{\{e^{i\,Arg z_1}\}}$ i que per tant $u$ ens quedarà completament determinada.

Suposem que $\mu \neq \delta_{\{e^{i\,Argz_1}\}}$, és a dir que $\mu(\partial\mathbb{D} \setminus \{e^{i\,Argz_1}\}) > 0$. Aleshores existeix $V \subset \partial\mathbb{D}$ obert amb $e^{i\,Argz_1} \in V$ : $\mu(\partial\mathbb{D} \setminus V) > 0$ i llavors

$$\frac{1+|z_1|}{1-|z_1|} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z_1|^2}{|e^{i\theta}-z_1|^2} d\mu(\theta) = \int_V \frac{1-|z_1|^2}{|e^{i\theta}-z_1|^2} d\mu(\theta) + \int_{\partial\mathbb{D}\setminus V} \frac{1-|z_1|^2}{|e^{i\theta}-z_1|^2} d\mu(\theta) \leq$$

$$\leq \frac{1+|z_1|}{1-|z_1|}\mu(V) + \frac{1}{(1+\eta)^2}\frac{1+|z_1|}{1-|z_1|}\mu(\partial(\mathbb{D}) \setminus V) < \frac{1+|z_1|}{1-|z_1|}\mu(\partial\mathbb{D}) = \frac{1+|z_1|}{1-|z_1|}$$

que és una contradicció. En la penúltima desigualtat hem utilitzat que $|e^{i\theta} - z_1| \geq (1+\eta)(1-|z_1|)$ per certa $\eta > 0$ si $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D} \setminus V$.

Hem vist per tant que $\mu = \delta_{\{e^{i\,Argz_1}\}}$. Si tinguéssim un altre punt $z_2 \in \mathbb{D}$, $z_2 \neq z_0, z_1$, existirien valors $w_2$ que complirien les hipòtesis però que en canvi no podríem interpolar. De fet si prenem $w_2 > 0$ amb $|log_2 w_2| < 2^{\beta(z_2,0)}$ no existeix cap funció harmònica i positiva amb $u(z_i) = w_i,\ i = 0, 1, 2$.

Ens adonem doncs que les successions definides d'aquesta forma són massa rígides i per tant hem de deixar més espai per poder interpolar. Definirem les successions d'interpolació per funcions harmòniques i positives al disc de la següent forma:

**Definició 3.1.1.** *Una successió separada $\{z_n\}$ de punts del disc unitat és d'interpolació per funcions harmòniques i positives si existeix $0 < \varepsilon < 1$ tal que per tota successió de valors positius $\{w_n\}$ amb*

$$|log_2 w_n - log_2 w_m| \leq \varepsilon\beta(z_n, z_m), \quad \textit{per tota } n \textit{ i } m \tag{3.2}$$

*existeix $u \in har^{+}(\mathbb{D})$ tal que $u(z_n) = w_n$ per tota $n$*

Observem que ser d'interpolació per funcions harmòniques i positives és una noció conformement invariant, és a dir, si $\{z_n\}$ és una successió d'interpolació per funcions harmòniques i positives i $\tau$ és un automorfisme del disc, la successió $\{\tau(z_n)\}$ també és d'interpolació per funcions harmòniques i positives (amb el matix quantificador $0 < \varepsilon < 1$).

## 3.2 Teorema principal

El principal resultat d'aquest treball és el següent teorema.

**Teorema 3.2.1.** *Sigui $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ una successió separada, aleshores són equivalents:*

*(i) $\{z_n\}_n$ és d'interpolació per funcions harmòniques i positives*

*(ii) Existeixen constants $M > 0$, $0 < \alpha < 1$ tal que per totes $n, l > 0$ es compleix que*

$$\sharp\{z_k \textit{ amb } \beta(z_k, z_n) \leq l\} \leq M2^{\alpha l} \tag{3.3}$$

# Capítol 4

# Demostració del teorema principal

En el primer apartat recollim uns resultats auxiliars sobre majorització harmònica que utilitzarem a la prova de la necessitat.

## 4.1 Lemes per demostrar la necessitat

**Lema 4.1.1.** *Existeix una constant C tal que per tota funció u harmònica i positiva al disc, $u \in har^+(\mathbb{D})$ i tota col·lecció de quadrats de Carleson $\{Q_k\}$, es compleix que $u(z) \geq C \sum_k u(z_k)\, \omega(z, T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup_n T(Q_n))$ per tot $z \in \mathbb{D} \setminus \cup T(Q_k)$.*

*Demostració.* Com que $u(z)$ i $\omega(z, T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup_n T(Q_n))$ són funcions harmòniques a $\mathbb{D} \setminus \cup_n T(Q_n)$, n'hi ha prou veient la desigualtat a $\partial(\mathbb{D} \setminus \cup T(Q_n)) = \partial\mathbb{D} \cup (\cup_n \partial T(Q_n))$.

(i) Si $z \in \partial\mathbb{D}$ aleshores $\omega(z, T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup_n T(Q_n)) = 0$ per tota k. Llavors $u(z) \geq 0 = C \sum_k u(z_k)\, \omega(z, T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup_n T(Q_n))$

(ii) Si $z \in T(Q_j)$, llavors $\omega(z, T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup_n T(Q_n)) = 0$ si $k \neq j$ i $\omega(z, T(Q_j), \mathbb{D} \setminus \cup_n T(Q_n)) = 1$. Per tant $C \sum_k u(z_k)\, \omega(z, T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup T(Q_n)) = Cu(z_j)$. Com que $z, z_j \in T(Q_j)$, aplicant l'observació 1.4.1 a la funció u, obtenim que $u(z) \geq Cu(z_j)$. Així doncs podem concloure que $u(z) \geq C \sum_k u(z_k)\, \omega(z, T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup_n T(Q_n))$

□

**Lema 4.1.2 (de Hall).** *[HUL1]*

*Existeix una constant $0 < C < 1$ tal que la mesura harmònica d'un subconjunt qualsevol E del disc unitat tancat $\overline{\mathbb{D}}$ evaluada en el 0 satisfà:*

$$\omega(0, E, \mathbb{D} \setminus E) \geq C\omega(0, E_{rad}, \mathbb{D}) = C|E_{rad}|,$$

*on $E_{rad}$ és la projecció radial de E a $\partial\mathbb{D}$.*

## 4.2 Necessitat

Es tracta de provar que si $\{z_n\}$ és una successió d'interpolació, llavors existeixen contants $M > 0$ i $\alpha < 1$ tals que $\sharp\{z_k : \beta(z_k, z_n) \leq l\} \leq M2^{\alpha l},\ l = 1, 2, ...$ i per tot punt $z_n$ de la successió.

La demostració de la necessitat consta de dues etapes:

(1) Veurem que ens podem reduir al cas $z_n = 0$

(2) Aplicant Harnack i el Lema de Hall obtindrem $\sharp\{z_k$ tal que $\beta(z_k, 0) \leq l\} \leq M2^{\alpha l}$, $l = 1, 2, ...$

**Veiem (1):**

Suposem que $\{z_n\}$ és d'interpolació per $har^+(\mathbb{D})$. Fem ús de la invariància conforme del problema d'interpoació; per cada $z_n$ podem considerar un automorfisme del disc, $\tau_n : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ que envia el punt $z_n$ al 0.

La successió $\{\widetilde{z}_k\} := \{\tau_n(z_k)\}_k$ és també una successió d'interpolació per $har^+(\mathbb{D})$, i a més a més, $\sharp\{z_k$ tal que $\beta(z_k, z_n) \leq l\} = \sharp\{\widetilde{z}_k$ tal que $\beta(\widetilde{z}_k, 0) \leq l\}$

Així doncs ens hem reduit al cas $z_n = 0$; només cal comprovar que $\sharp\{\widetilde{z}_k$ tal que $\beta(\widetilde{z}_k, 0) \leq l\} \leq M2^{\alpha l}$, $l = 1, 2, ....$

**Veiem (2):**

Donada $\{z_n\}$ una successió d'interpolació amb $z_0 = 0$, volem veure que

$$\sharp\{z_k \text{ tal que } \beta(z_k, 0) \leq l\} \leq M2^{\alpha l},\ l = 1, 2, ...$$

Si interpolem els valors $\left\{ \begin{array}{ll} w_0 = 1 & \\ w_n = 2^{\varepsilon\beta(0,z_n)} & \text{per } n > 0 \end{array} \right.$, per hipòtesi, existeix una funció $u \in har^+(\mathbb{D})$ que interpola aquests valors, és a dir, $u(z_n) = w_n$ per n=0,1,...

Per cada $z_n$, considerem $Q_n$ el cub diàdic tal que $z_n \in T(Q_n)$ i fixada $l > 0$, definim $A(l) = \{k :\ l \leq \beta(z_k, 0) < l + 1\}$. Aplicant el lema 4.1.1 al punt z=0 i la propietat de subadditivitat de la mesura harmònica, obtenim:

$$1 = u(0) \geq \sum_{k\in A(l)} C_1\ 2^{\varepsilon\beta(0,z_k)}\ \omega(0, T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup_{k\in A(l)} T(Q_k)) \geq$$

$$\geq C_1\ 2^{\varepsilon l}\ \omega(0, \cup_{k\in A(l)} T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup_{k\in A(l)} T(Q_k))$$

Ara apliquem el Lema de Hall 4.1.2 al conjunt $\cup_{k\in A(l)} T(Q_k) \subset \overline{\mathbb{D}}$ i tenim que

$$1 \geq C_1\ 2^{\varepsilon l} |Proj_{rad} \cup_{k\in A(l)} T(Q_k)|$$

Per l'observació 1.2.4, existeix una constant K que només depèn de la constant de separació de la successió $\{z_n\}$ tal que donat $k \in A(l)$ es té que $\sharp\{j \in A(l) :\ T(Q_k) \cap T(Q_j) \neq \emptyset\} \leq K$. Per tant el darrer terme de la fórmula anterior pot ser acotat inferiorment per

$$\frac{C_1}{K}\ 2^{\varepsilon l} \sum_{k\in A(l)} l(Q_k) \geq C_2\ 2^{\varepsilon l} \sum_{k\in A(l)} 2^{-l} = C_2\ 2^{(\varepsilon-1)l}\ \sharp\{k \in A(l)\}$$

És a dir, prenent $\alpha = 1 - \varepsilon$, tenim

$$\sharp\{k \in A(l)\} \leq \frac{1}{C_2} 2^{\alpha l}$$

Llavors

$$\sharp\{z_k \text{ tal que } \beta(z_k,0)\le l\} = \sum_{q=0}^{l} \sharp\{k\in A(q)\} \le \frac{2^\alpha}{C_2(2^\alpha-1)}2^{\alpha l} = M2^{\alpha l},$$

com volíem demostrar.

## 4.3 Lemes per demostrar la suficiència

Enunciarem dos resultats auxiliars que utilitzarem per demostrar la suficiència del teorema:

**Lema 4.3.1.** *Donada una successió separada* $\{z_n\}\in\mathbb{D}$ *que compleixi* (3.3)*, és a dir,*

$$\sharp\{z_k \textit{ tal que } \beta(z_k,z_n)\le l\}\le M2^{\alpha l}, \forall z_n, \forall l>0$$

*i donat* $\varepsilon_0>0$*, existeix una família de conjunts* $\{G_n,\ n=1,2,...\}\subset\partial\mathbb{D}$*, disjunts dos a dos tals que per* $N$ *suficientment gran es compleix:*

*(a)*

$$\omega(z_n, \cup_{k:\beta(z_k,z_n)\le N} G_k)\ge 1-\varepsilon_0 \quad \textit{per tot} \quad z_n\in\{z_n\}_n \tag{4.1}$$

*(b)*

$$\sum_{\beta(z_k,z_n)\ge N} 2^{\eta\,\beta(z_k,z_n)}\,\omega(z_n,G_k)\le\varepsilon_0 \quad \textit{per tot} \quad z_n\in\{z_n\}_n, \tag{4.2}$$

*on* $\eta>0$ *depèn de* $\varepsilon_0$ *i dels quantificadors* $M$*,* $\alpha$ *de* (3.3) *.*

L'espai de funcions harmòniques i positives té estructura de con. El resultat que presentem a continuació és un teorema clàssic en anàlisi convexa. Pot ser entès com una versió del teorema de Hahn-Banach per cons.

**Lema 4.3.2 (de Farkas-Minkowski).** *Siguin* $w, u_1, ..., u_m$ *punts de* $\mathbb{R}^n$*. Són equivalents:*

*(i) Existeixen* $\alpha_1,...,\alpha_m\ge 0$ *tals que* $w=\sum_{j=1}^m \alpha_j\, u_j$

*(ii) El sistema* $\left\{\begin{array}{ccl} <u_j,x> & \le & 0,\quad j=1,...,m \\ <w,x> & > & 0 \end{array}\right\}$ *no té solució per* $x\in\mathbb{R}^n$*.*

## 4.4 Suficiència

Per veure que el lema 4.3.1 implica la suficiència del Teorema mostrarem primer que ens podem reduir al cas en què la successió de nombres sigui finita sense control en el número de punts:

Donada la successió de punts $\{z_n\} \in \mathbb{D}$, i els valors $\{w_n\} \geq 0$, si fixada $N > 0$ existeix una funció harmònica i positiva $u_N$ amb $u_N(z_j) = w_j \ j = 1, ..., N$, per la proposició 1.3.1, existeix una mesura $\mu_N$ positiva a $\partial\mathbb{D}$ de forma que

$$u_N(z) = P_z[d\mu_n] = \int \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} d\mu_N(\theta)$$

Fent una transformació de Möbius als punts $\{z_n\}$ podem suposar que $z_1 = 0$, i tenim

$$\mu_N(\partial\mathbb{D}) = u_N(0) = w_1$$

Aplicant el teorema d'Alougulu-Banach a la successió de mesures $\{\mu_N\}$, obtenim una mesura $\mu$ que és el límit dèbil d'una parcial $\{\mu^k\}$de la successió de mesures. És a dir, per tota funció $\varphi$ contínua a la vora del disc, $\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi \, d\mu^k$ tendeix a $\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi \, d\mu$. Ara només cal prendre com a funció $\varphi$ el nucli de Poisson $P_z$ i es comprova fàcilment que la funció u(z) definida com $u(z) = P_z[d\mu]$ interpola els valors $w_n$ als punts $z_n$ per n=1,...

Un cop vista la reducció al cas finit, és convenient estructurar la prova de la suficiència en tres etapes:

(1r) Veurem que la condició (3.3) implica que estem en les hipòtesis del teorema d'interpolació per funcions harmòniques i acotades al disc de L. Carleson i J. Garnett [CG1].

(2n) Donada una partició $\{z_n\} = T \cup S$, aplicant el lema 4.3.1 obtindrem una funció harmònica i positiva que complirà

$$\begin{aligned} u(z_n) &\geq w_n \ si \ z_n \in T \\ u(z_n) &\leq w_n \ si \ z_n \in S \end{aligned} \tag{4.3}$$

(3r) Fent un raonament amb el Lema de Farkas tindrem el teorema demostrat.

**Veiem (1r):**

Hem de veure que la condició (3.3) implica que estem en les hipòtesis del teorema d'interpolació per funcions harmòniques i acotades al disc [CG], és a dir, que existeix una constant $C > 0$ tal que $\sum_{z_n \in Q}(1-|z_n|) \leq C(M, \alpha) \ l(Q)$ per tot quadrat de Carleson Q.

Donat $\widetilde{z} \in \mathbb{D}$ qualsevol, denotem per $Q(\widetilde{z})$ el quadrat de Carleson de forma que $\widetilde{z}$ és el centre de la seva tapa interior,

$$Q(\widetilde{z}) = \{re^{i\theta} : \ 0 < 1 - r \leq 1 - |\widetilde{z}|, \ Arg(\widetilde{z}) - \pi(1 - |\widetilde{z}|) < \theta \leq Arg(\widetilde{z}) + \pi(1 - |\widetilde{z}|)\}$$

Considerant la seva descomposició diàdica, siguin $Q_0, Q_1, ...$ els subcubs diàdics maximals tals que $T(Q_k) \cap \{z_n\} \neq \emptyset$. Fixat $m \in \mathbb{N}$, sigui $z^m$ un dels punts de $T(Q_m) \cap \{z_n\}$ i definim $A(l) = \{z_n : \beta(z_n, z^m) \simeq l, z_n \in Q_m\}$. Llavors

$$\sum_{z_n \in Q_m} (1 - |z_n|) \leq \sum_{l \geq 0} \sum_{z_n \in A(l)} (1 - |z_n|) \leq \sum_{l \geq 0} \sum_{z_n \in A(l)} 2^{-l}\, l(Q_m) \leq$$
$$\leq \sum_{l \geq 0} M\, 2^{\alpha l}\, 2^{-l}\, l(Q_m) = \frac{M}{1 - 2^{(\alpha - 1)}}\, l(Q_m) = C(M, \alpha)\, l(Q_m)$$

A més a més, com que la maximalitat implica que els quadrats $\{Q_m\}$ són dos a dos disjunts, es té que

$$\sum_{z_n \in Q} (1 - |z_n|) = \sum_{m \geq 0} \sum_{z_n \in Q_m} (1 - |z_n|) \leq \sum_{m \geq 0} C(M, \alpha) l(Q_m) \leq C(M, \alpha) l(Q)$$

**Veiem (2n):**

Fixada una partició $\{z_n\} = T \cup S$ hem de construir una funció $u$ que compleixi (4.3).

Com que els punts $\{z_n\}$ compleixen la condició de Carleson, podem aplicar el teorema 2.2.3 de [CG1]. Prenem $\left\{ \begin{array}{lcl} a_n = 1 & si & z_n \in T \\ a_n = -1 & si & z_n \in S \end{array} \right.$ i així obtenim $\widetilde{h} \in h^\infty(\mathbb{D})$ que interpola els valors $\{a_n\}_n$ als punts $\{z_n\}_n$. A continuació reescalem per obtenir una funció $h$ acotada per 1. Definim la nova funció com

$$h = \frac{\widetilde{h}}{||\widetilde{h}||_\infty}$$

D'aquesta forma, $||h||_\infty = 1$ i si $\delta = 1/||\widetilde{h}||_\infty$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} h(z_n) \geq \delta & si & z_n \in T \\ h(z_n) \leq -\delta & si & z_n \in S \end{array} \right\} \tag{4.4}$$

Donat $\varepsilon_0 > 0$ a escollir, prenem els conjunts $\{G_n\}$ i $N > 0$ que verifiquin el lema 4.3.1 i definim

$$u(z) = \sum_k w_k\, P_z(\chi_{G_k}(1 + h)) = \sum_k w_k \int_{G_k} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} (1 + h(\xi)) \frac{|d\xi|}{2\pi}$$

A continuació verifiquem que aquesta funció $u$ compleix

$$(4.3) \left\{ \begin{array}{lcllcl} u(z_n) & \geq & w_n & si & z_n \in T \\ u(z_n) & \leq & w_n & si & z_n \in S \end{array} \right\}$$

Fixat $z_n$, escrivim $u(z_n) = (I) + (II)$, on

$$\textbf{(I)} = \sum_{k : \beta(z_k, z_n) \leq N} w_k\, P_{z_n}(\chi_{G_k}(1 + h))$$

$$\textbf{(II)} = \sum_{k:\beta(z_k,z_n)>N} w_k \; P_{z_n}(\chi_{G_k}(1+h))$$

**(II) és un terme d'error:**

La condició de regularitat sobre els valors a interpolar ens dóna que

$$\frac{w_k}{w_n} \leq 2^{\varepsilon \; \beta(z_k,z_n)}$$

Fixem $0 < \varepsilon < \eta$ on $\eta$ és la constant que apareix al lema 4.3.1. Com que $||h||_\infty \leq 1$,

$$(II) = \sum_{k:\beta(z_k,z_n)>N} w_k \; P_{z_n}(\chi_{G_k}(1+h)) \leq w_n \sum_{k:\beta(z_k,z_n)>N} 2^{\varepsilon \; \beta(z_k,z_n)} \; P_{z_n}(\chi_{G_k}(1+h)) \leq$$

$$\leq 2w_n \sum_{k:\beta(z_k,z_n)>N} 2^{\varepsilon \; \beta(z_k,z_n)} \; \omega(z_n, G_k)$$

Aplicant (b) del lema 4.3.1 obtenim que $(II) \leq 2\varepsilon_0 w_n$.

**Estimem el terme (I):**

Aquí els punts $\{z_k\}$ rellevants compleixen que $\beta(z_k, z_n) \leq N$, i per la condició (3.2),

$$2^{-\varepsilon N} \leq \frac{w_k}{w_n} \leq 2^{\varepsilon N}$$

Així doncs, si denotem per $E_n = \cup_{k:\beta(z_k,z_n)\leq N} G_k$, deduïm que

$$2^{-\varepsilon N} \omega_n \; P_{z_n}\Big(\chi_{E_n}(1+h)\Big) \leq (I) \leq 2^{\varepsilon N} \omega_n \; P_{z_n}\Big(\chi_{E_n}(1+h)\Big)$$

Per l'apartat (a) del Lema 4.3.1, $\omega(z_n, \partial\mathbb{D} \setminus E_n) \leq \varepsilon_0$. Per tant,

$$P_{z_n}(\chi_{E_n}(1+h)) = P_{z_n}(1+h) - P_{z_n}(\chi_{\partial\mathbb{D}\setminus E_n}(1+h)) \geq (1+h(z_n)) - 2\varepsilon_0,$$

Conseqüentment, $2^{-\varepsilon N} w_n \; (1 + h(z_n) - 2\varepsilon_0) \leq (I) \leq 2^{\varepsilon N} w_n \; (1 + h(z_n))$

Ara,

(a) si $\{z_n\} \in T$, tenim que $h(z_n) \geq \delta$ i per tant $(I) \geq w_n \; 2^{-\varepsilon N} \; (1 + \delta - 2\varepsilon_0)$
En aquest cas, $u(z_n) = (I) + (II) \geq w_n \; 2^{-\varepsilon N} \; (1 + \delta - 2\varepsilon_0)$

(b) si $\{z_n\} \in S$, tenim que $h(z_n) \leq -\delta$ i per tant $(I) \leq 2^{\varepsilon N} \; w_n \; (1 - \delta)$. Per tant,
$u(z_n) = (I) + (II) \leq w_n \; 2^{\varepsilon N} \; (1 - \delta) + 2\varepsilon_0 w_n = w_n \; (2^{\varepsilon N}(1 - \delta) + 2\varepsilon_0)$.

Prenent $\varepsilon_0$ i $\varepsilon$ prou petits $\big(\varepsilon_0 < \frac{\delta}{4}$ i $\varepsilon < \frac{1}{N} \; log_2(\frac{2-\delta}{2-2\delta})\big)$, obtenim que aquesta funció u compleix les desigualtats de (4.3):

$$\begin{cases} u(z_n) & \geq & w_n & si & z_n \in T \\ u(z_n) & \leq & w_n & si & z_n \in S \end{cases}$$

La idea és que $\delta$ es manté fixa mentre que els altres quantificadors $\varepsilon_0$ i $\varepsilon$ poden fer-se arbitràriament petits.

**Veiem (3r):**

Siguin $\{z_n\}_{n=1}^N$ i $\{w_n\}_{n=1}^N$ complint les hipòtesis (3.2) i (3.3) del teorema respectivament (tal i com hem vist a l'inici de la prova de la suficiència ens hem reduït al cas en què la successió de punts $\{z_n\}_n$ és finita però sense tenir un control en el nombre de punts).

Donada una partició de la successió $\{z_n\} = T_k \cup S_k$ sabem que existeix una funció $u_k \in h^+(\mathbb{D})$ tal que

$$\left.\begin{array}{lcllc} u_k(z_n) & \geq & w_n & si & z_n \in T_k \\ u_k(z_n) & \leq & w_n & si & z_n \in S_k \end{array}\right\}$$

Veurem que existeixen $\alpha_k \geq 0$ tals que $u = \sum \alpha_k u_k$ compleix $u(z_n) = w_n$ per tot $z_n \in \{z_n\}$. És a dir, veurem que $\{w_n\} = \sum_k \alpha_k \{u_k(z_n)\}$.

Aplicant el lema de Farkas 4.3.2 hem de veure que si $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ compleix

$$\sum_{n=1}^N u_k(z_n)\ x_n \leq 0, \text{ per tot } k, \text{ aleshores:}$$

$$\sum_{n=1}^N w_n\ x_n \leq 0 \tag{4.5}$$

Definim $\mathcal{F} = \{z_n : x_n \geq 0\}$. Llavors podem posar $\{z_n\} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}^c$, i pel segon pas, existeix $u \in har^+(\mathbb{D})$ tal que

$$\left.\begin{array}{lcllll} u_{\mathcal{F}}(z_n) & \geq & w_n & \text{si} & z_n \in \mathcal{F} & \text{és a dir, } x_n \geq 0 \\ u_{\mathcal{F}}(z_n) & \leq & w_n & \text{si} & z_n \notin \mathcal{F} & \text{és a dir, } x_n < 0 \end{array}\right\}$$

I d'aquí és immediat comprovar que $x_n w_n \leq x_n u_{\mathcal{F}}(z_n)$ per tota n. I per tant,

$$\sum_n w_n x_n \leq \sum_n u_{\mathcal{F}}(z_n) x_n \leq 0 \quad \text{per hipòtesi.}$$

El lema de Farkas 4.3.2 ens proporciona uns coeficients $\{\alpha_k \geq 0\}$ de manera que la funció $u(z) = \sum_{k=1}^N \alpha_k\ u_k(z) \in h^+(\mathbb{D})$ i interpola els valors $\{w_n\}$ als punts $\{z_n\}$. Així doncs, per acabar la prova, únicament fa falta demostrar el lema 4.3.1.

## 4.5 Demostració del Lema 4.3.1

Donats $z_k \in \{z_n\}$, $z \in \mathbb{D}$, $C_1 > 0$ amb $C_1(1 - |z|) \leq 1$ definim:

$I_k = \{e^{i\theta} : \frac{|\theta - Argz_k|}{\pi} \leq 1 - |z_k|\}$

$Q(z) = \{re^{i\theta} : 0 < 1 - r \leq 1 - |z|,\ Argz - \pi(1 - |z|) < \theta \leq Argz + \pi(1 - |z|)\}$

$C_1 Q(z) = \{re^{i\theta} : 0 < 1 - r \leq C_1(1 - |z|),\ Argz - C_1\pi(1 - |z|) < \theta \leq Argz + C_1\pi(1 - |z|)\}$

Abans de demostrar el lema 4.3.1 enunciarem i demostrarem alguns lemes tècnics:

**Lema 4.5.1.** *Fixat $\varepsilon_0 > 0$, podem triar $M_0 = M_0(\varepsilon_0) > 0$ prou gran per tal que*

$$\omega(z_k, M_0 I_k) \geq 1 - \frac{\varepsilon_0}{100}, \quad k = 1, 2, ... \tag{4.6}$$

*Demostració.* Mirem la mesura harmònica al complementari del conjunt:

$$\omega(z_k, \partial\mathbb{D}\backslash M_0 I_k) = \int_{\partial\mathbb{D}\backslash M_0 I_k} \frac{1-|z_k|^2}{|e^{it}-z_k|^2} dt = (1-|z_k|^2) \int_{\{e^{it}:\, |t-Argz_k|>\pi M_0(1-|z_k|)\}} \frac{dt}{|e^{it}-z_k|^2}$$

Utilitzem que $|t - Argz_k| \leq C\ |e^{it} - e^{i\ Argz_k}| \leq C\ |e^{it} - z_k| + C\ (1-|z_k|)$ per certa constant $C > 0$ i deduïm que el darrer terme pot ser acotat superiorment per

$$(1-|z_k|^2) \int_{\{e^{it}:\, |e^{it}-z_k|>(\frac{\pi M_0}{C}-1)(1-|z_k|)\}} \frac{dt}{|e^{it}-z_k|^2} \leq \frac{1-|z_k|^2}{(\frac{\pi M_0}{C}-1)(1-|z_k|)} \leq \frac{2}{\frac{\pi M_0}{C}-1}$$

Per tant, $\omega(z_k, M_0 I_k) = 1 - \omega(z_k, \partial\mathbb{D} \setminus M_0 I_k) \geq 1 - \frac{2}{\frac{\pi M_0}{C}-1} \geq 1 - \frac{\varepsilon_0}{100}$ si prenem $M_0 > \frac{200C\pi}{\varepsilon_0} + \pi$

□

El següent resultat és anàleg a l'observació 1.2.2.

**Lema 4.5.2.** *Fixada $M > 0$, existeix una constant $C(M) > 0$ tal que per tota parella de punts $z, w \in \mathbb{D}$ amb $20M(1-|z|) \leq 1$ i $w \in 20MQ(z)$, llavors $\left|\beta(z,w) - log_2\left(\frac{1-|z|}{1-|w|}\right)\right| \leq C(M)$*

*Demostració.* Fem alguns càlculs:

$$\beta(z,w) = log_2 \frac{1+|\frac{z-w}{1-\widetilde{w}z}|}{1-|\frac{z-w}{1-\widetilde{w}z}|} = 2log_2\left(1+\left|\frac{z-w}{1-\widetilde{w}z}\right|\right) - log_2\left(1-\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|^2\right) = (I)+(II)$$

Observem que

$$|1-\overline{w}z|^2 \geq (1-|z||w|)^2 \geq (1-|z|)^2$$

i que

$$|1-\overline{w}z| \leq |\frac{1}{\overline{w}} - z| \leq |\frac{1}{\overline{w}} - e^{iArgw}| + |e^{iArgw} - z| = \frac{1-|w|}{|w|} + |e^{iArgw} - z| \leq$$

$$\leq \frac{20M(1-|z|)}{1/2} + (20M\pi+1)(1-|z|) = (40M + 20M\pi + 1)(1-|z|)$$

Per tant,
$(I) = C_0$ *on* $0 \leq C_0 \leq 2$
$(II) = -log_2 \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{w}z|^2} \leq -log_2 \frac{1}{C_1}\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{(1-|z|)^2} = log_2 \frac{C_1}{(1+|z|)(1+|w|)} + log_2\left(\frac{1-|z|}{1-|w|}\right) = C_2 + log_2\left(\frac{1-|z|}{1-|w|}\right)$, on $-2 \leq C_2 \leq 2\ log_2\ (40M + 20M\pi + 1)$
És a dir,

$$\beta(z,w) = C_3 + log_2\left(\frac{1-|z|}{1-|w|}\right)$$

amb $-2 \leq C_3 \leq 2 + 2\ log_2\ (40M + 20M\pi + 1)$.

□

**Lema 4.5.3.** *Fixada $M_0 > 0$, existeix una constant $\widetilde{C}(M_0)$ tal que per tota parella de punts $z, w \in \mathbb{D}$ amb $|z| < |w|$, $|z - e^{iArgw}| \leq 6M_0(1-|z|)$, llavors $\left|\beta(z,w) - log_2\left(\frac{1-|z|}{1-|w|}\right)\right| \leq \widetilde{C}(M_0)$*

*Demostració.* La demostració és anàleg a l'anterior utilitzant:

$$|1-\overline{w}z| \leq |\frac{1}{\overline{w}} - z| \leq |\frac{1}{\overline{w}} - e^{iArgw}| + |e^{iArgw} - z| = \frac{1-|w|}{|w|} + |e^{iArgw} - z| \leq$$

$$\leq \frac{1-|z|}{1/2} + 6M_0(1-|z|) = (2+6M_0)(1-|z|)$$

□

La construcció dels conjunts $\{G_n\}$ que verifiquen les condicions del lema pot ser estructurada en tres etapes:

i) Fixat $\delta > 0$ petit, construcció de certs punts $z_n^\gamma(k) \in \mathbb{D}$ amb $I_{z_n} \subset I_{z_n^\gamma(k)}$ i

$$\sum_{\substack{z_n \in 20M_0Q(z_k) \\ \beta(z_n,z_k) \geq N}} 1 - |z_n^\gamma(k)| \leq \delta(1-|z_k|) \qquad \text{per tot } z_k \in \{z_n\} \tag{4.7}$$

ii) Construcció d'uns conjunts $E_k \subset \partial\mathbb{D}$ amb $E_k \cap E_j = \emptyset$ si $\beta(z_k, z_j) \geq C(N)$ tals que

$$\omega(z_k, E_k) \geq 1 - \frac{\varepsilon_0}{10} \tag{4.8}$$

iii) Construcció dels conjunts disjunts $G_n$ que compleixin (4.1) i (4.2).

**Veiem i):**

Aplicant el lema 4.5.1, fixat $\varepsilon_0 > 0$, triem $M_0 = M_0(\varepsilon_0) > 0$ prou gran per tal que

$$\omega(z_k, M_0 I_k) \geq 1 - \frac{\varepsilon_0}{100}, \quad k = 1, 2, ... \tag{4.9}$$

Observem que si $N = N(M_0)$ és suficientment gran respecte $M_0$ i

$$z \in 20M_0Q(z_k) \text{ } amb \text{ } \beta(z, z_k) \geq N \tag{4.10}$$

llavors utilitzant l'observació 1.2.4, $\frac{1-|z|}{1-|z_k|}$ és petit, de fet menor que $2^{C(M_0)-N}$.

Sigui $\gamma = \gamma(\alpha) > 0$ un número petit. Per cada $z_k$ considerem els punts $z_n \in \{z_n\}$ complint (4.10) i definim $z_n^\gamma(k)$ com el punt de $\mathbb{D}$ complint:

$$Arg(z_n) = Arg(z_n^\gamma(k))$$
$$\beta(z_n^\gamma(k), z_n) = \gamma\beta(z_k, z_n)$$
$$|z_n^\gamma(k)| < |z_n|$$

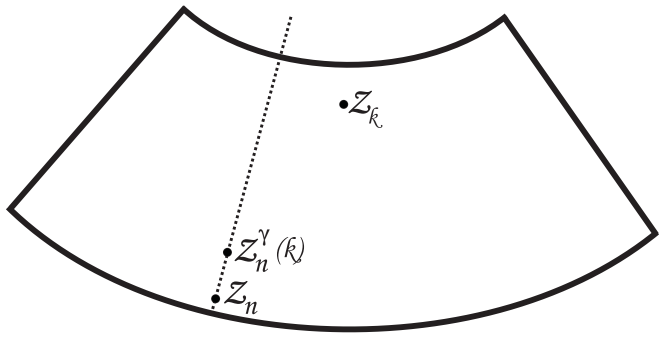


**Figura 2. Construcció dels punts $z_n^\gamma(k)$.**

Observem que fixat $\gamma > 0$, si $N = N(\gamma,\ M_0)$ és suficientment gran (respecte $M_0$ i $1/\gamma$), tenim que $\frac{1-|z_n^\gamma(k)|}{1-|z_k|}$ és petit. De fet, utilitzant que $\beta(z_n^\gamma(k), z_n) = \gamma\beta(z_k, z_n)$ i el lema 4.5.2 amb $(z_k, z_n)$ i amb $(z_n^\gamma(k), z_n)$, existeix $C > 0$ tal que

$$C^{-1}\ \gamma\ log_2\left(\frac{1-|z_k|}{1-|z_n|}\right) \leq log_2\left(\frac{1-|z_n^\gamma(k)|}{1-|z_n|}\right) \leq C\ \gamma\ log_2\left(\frac{1-|z_k|}{1-|z_n|}\right)$$

O dit d'una altra manera,

$$\left(\frac{1-|z_k|}{1-|z_n|}\right)^{C^{-1}\gamma} \leq \frac{1-|z_n^\gamma(k)|}{1-|z_n|} \leq \left(\frac{1-|z_k|}{1-|z_n|}\right)^{C\gamma} \tag{4.11}$$

Així doncs,

$$\sum_{\substack{z_n \in 20M_0Q(z_k)\\ \beta(z_n,z_k)\geq N}} (1-|z_n^\gamma(k)|) \ \leq\ (1-|z_k|)^{C\gamma} \sum_{\substack{z_n \in 20M_0Q(z_k)\\ \beta(z_n,z_k)\geq N}} (1-|z_n|)^{1-C\gamma} =$$

$$= (1-|z_k|)^{C\gamma}\sum_{j=N}^{\infty} \sum_{\substack{z_n \in 20M_0Q(z_k)\\ j\leq\beta(z_n,z_k)<j+1}} (1-|z_n|)^{1-C\gamma}$$

Utilitzem ara que pels punts $z_n$ que apareixen al segon sumatori, $1-|z_n| \approx 2^{-j}(1-|z_k|)$, més concretament, $1-|z_n| \leq K(M_0)2^{-j}(1-|z_k|)$. Llavors el doble sumatori anterior es pot acotar superiorment per

$$K(M_0)(1-|z_k|)\sum_{j=N}^{\infty} M\ 2^{\alpha j}\ 2^{-j(1-C\gamma)} \leq M\ K(M_0)(1-|z_k|)\frac{2^{N(\alpha+C\gamma-1)}}{1-2^{\alpha+C\gamma-1}} =$$

$$= K(M_0, M, \alpha, \gamma)2^{N(\alpha+C\gamma-1)}(1-|z_k|) \leq \delta(1-|z_k|),$$

prenent $\gamma$ prou petit per tal que $\alpha + C\gamma - 1 < 0$ i N prou gran, tenim doncs el resultat (4.7) desitjat:

$$\sum_{\substack{z_n \in 20M_0Q(z_k) \\ \beta(z_n,z_k)\geq N}} 1 - |z_n^\gamma(k)| \leq \delta(1-|z_k|) \qquad \text{per tot } z_k \in \{z_n\}$$

**Veiem ii):**

Hem de construir uns conjunts $E_k$ amb $\omega(z_k, E_k) \geq 1 - \frac{\varepsilon_0}{10}$.
Per cada $z_n^\gamma(k)$ considerem $I_n^\gamma(k) = \{e^{i\theta} : \frac{|\theta - Arg z_n^\gamma(k)|}{\pi} \leq 1 - |z_n^\gamma(k)|\}$. Observem que $I_n^\gamma \supset I_n$ i utilitzant el lema 4.5.2,

$$\frac{|I_n^\gamma(k)|}{|I_n|} = \frac{1-|z_n^\gamma(k)|}{1-|z_n|} \geq 2^{\beta(z_n^\gamma(k),z_n)-C(M)} = 2^{\gamma\beta(z_k,z_n)-C(M)} \geq 2^{\gamma N - C(M)} \to \infty \; quan \; N \to \infty$$

Fixada $M_0$, per cada $k$, denominem i definim

$$B(k) = \left\{ \quad z_n : \begin{array}{c} |z_n| \geq |z_k| \\ \beta(z_k,z_n) \geq N \\ z_n \in 2M_0Q(z_k) \end{array} \quad \right\}$$

Definim ara els conjunts

$$E_k := M_0 I_k \setminus \bigcup_{z_n \in B(k)} I_n^\gamma(k)$$

Fixada $\varepsilon_0 > 0$, triant M i N prou grans i $\gamma$ prou petit, veurem que $\omega(z_k, E_k) \geq 1 - \frac{\varepsilon_0}{10}$.
Per això trencarem la mesura harmònica en dos termes (I) i (II),

$$\omega(z_k, E_k) = \omega(z_k, M_0 I_k) - \omega(z_k, \bigcup_{z_n \in B(k)} I_n^\gamma(k)) = (I) - (II)$$

Utilitzem l'estimació (4.7) per acotar (II):

$$(II) = \int_{\cup I_n^\gamma(k)} \frac{1-|z_k|^2}{|e^{it}-z_k|^2}\frac{dt}{2\pi} \leq \sum_n \int_{I_n^\gamma(k)} \frac{1-|z_k|^2}{|e^{it}-z_k|^2}\frac{dt}{2\pi} \leq \sum_n \frac{1+|z_k|}{1-|z_k|}\int_{I_n^\gamma(k)} \frac{dt}{2\pi} \leq$$

$$\leq \frac{2}{1-|z_k|}\sum_n 1 - |z_n^\gamma(k)| \leq C\delta$$

I amb aquesta estimació i utilitzant (4.9) per estimar (I) obtenim

$$\omega(z_k, E_k) \geq 1 - \frac{\varepsilon_0}{100} - C\delta \geq 1 - \frac{\varepsilon_0}{10}$$

prenent $\delta$ prou petit (és a dir, M i N grans i $\gamma > 0$ petita).

**Veiem iii):**

Ordenem la successió $\{z_n\}$ de forma que $\{1-|z_n|\}$ sigui una successió decreixent i per cadascun d'aquests punts $z_n$ construirem els conjunts disjunts $\{G_n\}$ amb $G_n \subset E_n$ de forma inductiva complint:

$$\omega(z_n, \cup_{k:\beta(z_k,z_n)\leq N} G_k) \geq 1-\varepsilon_0 \qquad (4.1)$$

$$\sum_{k:\beta(z_k,z_n)\geq N} 2^{\eta\, \beta(z_k,z_n)}\, \omega(z_n, G_k) \leq \varepsilon_0, \quad (4.2)$$

Definim $G_1 = E_1$ que compleix $\omega(z_1, G_1) \geq 1-\varepsilon_0$ per (4.8)

Suposem definits $G_1, ..., G_{n-1}$ i anem a construir $G_n$. Considerem dues possibles situacions:

(1) Si $\beta(z_n, \{z_1, ..., z_{n-1}\}) \geq N$, definim $G_n = E_n$. Observem que

$\star$ $\omega(z_n, \cup_{k:\beta(z_k,z_n)\leq N} G_k) \geq \omega(z_n, G_n) = \omega(z_n, E_n) \geq 1-\varepsilon_0$ per (4.8) i per tant (4.1) es compleix en aquest cas.

$\star$ Comprovem que $G_n \cap G_k = \emptyset$ si $k < n$. Com que $E_n \subset M_0 I_n$, n'hi haurà prou veient que $M_0 I_n \cap E_k = \emptyset$ per $k < n$. Considerem dos casos:

(a) Si $z_n \in 2M_0 Q(z_k)$ llavors $E_k \cap M_0 I_n = \emptyset$ ja que $M_0 I_n \subset I_n^\gamma(k)$, $\beta(z_n, z_k) \geq N$ i $E_k = M_0 I_k \setminus \cup I_n^\gamma(k)$

(b) Si $z_n \notin 2M_0 Q(z_k)$, com que $|z_n| > |z_k|$ llavors $M_0 I_n \cap M_0 I_k = \emptyset$. Si no, es compliria que $|Arg z_n - Arg z_k| < 2M_0 |I_k|$ i conseqüentment $z_n \in 2M_0 Q(z_k)$. Per tant $E_k \cap M_0 I_n \subset M_0 I_k \cap M_0 I_n = \emptyset$

(2) Si $\beta(z_n, \{z_1, ..., z_{n-1}\}) \leq N$ considerem $\mathcal{F}_n = \{k \in [1, ..., n-1] \ : \ \beta(z_k, z_n) \leq N\}$ i distingim dos subcasos:

i) Si $\omega(z_n, \cup_{k\in\mathcal{F}_n} G_k) \geq 1-\varepsilon_0$, prenem $G_n = \emptyset$.
$\star$ És clar que $G_n \cap G_k = \emptyset$ si $k = 1, ..., n-1$
$\star$ i també que $\omega(z_n, \cup_{k:\beta(z_k,z_n)\leq N} G_k) \geq 1-\varepsilon_0$

ii) Si $\omega(z_n, \cup_{k\in\mathcal{F}_n} G_k) < 1-\varepsilon_0$, prenem $G_n = E_n \setminus \cup_{k\in\mathcal{F}_n} G_k$,
$\star$ $\omega(z_n, \cup_{k\,:\,\beta(z_k,z_n)\leq N} G_k) \geq \omega(z_n, E_n) \geq 1-\varepsilon_0$ per (4.8)
$\star$ També és cert que $G_n \cap G_k = \emptyset$ per $k = 1, ..., n-1$. En efecte, si $k \in \mathcal{F}_n$ és obvi. Si $k \notin \mathcal{F}_n$ llavors $\beta(z_n, z_k) \geq N$ i fent un raonament com en el primer cas en què $\beta(z_n, \{z_1, ..., z_{n-1}\}) \geq N$, tenim que $E_k \cap M_0 I_n = \emptyset$. Finalment, utilitzant que $G_k \subset E_k$ i $G_n \subset M_0 I_n$, obtenim el resultat desitjat.

Ara ja tenim construïts els conjunts $G_n$ inductivament. Ja hem vist que són disjunts i que compleixen (4.1). Només falta comprovar que aquests conjunts compleixen (4.2). És a dir, que

$$\sum_{k:\beta(z_k,z_n)\geq N} 2^{\eta\,\beta(z_k,z_n)}\,\omega(z_n,G_k)\leq\varepsilon_0 \text{ per tot } z_n\in\{z_n\}_n$$

Partim aquesta suma en tres termes A, B i C corresponents als punts $z_k$ tals que:

$$\begin{cases} z_k\in 20M_0Q(z_n) & \text{en } A\\ 2M_0I_k\cap M_0I_n=\emptyset & \text{en } B\\ \text{la resta} & \text{en } C\end{cases}$$

Tenim doncs,

$$\sum_{k:\beta(z_k,z_n)\geq N} 2^{\eta\,\beta(z_k,z_n)}\,\omega(z_n,G_k)=A+B+C$$

Analitzem cada terme per separt. Als dos primers utilitzarem que $\omega(z_n,G_k)\leq C(M_0)2^{-\beta(z_n,z_k)}$ si $z_k$ està en les condicions d'(A) o de (B). Al tercer terme farem ús de la constant $\gamma>0$.

1) El primer terme:

$$(A)=\sum_{\substack{k\,:\,z_k\in 20M_0Q(z_n)\\ \beta(z_k,z_n)\geq N}} 2^{\eta\,\beta(z_k,z_n)}\,\omega(z_n,G_k)$$

Analitzem els termes que hi intervenen:

$$\omega(z_n,G_k)=\int_{G_k}\frac{1-|z_n|^2}{|e^{it}-z_n|^2}\frac{dt}{2\pi}\leq\int_{M_0I_k}\frac{1-|z_n|^2}{|e^{it}-z_n|^2}\frac{dt}{2\pi}\leq C(M_0)\frac{1-|z_k|}{1-|z_n|}$$

D'altra banda, si $z_k\in 20M_0Q(z_n)$, pel lema 4.5.2, tenim que

$$\beta(z_k,z_n)\leq C_1(M_0)\,log_2\,\frac{1-|z_n|}{1-|z_k|}$$

Utilitzem doncs aquests dos fets per acotar el terme (A):

$$(A)\leq\sum_{\substack{k\,:\,z_k\in 20M_0Q(z_n)\\ \beta(z_k,z_n)\geq N}}\left(\frac{1-|z_n|}{1-|z_k|}\right)^{\eta\,C_1(M_0)} C(M_0)\,\frac{1-|z_k|}{1-|z_n|}=$$

$$=(1-|z_n|)^{\eta C_1(M_0)-1}\,C(M_0)\,\sum_{j=N}^{\infty}\sum_{\substack{k\,:\,z_k\in 20M_0Q(z_n)\\ j\leq\beta(z_k,z_n)<j+1}}(1-|z_k|)^{1-\eta\,C_1(M_0)}$$

Fent servir que $1-|z_k| \leq K(M_0)2^{-j}(1-|z_n|)$ pels punts $z_k$ que apareixen al sumatori anterior, (A) s'acota per

$$(1-|z_n|)^{\eta C_1(M_0)-1}\widetilde{C}(M_0)\sum_{j=N}^{\infty} M2^{\alpha j}\,2^{-j(1-\eta C_1(M_0))}(1-|z_n|)^{1-\eta C_1(M_0)} =$$

$$= \widetilde{C}(M_0)M\sum_{j=N}^{\infty} 2^{-j(1-\eta C_1(M_0)-\alpha)} \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$$

triant $\eta$ prou petita per tal que $\alpha - 1 + \eta C_1(M_0) < 0$ i N prou gran.

2) El segon terme:

$$(B) = \sum_{\substack{k\,:\,2M_0I_k\cap M_0I_n=\emptyset\\ \beta(z_k,z_n)\geq N}} 2^{\eta\,\beta(z_k,z_n)}\,\omega(z_n,G_k)$$

En aquest cas, $\left.\begin{array}{c} 2M_0I_k\cap M_0I_n=\emptyset \\ G_k\subset M_0I_k \end{array}\right\}$ Per tant, si $e^{it}\in M_0I_k$, obtenim

$$|1-z_n\overline{z}_k| \leq |\frac{1}{\overline{z}_k}-z_n| \leq |\frac{1}{\overline{z}_k}-e^{it}|+|e^{it}-z_n| \leq (\frac{1}{|\overline{z}_k|}-|z_k|)+|z_k-e^{it}|+|e^{it}-z_n| \leq$$

$$\leq \frac{2|I_k|}{|z_k|}+CM_0|I_k|+|e^{it}-z_n| \leq \widetilde{C}|e^{it}-z_n|$$

ja que $M_0|I_k| \leq K|e^{it}-z_n|$. Per tant,

$$\omega(z_n,G_k) = \int_{G_k}\frac{1-|z_n|^2}{|e^{it}-z_n|^2}\frac{dt}{2\pi} \leq C\frac{1-|z_n|^2}{|1-z_n\overline{z}_k|^2}|G_k| \leq$$

$$\leq CM_0\frac{(1-|z_n|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-z_n\overline{z}_k|^2} = CM_0 2^{-\beta(z_k,z_n)}$$

Per tant,

$$(B) \leq CM_0\sum_{k:\,\beta(z_k,z_n)\geq N} 2^{-\beta(z_k,z_n)(1-\eta)} \leq CM_0\sum_{n=N}^{\infty}\sum_{k:\,n\leq\beta(z_k,z_n)\leq n+1} 2^{-\beta(z_k,z_n)(1-\eta)} \leq$$

$$\leq CM_0\sum_{n=N}^{\infty}2^{-n(1-\eta)}M2^{\alpha n} = CM_0M\sum_{n=N}^{\infty}2^{(\alpha-1+\eta)n} \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$$

si $\alpha-1+\eta<0$, és a dir, $\eta$ prou petit i N prou gran.

3) El tercer terme:

Aquí utilitzarem la constant $\gamma > 0$ de la construcció dels conjunts $\{G_n\}$. Fixada $z_n$, definim

$$U(n) = \left\{ \quad z_k : \begin{array}{c} \beta(z_k, z_n) \geq N \\ z_k \notin 20M_0Q(z_n) \\ 2M_0I_k \cap M_0I_n \neq \emptyset \end{array} \quad \right\}$$

$$(C) = \sum_{z_k \in U(n)} 2^{\eta\, \beta(z_k, z_n)}\ \omega(z_n, G_k)$$

Observem que si $z_k \notin 20M_0Q(z_n)$ i $2M_0I_k \cap M_0I_n \neq \emptyset$ llavors $|z_k| < |z_n|$. En efecte, si $|z_k| \geq |z_n|$, llavors $1 - |z_k| \leq 1 - |z_n|$ i per tant $2M_0I_k \cap M_0I_n \neq \emptyset$ implicaria que $|Argz_n - Argz_k| \leq 5M_0(1 - |z_n|)$ i per tant $z_k \in 20M_0Q(z_n)$ que ens porta a contradicció. Així, els $z_k$ del sumatori $(C)$ compleixen $|z_k| < |z_n|$. Observem que com que $2M_0I_k \cap M_0I_n \neq \emptyset$, deduïm que $z_n \in 3M_0Q(z_k)$.

Per la construcció de $G_k$ tenim que $\begin{array}{c} \beta(z_k, z_n) \geq N \\ z_n \in 3M_0Q(z_k) \end{array}$ implica que $G_k \subset M_0I_k \backslash I_n^{(\gamma)}(k)$ i llavors,

$$\begin{aligned} \omega(z_n, G_k) &= \int_{G_k} \frac{1 - |z_n|^2}{|e^{it} - z_n|^2} \frac{dt}{2\pi} \leq \int_{\{t: e^{it} \in M_0I_k \backslash I_n^{\gamma}(k)\}} \frac{1 - |z_n|^2}{|e^{it} - z_n|^2} \frac{dt}{2\pi} \leq \\ &\leq \int_{\{t: |e^{it} - z_n| \geq C(1 - |z_n^{\gamma}(k)|)\}} \frac{1 - |z_n|^2}{|e^{it} - z_n|^2} \frac{dt}{2\pi} \leq \\ &\leq C_1(1 - |z_n|^2) \int_{1 - |z_n^{\gamma}(k)|}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leq C_2 \frac{1 - |z_n|}{1 - |z_n^{\gamma}(k)|} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Aquesta cota és pitjor que la que obteníem per $\omega(z_n, G_k)$ als termes $(A)$ i $(B)$, però encara és prou bona pels nostres interessos. El punt és que al terme $(C)$ sumem sobre "pocs"punts $z_k$.

En efecte, si $z_k$ apareix al terme $(C)$, llavors $|z_k| < |z_n|$ i també $2M_0I_k \cap M_0I_n \neq \emptyset$. Podem trobar una constant $t = t(M_0)$ tal que $z_k$ pertany a l'angle d'Stolz $\Gamma_n = \Gamma_n(M_0)$ amb vèrtex a $e^{iArgz_n}$ i obertura $t(M_0)$. Comprovem-ho: com que $2M_0I_k \cap M_0I_n \neq \emptyset$, tenim que $|Argz_k - Argz_n| \leq 5M_0(1 - |z_k|)$ i deduim que

$$|z_k - e^{iArgz_n}| \leq 1 - |z_k| + |e^{iArgz_k} - e^{iArgz_n}| \leq 1 - |z_k| + 5M_0(1 - |z_k|) \leq 6M_0(1 - |z_k|)$$

Definim $V(n) = \{z_k \in \Gamma_n : |z_k| < |z_n|,\ \beta(z_k, z_n) \geq N\}$ i llavors,

$$(C) = \sum_{z_k \in U(n)} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k) \leq \sum_{z_k \in V(n)} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k)$$

Utilitzem primer la desigualtat (4.12) i llavors (4.11) i obtenim

$$(C) \leq C_2 \sum_{z_k \in V(n)} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} \frac{1 - |z_n|}{1 - |z_n^{\gamma}(k)|} \leq C_2 \sum_{z_k \in V(n)} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} \left( \frac{1 - |z_n|}{1 - |z_k|} \right)^{C^{-1}\gamma}$$

Si $z_k \in \Gamma_n$ i $|z_k| < |z_n|$, llavors pel lema 4.5.3, $\beta(z_k, z_n) \leq \widetilde{C} log_2 \frac{1-|z_k|}{1-|z_n|}$. Així doncs, el terme (C) ens queda afitat superiorment per

$$C_2 \sum_{z_k \in V(n)} \left( \frac{1-|z_k|}{1-|z_n|} \right)^{\widetilde{C}\eta - C^{-1}\gamma} \leq C_2 \sum_{j=N}^{\infty} \sum_{\substack{k\,:\, z_k \in \Gamma_n \\ |z_k| < |z_n| \\ j \leq \beta(z_k, z_n) \leq j+1}} \left( \frac{1-|z_k|}{1-|z_n|} \right)^{\widetilde{C}\eta - C^{-1}\gamma}$$

Observem que com que la successió $\{z_n\}$ és separada, la suma interior té com a molt un número fix de sumands. Per tant, $\sharp\{z_k \in \Gamma_n : |z_k| < |z_n|; l \leq \beta(z_k, z_n) \leq l+1\} \leq C^* M$ i així doncs,

$$(C) \leq C_3 M \sum_{j=N}^{\infty} 2^{j(\widetilde{C}\eta - C^{-1}\gamma)} \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$$

prenent $\eta = \eta(\gamma)$ prou petit per tal que $\widetilde{C}\eta - C_1^{-1}\gamma < 0$ i triant N prou gran.

D'aquesta forma (4.2) es compleix i això acaba la prova del teorema.

# Capítol 5

# Altres resultats

## 5.1 El problema d'interpolació per funcions harmòniques i positives en dimensions superiors

Si ens plantegem el mateix problema d'interpolació per funcions harmòniques i positives al semiespai $\mathbb{R}_+^{d+1}$ amb $d > 1$, es pot veure, amb una demostràció anàloga a la que hem fet al cas del disc, que una condició necessària per tal que una successió $\{z_n\}$ sigui d'interpolació per $h^+$ és la següent:

Existeixen constants $M > 0,\ 0 < \alpha < 1$ tals que

$$\sharp\{z_k \text{ amb } \beta(z_k, z_n) \leq l\} \leq M2^{d\alpha l} \quad \text{per tot } z_n \text{ i } l = 1, ... \tag{5.1}$$

No sabem provar la suficiència d'aquesta condició perquè no sabem veure que una successió complint la condició anterior sigui d'interpolació per funcions harmòniques i acotades al semiespai.

Fent una prova anàloga a la de la suficiència, utilitzant els resultats de Carleson i Garnett [CG1] d'interpolació per funcions harmòniques i acotades a $\mathbb{R}_+^{d+1}$ amb $d > 1$, obtenim els següents resultats anàlegs als teoremes 2.2.4 i 2.2.5 respectivament:

**Proposició 5.1.1.** *(Interpolació per harmòniques i positives a $\mathbb{R}_+^{d+1}$)*
*Donada $\{z_n\}_n$ una successió separada a $\mathbb{R}_+^{d+1}$, amb $d > 1$, són equivalents:*

*i)* *$\{z_n\}$ compleix la condició* (5.1)

*ii)* *$\{z_n\}$ es pot posar com una unió finita de successions de forma que la unió de dues d'elles qualssevol és una successió d'interpolació per funcions harmòniques i positives*

També es pot provar el següent anàleg del resultat de L. Carleson i J. Garnett.

**Proposició 5.1.2.** *Donada una successió de punts $\{(x_k, y_k)\}$ de $\mathbb{R}_+^{d+1}$, suposem que existeixen unes constants $A, a > 0$ tals que per tota $k$, existeix un punt $b_k \in \mathbb{R}^d$, amb $|x_k - b_k| < Ay_k$ de forma que les boles $|x - b_k| < ay_k$ siguin disjuntes. Aleshores per tota successió de valors positius $\{w_k\}$ complint que existeix un $\varepsilon > 0$ amb*

$$|log_2 w_k - log_2 w_n| \leq \varepsilon\beta(z_k, z_n)$$

*per tota parella de punts $z_n, z_k$ de la successió, existeix una funció harmònica i positiva $u(x, y)$ a $\mathbb{R}_+^{d+1}$ que interpola els valors $w_k$ als punts $(x_k, y_k)$*

## 5.2 El problema d'interpolació per $\mathbb{H}^\infty$ sense zeros

Sigui $\mathbb{H}^\infty$ l'àlgebra de les funcions analítiques i acotades al disc unitat $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Una successió $\{z_j\} \subset \mathbb{D}$ s'anomena *successió d'interpolació* (per $\mathbb{H}^\infty$) si per tota successió de valors $\{a_j\} \in l^\infty$, el problema d'interpolació

$$f(z_j) = a_j \ (j = 1, 2, ...),$$

es pot resoldre amb una funció $f \in H^\infty$.

Ens interessaria investigar la possibilitat d'interpolar successions $\{a_j\} \in l^\infty$ que no s'anul·lin (és a dir, que satisfacin $a_j \neq 0$ per tota j) per funcions $f \in \mathbb{H}^\infty$ que no s'anul·lin.

Observem que si $f \in \mathbb{H}^\infty$ i sense zeros, aleshores $g(z) = -log\left(\frac{|f(z)|}{\|f\|_\infty}\right) = log\left(\frac{\|f\|_\infty}{|f(z)|}\right)$ és una funció harmònica i positiva. Si $f$ interpola els valors $\{w_n\}$ als punts $\{z_n\} \in \mathbb{D}$ aleshores igual que en el problema d'interpolació per funcions harmòniques i positives, la desigualtat de Harnack 1.3.2 dóna que

$$\left| log\left(log\left(\frac{\|f\|_\infty}{|w_n|}\right)\right) - log\left(log\left(\frac{\|f\|_\infty}{|w_m|}\right)\right)\right| \leq \beta(z_n, z_m)$$

Per deixar espai per a la interpolació, igual que en el cas de les funcions harmòniques i positives, introduïm la constant $\varepsilon > 0$ i definim les successions d'interpolació per funcions analítiques, acotades i sense zeros de la forma que enunciarem a continuació.

**Definició 5.2.1.** *Una successió $\{z_n\}_n \in \mathbb{D}$ s'anomena d'interpolació per funcions $\mathbb{H}^\infty$ sense zeros si per tota successió acotada $\{w_n\}_n$ de valors complexos tal que existeixen unes constants $\varepsilon > 0$, $C < \infty$ amb*

$$\left| log\left(log\left(\frac{C}{|w_n|}\right)\right) - log\left(log\left(\frac{C}{|w_m|}\right)\right)\right| \leq \varepsilon\, \beta(z_n, z_m) \tag{5.2}$$

*existeix una funció $f \in \mathbb{H}^\infty$ sense zeros amb $f(z_n) = w_n$ per tota $n$.*

## 5.3 Solució del problema

El següent teorema, que s'obté com a corol·lari del teorema 3.2.1 d'interpolació per funcions harmòniques i acotades, ens permet caracteritzar les successions d'interpolació per funcions holomorfes, acotades i sense zeros.

**Teorema 5.3.1.** *Una successió $\{z_n\}_n \in \mathbb{D}$ és d'interpolació per funcions $\mathbb{H}^\infty$ sense zeros si i només si existeixen constants $M > 0$, $\alpha < 1$ tals que*

$$\sharp\{z_k : \beta(z_k, z_n) \leq l\} \leq M\ 2^{\alpha l},\ \forall z_n, \forall l \tag{5.3}$$

*Demostració.* Comencem amb la necessitat:

Donat $0 < \varepsilon < 1$ i una successió $\{t_n\} \in \mathbb{R}^+$ complint

$$|\log(t_n) - \log(t_m)| \leq \varepsilon\beta(z_n, z_m), \tag{5.4}$$

prenem una successió $\{w_n\}_n \in \mathbb{C}$ amb $\|w_n\|_\infty < C$ i $t_n = log\Big(\frac{C}{|w_n|}\Big)$ per $n = 1, ...$ i així $\{w_n\}_n$ compleix (5.2). Per tant, existeix una funció $f \in \mathbb{H}^\infty$ sense zeros tal que $f(z_n) = w_n$. Definim ara la funció $u(z) = log\Big(\frac{C}{|f(z)|}\Big)$.

Clarament, per la manera com hem definit els $\{w_n\}$, $u(z)$ interpola els valors $\{t_n\}$ als punts $\{z_n\}$, és a dir $u(z_n) = t_n$ per tota n. La funció $u(z)$ és acotada inferiorment ja que $u(z) = log\Big(\frac{C}{|f(z)|}\Big) \geq log\Big(\frac{C}{||f||_\infty}\Big) = -k_1$

Resumint, tenim que $v(z) = u(z) + k_1 \ \in har^+(\mathbb{D})$ i interpola els valors $\{t_n + k_1\}$ en els punts $\{z_n\}$. Ara actuarem com en la demostració de la necessitat del teorema d'interpolació per funcions harmòniques i positives:

Prenem $t_n = 2^{\varepsilon\beta(0,z_n)}$ que compleixen la condició (5.4), apliquem el lema 4.1.1 a la funció $v(z) = u(z) + k_1$ i obtenim

$$v(z) = u(z) + k_1 \geq \sum_k C\ (u(z_k) + k_1)\ \omega(z, T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup T(Q_k)) =$$
$$= \sum_k C\ (2^{\varepsilon\beta(0,z_k)} + k_1)\ \omega(z, T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup T(Q_k))$$

Avaluem la funció $v(z)$ en $z = 0$ i per cada $l > 0$ denotem per $W(l) = \{z_k : l \leq \beta(z_k, 0) \leq l + 1\}$. D'aquesta forma, fent servir l'additivitat de la mesura harmònica, obtenim:

$$u(0) + k_1 \geq \sum_{z_k \in W(l)} C\ (2^{\varepsilon\beta(0,z_n)} + k_1)\ \omega(0, T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup_{z_k \in W(l)} T(Q_k)) \geq$$
$$\geq C\ (2^{\varepsilon l} + k_1)\ \omega(0, \cup_{z_k \in W(l)} T(Q_k), \mathbb{D} \setminus \cup T(Q_k))$$

Aplicant el lema de Hall 4.1.2, deduim que

$$u(0) + k_1 \geq C_2\ (2^{\varepsilon l} + k_1) \sum_{z_k \in W(l)} long(Q_k) \geq C_3\ (2^{\varepsilon l} + k_1) 2^{-l} \sharp\{z_k \in W(l)\}$$

Com que per tot $z_k \in W(l)$, $|Q_k| \simeq 2^{-l}$, es dedueix fàcilment que:

$$\sharp\{z_k\ tq\ \beta(0, z_k) \simeq l\} \leq \frac{u(0) + k_1}{c_3}\Big(\frac{2^l}{k_1 + 2^{\varepsilon l}}\Big) \leq \frac{u(0) + k_1}{c_3}\ 2^{(1-\varepsilon)l} \leq M\ 2^{\alpha l},$$

on les constants $M > 0$ i $\alpha = 1 - \varepsilon < 1$ són independents de $l$; només depenen de les constants que ens donen Harnack i el lema de Hall, la cota inferior de $u$ i la constant $\varepsilon$.

Veiem ara la suficiència:

Donada una successió $\{z_n\}$ complint (5.3) i $\{w_n\}$ complint (5.2) per certes constants $\varepsilon$ i C, volem trobar una funció $f \in \mathbb{H}^\infty$ sense zeros tal que $f(z_n) = w_n$ per $n = 1, 2, ....$

Prenem $t_n = log\frac{C}{|w_n|}$. Podem pensar $C > \|w_n\|_\infty$ ja que si $\{w_n\}$ compleix (5.2) per una certa C, també ho complirà per $\widetilde{C} > C$. És clar que la successió $\{z_n\}$ compleix les hipòtesis del teorema 3.2.1 d'interpolació per funcions harmòniques i positives. Per tant existeix una funció $u \in har^+(\mathbb{D})$ amb $u(z_n) = log\frac{C}{|w_n|} = log(C) + log\Big(\frac{1}{|w_n|}\Big)$

Definim $u_0 = u - log(C)$ que compleix $u_0(z_n) = log\Big(\frac{1}{|w_n|}\Big)$. Sigui $\tilde{u}_0(z)$ la funció harmònica conjugada de $u(z)$. Tindrem que $e^{-(u_0+i\tilde{u}_0)}$ és una funció holomorfa i acotada.

A més, $e^{-(u_0+i\tilde{u}_0)}(z_n) = |w_n|\ e^{-i\tilde{u}_0(z_n)} := |w_n|\ \gamma_n$ on $|\gamma_n| = 1$. Considerem $\{-Arg(\gamma_n)+ Arg(w_n)\} \in (0, 4\pi)$, com que $\{z_n\}$ és una successió d'interpolació per funcions $\mathbb{H}^\infty$, existeix una funció $g \in \mathbb{H}^\infty$ tal que $g(z_n) = -Arg(\gamma_n)+Arg(w_n)$ i conseqüentment, la funció $h(z) = e^{-u_0-i\tilde{u}_0}e^{ig}$ és una funció holomorfa, acotada, sense zeros tal que $h(z_n) = w_n$ per tota $n$.

$\square$

# Bibliografia


[A1] J.W. Anderson, *Hyperbolic Geometry.* Springer (1999), no. 4, 95–100.

[A2] E. Amar *Suites d'interpolation harmoniques* Journal d'Analyse Mathématique (1977), 197–211

[BN1] B. Boe & A. Nicolau *Interpolation by functions in the Bloch space* (2003), per aparèixer a Journal d'Analyse Mathématique

[C1] L. Carleson *An interpolation problem for bounded analytic functions* Amer. J. Math. 80 (1958), 921–930

[CG1] L. Carleson & J. Garnett, *Interpolating Sequences and Separation Properties.* Journal d'Analyse Mathématique 28 (1975), 273-299

[D1] K. Dyakonov *Moment problems for bounded functions* Communications in Analysis and Geometry 2 (1994), no. 4, 533–562.

[DN1] K Dyakonov & A. Nicolau *Free interpolation by nonvanishing analytic functions* Preprint (2004)

[HUL1] Hiriart-Urruty, J.-B., Lemaréchal, C. *Conex Analysis and Minimization Algorithms I* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 305, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1993)

[MS1] D.E. Marshall & C. Sundberg, *Harmonic measure and radial projection.* Transactions of the American Mathematical Society, (November 1989), vol. 316, N. 1.

[S1] K. Seip *Interpolating and sampling in spaces of analytic functions* American Mathematical Society (2004)

[V1] N. Th. Varapoulous *Sur un problème d'interpolation* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 274 (1972), A1539–A1542