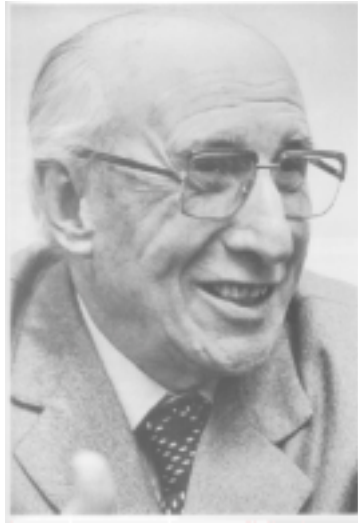


# Una mica de geometria integral hiperbòlica

E. Gallego

15 de març de 2002

## Lluís Antoni Santaló i Sors 1911–2001



Girona, (9 d'octubre de 1911) estudis de batxillerat.

Madrid, estudis de Matemàtiques. Rey-Pastor i Terrades.

Hamburg, seminaris Blaschke. Inicis en Geometria Integral.

Argentina, exili. Rey-Pastor, subdirector del *Instituto de Matemática* (B. Levi)

Princeton i Chicago, cursos i seminaris (Stone)

## Lluís Antoni Santaló i Sors 1911–2001

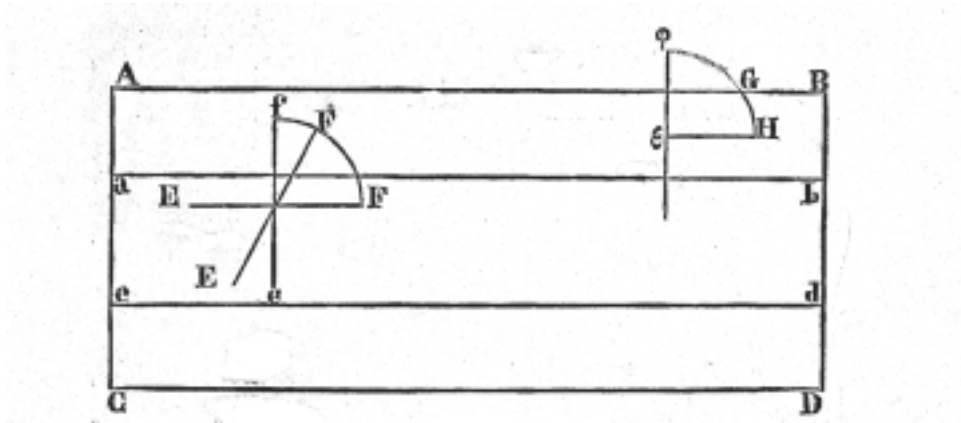
- X. Duran. *LLuís Santaló Col·lecció de Biografies de la FCR*, 1999.
  - A. Reventós. *LLuís Antoni Santaló i Sors Bol. Real Soc. Mat. Esp.*, 2002.
  - *Homenatge* durant la tardor 2002 en el marc de la '*Càtedra Lluís Santaló d'aplicacions de la matemàtica*'. Girona
- 
- Rey-Pastor, Santaló. *Geometria Integral Espasa Calpe, Argentina*.
  - L.A. Santaló. *Geometrias no euclidianas EUDEBA, Argentina*.
  - L.A. Santaló. *Integral geometry and geometric probability, Encicl. of Math. and its Appl.*, vol. 1 *Addison-Wesley, 1976*.

## Definició

*La geometria integral es preocupa de l'estudi, càlcul i aplicació de mesures invariants de conjunts d'objectes geomètrics*

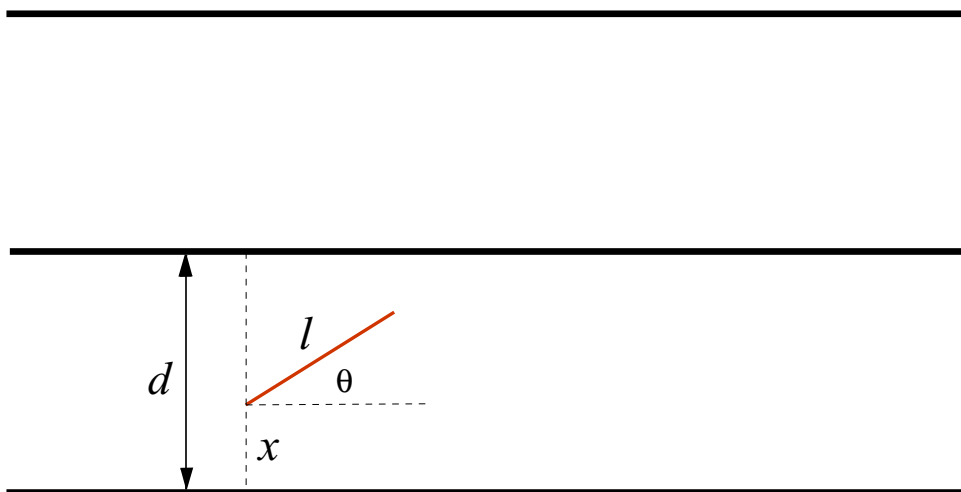
- Problema de l'agulla de Buffon (1777)
- Fórmula de Cauchy-Crofton (1832-1868)
- Paradoxa de Bertrand (1889)
- Probabilitats geomètriques, Deltheil (1926)
- Grup de geometria integral d'Hamburg: Blaschke, Chern, Hadwiger, Petkanschin, Santaló ... (1935)
- Geometria integral 'moderna': Federer, Schneider, Langevin ...

## El problema de Buffon

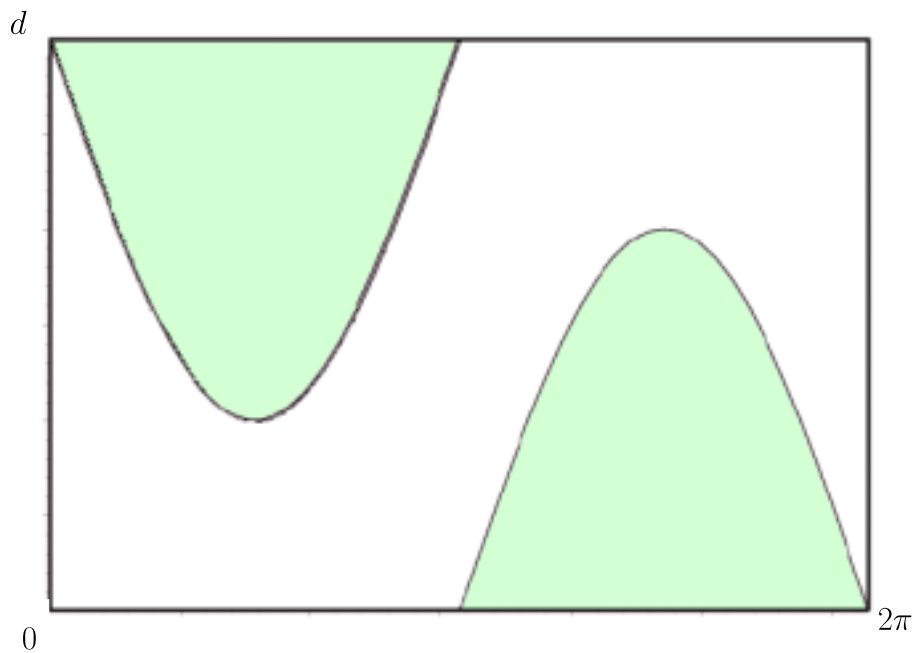


Calcular la probabilitat que un segment de longitud  $l$  llançat a l'atzar talli alguna de les línies paral·leles que estan a distància  $d$  més gran o igual que  $l$ .

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}} = \frac{\text{area zona ombrejada}}{\text{area total}}$$



## El problema de Buffon



L'àrea total mesura les possibles posicions i val  $2\pi d$ , l'àrea ombrejada ve donada per la relació  $x + l \sin \theta \geq d$  si  $\theta \leq \pi$  i  $d - (x + l \sin \theta) \geq d$  si  $\theta > \pi$ . El càlcul d'àrees dóna:

$$\frac{2l}{\pi d}$$

la probabilitat que volíem trobar.

## Fórmula de Cauchy-Crofton

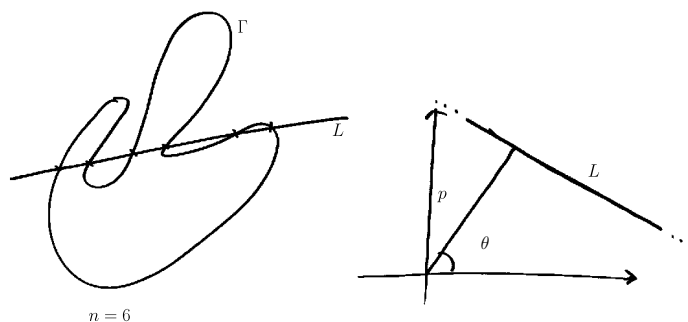
**Cauchy:** fent *promig* de les longituds de les projeccions d'una corba convexa sobre totes les rectes per l'origen s'obté el doble del perímetre de la corba. En general cal considerar la multiplicitat de les projeccions (*índex*).

**Crofton:** va reformular el resultat

*la integral del nombre d'interseccions amb una corba plana, de totes les rectes que la tallen, és el doble de la longitud de la corba*

o bé

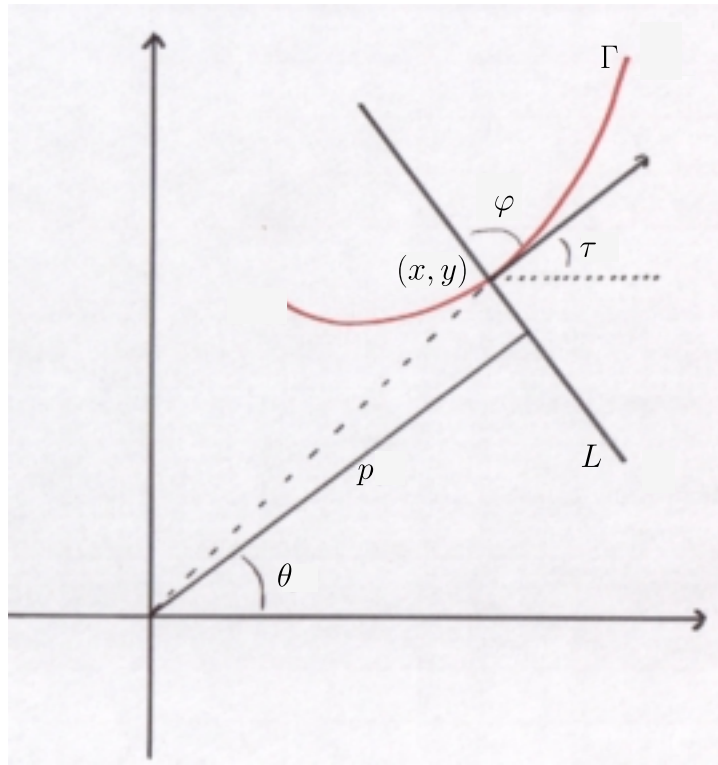
$$\int_{\Gamma \cap L \neq \emptyset} n(\Gamma \cap L) dp d\theta = 2 \text{long}(\Gamma)$$



Hem triat una '**densitat**' invariant per mesurar rectes:  $dp d\theta$ .

Part esquerra: definició de longitud d'un continu de punts (**longitud de Favard**).

## Fórmula de Cauchy-Crofton



Parametrizació per l'arc,  $(x(s), y(s))$  de la corba  $\Gamma$ . Parametritzem les rectes que tallen  $\Gamma$  per  $s$  i l'angle  $\varphi$  amb la tangent en el punt de tall. En aquestes coordenades

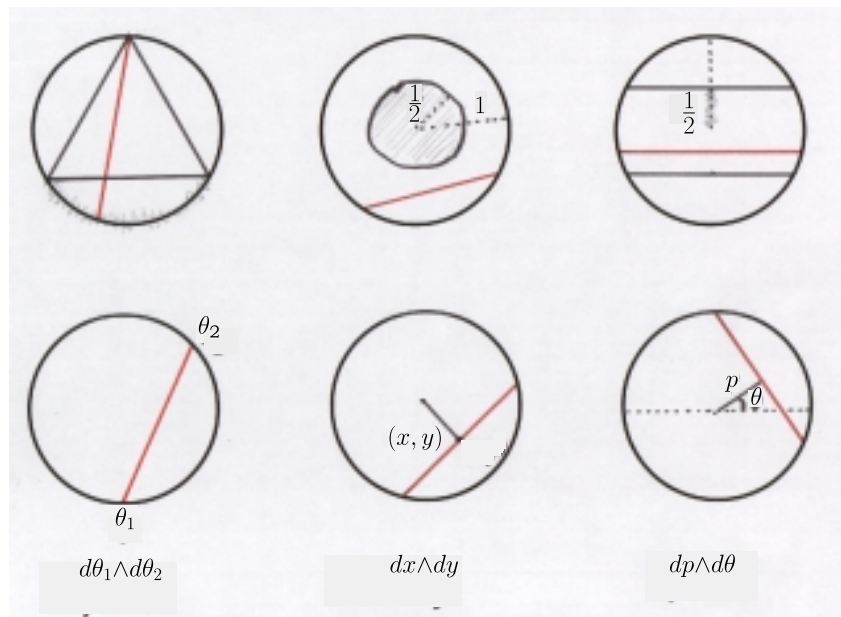
$$dL = dp d\theta = \sin \varphi d\varphi ds.$$

Com que  $\int_0^\pi \int_0^l \sin \varphi d\varphi ds = 2 \text{long}(\Gamma)$ , tenint en compte que considerem les rectes tantes vegades com tallen  $\Gamma$ , obtenim la fórmula de Cauchy-Crofton.



## Paradoxa de Bertrand

*Problema:* probabilitat que una corda d'un cercle agafada a l'atzar sigui més gran que el costat del triangle equilàter inscrit.



Primera solució:  $1/3$     Segona solució:  $1/4$

Tercera solució:  $1/2$

Les mesures utilitzades per 'comptar' rectes que tallen al cercle **no són invariants** per moviments rígids en el primer i el segon cas.

La mesura

$$dL = dp d\theta$$

és invariant per isometries

## Mesures invariants

El grup d'isometries  $\mathcal{M}$  del pla actua transitivament sobre les rectes



el conjunt de rectes (no orientades)  $\mathcal{A}_{2,1}$  és un espai homogeni de  $\mathcal{M}$ : quocient de  $\mathcal{M}$  pel subgrup  $I(L_0)$  que deixa invariant una recta fixada  $L_0$ .

En general el conjunt de varietats lineals afins de dimensió  $q$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A}_{n,q}$ , és un espai homogeni del grup d'isometries de  $\mathbb{R}^n$ .

**Qüestió:** Donada una 'varietat'  $M$  d'objectes geomètrics d'un espai  $E$  sobre el qual actua un grup de Lie  $G$  transitivament, trobar un subgrup  $H$  tal que  $G/H = M$  i donar una mesura  $G$ -invariant sobre  $G/H$ .

## Mesures invariants

**Teorema.** *Siguin  $\{\omega_1 \dots, \omega_n\}$  base de formes invariants per l'esquerra de  $G$  tal que  $\omega_1 = 0, \dots, \omega_m = 0$  defineixen les classes laterals de  $G/H$ . Aleshores  $\eta = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m$  defineix una mesura invariant a  $G/H$  si i només si  $d\eta = 0$ .*

- La mesura és **única** excepte constants
- $G$  i  $H$  **unimodulars**  $\Rightarrow \exists$  mesura  $G$ -invariant  
(unimodulars  $\equiv$  el. volum bi-invariant)
- $\mathcal{A}_{n,r}$ , conjunt de  $r$ -'plans' a  $\mathbb{R}^n$  és quotient d'**unimodulars**



mesura invariant per isometries:

$$dL_r$$

## Expressió de $dL_r$

Un moviment rígid es pot posar com

$$g = \left( \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

aleshores la matriu de 1-formes  $g^{-1}dg$  dóna una base  $\{\omega_{i,j}, \eta_\alpha\}$  de Maurer-Cartan. Si  $H$  és el grup d'isotropia del  $r$ -pla generat per  $e_1, \dots, e_r$  tenim

$$dL_r = \bigwedge_{\alpha, \beta > r, i \leq r} \omega_{i\alpha} \wedge \eta_\beta.$$

Si fixem un punt  $O$  un  $r$ -pla  $L_r$  queda determinat pel  $(n-r)$ -pla  $L_{n-r}[O]$  per  $O$  ortogonal a  $L_r$  i pel punt de tall  $p = L_r \cap L_{n-r}[O]$ . Aleshores podem posar també

$$dL_r = d\sigma_{n-r} \wedge dL_{n-r}[O]$$

que és l'expressió anàloga a  $dp \wedge d\theta$  del pla.

## Fórmules integrals a l'espai euclidià

**Teorema (Santaló).** Si  $M$  és subvarietat compacta de dimensió  $q$  de  $\mathbb{R}^n$ , diferenciable a trossos i  $r + q \geq n$  aleshores

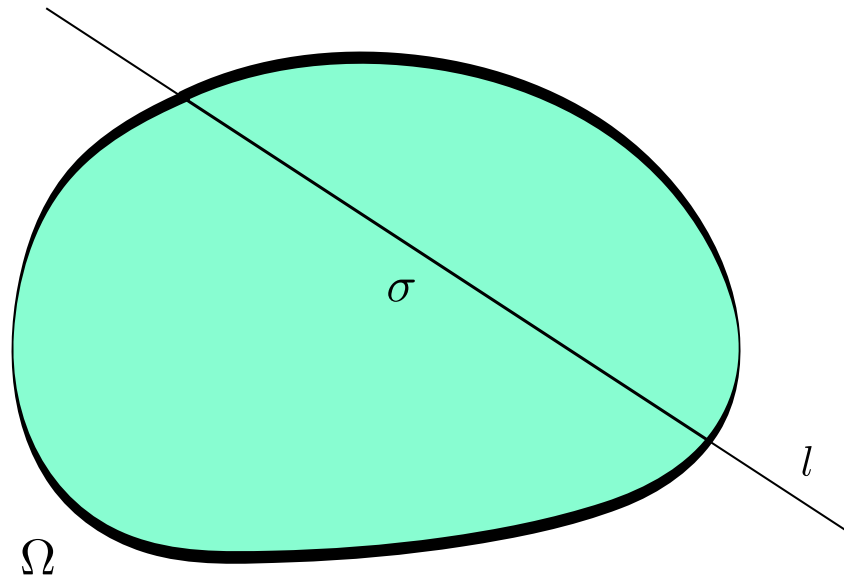
$$\begin{aligned} \int_{L_r \cap M \neq \emptyset} \sigma_{r+q-n}(M \cap L_r) dL_r &= \\ &= \frac{O_n \cdots O_{n-r} O_{r+q-n}}{O_r \cdots O_0 O_q} \sigma_q(M) \end{aligned}$$

on  $O_r$  és el volum de l'esfera  $r$ -dimensional i  $\sigma_k$  denota el volum  $k$ -dimensional.

- Quan  $n = 2$ ,  $r = 1$  i  $q = 1$  tenim la fórmula de **Cauchy-Crofton** ( $\sigma_0$  = punts d'intersecció).
- Quan  $n = 2$ ,  $r = 1$  i  $q = 2$  tenim un domini  $\Omega$  i

$$\int_{\Omega \cap L \neq \emptyset} \sigma dL = \pi \text{area}(\Omega)$$

## Fórmules integrals a l'espai euclidià



Si  $\Omega$  és convex, per Cauchy-Crofton la mesura de rectes que tallen  $\Omega$  és la longitud de la vora. Aleshores:

$$E(\sigma) = \pi \frac{\text{area}(\Omega)}{\text{long}(\partial\Omega)}$$

**Qüestió:** quant val val la mesura de  $r$  plans que tallen una subvarietat  $M$ ?

## Curvatura

$\Sigma$  hipersuperfície compacta de classe  $C^2$

$$M_r(\Sigma) = \frac{1}{\binom{n-1}{r}} \int_{\Sigma} \{\kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_r}\}$$

on  $\{\kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_r}\}$  són les funcions simètriques elementals de curvatura s'anomena **integral  $r$ -èsima de curvatura mitjana** de  $\Sigma$ .

$M_0(\Sigma)$  és igual a  $\text{volum}(\Sigma)$ .

**Aleshores (Chern)**, si  $K$  és un domini convex

$$\begin{aligned} m(L_r : L_r \cap K \neq \emptyset) &= \\ &= \frac{O_{n-2} \dots O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1} \dots O_0} M_{r-1}(\partial K) \end{aligned}$$

**Exemple:** Per un domini convex  $K$ :

$$E(\sigma(K \cap L_r)) = \frac{\int \sigma dL_r}{\int dL_r} = \text{ct} \frac{\text{vol}(K)}{M_{r-1}(\partial K)}$$

i

$$E(\sigma(\partial K \cap L_r)) = \frac{\int \sigma dL_r}{\int dL_r} = \text{ct} \frac{\text{àrea}(K)}{M_{r-1}(\partial K)}$$

## Mesura cinemàtica

Fins ara hem après a mesurar rectes i varietats afins. Anem a mesurar ara 'posicions' d'objectes.

**Exemple:**  $K_0$  convex fix ,  $K$  convex mòbil. 'Comptem' els moviments rígids  $g$  tal que  $gK \cap K_0 \neq \emptyset$ .

1. Independent respecte la posició inicial de  $K$
2. Independent de la posició inicial de  $K_0$
3. Es el mateix mesurar moviments de  $K$  que moviments de  $K_0$

Llavors la mesura que volem ha de ser **invariant** per les accions a dreta i esquerra del grup de moviments i invariant per la **inversió** ( $g \mapsto g^{-1}$ ).

Pel grup de moviments de l'espai euclidià  $\mathbb{R}^n$  aquesta mesura existeix (el grup és unimodular!). S'anomena **mesura cinemàtica**

$$dK$$



## Mesura cinemàtica

Pel pla euclidià els moviments rígids (directes) són

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & a \\ -\sin \theta & \cos \theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i

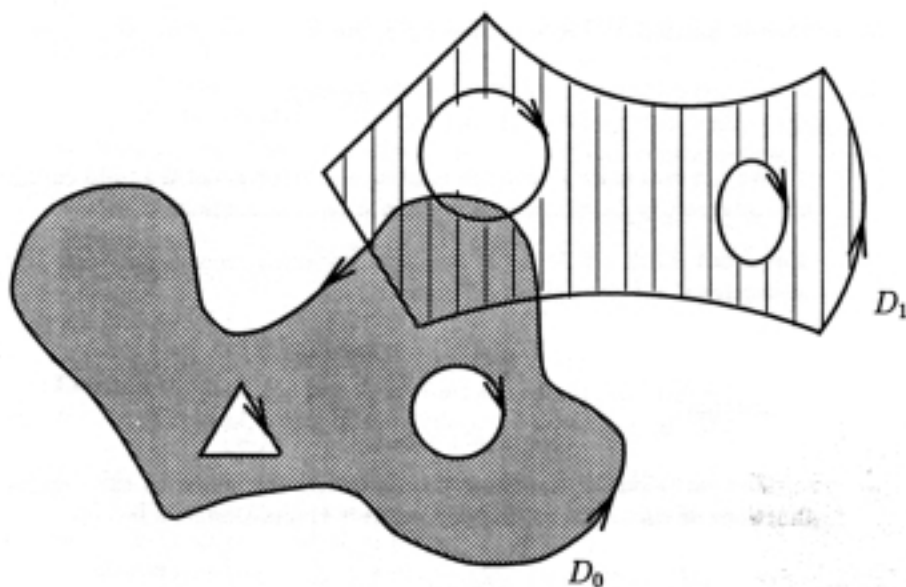
$$dK = da db d\theta$$

**Exemple:** la mesura de moviments que fan que un convex  $K$  contingui un punt fixat és  $2\pi \text{area}(K)$  (movem el punt sobre  $K$ !)

Més en general (Blaschke)

$$\int_{gK_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dK = 2\pi(F_0 + F_1) + L_0L_1$$

## Mesura cinemàtica - Fòrmula de Blaschke



$D_0$  domini fixat al pla euclidià,  $D_1$  domini mòbil amb densitat cinemàtica  $dK_1$ . Tenim

$$\int_{D_0 \cap D_1 \neq \emptyset} \chi(D_0 \cap D_1) dK_1 = \\ = 2\pi(\chi(D_0)F_1 + \chi(D_1)F_0) + L_0L_1$$

Com a conseqüència tenim la famosa fórmula de Poincaré

$$\int_{\Gamma_0 \cap \Gamma_1} n(\Gamma_0 \cap \Gamma_1) dK_1 = 4L_0L_1$$

per corbes  $\Gamma_i$  (pas al límit).

De la fórmula de Blaschke surt una prova bonica de la desigualtat isoperimètrica

## Desigualtat isoperimètrica al pla euclidià

$K_i$  convexos congruents d'àrea  $F$  i perímetre  $L$ . Les formules de Blaschke i Poincaré per  $K_i$  i  $\partial K_i$  donen

$$\int_{K_0 \cap K_1} dK_1 = 4\pi F + L^2, \quad \int_{K_0 \cap K_1} ndK_1 = 4L^2$$

Si  $m_i$  és la mesura de posicions tals que  $\partial K_0$  i  $\partial K_1$  tenen  $i$  punts en comú. Per ser convexos  $m_{i=0}$  per  $i$  senars. Llavors

$$m_2 + m_4 + \dots = 4\pi F + L^2,$$

$$2m_2 + 4m_4 + \dots = 4L^2$$

Fem la diferència i obtenim

$$L^2 - 4\pi F \geq 0$$

Quan  $K_i$  no és convex considerem l'envolcall convex  $K_i^*$  aleshores

$$L^2 - 4\pi F \geq L^{*2} - 4\pi F^* \geq 0$$

i la desigualtat segueix sent vàlida.

Igualtat pel disc

## Mesura cinemàtica - Fórmula de Blaschke

La fórmula de Blaschke en dimensió  $n$  conté les integrals de curvatura  $M_k$ . Recordem que  $M_0$  és el volum de la vora.

### Fórmula fonamental de Blaschke (**Chern**)

$D_0, D_1$  dominis de  $\mathbb{R}^n$  aleshores

$$\begin{aligned} & \int_{D_0 \cap D_1 \neq \emptyset} \chi(D_0 \cap D_1) dK = \\ & = O_1 \dots O_{n-2} \left[ O_{n-1} \chi(D_0) V_1 + O_{n-1} \chi(D_1) V_0 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^0 M_{n-h-2}^1 \right] \end{aligned}$$

**Nota:** Es pot anar més lluny i trobar les integrals  $\int M_k(\partial(D_0 \cap D_1)) dK$

## 'Reproductibilitat'

$M_\rho$  tub d'una subvarietat de dimensió  $q$  a  $\mathbb{R}^n$ .

Fórmula de Weyl:

$$\text{vol}(M_\rho) = \sum c(r, q, e) \mu_e(M) \rho^{n-q+e}$$

on  $\mu_e(M)$  ( $e$  parell) són invariants integrals de  $M$  calculables a partir del tensor de curvatura.  $\mu_0$  és el volum i  $\mu_q = \text{ct } \chi(M)$  quan  $q$  és parell.

**Teorema(Chern-Federer).** Si  $N^p$  subvarietat que es mou amb densitat cinemàtica  $dK$ :

$$\int_{M^q \cap N^p \neq \emptyset} \mu_e(M^q \cap N^p) dK = \sum_{i \text{ parell}} c_i \mu_i(M) \mu_{e-i}(N)$$

Cal dir que per hipersuperfícies les integrals de curvatura  $\mu_i$  i les integrals de curvatura mitjana  $M_i$  són les mateixes. Les  $M_i$  són coeficients pel polinomi que dóna el paral·lel exterior.

## 'Reproductibilitat'

$$\int_{M^q \cap N^p \neq \emptyset} \mu_e(M^q \cap N^p) dK = \sum_{i \text{ parell}} c_i \mu_i(M) \mu_{e-i}(N)$$

Podem deduir:

$$\int_{M^q \cap L_r \neq \emptyset} \mu_e(M^q \cap L_r) dL_r = \text{ct } \mu_e(M)$$

Per  $e = 0$  tenim la ja coneguda fórmula

$$\int_{M^q \cap N^p \neq \emptyset} \sigma_{p+q-n}(M^q \cap N^p) dK = \text{ct } \sigma_q(M) \sigma_p(N)$$

Per hipersuperfícies,  $p = n - 1$ , tenim que si  $Q$  és un domini i  $M = \partial Q$

$$\int_{\partial Q \cap L_r \neq \emptyset} M_i(\partial Q \cap L_r) dL_r = \text{ct } M_i(\partial Q)$$

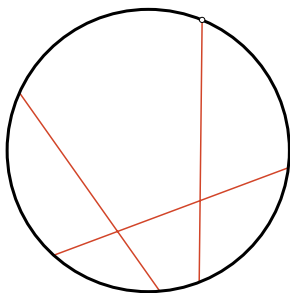
Control de temps !

30 min

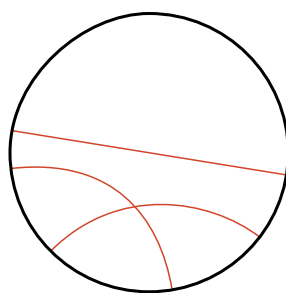
21-1

## Pla hiperbòlic

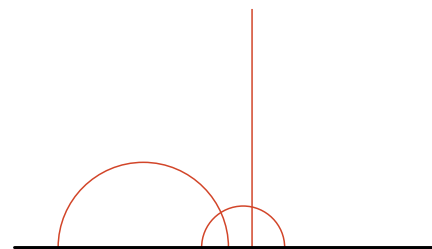
- Geometria plana absoluta amb la negació del postulat de les paral·leles
- Única superfície riemanniana connexa, simplement connexa, completa amb curvatura de Gauss  $K = -1$
- Tres models: semiplà, disc de Poincaré i model projectiu (també com subvarietat de l'espai de Minkowski)



Model projectiu



Disc de Poincaré



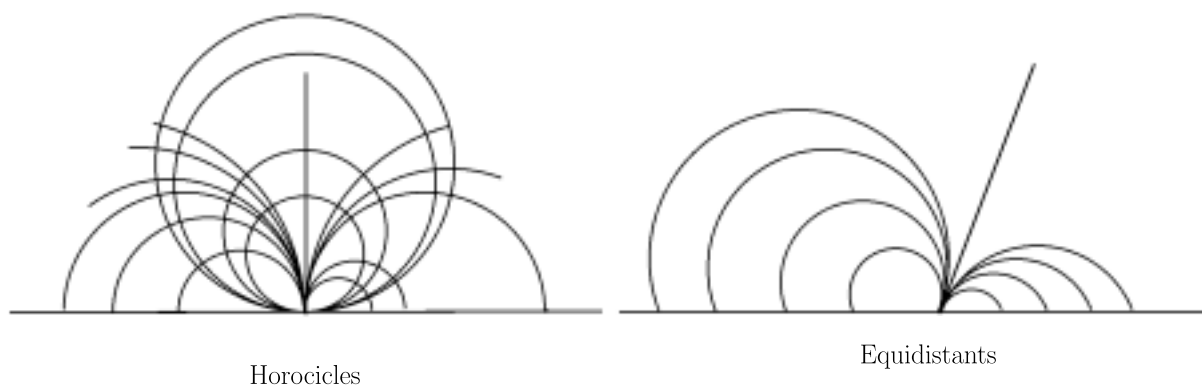
Semipla



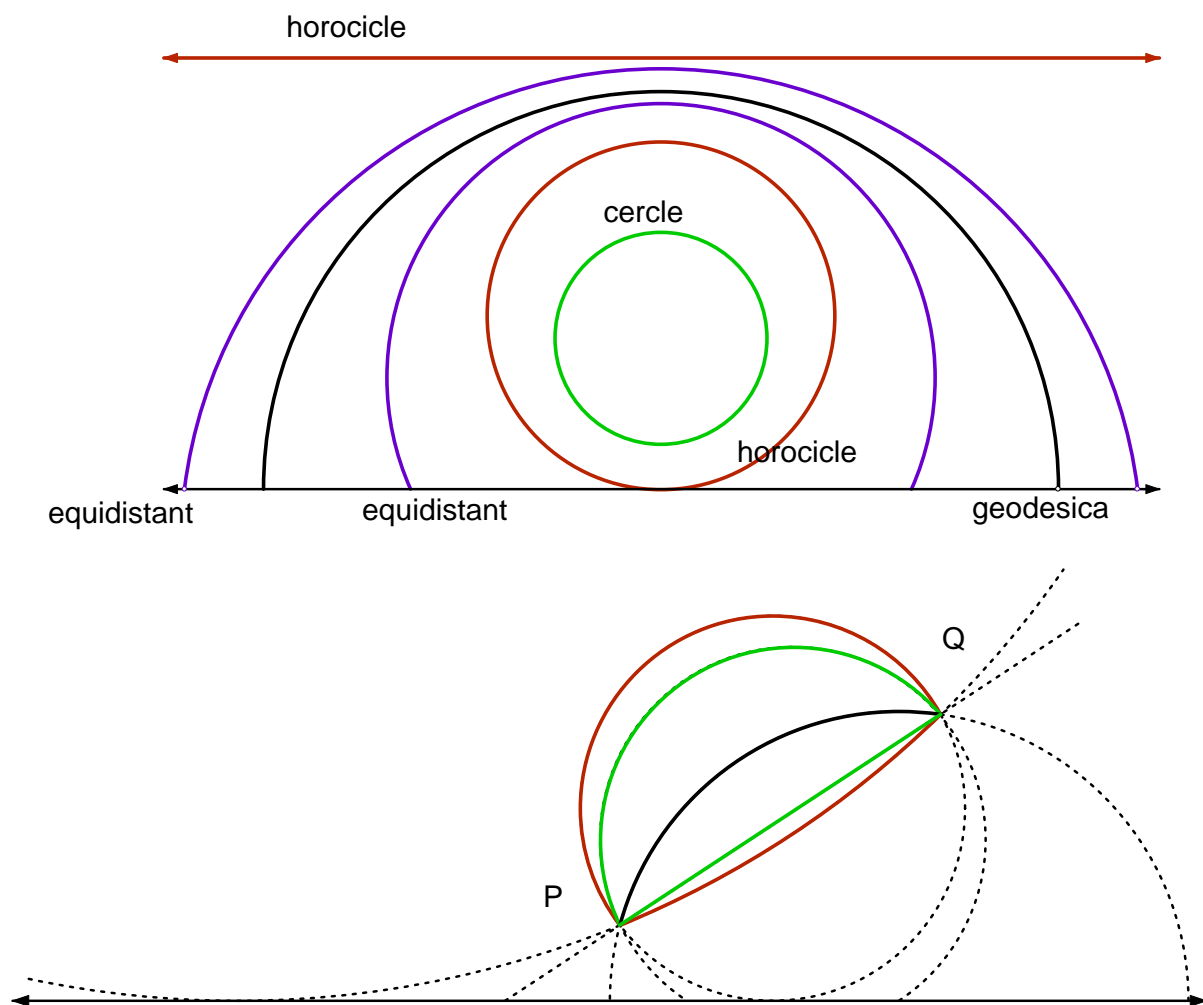
## Corbes distingides

Considerem les següents corbes a  $\mathbb{H}^2$ :

1. *Geodèsiques*. Camí més curt entre punts. Tenen curvatura geodèsica 0  
( $k_g(t) = \langle \nabla_{c'} c', c' \rangle$ , paràmetre arc)
2. *Horocicles*. Corbes ortogonals a un feix de rectes paral·leles. Curvatura geodèsica  $\pm 1$ .
3. *Equidistants* o  $\lambda$ -*geodèsiques*. Són corbes equidistants a les geodèsiques. Tenen curvatura geodèsica *absoluta*  $\lambda \in (0, 1)$ .



## Corbes distingides



- $\lambda = \cos \alpha$  amb  $\alpha$  l'angle que la corba fa amb l'infinít.
- Quan  $\lambda = 0$  tenim geodèsiques, per  $\lambda = 1$  horocicles.
- Donats  $p, q \in \mathbb{H}^2$ , hi ha una única geodèsica que els uneix i dos equidistants (i horocicles).

## Convexitat

**Definició:** Donat  $\lambda \in [0, 1]$  un conjunt  $K$  de  $\mathbb{H}^2$  és  $\lambda$ -convex si per tot  $P, Q \in K$  les  $\lambda$ -geodèsiques que els uneixen són a  $K$ .

- 0-convexos són convexos ordinaris
- 1-convexos s'anomenen  $h$ -convexos o horocíclicament convexos

$K$  vora  $C^2$  a trossos,  $\lambda$ -convex



$\kappa_g(\partial K) \geq \lambda$  i a punts sing. angle int.  $\leq \pi$ .

**Nota:** Cercles de radi  $r$  són sempre  $h$ -convexos ( $\kappa_g = \coth(r) > 1$ )

$h$ -convex  $\Rightarrow \lambda$ -convex  $\Rightarrow$  convex

## Mesures invariants

Les nocions anteriors també valen per l'espai hiperbòlic  $n$ -dimensional  $\mathbb{H}^n$ : és la varietat de Riemann completa, connexa i simplement connexa amb  $K = -1$ .

$\mathbb{H}^n$  és espai homogeni del seu grup d'isometries. Aquest grup s'identifica amb les aplicacions lineals de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , unimodulars i que preserven la mètrica de Lorentz.

Tenim que existeix:

- Mesura invariant per les geodèsiques.

$$dL = \cosh(p) dp \wedge d\theta$$

- Mesura invariant pels  $r$ -plans (subvarietats tot. geodèsiques)

$$dL_r = \cosh^r(p) d\sigma_{n-r} \wedge dL_{n-r}[O]$$

De fet  $dL_r$  pot obtenir-se a partir de la mesura cinemàtica  $dK$  hiperbòlica

## Comparació $\mathbb{R}^2 - \mathbb{H}^2$

$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$	$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\theta^2$
$dS = \rho d\rho d\theta$	$dS = \sinh(\rho) d\rho d\theta$
$L(C_r) = 2\pi r$	$L(C_r) = 2\pi \sinh r$
$F(C_r) = \pi r^2$	$F(C_r) = 2\pi(\cosh r - 1)$
$L^2 - 4\pi F \geq 0$	$L^2 - F^2 - 4\pi F \geq 0$

### Observació:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F(C_r)}{L(C_r)} = \begin{cases} \infty & \text{a } \mathbb{R}^2 \\ 1 & \text{a } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

De fet, per qualsevol successió de convexos que omple  $\mathbb{R}^2$ ,  $\text{vol} = \frac{1}{2} \int p ds$  i  $F/L \rightarrow \infty$ .

## Integral de les 'cordes'

Tenim la mateixa fórmula que en el cas euclidià:

**Teorema (Santaló).** *Si  $M$  és subvarietat compacta de dimensió  $q$  de  $\mathbb{H}^n$ , diferenciable a trossos i  $r + q \geq n$  aleshores*

$$\begin{aligned} \int_{L_r \cap M \neq \emptyset} \sigma_{r+q-n}(M \cap L_r) dL_r &= \\ &= \frac{O_n \cdots O_{n-r} O_{r+q-n}}{O_r \cdots O_0 O_q} \sigma_q(M) \end{aligned}$$

on  $O_r$  és el volum de l'esfera euclidiana  $r$ -dimensional i  $\sigma_k$  denota el volum  $k$ -dimensional.

**Nota:** Surten  $O_n$  per que integrem direccions (Grasmannianes).

La situació és diferent quan volem trobar

$$m(L_r : L_r \cap K \neq \emptyset)$$

a l'hiperbòlic  $\mathbb{H}^n$  (a  $\mathbb{R}^n$  val ct.  $M_{r-1}(\partial K)$ ).

## Mesura de $r$ -plans que tallen

**Teorema: (Santaló-Chern)** Si  $K$  és un domini convex de  $\mathbb{H}^n$  amb vora  $C^2$  a trossos

$$\begin{aligned} m(L_r : L_r \cap K \neq \emptyset) &= \\ &= \sum_k c_k(n, r) M_k(\partial K) + c(n, r) \text{vol}(K) \end{aligned}$$

**(Nota:** Fem servir Gauss-Bonnet)

1. Si mesurem geodèsiques ( $r = 1$ ):

$$m(L : L \cap K \neq \emptyset) = \left( \frac{O_n}{4\pi} \right) \text{vol}(\partial K)$$

2. Per  $\mathbb{H}^3$ , la mesura de plans geodèsics que tallen:

$$m(L_2 : L_2 \cap K \neq \emptyset) = M_1 - \text{vol}(K)$$

(a  $\mathbb{R}^3$  és  $M_1$ )

## Esperança d'una corda

A  $\mathbb{H}^n$ , l'esperança de la corda que forma una geodèsica amb un convex  $K$  és

$$\begin{aligned} E(\sigma(K \cap L)) &= \frac{\int \sigma dL_1}{\int dL_1} = \\ &= (n-1) \frac{O_{n-1} \text{vol}(K)}{O_{n-2} \text{vol}(\partial K)} \end{aligned}$$

(ja que  $M_0(\partial K) = \text{vol}(\partial K)$ )

(També:

$$E(\sigma) = 2\pi \frac{O_{n-1} \text{vol}(K)}{O_n \text{vol}(\partial K)})$$

**Qüestió:** Com es comporta  $E(\sigma(K \cap L))$  si els convexos es fan grans? A l'euclidià l'esperança es fa infinita.



## Santaló-Yañez

Santaló i Yañez van estudiar el comportament asimptòtic del quocient area/perímetre per convexos de  $\mathbb{H}^2$ .

Si  $K_n$  és una successió de convexos tal que

1.  $K_n \subset K_{n+1}$

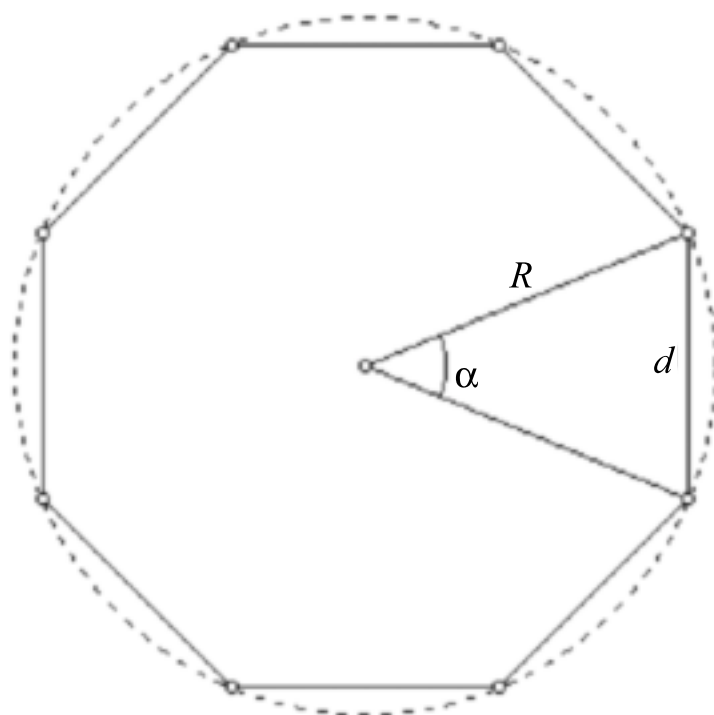
2.  $\bigcup K_n = \mathbb{H}^2$ ,

què podem dir de

$$\lim \frac{F}{L} \quad ?$$

- Si la successió és de  $h$ -convexos, el límit val 1 (isoperimètrica + Gauss-Bonnet)
- De fet, per la desigualtat isoperimètrica, sempre és ' $\leq$ ' 1

## Contraexemple poligonal



$K_n$  polígon regular format per  $3 \cdot 2^{n-1}$  triangles isòsceles inscrits en un cercle de radi  $R_n$ .  
 $d_n$  longitud base,  $h_n$  l'àrea.

Tenim  $F_n/L_n = h_n/d_n$ .

Si  $\alpha_n = 2\pi/(3 \cdot 2^{n-1})$  és l'angle central, fent servir trigonometria hiperbòlica trobem

$$d_n = 2 \operatorname{arcsinh} \left( \sinh R_n \cdot \sin \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) \right)$$

i

$$h_n = \pi - \left( \alpha_n + 2 \arctan \frac{1}{\tan \frac{\alpha_n}{2} \cdot \cosh R_n} \right).$$

## Contraexemple poligonal

Però

$$\lim(\tan \frac{\alpha_n}{2} \cdot \cosh R_n) = \lim \frac{\alpha_n}{2} \frac{2}{\mu \alpha_n} = \frac{1}{\mu},$$

llavors

$$\lim h_n = \pi - 2 \cdot \arctan \mu.$$

Igualment

$$\lim d_n = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\mu}$$

- $R_n = n \Rightarrow \lim h_n/d_n = 0$  i  $\lim \frac{F_n}{L_n} = 0$

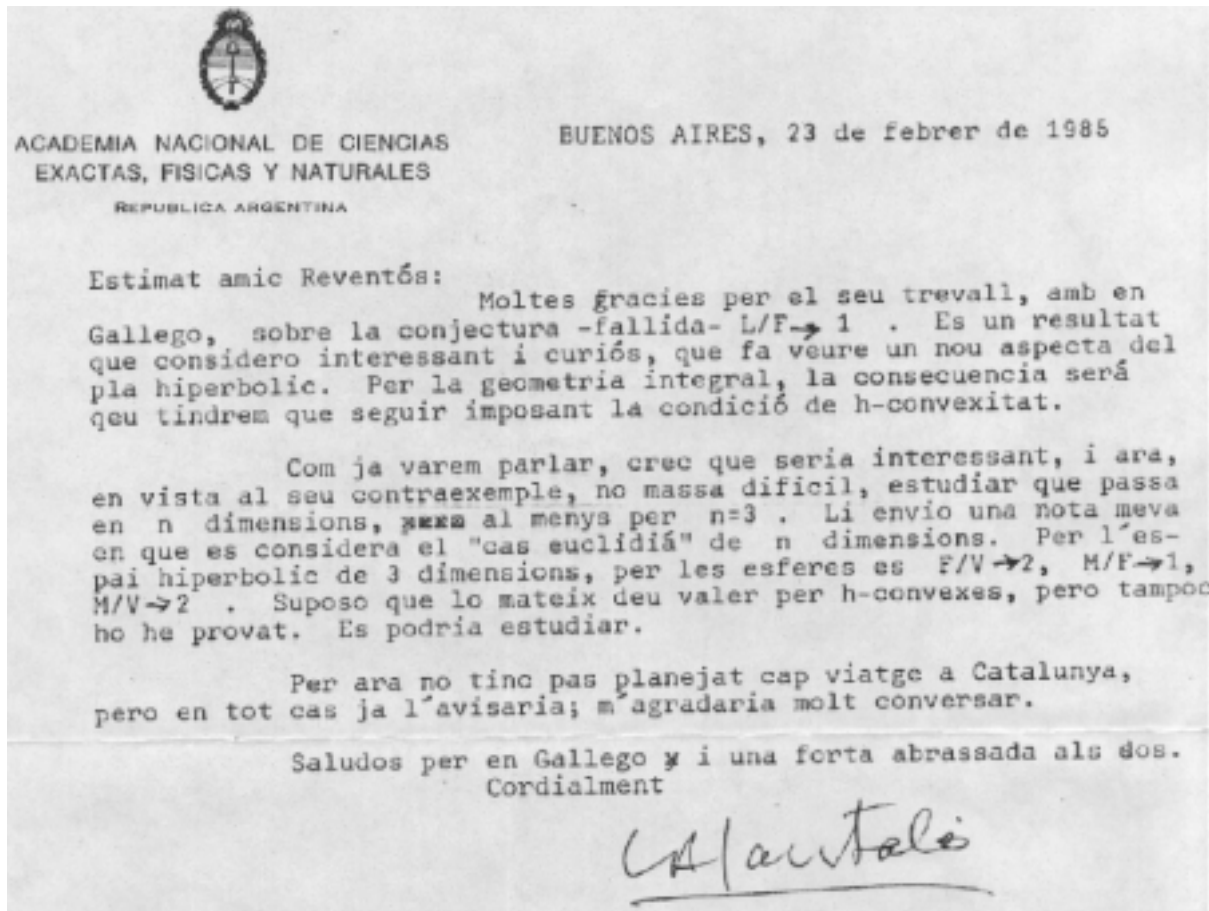
- $R_n = \log(4/\mu\alpha_n) \Rightarrow$

$$\lim \frac{F_n}{L_n} = \lim \frac{h_n}{d_n} = \frac{\pi - 2 \arctan \mu}{2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\mu}}$$

i el límit assoleix tots els valors entre 0 i 1.

**Nota:** Si la successió és de  $\lambda$ -convexos, el límit cau entre  $\lambda$  i 1. Són les millors cotes.

## Carta de Santaló



**Teorema.** *Si  $M$  és varietat de Hadamard  $n$ -dimensional amb curvatura seccional  $k$  tal que  $-k_2^2 \leq k \leq -k_1^2$  amb  $k_1, k_2 > 0$*

$$\frac{\lambda}{(n-1)k_2^2} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(K_t)}{\text{vol}(\partial K_t)} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(K_t)}{\text{vol}(\partial K_t)} \leq \frac{1}{(n-1)k_1}.$$

$\{K_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  *dominis  $\lambda$ -convexos compactes amb  $\lambda \leq k_2$  expandint-se sobre l'espai.*

## Idea de la prova

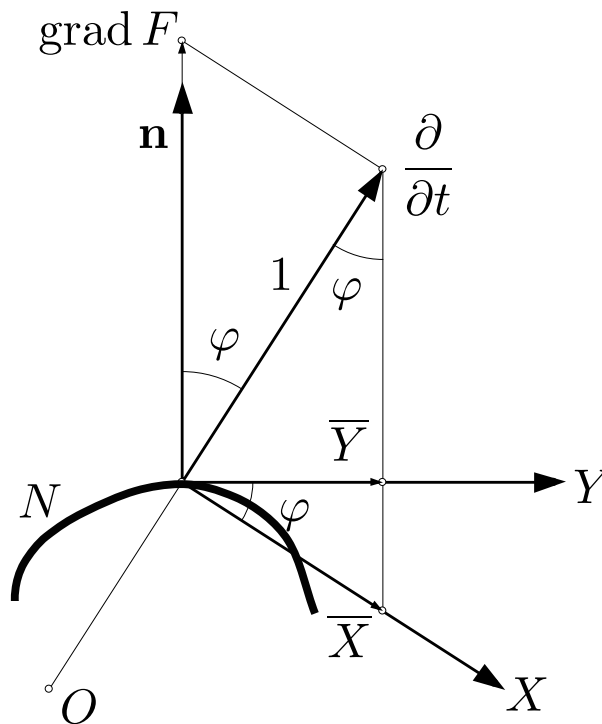
1. Fixem un punt  $O$  interior a  $K$ , aleshores podem escriure

$$\text{vol}(K) = \int_{S^n} \int_0^{l(u)} J_u(t) t^n dt dS$$

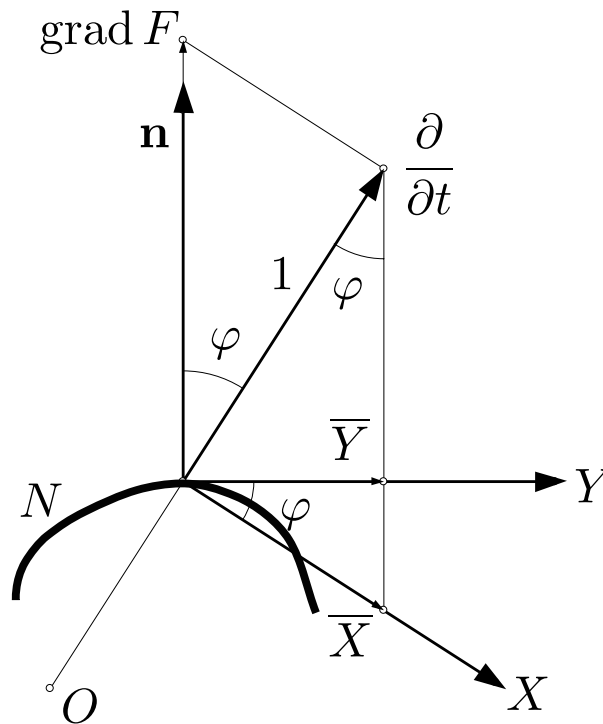
$$\text{vol}(\partial K) = \int_{S^n} \frac{J_u(l(u)) l(u)^n}{\langle \partial_t, \mathbf{n} \rangle} dS$$

On  $\langle \partial_t, \mathbf{n} \rangle = \cos \varphi$  i

- $J_u(t)$  és el Jacobià de  $\exp_O$  al punt  $tu$  per  $u \in S^n \simeq (T_O M)^1$
- $\partial_t$  és la direcció radial al punt  $\exp_O(l(u)u)$



## Idea de la prova



2. Ens cal controlar com la  $\lambda$ -convexitat influeix sobre la variació de  $\varphi$ , angle entre el normal i la direcció radial. Provem

**Lema.** *Es compleix*

$$\kappa_n = \mu_n \cos \varphi + \varphi'$$

$\mu_n$ : curvatura normal de l'esfera geodèsica amb centre  $O$ .  $\varphi'$ : derivada respecte long. d'arc de les corbes integrals de  $\text{grad}(\rho(\theta))$ . ('generalització' de la clàssica fórmula de Liouville:  $\kappa_g = \varphi' + \kappa_1 \cos \varphi + \kappa_2 \sin \varphi$ )

## Idea de la prova

3. Com a conseqüència de la fórmula anterior

### Proposició.

$M$  Hadamard amb  $-k_2^2 \leq K \leq -k_1^2$ . Si  $K$  domini  $\lambda$ -convex  $C^2$  amb  $\lambda < k_2$ . O punt interior de  $K$ . L'angle  $\varphi$  satisfà

$$\cos \varphi \geq \frac{\lambda}{k_2} \tanh(k_2 r)$$

amb  $r$  distància mínima de  $O$  a  $\partial K$ .

4. Per ser  $M$  de Hadamard les geodèsiques no tenen punts conjugats. Podem comparar el jacobí de l'exponencial amb els jacobians de  $\mathbb{H}^n(k_1)$  i  $\mathbb{H}^n(k_2)$ . Ho fem i després d'uns càlculs tenim que

$$\begin{aligned} f(r) \int_{S^n} l(u)^n \text{Jac}_{l(u)u}(\exp) dS &\leq \\ &\leq \text{vol}(\Omega) \leq \\ &\leq h(R) \int_{S^n} l(u)^n \text{Jac}_{l(u)u}(\exp) dS. \end{aligned}$$

## Idea de la prova

5. Dividint per

$$\text{vol}(\partial K) = \int_{S^n} \frac{J_u(l(u))l(u)^n}{\langle \partial_t, \mathbf{n} \rangle} dS$$

i fent servir l'acotació de l'angle  $\varphi$  tenim

$$f(r)C(r)\frac{\lambda}{k_2} \leq \frac{V}{A} \leq h(R)$$

amb  $r$  l'inradi,  $R$  el circumradi i  $f, C, h$  funcions tals que, si el convex s'expandeix

$$f(r)C(r) \rightarrow \frac{1}{(n-1)k_2}, \quad h(R) \rightarrow \frac{1}{(n-1)k_1}$$

i acabem la demostració.

(podem donar fórmules explícites)

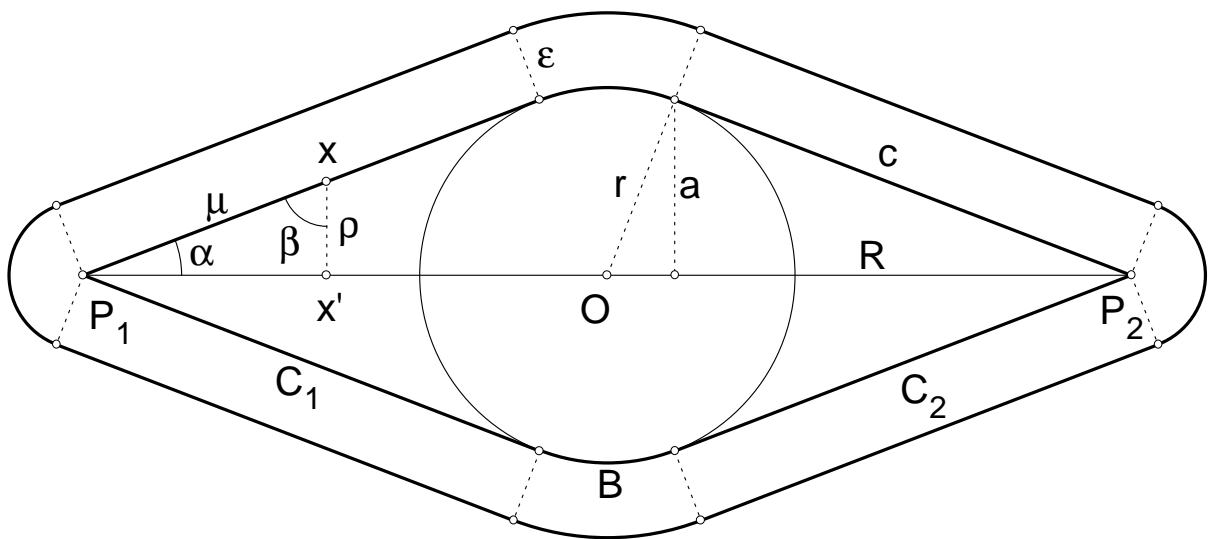


## Exemples a $\mathbb{H}^n$

Les desigualtas obtingudes són les millors possibles

Bola geodèsica amb radi  $r > 0$  i centre en un punt fixat  $O \in \mathbb{H}^n$ .  $P_1$  i  $P_2$  punts definint un segment geodèsic de longitud  $2R > r$  tal que  $O$  és el punt mig. L'envolcall convex de la bola  $B_O(r)$  i els punts  $P_1, P_2$  ho denotem  $K(R, r)$ .

$K_\epsilon(R, r)$  punts a distància de  $K(R, r)$  menor que  $\epsilon$ . És un conjunt  $\lambda$ -convex per  $\lambda = \tanh \epsilon$ .



Fem  $R = \exp(2r)$ , aleshores

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(K_r)}{\text{vol} \partial(K_r)} = \frac{\tanh \epsilon}{n-1} = \frac{\lambda}{n-1}.$$

**Nota:** El valor  $1/(n-1)$  es pot obtenir amb una successió de boles.

## Esperança per $r$ -cordes

Amb això sabem que el valor límit de l'esperança d'una corda pren valors entre  $\lambda \frac{O_{n-1}}{O_{n-2}}$  i  $\frac{O_{n-1}}{O_{n-2}}$  (entre  $\lambda\pi$  i  $\pi$  al pla).

**Qüestió:** Què podem dir de

$$E(\sigma(K \cap L_r)) = \frac{\int \sigma dL_r}{\int dL_r} ?$$

**Resposta:** Treball en curs. De moment

$$E(\sigma_r) < \frac{O_{n-1}}{O_{n-r-1}}$$

i hi han exemples que van a 0. Control de  $V/M_k$

## Mesura de $\lambda$ -plans

**Qüestió:** Què podem dir de la mesura de  $\lambda$ -plans?, existeix?, com és? Santaló va donar mesura de horocicles i horosferes

- Al pla

$$\begin{aligned}m(H_1 : H_1 \cap K \neq \emptyset) &= 2M_0 \\ &= 2 \text{long}(\partial K)\end{aligned}$$

- A l'espai

$$m(H_2 : H_2 \cap K \neq \emptyset) = 2M_1$$

$(n = 2, 3) \Rightarrow$  mesura d'horosferes que tallen un convex és proporcional a les  $(n - 1)$ -integrals de curvatura mitjana. Com a  $\mathbb{R}^n$  !

## Mesura d'horosferes

**Teorema.** Si  $K$  és un domini de  $\mathbb{H}^n$  amb vora  $C^2$  a trossos llavors

$$\int_{H \cap \partial K \neq \emptyset} \chi(H \cap \partial K) dH = \\ = 2 \sum_{h=0}^{[(n-2)/2]} \binom{n-2}{2h} \frac{1}{2h+1} M_{n-2-2h}(\partial K)$$

amb  $\chi(H \cap \partial K)$  característica d'Euler-Poincaré de  $H \cap \partial K$ .

- La mesura d'horosferes que tallen una hipersuperfície  $h$ -convexa és combinació lineal d'integrals de curvatura mitjana.
- Diferent de la combinació lineal de la mesura d'hiperplans (més senzilla!, no surt el volum).
- El teorema diu que la mesura d'horosferes no es comporta com el cas euclidià (com semblava en baixes dimensions).
- També es pot determinar una fórmula similar quan mesurem  $\lambda$ -plans. Pont entre la mesura de  $r$ -plans geodèsics i  $h$ -plans.

## Idea de la prova

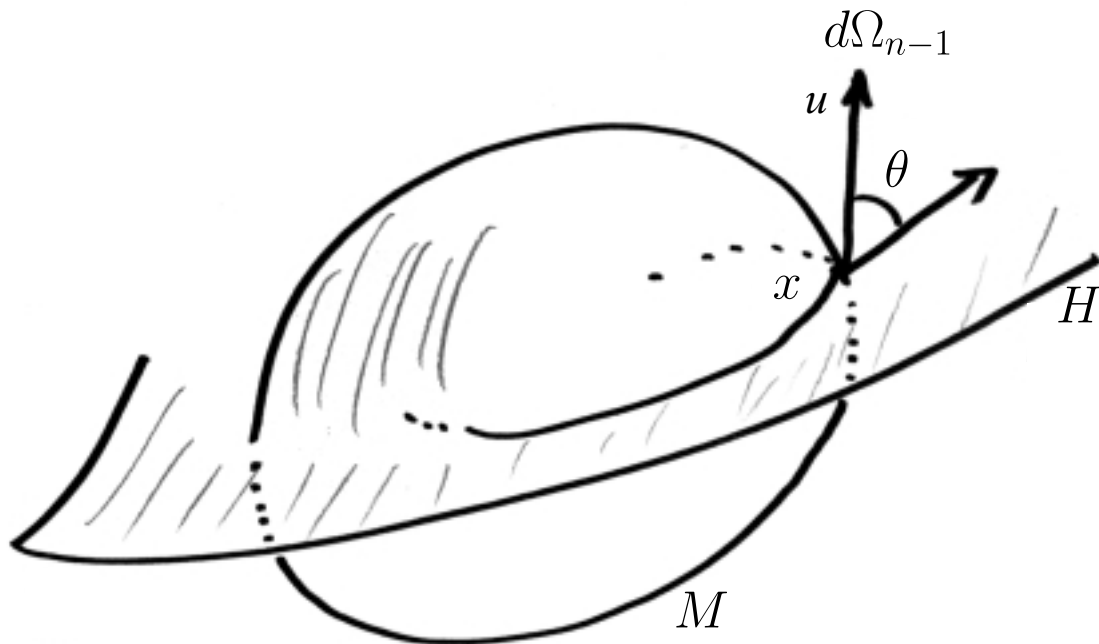
1. Punt clau: la geometria intrínseca d'una horosfera és euclidiana.

$$2. \chi(H \cap \partial K) = \frac{1}{O_{n-2}} M_{n-2}(\partial K \cap H)$$

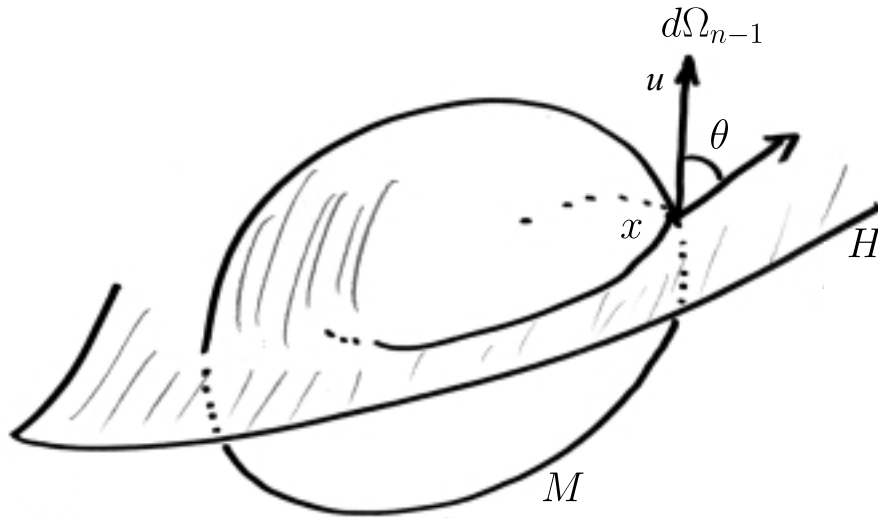
3.  $M$  hipersuperfície de  $\mathbb{H}^n$ ,  $H \cap M = C$ ,

$$dx_{n-2} \wedge dH = \sin \theta dx_{n-1} \wedge d\Omega_{n-1}.$$

$dx_{n-2}$  i  $dx_{n-1}$  el. vol. a  $C$  i  $M$ ,  $d\Omega_{n-1}$  el. vol. de  $S^{n-1}$ , esfera que defineix horosferes per  $x$  i  $\theta$  angle entre  $M$  i  $H$ .



## Idea de la prova



4. Relacionem les curvatures (segona forma fonamental) de  $H$ ,  $\partial K$  i  $C$  per

$$h_C^H = \frac{h_{\partial K}}{\sin \theta} - \frac{I}{\tan \theta}.$$

( $\theta$  angle entre  $\partial K$  i  $H$ )

5. Integrem

$$\begin{aligned} \int_{H \cap \partial K \neq \emptyset} \chi(H \cap \partial K) dH &= \\ &= \frac{1}{O_{n-2}} \int_{\mathcal{H}} \int_C \kappa_{n-2}^C dx_{n-2} dH \end{aligned}$$

i arribem a l'expressió desitjada

## Alguns problemes

1. Determinar la mesura d' $r$ -horosferes que tallen una subvarietat
2. Determinar la mesura de  $(\lambda, r)$ -equidistants que tallen una subvarietat
3. Estudiar els quocients  $M_r/M_k$  i els seu comportament asimptòtic
4. Esperances de les  $r$ -cordes: geodèsiques i  $\lambda$ -geodèsiques. Comparació de les mesures  $m(L_r^\lambda)$  i  $m(L_r^0)$ .

## Referències

1. L. A. Santaló and I. Yañez. Averages for polygons formed by random lines in Euclidean and hyperbolic planes. *J. Appl. Probability*, 9:140–157, 1972.
2. E. Gallego and A. Reventós. Asymptotic behavior of convex sets in the hyperbolic plane. *J. Differential Geom.*, 21(1):63–72, 1985.
3. E. Gallego and A. Reventós. Asymptotic behaviour of  $\lambda$ -convex sets in the hyperbolic plane. *Geom. Dedicata*, 76(3):275–289, 1999.
4. A. A. Borisenko, E. Gallego and A. Reventós. Relation between area and volume for  $\lambda$ -convex sets in Hadamard manifolds. *Differential Geometry and its applications*, 14, n3 (2001).
5. E. Gallego and G. Solanes. Perimeter, diameter and area of convex sets in the hyperbolic plane. *J. London Math. Soc. (2)*, 2001
6. E. Gallego, A.M. Naveira and G. Solanes. Horospheres and convex bodies in the  $n$ -dimensional hyperbolic space. Preprint, 2002.
7. G. Solanes. Integral geometry of equidistants in hyperbolic space. Preprint, 2002.