GEOMETRIA DIFERENCIAL

FLORENT BALACHEFF

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

2023

ÍNDEX

CAPÍTOL

CORBES PARAMETRITZADES 1

En aquest primer capítol, estudiarem els objectes geomètrics diferencials més elementals: les corbes parametritzades. Intuïtivament sentim que són els més simples perquè són de dimensió 1. Veurem que els podem associar diversos quantitats: la curvatura (definida en qualsevol dimensió ambient), la curvatura amb signe (en dimensió 2), i el triedre de Frenet i la torsió (en dimensió 3). Aleshores ens adonarem que aquestes quantitats són en realitat invariants geomètrics: no depenen de la parametrització particular triada si no de l'objecte geomètric que constitueix la imatge de la corba.

Denotem per I un interval obert de $\mathbb{R}$.

1.1 Corbes parametritzades de $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Definicions

Definició 1.1.1

Una **corba parametritzada** de $\mathbb{R}^n$ és una aplicació $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ diferenciable de classe C^∞.

El conjunt $\gamma(I) = \{\gamma(t) \mid t \in I\}$ s'anomena **traça** de γ.

El **vector tangent** de γ en $t_0 \in I$ és el vector $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

La corba es diu **regular** si $\gamma'(t) \neq 0$ per tot $t \in I$, i en aquest cas es defineix el vector tangent unitari en el paràmetre t per la fórmula

$$T(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

i la **recta tangent** de γ en $t_0 \in I$ com la corba parametrizada $t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(t_0) + t \cdot \gamma'(t_0)$.

Exemples.

1. Una recta de $\mathbb{R}^n$ que passa per dos punts p, q es pot parametritzar com la corba $t \in \mathbb{R} \mapsto tq + (1-t)p$.

2. Un cercle de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ i de radi $r > 0$ es pot parametritzar per la corba $t \in \mathbb{R} \mapsto (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)$.

3. La corba $t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ és una hèlix continguda dins el cilindre
$$\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$
Aquestes tres corbes són regulars.

4. La corba $t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(t) = (t^2, t^3)$ no és regular com $\gamma'(0) = (0, 0)$.

5. Les tres corbes parametritzades
$$\begin{array}{rcl} \gamma_1(t) & = & (\cos t, \sin t) \text{ on } t \in \mathbb{R}, \\ \gamma_2(t) & = & (\cos t, \sin t) \text{ on } t \in (-\infty, 2\pi), \\ \gamma_3(t) & = & (\cos(2t), \sin(2t)) \text{ on } t \in \mathbb{R}, \end{array}$$
són diferents, però tenen la mateixa traça.

1.1.2 Longitud d'una corba

Definició 1.1.2

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una corba (parametrizada) i $[a, b] \subset I$. Anomenem **longitud** de γ entre a i b al nombre
$$\ell(\gamma_{|[a,b]}) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$
on $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana estàndard de $\mathbb{R}^n$.

Recordem que la norma d'un vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es pot calcular fent servir la fórmula $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

No sembla gens evident que aquesta definició coincideixi amb la noció intuïtiva de longitud, però el següent resultat ens ajuda a entendre-ho.

Proposició 1.1.1

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una corba i $[a, b] \subset I$. Llavors
$$\ell(\gamma_{|[a,b]}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$
on hem posat $t_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$ per tot $k = 0, \ldots, n$.

De fet es pot demostrar que més generalment

$$\ell(\gamma_{|[a,b]}) = \sup_{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b} \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|.$$

En particular, observem que la longitud només depèn de la traça $\gamma([a,b])$.

Demostració. Fent servir el teorema del valor mitjà, escrivim

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|\gamma'(t_k)\| |t_k - t_{k-1}| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|\gamma'(t_k)\| \frac{b-a}{n} \\
&= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt
\end{aligned}$$

on hem conclòs reconeixent una suma de Riemann. □

Exemples.

1. Si $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$ (cercle de radi r centrat en l'origen), llavors calculem

$$\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t),$$

i per tant

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} dr = 2\pi r.$$

2. Si $\gamma(t) = (ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\sin t)$ amb $t \in (0, \infty)$ i $a, b > 0$ (espiral logarítimca), llavors calculem

$$\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\| &= \|(-abe^{-bt}\cos t - ae^{-bt}\sin t, -abe^{-bt}\sin t + ae^{-bt}\cos t)\| \\
&= ae^{-bt}\sqrt{(-b\cos t - \sin t)^2 + (-b\sin t + \cos t)^2} \\
&= ae^{-bt}\sqrt{1+b^2},
\end{aligned}$$

i per tant

$$\ell(\gamma) = a\sqrt{1 + \frac{1}{b^2}}.$$

3. Si $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ amb $t \in [0, 2\pi]$, llavors (exercici)

$$\ell(\gamma) = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

1.1.3 Canvi de paràmetre

Sigui $J \subset \mathbb{R}$ un altre interval obert.

Definició 1.1.3

Diem que una corba $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ és una **reparametrització** d'una corba $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ si $\exists h : J \to I$ difeomorfisme tal que $\beta = \alpha \circ h$.

Observació. $h : J \to I$ és difeomorfisme $\Leftrightarrow h'(s) \neq 0\ \forall s \in J$.
En efecte, si h és difeomorfisme llavors $h'(x) \neq 0$ com $dh_s(v) = h'(s) \cdot v$. Recíprocament, si existeixen $a, b \in J$ tal que $h(a) = h(b)$, el teorema de Rolle implica que podem trobar $x \in (a, b)$ tal que $h'(x) = 0$.

Definició 1.1.4

Si $\beta = \alpha \circ h$ és una reparametrització de α, llavors el **canvi de paràmetre** h es diu **positiu** si $h' > 0$ i **negatiu** si $h' < 0$.

Proposició 1.1.2

Sigui $\beta = \alpha \circ h$ una reparametrització.
Llavors

1. β regular $\Leftrightarrow \alpha$ regular.
2. Si $[a, b] \subset I$ i $[c, d] = h^{-1}([a, b])$, llavors

$$\ell(\alpha_{|[a,b]}) = \ell(\beta_{|[c,d]}).$$

Demostració.

1. És conseqüència directa de la relació $\beta'(s) = h'(s) \cdot \alpha'(h(s))$.
2. Suposem $h'(s) > 0$, l'altre cas es tracta igualment. Tenim $h(a) = c$ i $h(b) = d$, i calculem

$$\ell(\beta_{|[c,d]}) = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds = \int_{h(a)}^{h(b)} \|\alpha'(h(s))\| |h'(s)| ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \ell(\alpha_{|[a,b]})$$

fent servir que $h' > 0$ i el canvi de variable $t = h(s)$.

$\square$

Exemples.

1. La corba $\alpha : t \in [0, 2\pi] \to (r \cos t, r \sin t)$ de $\mathbb{R}^2$ es pot reparametritzar en la corba

$$\beta = \alpha \circ h : s \in [0, 2\pi r] \to \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

fent servir el difeomorfisme $h : [0, 2\pi r] \to [0, 2\pi]$ definit per $h(s) = s/r$: (comprovem que $h'(s) = 1/r \neq 0$ i per tant que h és difeomorfisme).

2. (Canvi de sentit) Qualsevol corba $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es pot reparametritzar en sentit contrari fent servir el difeomorfisme $h : [a, b] \to [a, b]$ definit per

$$h(s) = a + b - s.$$

3. Qualsevol corba $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es pot reparametritzar sobre l'interval $[0, 1]$ fent servir el difeomorfisme $h : [0, 1] \to [a, b]$ definit per

$$h(s) = (1 - s)a + sb.$$

1.1.4 El paràmetre arc

Definició 1.1.5

Direm que una corba $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ està **parametritzada per la longitud d'arc** (abreviarem en **ppla**) quan

$$\|\gamma'(t)\| = 1 \quad (\forall t \in I),$$

i anomenarem **paràmetre arc** al paràmetre corresponent de la corba que denotarem per s. Observem que si $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ està ppla, aleshores

- $T(t) = \gamma'(t)$,
- Si $[a, b] \subset I$,

$$\ell(\gamma_{|[a,b]}) = \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds = b - a,$$

  és a dir, la longitud d'una corba ppla entre a i b és $b - a$.

Proposició 1.1.3

Tota corba regular es pot reparametritzar per la longitud d'arc.

Demostració. Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una corba regular i $a \in I$. Posem

$$s_a(t) := \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \quad \text{(funció longitud d'arc amb origen a } a\text{)}$$

La funció s_a és clarament C^∞ i compleix $s_a'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$. Així, $s_a : I \to J := s_a(I)$ és difeomorfisme, i si definim la corba

$$\beta := \gamma \circ s_a^{-1} : J \to \mathbb{R}^n,$$

comprovem que està ppla: $\forall s \in J$,

$$\beta'(s) = (s_a^{-1})'(s) \cdot \gamma'(s_a^{-1}(s)) = \frac{1}{s_a'(s_a^{-1}(s))} \cdot \gamma'(s_a^{-1}(s)) = \frac{1}{\|\gamma'(s_a^{-1}(s))\|} \cdot \gamma'(s_a^{-1}(s))$$

i per tant $\|\beta'(s)\| = 1$. □

Proposició 1.1.4

Sigui α una corba ppla, i $\beta = \alpha \circ h$ una reparametrització ppla. Llavors el canvi de paràmetre s'escriu

$$h(s) = \pm s + s_0$$

per un cert $s_0 \in \mathbb{R}$.

Demostració. Com $\beta'(s) = h'(s) \cdot \alpha'(h(s))$, deduïm agafant la norma que $|h'(s)| = 1 \Leftrightarrow h'(s) = \pm 1$. Això implica el resultat. □

1.1.5 Curvatura i vector normal

Definició 1.1.6

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una corba ppla. Definim la **curvatura** de γ en s com el nombre

$$k(s) := \|\gamma''(s)\|.$$

Observació. Sabem que $T(s) = \gamma'(s)$ quan γ està ppla, per tant

$$k(s) = \|T'(s)\|$$

sempre que γ sigui ppla.

Recordem que el producte escalar canònic de dos vectors $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ es defineix per la fórmula

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$

Proposició 1.1.5

Siguin $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ dues corbes parametritzades sobre el mateix interval. Llavors

$$\frac{d}{dt}\langle \alpha(t), \beta(t)\rangle = \langle \alpha'(t), \beta(t)\rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t)\rangle.$$

Demostració. Denotem $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$ i $\beta(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$. Aleshores

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \alpha(t), \beta(t)\rangle &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \cdot \beta_i(t)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i'(t) \cdot \beta_i(t) + \alpha_i(t) \cdot \beta_i'(t)) \\
&= \langle \alpha'(t), \beta(t)\rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t)\rangle.
\end{aligned}$$

□

En particular, si $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ està ppla,

$$\|\gamma'(t)\|^2 = 1 \Rightarrow (\|\gamma'(t)\|^2)' = 0 \Rightarrow \langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle = 0.$$

Això justifica la següent definició.

Definició 1.1.7

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una corba ppla i $s \in I$ tal que $k(s) \neq 0$. Definim el **vector normal** de γ en s com el vector

$$N(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$$

que compleix $N(s) \perp \gamma'(s)$.
Alternativament $N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ i per tant tenim la relació

$$T'(s) = k(s) \cdot N(s).$$

Exemple. La corba $\gamma : s \in \mathbb{R} \to r(\cos(s/r), 1 + \sin(s/r))$ on $r > 0$ és la ppla d'un cercle de radi r centrat en el punt $(0, r)$ de $\mathbb{R}^2$, i calculem

$$\gamma''(s) = [(-\sin(s/r), \cos(s/r))]' = \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r)) \implies k(s) = \frac{1}{r}.$$

Veiem que el cercle tendeix geomètricament quan $r \to \infty$ cap a la recta $t \in \mathbb{R} \mapsto (t, 0)$ que té curvatura nul·la.

La definició de curvatura està justificada pel següent resultat.

Proposició 1.1.6

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una corba ppla i fixem $s_0 \in I$ tal que $k(s_0) \neq 0$. $\exists!$ cercle $\mathcal{C} : I \to \mathbb{R}^n$ parametritzat per longitud d'arc que compleix les següents condicions (ordre de contacte en s_0 al menys 2):

$$\begin{cases} \mathcal{C}(s_0) = \gamma(s_0) \\ \mathcal{C}'(s_0) = \gamma'(s_0) \\ \mathcal{C}''(s_0) = \gamma''(s_0). \end{cases}$$

L'únic cercle determinat per aquestes condicions es diu **cercle osculador** a γ en s_0. Aquest cercle té com a radi $\frac{1}{k(s_0)}$ (anomenat **radi de curvatura**), i com a centre el punt $\gamma(0) + \frac{1}{k(0)} N(0)$.

Demostració. Fent el canvi següent del domini de la parametrització per longitud d'arc $s \in I \mapsto s - s_0 \in I - s_0$, podem suposar que $s_0 = 0$. Busquem el cercle parametritzat per longitud d'arc sota la forma

$$\mathcal{C}(s) = p + r\cos(s/r) \cdot v + r\sin(s/r) \cdot w$$

on $q \in \mathbb{R}^n$ i v, w són dos vectors unitaris ortogonals. Llavors

$$\begin{cases} \mathcal{C}(0) = q + rv = \gamma(0) \\ \mathcal{C}'(0) = w = \gamma'(0) = T(0) \\ \mathcal{C}''(0) = -\dfrac{1}{r}v = \gamma''(0) = k(0)N(0), \end{cases}$$

sistema que determina unicament q, v i w de la forma següent:

$$\begin{cases} w = T(0) \\ r = \dfrac{1}{k(0)} \quad \text{i} \quad v = -N(0) \\ q = \gamma(0) + \dfrac{1}{k(0)} N(0). \end{cases}$$

Per tant el cercle $\mathcal{C}$ buscat s'escriu

$$\mathcal{C}(s) = \left(\gamma(0) + \frac{1}{k(0)} N(0) \right) + \frac{1}{k(0)} \left(-\cos(k(0)s) N(0) + \sin(k(0)s) T(0) \right).$$

□

Finalment demostrem que la curvatura és un invariant que no depèn de la ppla triada.

Proposició 1.1.7

Sigui $\beta = \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^n$ una reparametrització per longitud d'arc d'une corba $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ ppla. Llavors si fixem $s_0 = h(\tilde{s}_0) \in I$ tal que $k_\alpha(s_0) \neq 0$, tenim

$$k_\beta(\tilde{s}_0) = k_\alpha(s_0).$$

Demostració. Sabem que $h(\tilde{s}) = \pm \tilde{s} + c$ per un cert $c \in \mathbb{R}$, i per tant $h'(s) = \pm 1$ i $h''(s) = 0$. Llavors

$$k_\beta(\tilde{s}_0) = \|(\alpha \circ h)''(\tilde{s}_0)\| = \|(h' \cdot (\alpha' \circ h))'(\tilde{s}_0)\| = \|((h')^2 \cdot (\alpha'' \circ h)(\tilde{s}_0)\| = \|\alpha''(s_0)\| = k_\alpha(s_0).$$

□

Aquest últim resultat ens permet definir la curvatura de la traça d'una corba sense fer referència a cap parametrització.

Definició 1.1.8

Sigui C un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ tal que al voltant de cada punt $p \in C$ es pugui parametritzar de forma inequívoca per una parametrització regular, es a dir que existeix per cada punt p de C un entorn obert U de p i una parametrització regular $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ tal que γ sigui homeomorfisme de I sobre $U \cap C$.

Aleshores es defineix la **curvatura** de C en un punt $p = \gamma(t)$ com la curvatura de qualsevol reparametrització $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h : J \to \mathbb{R}^n$ per longitud d'arc en el paràmetre $h^{-1}(t)$.

La condició que γ sigui homeomorfisme de I sobre $U \cap C$ serveix per excloure les corbes que no són simples (per les quals és evident que no podem definir de forma inequívoca la noció de curvatura en un punt), però també serveix per excloure la figura en vuit del pla que es pot parametritzar per una corba regular injectiva. Aquesta condició també garanteix que si tenim una segona parametrització regular de C al voltant de p llavors serà una reparametrització de la corba γ com ho veurem més endavant.

Aquestes observacions seran fonamentals a l'hora de generalitzar les corbes a objectes geomètrics de dimensió superior, i entendre perqué fem servir la noció de subvarietats que requereix aquesta condició de homeomorficitat.

1.2 Geometria de les corbes de $\mathbb{R}^2$

Dins aquesta secció treballem en dimensió $n = 2$.

1.2.1 Curvatura amb signe d'una corba plana

Recordem que si una corba $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ està ppla i si $k(s) = \|T'(s)\| > 0$, llavors el vector normal està definit per $N(s) = T'(s)/\|T'(s)\|$. Quan $k(s) = 0$, el problem és que en general no tenim cap elecció canònica d'un vector normal, es a dir d'un vector dins l'hiperpla $\{\langle\cdot, T(s)\rangle = 0\}$, a la corba. L'única excepció és la dimension $n = 2$, per la qual aquest hiperpla té dimensió 1.

Definició 1.2.1

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ una corba ppla i fixem $s \in I$. Llavors $\exists! \hat{N}(s) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(T(s), \hat{N}(s))$ sigui una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^2$.
La **curvatura amb signe** de γ en el paràmetre s és l'únic real $\kappa(s)$ tal que $T'(s) = \kappa(s) \cdot \hat{N}(s)$, i compleix

$$\kappa(s) = \det(T(s), T'(s))$$

com $\det(T(s), \hat{N}(s)) = 1$.

El següent resultat relaciona la curvatura amb signe i la curvatura que hem definit a la secció anterior.

Proposició 1.2.1

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ una corba ppla i fixem $s \in I$ tal que $k(s) > 0$. Llavors

$$k(s) = |\kappa(s)| \quad \text{i} \quad N(s) = \pm\hat{N}(s).$$

Demostració. De fet

$$k(s) = \|T'(s)\| = \|\kappa(s)\hat{N}(s)\| = |\kappa(s)| \cdot \|\hat{N}(s)\| = |\kappa(s)|.$$

La igualtat $N(s) = \pm\hat{N}(s)$ és conseqüència del fet que $(T(s), N(s))$ i $(T(s), \hat{N}(s))$ són totes dues bases ortonormals de $\mathbb{R}^2$. □

La curvatura amb signe es pot interpretar com la derivada de l'angle que forma el vector tangent amb l'eix horizontal de pla:

Teorema 1.2.1

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ una corba ppla. $\exists \theta : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que podem escriure

$$T(s) = \cos\theta(s) e_1 + \sin\theta(s) e_2,$$

i llavors $\kappa(s) = \theta'(s)$.

Demostració. Si denotem (e_1, e_2) la base canònica de $\mathbb{R}^2$, llavors podem escriure

$$T(s) = \langle T(s), e_1\rangle e_1 + \langle T(s), e_2\rangle e_2,$$

i de la igualtat $\|T(s)\|^2 = 1$ deduïm l'equació

$$\langle T(s), e_1\rangle^2 + \langle T(s), e_2\rangle^2 = 1. \qquad (\forall s \in I)$$

Utilitzarem el resultat següent.

Lema 1.2.1

Siguin $a, b : I \to \mathbb{R}$ dos funcions de classe C^∞ tal que $\forall s \in I$,

$$a(s)^2 + b(s)^2 = 1.$$

Fixem $s_0 \in I$ i $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a(s_0) = \cos\theta_0$ i $b(s_0) = \sin\theta_0$.
Aleshores la funció de classe C^∞ definida per

$$\begin{array}{rcl} \theta : I & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \theta(s) := \theta_0 + \displaystyle\int_{s_0}^{s} (ab' - a'b)(u)du \end{array}$$

compleix $a(s) = \cos\theta(s)$ i $b(s) = \sin\theta(s)$.[a]

Demostració. Volem demostrar que

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} a(s) = \cos\theta(s) \\ b(s) = \sin\theta(s) \end{cases} \\ \iff & (a(s) - \cos\theta(s))^2 + (b(s) - \sin\theta(s))^2 \equiv 0 \\ \iff & 2 - 2(a(s)\cos\theta(s) + b(s)\sin\theta(s)) \equiv 0 \\ \iff & A(s) := a(s)\cos\theta(s) + b(s)\sin\theta(s) \equiv 1. \end{array}$$

Observem que

- La definició de $\theta = \theta(s)$ implica la igualtat $\theta' = ab' - a'b$;
- De la igualtat $a^2 + b^2 = 1$ obtenim $aa' + bb' = 0$.

Aleshores calculem

$$\begin{aligned} A' &= a'\cos\theta - a\theta'\sin\theta + b'\sin\theta + b\theta'\cos\theta \\ &= a'\cos\theta + b'\sin\theta + (b\cos\theta - a\sin\theta)(ab' - a'b) \\ &= \cos\theta(a' + abb' - a'b^2) + \sin\theta(b' - a^2b' + aa'b) \\ &= \cos\theta(a' - a^2a' - a'b^2) + \sin\theta(b' - a^2b' - b^2b') \\ &= a'\cos\theta(1 - a^2 - b^2) + b'\sin\theta(1 - a^2 - b^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalment, $A(s) \equiv A(s_0) = 1$ i obtenim el resultat. □

[a] Per $s \in I$ fixat, sabem que $\exists\theta(s)$ que compleix aquestes igualtats. La dificultat és obtenir una solució de classe C^∞ en el paràmetre s.

Ara, utilitzant el lema anterior, $\exists\theta : I \to \mathbb{R}$ tal que $\langle T(s), e_1\rangle = \cos\theta(s)$ i $\langle T(s), e_2\rangle = \sin\theta(s)$, o de forma equivalent

$$T(s) = \cos\theta(s)e_1 + \sin\theta(s)e_2.$$

Ara bé, podem escriure $\hat{N}(s) = \cos(\theta(s) + \pi/2)e_1 + \sin(\theta(s) + \pi/2)e_2$, i i obtenim $T'(s) = \theta'(s)(-\sin\theta(s)e_1 + \cos\theta(s)e_2) = \theta'(s) \cdot \hat{N}(s)$.

Per tant, finalment veiem que $\kappa(s) = \det(T(s), T'(s)) = \theta'(s)$ com volíem. □

1.2.2 Punts singulars de les corbes planes

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ una corba parametritzada i fixem $t_0 \in I$.

Definició 1.2.2

Diem que $\gamma(t_0)$ és un punt **singular** si $\gamma'(t_0) = 0$.

En el cas contrari diem que el punt és **regular**.

En particular tot punt d'una corba regular és regular.

En el cas d'un punt singular $\gamma(t_0)$, no podem utilitzar el vector tangent per estudiar el comportament local de la corba γ en t_0. Però podem estudiar la quantitat següent.

Proposició 1.2.2

Sigui $\begin{cases} \gamma : I \to \mathbb{R}^2 \\ \quad s \mapsto (x(s), y(s)) \end{cases}$ una corba parametritzada i $\gamma(t_0)$ un punt singular. Si el límit

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = \ell \in [-\infty, \infty]$$

existeix, llavors la recta $R_t = (\gamma(t_0)\gamma(t))$ convergeix a la recta tangent a γ en $\gamma(t_0)$ definida per

$$(T_{t_0}) \quad : \quad \begin{cases} y = y(t_0) + \ell(x - x(t_0)) & \text{si} \quad \ell \neq \pm\infty \\ x = x(t_0) & \text{si} \quad \ell = \pm\infty. \end{cases}$$

Demostració. La corba γ s'escriu localment com

$$(\gamma) \quad : \quad \begin{cases} y(t) = y(t_0) + (\ell + o(t - t_0))(x(t) - x(t_0)) & \text{si} \quad \ell \neq \pm\infty \\ x(t) = x(t_0) + o(t - t_0)(y(t) - y(t_0)) & \text{si} \quad \ell = \pm\infty \end{cases}$$

i per tant la recta passant per els punts $\gamma(t)$ i $\gamma(t_0)$ s'escriu

$$(R_t) \quad : \quad \begin{cases} y = y(t_0) + (\ell + o(t - t_0))(x - x(t_0)) & \text{si} \quad \ell \neq \pm\infty \\ x = x(t_0) + o(t - t_0)(y - y(t_0)) & \text{si} \quad \ell = \pm\infty. \end{cases}$$

Per tant podem concloure el resultat que havíem anunciat. □

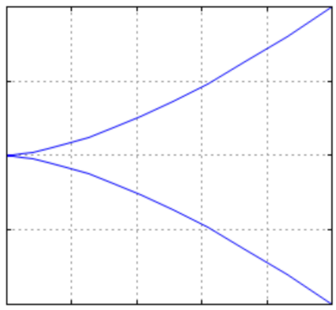
Exemple. Considerem $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2, t^3)$. La corba és regular excepte en $t = 0$, ja que $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$. Així doncs, podem estudiar les variacions de les seves components per dibuixar la forma de la corba. En el punt singular, calculem

$$\lim_{t\to 0}\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^2}=0.$$

Per tant la recta tangent en $\gamma(0)=(0,0)$ és la recta horizontal $\{y=0\}$. De fet, podem escriure la corba γ com

$$\gamma(t)=t^2(1,0)+t^3(0,1)=t^2e_1+t^3e_2,$$

fet que ens permet determinar completament el comportament local de la corba al voltant del punt singular:



De fet, més generalment, podem classificar els diferents tipus de punts singulars de les corbes planes fent servir el comportament respecte a la tangent, quan aquesta existeix.

Definició 1.2.3

Sigui $\gamma: I\to\mathbb{R}^2$ una corba plana, i suposem que $\exists v,w\in\mathbb{R}^2$ vectors linealment independents i $\exists p<q\in\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma(t)=\gamma(t_0)+(t-t_0)^p\cdot v+(t-t_0)^q\cdot w+o((t-t_0)^q)).$$

Tenim la classificació següent:

1. El punt $\gamma(t_0)$ es diu **punt ordinari** si $\begin{cases} p \text{ senar}, \\ q \text{ parell}. \end{cases}$
2. El punt $\gamma(t_0)$ es diu **punt d'inflexió** si $\begin{cases} p \text{ senar}, \\ q \text{ senar}. \end{cases}$
3. El punt $\gamma(t_0)$ es diu **cúspide de primer tipus** si $\begin{cases} p \text{ parell}, \\ q \text{ senar}. \end{cases}$
4. El punt $\gamma(t_0)$ es diu **cúspide de segon tipus** si $\begin{cases} p \text{ parell}, \\ q \text{ parell}. \end{cases}$

1.3 Geometria de les corbes de $\mathbb{R}^3$

En aquesta secció treballarem en dimensió ambient $n = 3$.

1.3.1 Torsió i fórmules de Frenet

Definició 1.3.1

Una corba $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ ppla es diu **biregular** si, $\forall s \in I$, es compleix la condició

$$\gamma''(s) \neq 0.$$

(De forma equivalent, la corba γ és biregular si la seva curvatura no s'anul·la mai: $\forall s \in I$, $k(s) \neq 0$.)
Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ és una corba ppla i biregular, definim el seu **vector binormal** en el paràmetre s per la fórmula[a]

$$B(s) := T(s) \wedge N(s).$$

De forma equivalent, $B(s)$ és l'únic vector de $\mathbb{R}^3$ tal que $(T(s), N(s), B(s))$ defineix una base ortonormal positiva. El triplet $(T(s), N(s), B(s))$ s'anomena **triedre de Frenet**.

[a]Recordem que el producte vectorial està definit per la fórmula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Per construcció,

$$B(s) \perp T(s) \quad \text{i} \quad B(s) \perp N(s).$$

Proposició 1.3.1

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una corba ppla i biregular. $\exists! \tau : I \to \mathbb{R}$ tal que $\forall s \in I$

$$B'(s) = \tau(s) \cdot N(s).$$

La funció τ s'anomena **torsió** de γ.

Demostració. Podem descomposar el vector $B'(s)$ en aquesta base ortonormal com

$$B'(s) = \langle B'(s), T(s)\rangle \cdot T(s) + \langle B'(s), N(s)\rangle \cdot N(s) + \langle B'(s), B(s)\rangle \cdot B(s).$$

Com $\|B(s)\|^2 = 1$, obtenim derivant $\langle B'(s), B(s)\rangle = 0$. I de la relació $\langle B(s), T(s)\rangle = 0$ veiem que

$$\langle B'(s), T(s)\rangle = -\langle B(s), T'(s)\rangle = -k(s) \cdot \langle B(s), N(s)\rangle = 0.$$

Per tant, la funció τ existeix i és únicament determinada com $\tau(s) := \langle B'(s), N(s)\rangle$. □

A diferència de la curvatura, la torsió pot prendre valors negatius. La torsió mesura el defecte d'una corba a ser plana, com podem intuïr en el següent resultat.

Proposició 1.3.2

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una corba ppla i biregular. Llavors la corba és plana (*i.e.* està continguda en un subespai afí de dimensió 2) si i només si $\tau \equiv 0$.

Demostració. Fixem $s_0 \in I$ qualsevol.

Si la corba és plana, $\exists f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3)^*$ tal que $f(\gamma(s)) = f(\gamma(s_0))$ per tot $s \in I$. (De forma equivalent $\gamma(s) \in \gamma(s_0) + \ker f$, un pla afí.) Derivant obtenim $f(\gamma'(s)) = 0$ i $f(\gamma''(s)) = 0$, és a dir $f(T(s)) = 0$, i $f(N(s)) = 0$ com $k(s) \neq 0$ (γ és biregular). Ara bé $\exists! X \in \mathbb{R}^3$ tal que $f = \langle \cdot, X\rangle$, i llavors necessàriament $B(s) = \lambda(s) \cdot X$ amb $\lambda \in C^\infty(I)$, ja que $X \perp T(s)$ i $X \perp N(s)$. Així $\|B(s)\| = 1 = |\lambda(s)\| \cdot \|X\|$ i per tant $B(s) = \pm X/\|X\|$. En particular B és constant, i llavors $\tau = \langle B', N\rangle \equiv 0$.

Recíprocament, si $\tau \equiv 0$, primer observem que $B(s) \equiv B(s_0)$ com $B'(s) = \tau(s)N(s)$, i després calculem

$$\begin{aligned} (\langle \gamma(s) - \gamma(s_0), B(s_0)\rangle)' &= \langle \gamma'(s), B(s_0)\rangle \\ &= \langle T(s), B(s)\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Doncs $\langle \gamma(s) - \gamma(s_0), B(s_0)\rangle = \langle \gamma(s_0) - \gamma(s_0), B(s_0)\rangle = 0$ i trobem que $\forall s \in I$

$$\gamma(s) \in \gamma(s_0) + \ker\langle \cdot, B(s_0)\rangle.$$

Es a dir la corba és plana. □

Teorema 1.3.1 (Fórmules de Frenet)

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una corba ppla i biregular. Llavors

$$\begin{cases} T' = kN \\ N' = -kT - \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$$

o, de forma equivalent,

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Demostració. Només ens falta demostrar la fórmula $N' = -kT - \tau B$. Com $(T(s), N(s), B(s))$ és una base ortonormal positiva, podem escriure $N = B \wedge T$.

Lema 1.3.1

Siguin $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ dues corbes parametritzades sobre el mateix interval. Llavors

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t) \wedge \beta(t)) = \alpha'(t) \wedge \beta(t) + \alpha(t) \wedge \beta'(t).$$

Demostració. És un càlcul:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\alpha(t)\wedge\beta(t)) &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\\ \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\alpha_2'\beta_3-\alpha_3'\beta_2\\ \alpha_3'\beta_1-\alpha_1'\beta_3\\ \alpha_1'\beta_2-\alpha_2'\beta_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_2\beta_3'-\alpha_3\beta_2'\\ \alpha_3\beta_1'-\alpha_1\beta_3'\\ \alpha_1\beta_2'-\alpha_2\beta_1'\end{pmatrix}\\
&= \alpha'(t)\wedge\beta(t)+\alpha(t)\wedge\beta'(t).
\end{aligned}$$

□

Per tant $N' = B'\wedge T + B\wedge T' = (\tau N)\wedge T + B\wedge(kN) = -\tau B - kT$. □

1.3.2 Forma canònica local

En aquesta secció donarem la interpretació geomètrica de la torsió.

Proposició 1.3.3 (Forma canònica local)
Sigui $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^3$ una corba biregular ppla.
Les coordenades $(x(s),y(s),z(s))$ de la corba γ dins la referència $\{\gamma(0),(T(0),N(0),B(0))\}$ s'expressen de la forma següent:

$$\begin{cases} x(s) = s - \dfrac{k(0)^2}{6}s^3 + o(s^3)\\ y(s) = \dfrac{k(0)}{2}s^2 + \dfrac{k'(0)}{6}s^3 + o(s^3)\\ z(s) = -\dfrac{k(0)\tau(0)}{6}s^3 + o(s^3). \end{cases}$$

Demostració. Busquem les funcions coordenades $x(s), y(s), z(s)$ tal que

$$\gamma(s) = \gamma(0) + x(s)T(0) + y(s)N(0) + z(s)B(0).$$

Considerem el desenvolupament de Taylor de $\gamma(s)$ d'ordre 3 en $t=0$:

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{6}\gamma'''(0) + o(s^3).$$

Com

$$\begin{cases} \gamma' = T\\ \gamma'' = kN\\ \gamma''' = k'N + kN' = k'N + k(-kT-\tau B) = -k^2T + k'N - k\tau B \end{cases}$$

resulta que

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \left(s - \frac{k(0)^2}{6}s^3\right)T(0) + \left(\frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3\right)N(0) - \frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3B(0) + o(s^3).$$

Això ens dona el resultat anunciat. □

La proposició anterior ens permet interpretar la torsió de la manera següent:

Definició 1.3.2

Sigui $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ una corba biregular ppla.

1. Si $\tau(0) < 0$, la corba γ travessa en $s = 0$ el pla osculador $\gamma(0) + \text{Vect}(T(0), N(0))$ dirigint-se cap al costat que conté $B(0)$ (sentit **dextrògir**).
2. Si $\tau(0) > 0$, la corba γ travessa el pla osculador en sentit contrari (sentit **levògir**).

La forma canònica local ens permet intepretar igualment el pla osculador de la manera següent.

Proposició 1.3.4

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una corba biregular ppla i fixem $s_0 \in I$. El pla osculador en s_0 és el límit dels plans que contenen la recta tangent a γ en s_0 i un punt $\gamma(s)$ quan $s \to s_0$.

Demostració. Suposem fent una possible translació de domini de parametrització que $s_0 = 0$, i observem que el pla osculador s'escriu $\{z = 0\}$ dins la referència $\mathcal{R} = \{\gamma(0), (T(0), N(0), B(0))\}$. Denotem Π_s el pla afí que conté la recta tangent $t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(0) + t \cdot \gamma'(0)$ i el punt $\gamma(s)$. Aquest pla es pot descriure dins les coordenades associades a la referència $\mathcal{R}$ mitjançant l'equació

$$(\Pi_s): \quad a_s x + b_s y + c_s z = d_s.$$

El pla Π_s conté $\gamma(0) = (0, 0, 0)_{\mathcal{R}}$, pel que $d_s = 0$. També conté el punt $\gamma(0) + T(0) = (1, 0, 0)_{\mathcal{R}}$, per tant $a_s = 0$. En fi, la condició $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))_{\mathcal{R}} \in \Pi_s$ s'escriu $b_s y(s) + c_s z(s) = 0$.

Com la corba és biregular, en particular $k(0) > 0$ i deduïm de l'expressió

$$y(s) = \frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3 + o(s^3)$$

que $y(s) \neq 0$ per $s \neq 0$ prou petit. Per tant $c_s \neq 0$ i podem suposar que $c_s = 1$. Al final obtenim que $(\Pi_s) : b_s y + z = 0$ amb

$$b_s = -\frac{z(s)}{y(s)}.$$

Ara bé

$$-\frac{z(s)}{y(s)} = - - \frac{-\frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3 + o(s^3)}{\frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3 + o(s^3} \to_{s \to 0} 0,$$

i doncs $\lim_{s \to 0} \Pi_s = \{z = 0\}$. □

També obtenim una interpretació de la curvatura.

Proposició 1.3.5

La curvatura de γ en s_0 coincideix amb la curvatura de la corba plana obtinguda projectant ortogonalment γ sobre el seu pla osculador en s_0.

Demostració. Suposem $s_0 = 0$ i considerem la forma canònoica local de γ. Llavors la projecció ortogonal sobre el pla osculador a γ en s_0 s'escriu $\pi(x,y,z)_{\mathcal{R}} = (x,y)_{\mathcal{R}}$. Doncs, la corba projectada que busquem s'escriu

$$\pi \circ \gamma(s) = (s - \frac{k(0)^2}{6}s^3 + o(s^3), \frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3 + o(s^3)),$$

i podem comprovar que la seva curvatura és $\|(\pi \circ \gamma)''(0)\| = \|(0, k(0))\| = k(0)$. □

1.3.3 Teorema fonamental de la teoria local de les corbes

El resultat següent és fonamental: ens diu que curvatura i torsió determinen completament les corbes parametritzades per longitud d'arc llevat d'isometries positives de l'espai $\mathbb{R}^3$. Per tant aquests dues funcions (o invariants) determinen completament les corbes ppla biregulars de l'espai.

Teorema 1.3.2

Siguin $k : I \to (0, \infty)$ i $\tau : I \to \mathbb{R}$ dues funcions de classe C^∞. Fixem $s_0 \in I$, un punt $p \in \mathbb{R}^3$ i una base ortonormal positiva (T_0, N_0, B_0). Aleshores $\exists!$ corba ppla i biregular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ que compleix les condicions:

$$\begin{cases} k_\alpha = k, \\ \tau_\alpha = \tau, \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \alpha(s_0) = p, \\ (T(s_0), N(s_0), B(s_0)) = (T_0, N_0, B_0). \end{cases}$$

Demostració. Fixem $s_0 \in I$ i considerem les fórmules de Frenet

$$\begin{cases} T' &= & & kN & \\ N' &= & -kT & & -\tau B \\ B' &= & & \tau N & \end{cases}.$$

És un sistema d'equacions diferencials ordinàries de primer ordre *lineal*. Per tant, $\exists!$ solucions $T, N, B : I \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$(T(s_0), N(s_0), B(s_0)) = (T_0, N_0, B_0).$$

El fet que les solucions estiguin definides a tot l'interval I és conseqüència de la linealitat del sistema.

Provem ara que $(T(s), N(s), B(s))$ és una base ortonormal positiva per tot $s \in I$. Si posem

$$A(s) := \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad G(s) := \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(s) & T_2(s) & T_3(s) \\ N_1(s) & N_2(s) & N_3(s) \\ B_1(s) & B_2(s) & B_3(s) \end{pmatrix},$$

llavors les fórmules de Frenet es poden escriure com $G' = AG$. A banda d'això, observem que la familia $(T(s), N(s), B(s))$ serà una base ortonormal positiva si i només si $G(s) \in SO(3) \iff G(s)G(s)^t \equiv I_3$, ja que $G(s_0) \in SO(3)$ i per continuitat del determinant. Tenint en compte que $A^t = -A$, calculem

$$(GG^t)' = G'G^t + GG'^t = AGG^t + G(AG)^t = AGG^t - GG^tA.$$

Per tant la matriu producte GG^t i la matriu identitat I_3 són solucions de l'equació diferencial matricial $X' = AX - XA$ amb la condició inicial $X(s_0) = I_3$. Per unicitat obtenim que efectivament

$G(s)G(s)^t \equiv I_3$ i doncs $(T(s), N(s), B(s))$ és una base ortonormal positiva per tot $s \in I$.

Ara definim la corba buscada per

$$\alpha(s) := p + \int_{s_0}^{s} T(t)dt.$$

Notem que $\alpha(s_0) = p$ i $\alpha' = T$. En particular la corba α està parametritzada per l'arc i T és el seu vector tangent. De la relació $T' = kN$ deduïm que la curvatura de α coincideix efectivement amb k i que el seu vector normal és N. Aleshores el vector binormal de α és $T \wedge N = B$, i la relació $B' = \tau N$ implica que τ és la torsió de α.

L'unicitat de la corba α es dedueix de l'unicitat de les solucions del sistema $G' = AG$ amb condició inicial $G(s_0) = (T_0, N_0, B_0)$ i del sistema $\alpha' = T$ amb $\alpha(s_0) = p$. □

1.3.4 Triedre de Frenet i torsió en el cas general

Moltes vegades no podem explicitar la parametrització per la longitud d'arc. En aquesta secció veurem com tot i aquesta dificultat podem definir les nocions de triedre de Frenet, curvatura i torsió fent servir la parametrtzació donada, i calcular aquests invariants.

Definició 1.3.3

Una corba $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es diu **biregular** si compleix la condició

$$\gamma' \wedge \gamma'' \neq 0.$$

En particular, una corba biregular és regular.

Proposició 1.3.6

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una corba regular. Fixem $t_0 \in I$ i recordem la funció longitud d'arc amb origen t_0 definida per

$$h := s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du.$$

Sabem que h és difeomorfisme amb $h' > 0$, i que la corba $\tilde{\gamma} := \gamma \circ h^{-1} : h(I) \to \mathbb{R}^3$ és una reparametrització positiva de γ per la longitud d'arc.

Aleshores γ és biregular si i només si $\tilde{\gamma}$ és biregular:

$$\tilde{\gamma}'' \neq 0 \iff \gamma' \wedge \gamma'' \neq 0.$$

Demostració. Derivant obtenim

$$\gamma' = (\tilde{\gamma} \circ h)' = h' \cdot \tilde{\gamma}' \circ h \implies \gamma'' = h'' \cdot \tilde{\gamma}' \circ h + (h')^2 \cdot \tilde{\gamma}'' \circ h$$

i trobem la fórmula

$$\gamma' \wedge \gamma'' = (h')^3 (\tilde{\gamma}' \circ h) \wedge (\tilde{\gamma}'' \circ h).$$

Així doncs, clarament $\gamma' \wedge \gamma'' \neq 0 \implies \tilde{\gamma}'' \neq 0$.

Recíprocament, la condició $\tilde{\gamma}'' \neq 0$ permet definir el vector normal a $\tilde{\gamma}$ com $\tilde{N} = \tilde{\gamma}''/\|\tilde{\gamma}''\|$ i tindrem $\tilde{\gamma}' \perp \tilde{\gamma}'' \implies \tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}'' \neq 0$. Com $h' > 0$ deduïm de l'anterior fórmula que $\gamma' \wedge \gamma'' \neq 0$. □

Definició 1.3.4

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una corba biregular, i $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h^{-1}$ una reparametrització positiva per la longitud d'arc. Denotarem per $(\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B})$ el triedre de Frenet, $\tilde{k}$ la curvatura i $\tilde{\tau}$ la torsió de la corba $\tilde{\gamma}$. Les quantitats

$$\left\{\begin{array}{lcl} T & = & \tilde{T} \circ h \\ N & = & \tilde{N} \circ h \\ B & = & \tilde{B} \circ h \end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{array}{lcl} k & = & \tilde{k} \circ h \\ \tau & = & \tilde{\tau} \circ h \end{array}\right.$$

s'anomenen respectivament **triedre de Frenet, curvatura i torsió** de γ.

Aquestes quantitats no depenen de la reparametrització triada. En particular es poden determinar mitjançant les següents fórmules.

Proposició 1.3.7

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una corba biregular. Llavors

$$\left\{\begin{array}{lcl} T & = & \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \\ \\ B & = & \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|} \\ \\ N & = & B \wedge T \end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left\{\begin{array}{lcl} k & = & \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} \\ \\ \tau & = & \frac{-\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2} \end{array}\right.$$

Demostració. La relació $N = B \wedge T$ és evident.
En primer lloc derivem $\gamma = \tilde{\gamma} \circ h$. Fent servir que $h' = \|\gamma'\|$, obtenim

$$\gamma' = h' \cdot \tilde{\gamma}' \circ h = \|\gamma'\| \cdot \tilde{T} \circ h = \|\gamma'\| \cdot T \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}.$$

En segon lloc derivem γ'. Obtenim

$$\gamma'' = (\|\gamma'\|)' \cdot \tilde{T} \circ h + \|\gamma'\|^2 \cdot \tilde{T}' \circ h = (\|\gamma'\|)' \cdot T + k\|\gamma'\|^2 \cdot N.$$

Aleshores deduïm que

$$\gamma' \wedge \gamma'' = k\|\gamma'\|^3 \cdot T \wedge N = k\|\gamma'\|^3 B \quad \Longrightarrow \quad \|\gamma' \wedge \gamma''\| = k\|\gamma'\|^3,$$

i doncs

$$k = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} \quad \text{i} \quad B = \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}.$$

En tercer lloc derivem γ''. Obtenim

$$\begin{array}{rcl} \gamma''' = & = & ((\|\gamma'\|)' \cdot T + k\|\gamma'\|^2 \cdot N)' \\ & = & (\|\gamma'\|)'' \cdot T + ((\|\gamma'\|)' \cdot T' + (k\|\gamma'\|^2)' \cdot N + k\|\gamma'\|^2 \cdot N' \\ & = & (\|\gamma'\|)'' \cdot T + ((\|\gamma'\|)' \cdot kN + (k\|\gamma'\|^2)' \cdot N + k\|\gamma'\|^2 \cdot N'. \end{array}$$

Llavors

$$\begin{aligned}
\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle &= \|\gamma' \wedge \gamma''\| \cdot \langle B, \gamma''' \rangle \\
&= \|\gamma' \wedge \gamma''\| \cdot k\|\gamma'\|^2 \cdot \langle B, N' \rangle \\
&= \|\gamma' \wedge \gamma''\| \cdot \left(\frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} \|\gamma'\|^2 \right) \cdot \langle B, -k\|\gamma'\|T - \tau\|\gamma'\|B \rangle \\
&= \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}{\|\gamma'\|} \cdot (-\tau\|\gamma'\|) \\
&= -\tau \cdot \|\gamma' \wedge \gamma''\|^2
\end{aligned}$$

i per tant τ compleix la fórmula anunciada. $\square$

El triedre de Frenet compleix fórmules similars a les fórmules de Frenet.

Proposició 1.3.8

Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una corba biregular. Llavors

$$\left\{ \begin{array}{lllll}
T' & = & & k\|\gamma'\|N & \\
N' & = & -k\|\gamma'\|T & & -\tau\|\gamma'\|B \\
B' & = & & \tau\|\gamma'\|N &
\end{array} \right. .$$

Demostració. Aquestes fórmules són conseqüències directes del fet que $h' = \|\gamma'\|$ i de les fórmules de Frenet en el cas ppla. $\square$

CAPÍTOL

2 SUBVARIETATS

En el primer capítol, vam considerar les corbes parametritzades com objectes centrals del nostre estudi, i en vàrem definir diversos invariants: la curvatura (definida en qualsevol dimensió), la curvatura amb signe (en dimensió 2), i el triedre de Frenet i la torsió (en dimensió 3). Una observació fonamental ha estat que aquests invariants són de fet geomètrics: no depenen de la parametrització triada en concret, sinó de la imatge de la corba (la seva traça). Això imposa algunes condicions sobre la traça d'una corba com objecte geomètric, i en el cas concret de la curvatura (l'únic invariant definit per les corbes en qualsevol dimensió), vam veure al final de la primera secció que el subconjunt de $\mathbb{R}^n$ que constitueix la traça d'una corba s'havia de poder parametritzar de forma regular per una aplicació que fos un homeomorfisme sobre la seva imatge per poder definir la seva curvatura en un punt.

En aquest capítol estudiarem la noció que generalitza aquestes corbes que admeten parametritzacions regulars injectives que són homeomorfisme sobre la seva imatge a qualsevol dimensió superior, és a dir la noció de *subvarietat*. La seva definició requereix alguns resultats previs de càlcul diferencial, interessants en si mateixos, i que presentem a continuació.

2.1 Estructura local de les immersions i submersions

En aquesta secció, fixem $m, n \in \mathbb{N}^*$, U un obert de $\mathbb{R}^m$ i $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una aplicació diferenciable de classe C^∞.

Recordem que l'aplicació f es diu difeomorfisme local si per tot $p \in U$ existeix un entorn obert $V \subset U$ de p tal que $f|_V$ sigui un difeomorfisme[1] (i aleshores $m = n$), i que el teorema de la funció inversa afirma que f és difeomorfisme local si i només si df_p és invertible en tot $p \in U$. És a dir, f és localment invertible si i només si f és invertible infinitessimalment. Veurem ara que aquest tipus d'enunciat té anàlegs per les nocions d'injectivitat i d'exhaustivitat.

Primer definim les nocions d'injectivitat i d'exhaustivitat infinitessimal que necessitem.

[1] $f|_V$ és difeomorfisme $\iff$ $f|_V$ invertible d'inversa C^∞

2.1.1 Definicions

Definició 2.1.1 **(Immersió i submersió)**

1. Diem que f és una **immersió** en $p \in U$ si la seva diferencial $df_p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ és injectiva. Aleshores $m \leq n$. Diem que f és una immersió sobre U si ho és en cada punt de U.

2. Diem que f és una **submersió** en $p \in U$ si la seva diferencial $df_p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ és exhaustiva. Aleshores $m \geq n$. Diem que f és una submersió sobre U si ho és en cada punt de U.

Exemples.

1. (**Inclusió canònica**) Quan $m \leq n$, l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} i : \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \simeq \mathbb{R}^n \\ p = (x_1, \ldots, x_m) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

és una immersió, ja que $di_p = i$ és injectiva per tot p. Aleshores per tot difeomorfisme $\varphi : V \subset \mathbb{R}^n \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ l'aplicació $\varphi \circ i$ és una immersió ja que

$$d(\varphi \circ i)_p = d\varphi_{i(p)} \circ di_p = d\varphi_{i(p)} \circ i$$

és injectiva. Veurem que tota immersió s'escriu localment d'aquesta manera.

2. (**Projecció canònica**) Quan $m \geq n$, l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^n \\ p = (x_1, \ldots, x_m) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

és una submersió perquè $d\pi_p = \pi$ és exhaustiva per tot p. Aleshores per tot difeomorfisme $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ l'aplicació $\pi \circ \varphi$ és una submersió ja que

$$d(\pi \circ \varphi)_p = \pi \circ d\varphi_p$$

és exhaustiva. Veurem que tota submersió en un punt s'escriu localment d'aquesta manera.

3. (**Gràfica d'una funció**) La gràfica de la funció f

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(f) : U \subset \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{m+n} \\ p & \mapsto & (p, f(p)) \end{array}$$

és una immersió ja que $d\Gamma(f)_p = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}, df_p)$ és injectiva. Notem que $\Gamma(f)$ també és automàticament injectiva.

Ara recordem com descriure geomètricament de forma simple una aplicació lineal.

Proposició 2.1.1
Sigui $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Llavors $\exists B$ base de $\mathbb{R}^m$ i $\exists B'$ base de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\text{Mat}_{B,B'}(L) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostració. Sigui $r \leq \min\{m, n\}$ el rang de L. Per definició podem trobar una família de vectors $e_1, \ldots, e_r$ de $\mathbb{R}^m$ tal que $(f(e_1), \ldots, f(e_r))$ sigui base de ImL. La família $(e_1, \ldots, e_r)$ és linealment independent, i es pot completar en una base $(e_1, \ldots, e_r, u_{r+1}, \ldots, u_m)$ de $\mathbb{R}^m$. $\forall i = r+1, \ldots, m$, $\exists \lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,r} \in \mathbb{R}$ tal que $L(u_i) = \sum_{k=1}^r \lambda_{i,k} L(e_k)$, i denotem $e_i = u_i - \sum_{k=1}^r \lambda_{i,k} e_k \Rightarrow e_i \in \ker L$. Aleshores posem $B = (e_1, \ldots, e_m)$ que encara serà base, i completem la família $(f(e_1), \ldots, f(e_r))$ en una base B' de $\mathbb{R}^n$. La matriu de L dins aquestes bases s'escriu com s'ha enunciat. $\square$

En particular veiem que

1. si $i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ és una immersió lineal, $\exists$ bases B, B' tal que

$$\text{Mat}_{B,B'}(i) = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} \iff i((x_1, \ldots, x_m)_B) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)_{B'},$$

2. si $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ és una submersió lineal, $\exists$ bases B, B' tal que

$$\text{Mat}_{B,B'}(\pi) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix} \iff \pi((x_1, \ldots, x_m)_B) = (x_1, \ldots, x_n)_{B'}.$$

El mateix passa amb les aplicacions diferencials: només cal utilitzar difeomorfismes enlloc d'utilitzar difeomorfismes lineals (que són de fet els canvis de base).

2.1.2 Estructura local de les immersions

Comencem amb les immersions.

Teorema 2.1.1 (Estructura local de les immersions)
Suposem que $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ és una immersió en $p \in U$.
Existeixen $U' \subset U$ entorn obert de p, $V' \subset \mathbb{R}^n$ entorn obert de $f(U')$ i $\Phi : V' \to \Phi(V')$ difeomorfisme tals que

$$\Phi \circ f(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

$\forall q = (x_1, \ldots, x_m) \in U'$.

Demostració. Recordem que $m \leq n$. Posem $v_i = df_p(e_i)$ per tot $i = 1, \ldots, m$ on $(e_1, \ldots, e_m)$ és la base canònica de $\mathbb{R}^m$. Com df_p és injectiva, la família de vectors $(v_1, \ldots, v_m)$ és linealment independent i es pot completar en una base $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Definim

$$\begin{aligned} \Psi : U \times \mathbb{R}^{n-m} &\to \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto f(x_1, \ldots, x_m) + \sum_{i=m+1}^{n} x_i \cdot v_i \end{aligned}$$

que compleix $\Psi(p, 0) = f(p)$ i és diferenciable de classe C^∞. A més

$$d\Psi_{(p,0)} = df_p + \sum_{i=m+1}^{n} v_i \cdot e_i^* = \sum_{i=1}^{m} df_p(e_i) \cdot e_i^* + \sum_{i=m+1}^{n} v_i \cdot e_i^* = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot e_i^*$$

i trobem que $\text{Mat}_{can}(d\Psi_{(p,0)}) = (v_1 \dots v_n)$. En particular $d\Psi_p$ és invertible, i pel teorema de la funció inversa, Ψ és difeomorfisme d'un entorn obert de $(p, 0)$ sobre un entorn obert $V' \subset \mathbb{R}^n$ de $\Psi(p, 0) = f(p)$. Podem suposar l'obert $\Psi^{-1}(V')$ de la forma $U' \times W'$ amb U' entorn obert de p i W' obert de $\mathbb{R}^{n-m}$ (aquests oberts formen una base de la topologia producte). Aleshores, per construcció

$$\Psi(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = f(x_1, \dots, x_m) \quad \iff \quad \Psi^{-1} \circ f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

per tot $(x_1, \dots, x_m) \in U'$, i per tant el teorema és cert amb $\Phi = \Psi^{-1}$. □

2.1.3 Estructura local de les submersions

Ara tractem el cas de les submersions.

Teorema 2.1.2 **(Estructura local de les submersions)**
Suposem que $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ és submersió en $p \in U$.
Existeixen $U' \subset U$ entorn obert de p i $\Phi : U' \to \Phi(U')$ difeomorfisme tal que

$$f \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$$

$\forall q = (x_1, \dots, x_m) \in \Phi(U')$.

Demostració. Recordem que $m \geq n$. Com df_p és exhaustiva, la matriu

$$\text{Mat}_{can}(df_p) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{can}(df_1(p)) \\ \vdots \\ \text{Mat}_{can}(df_n(p)) \end{pmatrix}$$

té rang n. Això vol dir que la família $(df_1(p), \dots, df_n(p))$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ és lliure, i es pot completar en una base $(df_1(p), \dots, df_n(p), \phi_{n+1}, \dots, \phi_m)$ de $(\mathbb{R}^n)^*$. Definim $\forall x \in U$

$$\Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x), \phi_{n+1}(x), \dots, \phi_m(x))$$

que és diferenciable de classe C^∞ i compleix $d\Phi_p = (df_1(p), \dots, df_n(p), \phi_{n+1}, \dots, \phi_m)$. En particular $d\Phi_p$ és invertible, i pel teorema de la funció inversa, Φ és difeomorfisme d'un entorn obert U' de p sobre la seva imatge. Aleshores, per construcció

$$\pi \circ \Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) = f(x)$$

on recordem que $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és la projecció canònica, i per tant obtenim que

$$\pi \circ \Phi = f \quad \iff \quad f \circ \Phi^{-1} = \pi$$

i per tant el teorema és cert. □

2.2 Subvarietats

Siguin $1 \leq m \leq n$ dos nombres enters.

2.2.1 Definició

Definició 2.2.1

Diem que un subconjunt $M \subset \mathbb{R}^n$ és **subvarietat** de dimensió m si per tot $p \in M$ existeixen un entorn obert $U \subset \mathbb{R}^n$ de p i un difeomorfisme $h : U \to h(U)$ tal que

$$h(U \cap M) = h(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

L'aplicació h es diu **difeomorfisme linealitzant** de M al voltant de p.

És a dir, una subvarietat de dimensió m és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ localment difeomorf a un subespai vectorial de dimensió m.

Exemple. Tot subespai vectorial de dimensió m de $\mathbb{R}^n$ és una subvarietat, i per tant tota imatge per un difeomorfisme d'un subespai vectorial de dimensió m és subvarietat. També és evident que si $M^m \subset \mathbb{R}^n$ és subvarietat i $V \subset \mathbb{R}^n$ és un obert tal que $V \cap M \neq \emptyset$, aleshores el subconjunt $V \cap M$ és igualment una subvarietat de la mateixa dimensió.

2.2.2 Caracteritzacions

El resultat següent dona diversos criteris per demostrar que un subconjunt és subvarietat.

Teorema 2.2.1

Un subconjunt M de $\mathbb{R}^n$ és una subvarietat de dimensió m si i només si compleix una de les propietats equivalents següents.

1. **(Gràfica)** Per tot punt p de M, existeixen un entorn obert $U \subset \mathbb{R}^n$ de p, un difeomorfisme $\Phi : U \to \Phi(U)$, un obert Ω de $\mathbb{R}^m$ i una funció $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ tal que

$$q \in U \cap M \iff \exists x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega \text{ tal que } \Phi(q) = (x, f(x)) = \Gamma(f)(x)$$

   És a dir, M és una subvarietat si i només si M és localment difeomorf a la gràfica d'una funció.

2. **(Descripció implicita)** Per tot punt p de M, existeixen un entorn obert $U \subset \mathbb{R}^n$ de p i una submersió $F : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ tal que

$$U \cap M = F^{-1}(0).$$

   És a dir, M és una subvarietat si i només si està donada localment com la solució d'un sistema de $n - m$ equacions

$$\begin{cases} F_{m+1}(q) & = 0 \\ \quad \vdots & \\ F_n(q) & = 0 \end{cases}$$

sota la condició que la família de formes lineals $(dF_{m+1}(q), \ldots, dF_n(q))$ sigui linealment independent a $(\mathbb{R}^m)^*$.

3. **(Parametrització)** Per tot punt p de M, existeixen un entorn obert $U \subset \mathbb{R}^n$ de p, un obert Ω de $\mathbb{R}^m$ i una immersió $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tal que φ indueix un homeomorfisme

$$\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} U \cap M$$

de l'obert Ω sobre el subconjunt $U \cap M$ proveït amb la topologia induïda.

El parell (Ω, φ) es diu **parametrització local** de M al voltant de p, mentre que el parell $(U \cap M, \varphi^{-1}))$ s'anomena **carta local** de M al voltant de p.

És a dir, M és una subvarietat si i només si M és localment l'imatge d'una immersió que sigui homeomorfisme sobre la seva imatge.

La última caracterització implica en particular que la traça d'una corba regular $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ no és necessariàment subvarietat de dimensió 1, i cal ser més exigent. Tal com vam comentar a la primera secció del capítol anterior, és necessari que γ sigui homeomorfisme de I sobre la seva imatge per poder elaborar correctament la geomètria diferencial d'aquests subconjunts.

Demostració.

1. $(\Longrightarrow)$ Suposem que

$$q \in U \cap M \iff \Phi(q) = (x, f(x)) \text{ amb } x \in \Omega$$

per un cert difeomofisme Φ i una aplicació $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-m}$. Definim

$$\begin{array}{rcl} h : \Omega \times \mathbb{R}^{n-m} & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} - f_{m+1}(x_1, \ldots, x_m), \ldots, x_n - f_n(x_1, \ldots, x_m)) \end{array}$$

que compleix

$$\text{Mat}_{can}(dh) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ * & I_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Per tant dh és invertible en cada punt. En particular h és difeomorfisme sobre un entorn obert V de $(p, f(p))$, i si posem $U' = U \cap \Phi^{-1}(V)$, tenim

$$\begin{aligned} q \in U' \cap M = (U \cap M) \cap \Phi^{-1}(V) &\iff \Phi(q) = (x, f(x)) \text{ amb } x \in \Omega \cap V \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rl} x_{m+1} &= f_{m+1}(x_1, \ldots, x_m) \\ \vdots & \\ x_n &= f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{array} \right. \quad \text{amb } x \in \Omega \cap V \\ &\iff h(x) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \text{ amb } x \in \Omega \cap V. \end{aligned}$$

En particular $h \circ \Phi(U' \cap M) = h \circ \Phi(U') \cap ((\mathbb{R}^m \times \{0\})$, i h és difeomorfisme linealitzant.

$(\Longleftarrow)$ Recíprocament escrivim $h(U \cap M) = \Omega \times \{0\}$ on Ω és un obert de $\mathbb{R}^m$, definim $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ per $f(x) = 0$. Llavors

$$\begin{aligned} q \in U \cap M &\iff h(q) \in h(U \cap M) = \Omega \times \{0\} \\ &\iff h(q) = (h_1(q), \ldots, h_m(q), 0, \ldots, 0) \in \Omega \times \{0\} \\ &\iff h(q) = \Gamma(f)(x) \text{ amb } x = (h_1(q), \ldots, h_m(q)) \in \Omega \end{aligned}$$

i obtenim el resultat posant $\Phi := h$.

2 ($\Longrightarrow$) Suposem que $U \cap M = F^{-1}(0)$ amb $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ submersió. El teorem d'estructura local ens dona un difeomorfisme $\Phi : U \to \Phi(U)$ (podem suposar $U' = U$) tal que

$$F \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_{m+1}, \dots, x_n). \quad \text{(!!!)}$$

Llavors

$$\begin{aligned} q \in U \cap M &\iff q \in U \text{ amb } F(q) = 0 \\ &\iff q \in U \text{ amb } F \circ \Phi^{-1}(\Phi(q)) = 0 \\ &\iff q \in U \text{ amb } \Phi(q) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \\ &\iff \Phi(q) \in \Phi(U) \cap \mathbb{R}^m \times \{0\} \end{aligned}$$

i obtenim que el difeomorfisme Φ és linealitzant.

($\Longleftarrow$) Si h és difeomorfisme linealitzant sobre un obert U al voltant d'un punt p, llavors $F : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ definida per $F(q) = (h_{m+1}(q), \dots, h_n(q))$ és una submersió com $dF = d(\pi_2 \circ h) = \pi_2 \circ dh$ amb $\pi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ submersió lineal definida per $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_{m+1}, \dots, x_n)$. Al final obtenim que

$$q \in M \cap U \iff h(q) \in h(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \iff q \in U \text{ i } F(q) = 0.$$

3 ($\Longrightarrow$) Suposem que $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ és una immersió tal que $\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} U \cap M$ sigui un homeomorfism. Pel teorema d'estructura local de les immersions, per tot $p \in U \cap M$ existeix un entorn obert $\Omega' \subset \Omega$ de x, $U' \subset U$ un entorn obert de $\varphi(\Omega')$ i un difeomorfisme $h : U' \to h(U') \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$h \circ \varphi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

per tot $(x_1, \dots, x_m) \in \Omega'$. Podem suposar que $h(U') = \Omega' \times W$ per algun obert W de $\mathbb{R}^{n-m}$. Tenim

$$\begin{aligned} q \in U' \cap M &\iff \exists!(x_1, \dots, x_m) \in \Omega' \text{ tal que } q = \varphi(x_1, \dots, x_m) \in U' \\ &\iff h(q) = h \circ \varphi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, , x_m, 0, \dots, 0) \in h(U') \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \end{aligned}$$

i veiem que h és linealitzant.

($\Longleftarrow$) Si agafem un difeomorfisme h linealitzant M al voltant d'un punt, podem suposar que $h(U \cap M) = \Omega \times \{0\}$ amb Ω un obert de $\mathbb{R}^m$. Posem

$$\varphi = h^{-1} \circ i : \Omega \to U$$

on i és la injecció canònica. Llavors φ és una immersió injectiva, i per tant és bijectiva sobre la seva imatge. Per construcció $\varphi(\Omega) = U \cap M$. Podem triar $U \subset K$ compacte i llavors φ^{-1} és tancada doncs contínua.

$\square$

Exemple. L'esfera unitat de $\mathbb{R}^n$ definida per

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

és una subvarietat de dimensió $n-1$. De fet l'aplicació $F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$ és una submersió sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ com Jac$(F) = (2x_1 \dots 2x_n)$.

Per acabar aquesta secció, anomenem les subvarietats en les quals centrarem els nostres esforços en el proper capítol.

Definició 2.2.2

Una subvarietat de dimensió 2 de $\mathbb{R}^3$ s'anomena una **superfície regular**.

Per tant una superfície regular és un subconjunt de $\mathbb{R}^3$ que admet localment parametritzacions $(\Omega, \varphi(u, v))$ regulars en el sentit que φ és immersió, i a més homeomorfisme sobre la seva imatge (en particular injectiva). Des d'aquest punt de vista les superfícies regulars són la generalització que buscàvem de les corbes regulars.

2.2.3 Parametritzacions locals d'una subvarietat

El següent criteri serà molt útil a l'hora de demostrar que un parell (Ω, φ) és efectivament una parametrització local d'una subvarietat.

Proposició 2.2.1

Siguin $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat i $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to M$ una immersió injectiva on Ω és un obert.

Llavors (Ω, φ) és una parametrització local de M.

El punt clau de la proposició anterior és que suposem que M ja és subvarietat.

Demostració. Només cal demostrar que $\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} \varphi(\Omega)$ és un homeomorfisme. Com sabem que φ és invertible, s'ha de comprovar que φ^{-1} és contínua. Aquesta propietat és local, i per tant podem suposar que disposem d'un difeomorfisme linealitzant $h : U \cap M = \varphi(\Omega) \to h(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ tal que $h \circ \varphi$ sigui la immersió canònica. Aleshores l'aplicació $\Psi = \pi \circ h \circ \varphi$ compleix que $d\Psi$ és bijectiva com

$$\begin{aligned} d\Psi(\mathbb{R}^m) &= d(\pi \circ h \circ \varphi)(\mathbb{R}^m) \\ &= \pi \circ d(h \circ \varphi)(\mathbb{R}^m) \\ &= \pi \circ i(\mathbb{R}^m) \\ &= \pi(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \\ &= \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Pel teorema de la funció inversa, l'aplicació Ψ és invertible localment i la seva inversa Ψ^{-1} és de classe C^∞. Per tant trobem que localment podem escriure sempre

$$\varphi^{-1} = \Psi^{-1} \circ \pi \circ h|_{U \cap M}$$

que és contínua. □

Exemple. (Coordenades esfèriques) Si considerem $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, ja sabem que és una subvarietat de dimensió 2. Considerem l'aplicació $\varphi : \Omega := (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{S}^2$ definida per la fórmula

$$\varphi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

Podem veure fàcilment que φ és injectiva, i calcular

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ -\sin u & 0 \end{pmatrix}$$

que té sempre rang 2 i doncs φ és immersió. Per tant fent servir la proposició anterior obtenim que (Ω, φ) és una parametrització local.

Ara demostrarem la propietat següent que vam comentar al capítol anterior: si tenim dues parametritzacions regulars d'una subvarietat de dimensió 1 al voltant d'un mateix punt, llavors localment les parametritzacions són reparametritzacions l'una de l'altra. De fet això és cert en qualsevol dimensió, i serà fonamental a l'hora de generalitzar la noció de subvarietats a la noció de varietats.

Proposició 2.2.2

Siguin (Ω_1, φ_1) i (Ω_2, φ_2) dues parametritzacions locals d'una subvarietat M de $\mathbb{R}^n$. Llavors $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2)) \to \varphi_2^{-1}(\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2))$ és un difeomorfisme.

Demostració. Fem el mateix truc que a la demostració de la proposició anterior. Només cal demostrar que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ és diferenciable. Aquesta propietat és local, i per tant podem suposar que disposem d'un difeomorfisme linealitzant $h : \varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2) \subset M \to h(\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2)) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$ tal que $h \circ \varphi = i$ sigui la immersió canònica. Aleshores per cada $i = 1, 2$ l'aplicació $\pi \circ h \circ \varphi_i$ és un difeomrofisme, i per tant

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = (\pi \circ h \circ \varphi_2)^{-1} \circ (\pi \circ h \circ \varphi_1)$$

ho és. $\square$

2.2.4 Espai tangent a una subvarietat

Definició 2.2.3

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat i $p \in M$.

Si $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ és una corba diferenciable de classe C^∞ tal que $\gamma(0) = p$, diem que el vector $\gamma'(0)$ és **tangent** a M en p.

Denotem per T_pM el conjunt de tots els vectors tangents a M en p, anomenat **espai tangent** a M en p.

El resultat següent ens permetrà determinar fàcilment l'espai tangent d'una subvarietat presentada implícitament o paramètricament.

Proposició 2.2.3

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat i $p \in M$.

1. Si (Ω, φ) és una parametrització local de M al voltant de p, llavors
$$T_pM = \text{Im} d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}.$$
2. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ és un entorn obert de p i $F : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ una submersió tal que

$F^{-1}(0) = U \cap M$, llavors
$$T_pM = \ker dF_p.$$
En particular T_pM és subespai vectorial de dimensió m de $\mathbb{R}^n$.

Demostració. Primer observem que per tot $X = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(Y) \in \text{Im} d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}$, la corba $\gamma : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \to \varphi(\varphi^{-1}(p) + tY) \in M$ està ben definida per ε prou petit, i compleix $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(Y) = X$. Per tant tenim la inclusió $\text{Im} d\varphi_{\varphi^{-1}(p)} \subset T_pM$.

En segon lloc si $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ és una corba diferenciable de classe C^∞ tal que $\gamma(0) = p$, podem suposar ε prou petit perquè $F(\gamma(t))$ sigui ben definit, i aleshores derivant en 0 obtenim $dF_p(\gamma'(0)) = 0$. Així doncs, tenim la doble inclusió
$$\underbrace{\text{Im} d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}}_{\text{dim}=m} \subset T_pM \subset \underbrace{\ker dF_p}_{\text{dim}=m},$$
i concloem fent servir les dimensions. □

Exemple. Calculem el tangent a $\mathbb{S}^2$ en un punt p fent servir els dos punts de la proposició anterior.

1. Recordem la parametrització (Ω, φ) on $\Omega := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ i
$$\varphi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$
Vam observar que
$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ -\sin u & 0 \end{pmatrix}$$
i per tant si $p = \varphi(u, v)$ aleshores
$$T_pM = \text{Im} d\varphi_{(u,v)} = \text{Vect}(\varphi_u, \varphi_v).$$

2. Recordem que $\mathbb{S}^2 = F^{-1}(0)$ amb $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ submersió sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Com $\text{Jac}(F) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$, obtenim per qualsevol $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ que
$$T_p\mathbb{S}^2 = \{X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3 \mid dF_p(X) = 2(x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3) = 0\} = p^\perp.$$

En el cas d'una superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, si $(\Omega, \varphi = \varphi(u, v))$ és una parametrització local de S al voltant d'un punt p, denotarem per
$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \text{i} \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$
els **vectors coordenades** que formen una base de $T_pS = \text{Im} d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}$

2.2.5 Aplicacions diferenciables

Definició 2.2.4

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat, $p \in M$ i $k \in \mathbb{N}^*$.

Una aplicació $f : M \to \mathbb{R}^k$ es diu **diferenciable en** p si, per a tota parametrització local (Ω, φ) de M al voltant de p, l'aplicació $f \circ \varphi$ és diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$.

L'aplicació $f : M \to \mathbb{R}^k$ es diu **diferenciable** si ho és en cada punt de M.

Observacions.

1. Per comprovar que una aplicació $f : M \to \mathbb{R}^k$ és diferenciable en un punt p de M, només cal comprovar-ho per una parametrització local (Ω, φ) al voltant de p. Més precisament, si (Ω', ψ) és una altra parametrització local al voltant de p, sabem que l'aplicació $\varphi^{-1} \circ \psi$ és un difeomorfisme, i per tant $f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$ és diferenciable en $\psi^{-1}(p)$ si i només si $f \circ \varphi$ ho és en $\varphi^{-1}(p)$.

2. Evidentment la restricció a M d'una aplicació diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definida sobre un obert U que conté M és automàticament diferenciable sobre M.

Definició 2.2.5

Sigui $f : M^m \subset \mathbb{R}^n \to N \subset \mathbb{R}^k$ una aplicació diferenciable entre dues subvarietats, i p un punt de M. L'aplicació

$$\begin{aligned} df_p : T_pM &\to T_{f(p)}N \\ X = \gamma'(0) &\mapsto df_p(X) := \left.\frac{d}{dt}\right|_0 f(\gamma(t)) \end{aligned}$$

on $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ és qualsevol corba tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = X$ és una aplicació lineal ben definida que s'anomena **aplicació tangent, o diferencial,** de f en p.

Demostrem que l'aplicació df_p no depèn efectivament de la corba triada. Suposem que $h : U \to \mathbb{R}^m$ és difeomorfisme linealitzant de M al voltant de p tal que $h(U) = \Omega_1 \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ (sempre ho podem suposar per definició de la topologia producte). Posem per tot $q \in U$

$$\bar{f}(q) = f \circ h^{-1} \circ \pi \circ h(q)$$

es a dir que si $h(q) = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ definim $\bar{f}(q) = f \circ h^{-1}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. Aleshores l'aplicació $\bar{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és diferenciable i, com f i $\bar{f}$ coincideixen sobre $U \cap M$, tenim

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 f(\gamma(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \bar{f}(\gamma(t)) = d\bar{f}_p(X),$$

valor que no depèn de la corba triada.

CAPÍTOL

SUPERFÍCIES REGULARS 3

Sigui S una superfície regular i fixem $p \in S$. Recordem que una superfície regular és una subvarietat de dimensió 2 de $\mathbb{R}^3$.

3.1 Primera forma fonamental

3.1.1 Definició

Definició 3.1.1

El producte escalar de $\mathbb{R}^3$ definit per $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^3 X_i Y_i$ indueix un producte escalar

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_p : T_pS \times T_pS &\to \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \langle X, Y\rangle \end{aligned}$$

sobre l'espai tangent anomenat **primera forma fonamental** de S en p.

Si (Ω, φ) és parametrització local de S al voltant de p, recordem que els vectors coordenades $\varphi_u = \partial\varphi/\partial u$ i $\varphi_v = \partial\varphi/\partial v$ formen una base de $T_pM = \mathrm{Im} d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}$, i escriurem

$$\mathrm{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{I}_p) = \begin{pmatrix} \langle\varphi_u,\varphi_u\rangle & \langle\varphi_u,\varphi_v\rangle \\ \langle\varphi_v,\varphi_u\rangle & \langle\varphi_v,\varphi_v\rangle \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix}.$$

Quan no hi hagi risc de confusió denotarem simplement I_p la matriu $\mathrm{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{I}_p)$.

Exemples.

1. Considerem la superfície regular $\mathbb{S}^2_R = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^3$ i fixem la parametrització local (Ω, φ) amb $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ i $\varphi(u, v) = R(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$. Llavors

calculem fàcilment

$$\mathrm{I}_p = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 u \end{pmatrix}.$$

2 El cilindre $\{x^2 + y^2 = 1\}$ és una superfície regular que admet com a parametrització $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ amb $(u, v) \in \Omega = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ per exemple. Aleshores

$$\mathrm{I}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Calcul de longitud

Aquesta forma fonamental ens permet calcular la longitud d'una corba de la qual la traça està continguda dins una carta local.

Proposició 3.1.1

Sigui (Ω, φ) una parametrització local de S, i $\gamma : I \to S \subset \mathbb{R}^3$ una corba tal que la seva traça compleix $\gamma(I) \subset \varphi(\Omega)$. Si posem $(u(t), v(t)) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$, les funcions u, v són automàticament dins $C^\infty(I)$ i fixem $[a, b] \subset I$.

Aleshores la longitud de γ de a a b està donada per la fórmula:

$$\ell(\gamma_{|[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2} dt,$$

o, de forma més condensada,

$$\ell(\gamma_{|[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt.$$

Demostració. Tenim

$$\gamma'(t) = u'(t)\varphi(u(t), v(t)) + v'(t)\varphi_v(u(t), v(t)),$$

i per tant

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} \\ &= \sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t)^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t)^2)}. \end{aligned}$$

Deduïm el resultat de la definició de la longitud: $\ell(\gamma_{|[a,b]}) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. □

El resultat anterior és sobretot interessant quan la corba està ja donada en coordenades locals com en l'exemple a continuació.

Exemple. Considerem la superfície anterior $\mathbb{S}^2_R = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^3$ i la seva parametrització local (Ω, φ) donada per $\varphi : (u, v) \in \Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi) \mapsto R(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$. Per qualsevol $\theta_0 \in (0, \pi)$, definim la corba parametritzada $\gamma_{\theta_0} : (0, 2\pi) \to S$ per

$$\gamma(t) = \varphi(\theta_0, t).$$

Llavors $u(t) = \theta_0$ i $v(t) = t$, i la proposició anterior ens permet calcular per a tot interval $[a, b] \subset (0, 2\pi)$ la longitud següent:

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma_{|[a,b]}) &= \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v'^2)}dt \\
&= \int_a^b \sqrt{R^2 \cdot 0^2 + 2.0.0.1 + R^2 \sin^2\theta_0 \cdot 1^2 dt} \\
&= (b-a)R\sin\theta_0.
\end{aligned}$$

En particular observem que la longitud total del paral·lel $\overline{\gamma((0, 2\pi))}$ val $2\pi\sin\theta_0$.

3.1.3 Àrea en coordenades locals

Definició 3.1.2

Un subconjunt $D \subset S$ s'anomena **domini** si

- D és un obert connex;
- $\partial D = \gamma_1 \sqcup \ldots \sqcup \gamma_k$ amb $k \in \mathbb{N}$ i els γ_i's són corbes tancades diferenciables a troços per tot $i = 1, \ldots, k$, amb el conveni que $k = 0 \iff \partial D = \emptyset$.

L'unió $\mathcal{R} := D \cup \partial D$ s'anomena **regió**.

Considerem el paral·lelogram

$$P := \{sX + tY \mid (s, t) \in [0, 1]^2\}$$

determinat per dos vectors X i Y de $\mathbb{R}^3$. Aquest subconjunt té àrea

$$\text{Àrea}(P) = \|X\|\|Y\||\sin\theta|$$

on θ està determinat per la condició $\langle X, Y\rangle = \|X\|\|Y\|\cos\theta$. Però recordem que $\|X \wedge Y\| = \|X\|\|Y\||\sin\theta|$ i per tant trobem la fórmula

$$\text{Àrea}(P) = \|X \wedge Y\|.$$

Això ens ajuda a entendre la següent definició.

Definició 3.1.3

Siguin (Ω, φ) parametrització local de S i $\mathcal{R}$ una regió compacta de S tal que $\mathcal{R} \subset \varphi(\Omega)$.

Definim **l'àrea** de la regió $\mathcal{R}$ com

$$\text{Àrea}^{\varphi}(\mathcal{R}) := \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv.$$

Comprovem en el proper resultat que aquesta definició no depèn de la parametrització triada, i que podrem escriure Àrea$(\mathcal{R})$ sense fer cap referència a la parametrització φ.

Proposició 3.1.2

Siguin (Ω, φ) una parametrització local de S i $\mathcal{R}$ una regió compacta de S tal que $\mathcal{R} \subset \varphi(\Omega)$.

Aleshores primer

$$\text{Àrea}^{\varphi}(\mathcal{R}) = \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{EG - F^2}\, dudv,$$

i en segon lloc aquesta quantitat no depèn de la parametrització triada.

Demostració. Pel primer punt, denotem θ l'angle dins $[0, \pi]$ determinat per l'equació $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \|\varphi_u\| \|\varphi_v\| \cos\theta$ i calculem

$$\begin{aligned} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \sin^2\theta \\ &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2 \end{aligned}$$

i veiem que la fórmula anunciada és correcte.

El segon punt necessita més feina. Sigui (Ω', ψ) una segona parametrització de S que compleix $\mathcal{R} \subset \psi(\Omega')$. Fent una possible reducció dels oberts Ω i Ω', suposarem que $\varphi(\Omega) = \psi(\Omega')$. Sabem que l'aplicació

$$\begin{aligned} h := \psi^{-1} \circ \varphi : \Omega &\to \Omega' \\ (u, v) &\mapsto h(u, v) = (\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned}$$

és un difeomorfisme tal que $h(\varphi^{-1}(\mathcal{R})) = \psi^{-1}(\mathcal{R})$. L'aplicació h es pot interpretar com un canvi de variables i donat que $d\bar{u}d\bar{v} = |\det \text{Jac}(h)| dudv$ obtenim

$$\int_{\psi^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{E_\psi G_\psi - F_\psi^2}\, d\bar{u}d\bar{v} = \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{E_\psi G_\psi - F_\psi^2} \circ h |\det \text{Jac}(h)| dudv.$$

Lema 3.1.1

Si I_φ i I_ψ són les matrius que representen la forma fonamental de S en les bases (φ_u, φ_v) i $(\psi_{\bar{u}}, \psi_{\bar{v}})$ respectivament, llavors

$$\mathrm{I}_\varphi = \text{Jac}(h)^t \cdot (\mathrm{I}_\psi \circ h) \cdot \text{Jac}(h).$$

Demostració. De la relació $\varphi(u, v) = \psi(h_1(u, v), h_2(u, v))$ obtenim

$$\begin{cases} \varphi_u = \frac{\partial h_1}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \circ h \\ \varphi_v = \frac{\partial h_1}{\partial v} \times \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial v} \times \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \circ h \end{cases}$$

i observem que $\text{Jac}(h)$ és la matriu de canvi entre les base (φ_u, φ_v) i $(\psi_{\bar{u}}, \psi_{\bar{v}})$. De la fórmula del canvi de base de la representació matricial d'una forma quadràtica deduïm el resultat. □

Al final calculem

$$\det \mathrm{I}_\varphi = \det(\text{Jac}(h))^2 \cdot \det(\mathrm{I}_\psi) \circ h,$$

i com

$$\det \mathrm{I}_\varphi = E_\varphi G_\varphi - F_\varphi^2 \quad \text{i} \quad \det(\mathrm{I}_\psi) = E_\psi G_\psi - F_\psi^2,$$

deduïm el resultat:

$$\int_{\psi^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{E_\psi G_\psi - F_\psi^2}\, d\bar{u} d\bar{v} = \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{E_\varphi G_\varphi - F_\varphi^2}\, dudv.$$

□

La definició d'àrea s'exten sense dificultat a qualsevol regió compacta de S tal que $\mathcal{R} \subset \overline{\varphi(\Omega)}$.

Exemple. Considerem la superfície anterior $\mathbb{S}_R^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^3$ i la seva parametrització local (Ω, φ) donada per $\varphi : (u, v) \in \Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi) \mapsto R(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$. Llavors, com el subconjunt $\mathcal{R} = \mathbb{S}_R^2$ és una regió compacta tal que $\mathcal{R} \subset \overline{\varphi(\Omega)}$, calculem

$$\text{Àrea}(\mathbb{S}_R^2) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \cdot R^2 \sin u - 0^2} dudv = 4\pi R^2.$$

3.1.4 Isometries entre superfícies

Siguin $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dues superfícies regulars, i $f : S_1 \to S_2$ una aplicació diferenciable.

Definició 3.1.4

L'aplicació f es diu **isometria local** si per tot $p \in S_1$ la diferencial $df_p : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ és isometria, és a dir compleix $\forall X, Y \in T_pS_1$ la igualtat

$$\langle df_p(X), df_p(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Diem que f és **isometria** si a més f és invertible.

Observacions.

1. f isometria local $\Longrightarrow \forall p \in S_1, df_p : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ és invertible. Llavors es pot demostrar, prenent parametritzacions locals, que f és localment invertible.
2. Si f és isometria, f^{-1} ho és.

Ara analitzarem com una isometria preserva les longituds i les àrees. En el cas de les longituds, tenim una caracterització de les isometries locals.

Proposició 3.1.3

[f és isometria local] $\Longleftrightarrow$ [f preserva les longituds: $\forall \gamma$ corba sobre S_1, $\ell(f \circ \gamma) = \ell(\gamma)$].

Demostració. Si f és isometria local, llavors

$$\|\gamma'(t)\|_1 = \|df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)\|_2 = \|(f \circ \gamma)'(t)\|_2,$$

fórmula de la qual deduïm per integració que γ i $f \circ \gamma$ tenen la mateixa longitud.

Recíprocament, si f conserva les longituds, aleshores $\forall p \in S_1$ i $\forall X \in T_pS_1$ sigui $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1$ tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = X$. Tenim per tot $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\int_0^t \|\gamma'(u)\|_1 du = \int_0^t \|(f \circ \gamma)'(u)\|_2 du$$

i derivant aquesta relació en $t = 0$ obtenim

$$\|\gamma'(0)\|_1 = \|df_{\gamma(0)}(\gamma'(0))\|_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \|X\|_1 = \|df_p(X)\|_2.$$

Així la diferencial df_p preserva la norma, i doncs preserva el producte escalar via la identitat de polarització. $\square$

Proposició 3.1.4

[f és isometria] $\Longrightarrow$ [f preserva les àrees].

Demostració. Sigui $R \subset S_1$ una regió compacta i $(\Omega, \varphi(u, v))$ una parametrització local de S_1 tal que $R \subset \varphi(\Omega)$. Com f és isometria, $f \circ \varphi : \Omega \to f(\varphi(\Omega))$ és diferenciable, injectiva i immersió. Això implica que $(\Omega, \psi := f \circ \varphi)$ és una parametrització local de S_2 i compleix $f(R) \subset \psi(\Omega)$. De la relació $\psi = f \circ \varphi$, veiem que

$$\psi_u = df(\varphi_u) \quad \text{i} \quad \psi_v = df(\varphi_v).$$

Així

$$E_\psi = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = \langle df(\varphi_u), df(\varphi_u) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = E_\varphi,$$

i de la mateixa manera $F_\psi = F_\varphi$ i $G_\psi = G_\varphi$. Aleshores

$$\text{Àrea}(R) = \int_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{E_\varphi G_\varphi - F_\varphi^2} dudv = \int_{(f \circ \varphi)^{-1}(R)} \sqrt{E_\psi G_\psi - F_\psi^2} dudv = \text{Àrea}(f(R)).$$

$\square$

3.2 Segona forma fonamental

Sigui S una superfície regular.

3.2.1 Orientació de les superfícies

Denotem $\mathbb{S}^2$ la esfera de radi 1 centrada a l'origen de l'espai $\mathbb{R}^3$ definida per

$$\mathbb{S}^2 := \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Definició 3.2.1

Diem que S és **orientable** si existeix una aplicació $\nu : S \to \mathbb{S}^2$ diferenciable de classe C^∞ tal que per tot $p \in S$

$$\nu(p) \in (T_pS)^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad T_pS = \nu(p)^\perp.$$

Una tal aplicació ν es diu **aplicació de Gauss** o **camp normal unitari** de S.

Si S és orientable per un camp normal unitari N, llavors S admet exactament dos camps normals unitaris que seran ν i $-\nu$, ja que $\dim(T_pS)^\perp = 1$. L'elecció d'un camp normal unitari d'una superfície orientable s'anomena **orientació** de S.

Si S és **orientada** per un camp normal unitari ν, llavors $\forall p \in S$ i $X, Y \in T_pS$, diem que (X, Y) és **base positiva** de T_pS si es compleix la condició:

$$\det(X, Y, \nu(p)) > 0.$$

Exemples.

1. La esfera $\mathbb{S}^2$ és una superfície regular orientable, i un exemple d'orientació és el vector normal unitari definit per tot $p \in \mathbb{S}^2$ com
$$\nu(p) = p,$$
perquè $T_p\mathbb{S} = \text{Vect}(p)^\perp$ i $\|p\| = 1$.

2. Localment sempre existeix una orientació. Precisament, si $(\Omega, \varphi = \varphi(u, v))$ és una parametrització local de S, llavors
$$\nu(\varphi(u, v)) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u, v)$$
és, per construcció, un camp normal unitari tal que $(\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v))$ sigui base positiva de $T_{\varphi(u,v)}S$ en cada punt de $\varphi(\Omega)$.

3. La banda de Moebius no és orientable com veurem a classe de problemes.

El resultat següent relaciona les orientacions locals (que existeixen sempre) amb l'orientació global.

Proposició 3.2.1

Si existeix una col·lecció de parametritzacions locals $\{(\Omega_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ de S tal que

$$S = \cup_{i\in I}\varphi_i(\Omega_i)$$

i tal que per tot $i \neq j \in I^2$

$$\det \mathsf{Jac}(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i) > 0$$

sobre $\varphi_i^{-1}(\varphi_i(\Omega_i) \cap \varphi_j(\Omega_j))$, aleshores S és orientable.

Demostració. Vam veure que si posem $h = (h_1, h_2) := \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ llavors escrivint $\varphi_i = \varphi_j \circ h$ obtenim

$$\begin{cases} (\varphi_i)_u = \frac{\partial h_1}{\partial u}(\varphi_j)_{\bar{u}} \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial u}(\varphi_j)_{\bar{v}} \circ h \\ (\varphi_i)_v = \frac{\partial h_1}{\partial v}(\varphi_j)_{\bar{u}} \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial v}(\varphi_j)_{\bar{v}} \circ h \end{cases} \iff \begin{pmatrix} (\varphi_i)_u \\ (\varphi_i)_v \end{pmatrix} = \mathsf{Jac}(h) \begin{pmatrix} (\varphi_j)_{\bar{u}} \\ (\varphi_j)_{\bar{v}} \end{pmatrix} \circ h.$$

Per tant si $\det \mathsf{Jac}(h) > 0$ deduïm que

$$\nu_i \circ \varphi_i = \frac{(\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v}{\|(\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v\|} = \frac{(\varphi_j)_{\bar{u}} \wedge (\varphi_j)_{\bar{v}}}{\|(\varphi_j)_{\bar{u}} \wedge (\varphi_j)_{\bar{v}}\|} \circ h = \nu_j \circ \varphi_j \circ h = \nu_j \circ \varphi_i,$$

és a dir que $\nu_i = \nu_j$ sobre el domini $\varphi_i(\Omega_i) \cap \varphi_j(\Omega_j)$. Per tant podem definir un camp normal unitari posant per tot $p \in S$

$$\nu(p) = \nu_i(p)$$

si $p \in \varphi_i(S)$. Aquesta aplicació està ben definida, de classe C^∞ i defineix un camp normal unitari sobre S. $\square$

Per acabar introduïm la definició següent.

Definició 3.2.2

Suposem S orientada per ν camp normal unitari. Una parametrització local (Ω, φ) de S es diu **compatible amb l'orientació** si tenim

$$\nu(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

per tot $p = \varphi(u, v) \in \varphi(\Omega)$.

3.2.2 Definició de la segona forma fonamental

En aquesta secció suposarem S orientada per un camp normal unitari $\nu : S \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ i fixarem $p \in S$.

Definició 3.2.3

Via la igualtat $T_pS = T_{\nu(p)}\mathbb{S}^2 (= (\nu(p))^{\perp})$, obtenim que l'aplicació lineal

$$\begin{aligned} W_p : T_pS &\to T_{\nu(p)}\mathbb{S}^2 \\ X &\mapsto -d\nu_p(X) \end{aligned}$$

és un endormofisme de T_pS conegut com **endomorfisme de Weingarten**, i l'aplicació bilineal associada

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS &\to \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \mathrm{II}_p(X, Y) := \mathrm{I}_p(W_p(X), Y) = -\langle d\nu_p(X), Y\rangle \end{aligned}$$

s'anomena **segona forma fonamental** de S en p.

Observem que si coneixem la primera forma fonamental I_p, determinar l'endmorfisme de Weingarten W_p és estricament equivalent a determinar la segona forma fonamental II_p.

Exemples.

1. Si $\{z = 0\}$, llavors $\nu \equiv (0, 0, 1)$ i deduïm $W \equiv 0$ i $\mathrm{II} \equiv 0$.
2. Sobre $\mathbb{S}^2$ podem escollir el camp normal unitari $\nu(p) = p$, es a dir $\nu = Id_{|\mathbb{S}^2}$. Llavors
$$W_p = -Id_{|T_p\mathbb{S}^2} \quad \text{i} \quad \mathrm{II}_p = -\mathrm{I}_p.$$
3. Considerem el cilindre $S = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ orientat per el camp normal unitari
$$\nu(x, y, z) = (x, y, 0).$$
Fixem $u_0 \in \mathbb{R}$ i considerem la parametrització local
$$\begin{aligned} \varphi : (u_0, u_0 + 2\pi) \times \mathbb{R} &\to S \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v). \end{aligned}$$
Veiem que
$$-\nu \circ \varphi(u, v) = -(\cos u, \sin u, 0) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -d\nu(\varphi_u) = -(-\sin u, \cos u, 0) = -\varphi_u \\ -d\nu(\varphi_v) = 0 \end{cases}$$
i llavors, utilitzant que (φ_u, φ_v) és ortonormal, obtenim
$$mat_{(\varphi_u,\varphi_v)}(W_p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad mat_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{II}_p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El resultat següent és fonamental i ens permetra definir les diferents nocions de curvatures.

Proposició 3.2.2

La segona forma fonamental és simètrica, o de forma equivalent, l'endomorfisme W_p és autoadjunt:

$$\mathrm{II}_p(X,Y) = \langle W_p(X), Y\rangle = \langle X, W_p(Y)\rangle = \mathrm{II}_p(Y,X)$$

per tot $X, Y \in T_pS$.

Demostració. Sigui (Ω, φ) una parametrització local de S al voltant de $p = \varphi(u_0, v_0)$. Per linealitat de W_p i simetria del producte escalar, només cal demostrar la igualtat pel parell (φ_u, φ_v), ja que és base de T_pS. Recordem que

$$\begin{aligned} W_p(\varphi_u) &= -d\nu_p(\varphi_u) \\ &= -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \nu(\varphi(u_0+t, v_0)) \\ &= -\frac{\partial \nu\circ\varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \end{aligned}$$

i de la mateixa manera $W_p(\varphi_v) = -\frac{\partial \nu\circ\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$. Observem que

$$\langle \nu\circ\varphi(u,v), \varphi_u(u,v)\rangle = 0 \quad \overset{\partial/\partial v}{\Longrightarrow} \quad \langle \partial(\nu\circ\varphi)/\partial v, \varphi_u\rangle + \langle \nu\circ\varphi, \varphi_{vu}\rangle = 0,$$

i de la mateixa manera $\langle \partial(\nu\circ\varphi)/\partial u, \varphi_v\rangle + \langle \nu\circ\varphi, \varphi_{uv}\rangle = 0$. Llavors, tenint en compte que $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$,

$$\begin{aligned} \langle W_p(\varphi_u), \varphi_v\rangle &= -\langle \partial(\nu\circ\varphi)/\partial u, \varphi_v\rangle \\ &= \langle \nu\circ\varphi, \varphi_{uv}\rangle \\ &= \langle \nu\circ\varphi, \varphi_{vu}\rangle \\ &= -\langle \partial(\nu\circ\varphi)/\partial v, \varphi_u\rangle \\ &= \langle W_p(\varphi_v), \varphi_u\rangle \end{aligned}$$

i concloem fent servir la simetria del producte escalar. □

3.2.3 Curvatures principals, de Gauss i mitjana

Ara podem definir les diferents nocions de curvatura d'una superfície regular orientada:

Definició 3.2.4

Suposem S orientada per un camp normal unitari ν i fixem $p \in S$.

Com $W_p : T_pS \to T_pS$ és un endomorfisme autoadjunt, W_p té valors propis reals $k_1(p)$ i $k_2(p)$, i diagonalitza en una base ortonormal (X_1, X_2) de T_pS. En particular tindrem

$$\mathrm{Mat}_{(X_1,X_2)}(\mathrm{II}_p) = \mathrm{Mat}_{(X_1,X_2)}(W_p) = \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}.$$

Els subespais propis Vect(X_1) i Vect(X_2) s'anomenen **direccions principals** de S en p, i els valors propis $k_1(p)$ i $k_2(p)$ s'anomenen **curvatures principals** de S en p.

Si $k_1(p) \neq k_2(p)$ les direccions principals són uniques.

Quan $k_1(p) = k_2(p) = k(p)$, la superfície es diu **umbilical** en p i tenim que $W_p = k(p)\ Id|_{T_pS}$: totes les direccions de T_pS són principals.

Definim la **curvatura de Gauss** de S en p com

$$K(p) := \det(W_p) = k_1(p) \cdot k_2(p),$$

i la **curvatura mitjana** de S en p com

$$H(p) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}(W_p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}$$

Aquestes diferents nocions de curvatura estan relacionades com segueix.

Proposició 3.2.3

Suposem S orientada i $p \in S$. Llavors les curvatures principals estan determinades per la fórmula:

$$k_i(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

Demostració. Si denotem $P(\lambda) = \det(W_p - \lambda Id)$, i denotem $\mathrm{Mat}_{can} W_p = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, llavors

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{pmatrix} \\
&= (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 \\
&= ac - b^2 - (a + c)\lambda + \lambda^2 \\
&= K - 2H\lambda + \lambda^2 \\
&= (\lambda - (H + \sqrt{H^2 - K})) \cdot (\lambda - (H - \sqrt{H^2 - K}))
\end{aligned}$$

i per tant obtenim el resultat. □

3.2.4 Expressió local

Ara expliquem com determinar les expressions de W_p i II_p dins una parametrització local.

Proposició 3.2.4 (expressions locals de II_p i W_p)

Suposem S orientada per $\nu : S \to \mathbb{S}^2$, i sigui (Ω, φ) una parametrització local de S compatible amb l'orientació. Posem $\bar{\nu} = \nu \circ \varphi = \varphi_u \wedge \varphi_v / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ i definim

$$\begin{cases} e = \langle \bar{\nu}, \varphi_{uu} \rangle, \\ f = \langle \bar{\nu}, \varphi_{uv} \rangle, \quad (= \langle \bar{\nu}, \varphi_{vu} \rangle) \\ g = \langle \bar{\nu}, \varphi_{vv} \rangle. \end{cases}$$

Llavors

$$\text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{II}_p) = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

i

$$\text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(W_p) = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} eG-fF & Gf-Fg \\ -eF+fE & -fF+gE \end{pmatrix}.$$

En particular,

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \quad \text{i} \quad H = \frac{eG-2fF+gE}{2(EG-F^2)}.$$

Observem que quan $\text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{I}_p) = I_2$ en un cert punt p, llavors $E = G = 1$ i $F = 0$ i per tant

$$\text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{II}_p) = \text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(W_p) = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Demostració. Calculem primer

$$\mathrm{II}_p(\varphi_u,\varphi_u) = \langle -d\nu_p(\varphi_u), \varphi_u\rangle = \langle -\bar{\nu}_u, \varphi_u\rangle \underset{\langle\bar{\nu},\varphi_u\rangle=0}{=} \langle \bar{\nu}, \varphi_{uu}\rangle = e,$$

i de la mateixa manera obtenim

$$\mathrm{II}_p(\varphi_u,\varphi_v) = f \quad \text{i} \quad \mathrm{II}_p(\varphi_v,\varphi_v) = g.$$

Per tant

$$\text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{II}_p) = \begin{pmatrix} \mathrm{II}_p(\varphi_u,\varphi_u) & \mathrm{II}_p(\varphi_u,\varphi_v) \\ \mathrm{II}_p(\varphi_v,\varphi_u) & \mathrm{II}_p(\varphi_v,\varphi_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Ara bé, com $\mathrm{II}_p(X,Y) = \mathrm{I}_p(W_p(X),Y)$ veiem que en termes de matrius

$$\text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{II}_p) = \text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(W_p)^t \cdot \text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{I}_p).$$

Aleshores

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(W_p) &= \left(\text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{II}_p) \times \text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{I}_p)^{-1}\right)^t \\ &= \text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{I}_p)^{-1} \times \text{Mat}_{(\varphi_u,\varphi_v)}(\mathrm{II}_p) \quad (\mathrm{I}_p \text{ i } \mathrm{II}_p \text{ són simètriques}) \\ &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} eG-fF & Gf-Fg \\ -eF+fE & -fF+gE \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les fórmules per K i H en són conseqüència directa. □

3.2.5 Curvatura normal

En aquesta secció relacionem les curvatures principals de la superfície regular S amb la curvatura de les corbes que conté. Suposem S orientada per $\nu : S \to \mathbb{S}^2$.

Definició 3.2.5

Sigui $\gamma : I \to S$ una corba parametritzada per la longitud d'arc i fixem $s \in I$. Llavors la **curvatura normal** de γ en s es defineix com la quantitat

$$k_n(s) := \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s)) \rangle.$$

Aquesta quantitat es pot calcular fent servir la segona forma fonamental:

Proposició 3.2.5

Sigui $\gamma : I \to S$ una corba parametritzada per la longitud d'arc i fixem $s \in I$. Es compleix la igualtat:

$$k_n(s) = \mathrm{II}_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)).$$

Demostració. Com $\gamma(I) \subset S$ sabem que $\gamma'(s) \in T_{\gamma(s)}S$ i per tant $\langle \gamma'(s), \nu \circ \gamma(s) \rangle = 0$ per tot $s \in I$. Derivant aquesta relació obtenim

$$\langle \gamma''(s), \nu \circ \gamma(s) \rangle + \langle \gamma'(s), (\nu \circ \gamma)'(s) \rangle = 0.$$

Aleshores veiem que

$$k_n(s) = -\langle \gamma'(s), (\nu \circ \gamma)'(s) \rangle = -\langle \gamma'(s), d\nu_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) \rangle = \mathrm{II}_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)).$$

$\square$

En particular, observem que la curvatura normal només depèn del punt i del vector tangent a la corba en aquest paràmetre. Això justifica la següent definició.

Definició 3.2.6

Fixem $p \in S$ i $X \in T_pS$ tal que $I_p(X, X) = 1$.
La **curvatura normal** de S en la direcció X és el número

$$k_n(X) := \mathrm{II}_p(X, X).$$

Observem que $k_n(-X) = k_n(X)$.

Aquesta quantitat coincideix amb la curvatura normal de qualsevol corba $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ ppla tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = X$.

En particular, $k_n(X)$ és la curvatura normal de la corba parametritzada per la longitud d'arc resultant de la intersecció de S amb el pla afí $p + \text{Vect}(X, \nu(p))$.

Ara relacionem curvatures principals i curvatura normal:

Teorema 3.2.1 **(Formula d'Euler)**
Fixem $p \in S$. Siguin k_1, k_2 les curvatures principals de S en p, i (e_1, e_2) una base ortonormal de vectors propis de l'endomorfisme de Weingarten, és a dir

$$\text{Mat}_{(e_1,e_2)}(W_p) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$k_n(\theta) := k_n(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

per tot $\theta \in \mathbb{R}$.

En particular les curvatures principals k_1 i k_2 de S en p corresponen als extrems, màxim i mínim respectivament, de la funció $k_n : \{X \in T_pS \mid \|X\| = 1\} \to \mathbb{R}$ curvatura normal de S en p.

Demostració. Primer calculem

$$\begin{aligned} k_n(\theta) = k_n(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) &= \mathrm{II}_p(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) \\ &= \langle W_p(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2), \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\rangle \\ &= \langle \cos\theta W_p(e_1) + \sin\theta W_p(e_2), \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\rangle \\ &= \langle \cos\theta k_1 e_1 + \sin\theta k_2 e_2, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\rangle \\ &= k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta. \end{aligned}$$

Aleshores obtenim que $k_n'(\theta) = 2\cos\theta\sin\theta(-k_1 + k_2)$, i doncs si $k_1 \neq k_2$ veiem que els valors extrems s'assoleixen quan $\cos\theta\sin\theta = 0 \iff \theta = 0[\pi/2] \iff k_n(\theta) = k_1$ o k_2. $\square$

En particular veiem que la curvatura de Gauss es pot interpretar com el producte del mínim pel màxim de les curvatures normals. Quant a la curvatura mitjana tenim el resultat següent.

Corol·lari 3.2.1
La curvatura mitjana en $p \in S$ compleix

$$H_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(\theta)d\theta.$$

Demostració.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} k_n(\theta)d\theta &= k_1\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta + k_2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta \\ &= (k_1 + k_2)\cdot\pi. \end{aligned}$$

$\square$

3.2.6 Línies de curvatura i línies asimptòtiques

Definició 3.2.7

- Diem que la direcció de T_pS determinada per un vector tangent $X \in T_pS$ tal que $I_p(X,X) = 1$ és una **direcció asimptòtica** si $k_n(X) = 0$.
- Diem que una corba $\gamma : I \to S$ regular és **línia de curvatura** (respectivament **línia asimptòtica**) si en cada $t \in I$ la direcció determinada pel seu vector tangent $\gamma'(t)$ és direcció principal (respectivament direcció asimptòtica).

Està clar que les línies asimptòtiques estan caracteritzades per la propietat següent : γ és línia asimptòtica si i només si $\mathrm{II}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$. Podem donar la caracterització següent de les línies de curvatura.

Proposició 3.2.6

Una corba $\gamma : I \to S$ regular és línia de curvatura si i només si $\exists \lambda \in C^\infty(I)$ tal que

$$(\nu \circ \gamma)'(t) = \lambda(t) \cdot \gamma'(t)$$

per tot $t \in I$.

Demostració. ($\Rightarrow$) Si γ és línia de curvatura, llavors $\gamma'(t)$ està contingut en una direcció principal, i podem escriure $d\nu_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \lambda(t)\gamma'(t)$ on $-\lambda(t)$ serà una de les curvatures principals en $\gamma(t)$. Per tant $(\nu \circ \gamma)' = \lambda \cdot \gamma'$.
($\Leftarrow$) Recíprocament, si $(\nu \circ \gamma)' = \lambda \cdot \gamma'$, aleshores $\gamma'(t)$ és vector propri de l'aplicació de Weingarten $W_{\gamma(t)}$ i deduïm que pertany a un de les direccions principals. $\square$

Per acabar, donem les descripcions locals de les línies de curvatura i asimptòtica.

Proposició 3.2.7

Sigui (Ω, φ) una parametrització local de S, i $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una corba $\gamma : I \to S$ tal que $\gamma(I) \subset \varphi(\Omega)$. Aleshores

1. La corba γ és línia asimptòtica si i només si

$$e(u')^2 + 2f(u'v') + g(v')^2 = 0.$$

2. La corba γ és línia de curvatura si i només si

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0.$$

Demostració. Com que $\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v$, calculem

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_\gamma(\gamma', \gamma') &= \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \\ &= e(u')^2 + 2f(u'v') + g(v')^2. \end{aligned}$$

Per tant, com sabem que γ és línia asimptòtica si i només si $\mathrm{II}_\gamma(\gamma', \gamma')$, obtenim el primer punt.

Pel segon punt, la relació $W_\gamma(\gamma') = -\lambda \cdot \gamma'$ s'escriu

$$\begin{aligned} & \text{Mat}_{(\varphi_u, \varphi_v)}(W_\gamma) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \\ \iff \; & \det \begin{pmatrix} (eG - fF)u' + (Gf - Fg)v' & u' \\ (-eF + fE)u' + (-fF + gE)v' & v' \end{pmatrix} = 0 \\ \iff \; & (fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0 \\ \iff \; & \det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

□

3.3 Teorema Egregium de Gauss

En aquesta secció considerem S una superfície regular parametritzada per (Ω, φ). En particular la superfície està orientada per el camp normal unitari $\nu(\varphi(u,v)) = \varphi_u \wedge \varphi_v / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ i posem $\bar{\nu} = \nu \circ \varphi$ com sempre.

3.3.1 Símbols de Christoffel

Definició 3.3.1

$\exists!$ funcions $\{\Gamma_{ij}^k : \Omega \overset{C^\infty}{\to} \mathbb{R}\}_{i,j,k=1,2}$ anomenades **símbols de Christoffel** de S definides per les relacions

$$\begin{cases} \varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + e\bar{\nu} \\ \varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + f\bar{\nu} \\ \varphi_{vu} = \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + f\bar{\nu} \\ \varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + g\bar{\nu} \end{cases}$$

i com $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, obtenim que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ per tot $i, j, k = 1, 2$.

Ara relacionem aquests símbols de Christoffel amb la primera forma fonamental.

Proposició 3.3.1

Es compleixen les fórmules següentes:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = E_u/2, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - E_v/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = E_v/2, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = G_u/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - G_u/2, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = G_v/2. \end{cases}$$

En particular els símbols de Christoffel estan completament determinats per la primera forma fonamental.

Demostració. La demostració és molt senzilla. Partim de l'expressió

$$\varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + e\bar{\nu}$$

i fent el producte escalar amb φ_u obtenim

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F + e \cdot 0.$$

Alshores podem concloure per la primera relació, ja que

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \frac{E_u}{2}.$$

Per exemple per la segona relació, farem servir un càlcul del tipus

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle &= \frac{\partial}{\partial u}\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle \\
&= F_u - \langle \varphi_u, \varphi_{vu} \rangle \\
&= F_u - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \\
&= F_u - \frac{E_v}{2}.
\end{aligned}$$

□

3.3.2 Expressió de la curvatura de Gauss

Les equacions de la proposició anterior permeten trobar fórmules explícites pels símbols de Christoffel en termes de E, F, G i de les seves derivades. No les detallarem aquí, i a efectes pràctics serà suficient resoldre cadascun d'aquests tres sistemes lineals independents.

Més enlla, el símbols de Christoffel determinen la curvatura de Gauss.

Teorema 3.3.1 (Teorema Egregium de Gauss)
La curvatura de Gauss està donada per la fórmula

$$K = -\frac{1}{E}[(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2].$$

En particular K és invariant per isometries locals.

Demostració. Aquesta equació es dedueix del sistema anterior per un càlcul directe però molt laboriós que no farem aquí. De fet aquesta equació forma part d'un conjunt de sis identitats, les quatres primeres anomenades **equacions de Gauss** mentre que les dues últimes s'anomenen **equacions de Codazzi-Mainardi**. Aquest conjunt de sis identitats és fonamental perquè es pot demostrar que caracteritzen localment les superfícies regulars llevat de les isometries de $\mathbb{R}^3$ (Teorema de Bonnet).

La conclusió que K és invariant per isometries locals s'obté de la forma següent. Si $f : S \to S'$ és una isometria local i si (Ω, φ) és parametrització local, llavors sabem que $(\Omega, f \circ \varphi)$ és una parametrització local de S' tal que

$$E_\psi = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = \langle df(\varphi_u), df(\varphi_u) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = E_\varphi,$$

i de la mateixa manera $F_\psi = F_\varphi$ i $G_\psi = G_\varphi$. Com les primeres formes fonamentals coincideixen, els símbols de Christoffel també i deduïm que $K_S(p) = K_{S'}(f(p))$ de la fórmula donant K en termes dels símbols de Christoffel. □

3.4 Geodèsiques

Sigui S una superfície regular i $\gamma : I \to S$ una corba de classe C^∞.

3.4.1 Camps vectorials al llarg d'una corba

Definició 3.4.1

Un **camp vectorial** tangent a S **al llarg de la corba** γ és una aplicació $X : I \to \mathbb{R}^3$ tal que per tot $t \in I$

$$X(t) \in T_{\gamma(t)}S$$

i tal que per cada parametrització local (Ω, φ) i cada interval obert $J \subset I$ tal que $\gamma(J) \subset \varphi(\Omega)$, si definim les funcions $u, v \in C^\infty(J)$ per $(u(t), v(t)) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$, aleshores les úniques funcions $a, b : J \to \mathbb{R}$ determinades per l'equació

$$X(t) = a(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + b(t)\varphi_v(u(t), v(t))$$

siguin de classe C^∞.

Exemples.

1. Un exemple important de camp vectorial tangent a una superfície al llarg d'una corba és el següent. Sigui $X : S \to \mathbb{R}^3$ un camp vectorial tangent sobre S. Aleshores $X \circ \gamma$ és un camp vectorial tangent a S a llarg de γ.

2. Un altre exemple fonamental és el propi vector tangent a la corba $\gamma' : I \to \mathbb{R}^3$. De fet, la condició $\gamma(I) \subset S$ implica $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$ per tot $t \in I$, i per tant γ' és un camp vectorial tangent a la superfície al llarg de γ.

3.4.2 Derivada covariant

Definició 3.4.2

Sigui X un camp vectorial al llarg de γ. Es defineix la **derivada covariant** de X al llarg de γ com el camp vectorial al llarg d'aquesta corba definit per la fórmula

$$\frac{DX}{dt} := \pi_t^\perp\left(\frac{dX}{dt}\right)$$

on $\pi_t^\perp : \mathbb{R}^3 \to T_{\gamma(t)}S$ és la projecció ortognal.

Per tant, la derivada covariant és allò que podem observar, des del punt de vista de la superfície de la derivada d'un camp vectorial tangent a S al llarg d'una corba.

En particular, observem que

$$\frac{D\gamma'}{dt} = \pi_t^\perp(\gamma'')$$

és la projecció ortogonal del vector acceleració sobre l'espai tangent a la superfície. És l'acceleració de la corba vista des del punt de vista de la superfície. Més endavant definirem les geodèsiques com les corbes que tenen acceleració nul·la en aquest sentit.

La proposició següent dona l'expressió local de la derivada covariant en termes dels símbols de Christoffel.

Proposició 3.4.1
Siguin (Ω, φ) una parametrització local de S, $J \subset I$ un interval obert tal que $\gamma(J) \subset \varphi(\Omega)$ i X un camp vectorial al llarg de γ. Aleshores, si escrivim $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ per tot $t \in J$, es compleix

$$\frac{DX}{dt} = (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{21}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')\varphi_u$$
$$+(b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{21}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')\varphi_v.$$

Demostració. Derivant l'expressió $X(t) = a(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + b(t)\varphi_v(u(t), v(t))$, obtenim

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= a'\varphi_u + a(u'\varphi_{uu} + v'\varphi_{vu}) + b'\varphi_v + b(u'\varphi_{uv} + v'\varphi_{vv})\\ &= a'\varphi_u + b'\varphi_v + au'(\Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + e\bar{\nu})\\ &+ (av' + bu')(\Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + f\bar{\nu}) + bv'(\Gamma_{22}^1\varphi_u + \Gamma_{22}^2\varphi_v + g\bar{\nu})\end{aligned}$$

i obtenim el resultat enunciat projectant sobre Vect(φ_u, φ_v) ortogonalment a $\bar{\nu}$. □

3.4.3 Transport paral·lel

Definició 3.4.3
Diem que un camp vectorial X al llarg de γ és **paral·lel** si compleix

$$\frac{DX}{dt} = 0.$$

La proposició següent ens permet definir la noció de transport paral·lel.

Proposició 3.4.2
Fixem $t_0 \in I$ i $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$.

Aleshores $\exists!$ camp vectorial paral·lel $X : I \to \mathbb{R}^3$ al llarg de γ tal que $X(t_0) = X_0$. S'anomena **transport paral·lel** de X_0 al llarg de γ.

Demostració. En una parametrització local (Ω, φ) tal que $\gamma(t_0) \in \varphi(\Omega)$, podem escriure que $X(t) = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$, i busquem a i b solucions dels sistema lineal d'equacions diferencials ordinàries

$$\begin{cases} a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{21}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv' = 0 \\ b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{21}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv' = 0 \end{cases}$$

amb condicions inicials donades per $X(t_0) = a(t_0)\varphi_u + b(t_0)\varphi_v = X_0$. Aquí $u, v : J \to \mathbb{R}$ són funcions C^∞ definides per $\varphi(u(t), v(t)) = \gamma(t)$ per tot $t \in J$, i definim $J \subset I$ com l'interval obert maximal que conté t_0 tal que $\gamma(t) \in \varphi(\Omega)$ per tot $t \in J$.

Aleshores $\exists!$ solucions $a, b : J \to \mathbb{R}$, i obtenim el transport paral·lel deX_0 sobre aquest interval J. Fent servir un recobriment de la corba per parametrització locals, veiem que podrem extendre aquesta solució de manera única en una solució sobre tot l'interval I. □

El transport paral·lel preserva el producte escalar.

Proposició 3.4.3

Siguin X, Y dos camps vectorials paral·lel al llarg de γ. Aleshores la funció $t \in I \mapsto \langle X(t), Y(t)\rangle$ és constant.

En particular les normes de X i Y són funcions constants sobre I.

Demostració. Primer

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle = \langle \frac{dX}{dt}, Y\rangle + \langle X, \frac{dY}{dt}\rangle.$$

Però com

$$\frac{DX}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_t^\perp\left(\frac{dX}{dt}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dX}{dt} \perp T_{\gamma(t)}S,$$

trobem que $\langle \frac{dX}{dt}, Y\rangle = 0$, i de la mateixa manera $\langle X, \frac{dY}{dt}\rangle = 0$. En deduïm el resultat. □

3.4.4 Definició de la noció de geodèsica

Ara definim la noció de geodèsica com la de corba l'acceleració de la qual, vista des del punt de vista de la superfície, és nul·la.

Definició 3.4.4

Diem que la corba parametritzada $\gamma : I \to S$ és **geodèsica** si

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}S \ \text{ per tot } \ t \in I.$$

Com que una definició equivalent a la de geodèsica és que el vector tangent a la corba sigui paral·lel, obtenim el resultat següent.

Proposició 3.4.4

Si γ és geodèsica, llavors la funció $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ és constant. En particular, el paràmetre d'una geodèsica és un multiple del paràmetre d'arc de la corba: $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tal que $t = as + b$.

El resultat següent ens dona les equacions de les geodèsiques en una parametrització local.

Proposició 3.4.5

Sigui (Ω, φ) una parametrització local de S i $\gamma : I \to \varphi(\Omega)$ una corba. Aleshores, si escrivim $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, la corba γ és geodèsica si i només si es compleix

$$\begin{cases} u'' + \Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 = 0. \end{cases}$$

Demostració. Aquí calculem $\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v$, i si recordem l'expressió local de $\frac{DX}{dt}$ per $X = a\varphi_u + b\varphi_b$, obtenim el resultat substituïnt i utilitzant la simetria dels símbols de Christoffel ($\Gamma^i_{12} = \Gamma^i_{21}$ per $i = 1, 2$). □

Observem que el sistema d'equacions diferencials ordinàries anterior és de grau 2 en les variables u i v, i per tant obtenim com a conseqüència del teorema d'existència local de les solucions el resultat següent.

Proposició 3.4.6

Donats $p \in S$ i $X \in T_pS$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\exists! \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ geodèsica tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = X$.

El sistema anterior no és lineal, i per tant no podem assegurar que la geodèsica sigui definida sobre tot $\mathbb{R}$.

Exemple. Sobre $\mathbb{S}^2$, per to $p \in \mathbb{S}^2$ i $X \in T_p\mathbb{S}^2$ tal que $\|X\| = 1$, la corba $\gamma : t \in \mathbb{R} \to p\cos t + X\sin t$ és una geodèsica de $\mathbb{S}^2$. Efectivament, primer recordem que $T_p\mathbb{S}^2 = p^\perp$, i doncs per tot $t \in \mathbb{R}$ tenim

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \langle p\cos t + X\sin t, p\cos t + X\sin t \rangle = 1.$$

Aleshores calculem que $\gamma''(t) = -\gamma(t)$, i per tant $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^2$, d'on deduïm que

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0$$

i doncs que γ és geodèsica.

Observació. Es pot demostrar que les geodèsiques són localment els camins de longitud minimal entre dos punts. No ho demostrarem aquí, però aquest resultat serà demostrat a l'assignatura de Geometria Riemanniana de 4rt curs.

3.4.5 Curvatura geodèsica

Considerem S una superfície regular orientada per $\nu : S \to \mathbb{S}^2$. Fixem $\gamma : I \to S$ una corba C^∞ i un camp vectorial tangent a S unitari $X : I \to \mathbb{R}^3$ al llarg de γ.

Definició 3.4.5

Denotarem $\bar{X} : I \to \mathbb{R}^3$ l'únic camp vectorial unitari al llarg de γ definit par la condició

$$(X(t), \bar{X}(t), \nu(\gamma(t))) \quad \text{base ortonormal directe de } \mathbb{R}^3$$

per tot $t \in I$.

Observem que la condició $\langle \bar{X}(t), \nu(\gamma(t)) \rangle = 0$ assegura que $\bar{X}(t) \in T_{\gamma(t)}S$ i aleshores el camp vectorial $\bar{X}$ és automàticament tangent a S.

A més aquest camp vectorial està donat per la fórmula: $\forall t \in I$,

$$\bar{X}(t) = \nu(\gamma(t)) \wedge X(t).$$

Ara, com que $X : I \to \mathbb{R}^3$ és unitari es compleix

$$\left\langle \frac{dX}{dt}, X \right\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\langle \frac{DX}{dt}, X \right\rangle = 0$$

ja que tenim l'igualtat $\langle \frac{dX}{dt}, Y \rangle = 0 = \langle \frac{dX}{dt}, Y \rangle = 0$ per tot $Y \in T_{\gamma(t)}S$.

Per tant $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{dX}{dt} = \lambda \cdot \bar{X}$, i aquest λ es pot determinar de la manera següent:

$$\lambda = \left\langle \frac{DX}{dt}, \bar{X} \right\rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, (\nu \circ \gamma) \wedge X \right\rangle = \left\langle \frac{dX}{dt}, (\nu \circ \gamma) \wedge X \right\rangle.$$

això justifica la següent definició.

Definició 3.4.6

Definim el **valor algebraic de la derivada covariant** de X en t com el nombre

$$\left[\frac{DX}{dt} \right] := \left\langle \frac{dX}{dt}, (\nu \circ \gamma) \wedge X \right\rangle.$$

Valor algebraic vol dir que pot ser positiu o negatiu (o nul evidentment), i notem que el signe de $\left[\frac{DX}{dt} \right]$ depèn de l'elecció de ν. Però en tot cas tenim:

$$\left\| \frac{DX}{dt} \right\| = \left| \left[\frac{DX}{dt} \right] \right|.$$

Fent servir la noció de valor algebraic de la derivada covariant, podem definir la noció de curvatura geodèsica.

Definició 3.4.7

Sigui $\gamma : I \to S$ una corba parametritzada per longitud d'arc. Aleshores per tot $s \in I$ el nombre

$$k_g(s) := \left[\frac{D\gamma'}{ds} \right]$$

s'anomena **curvatura geodèsica** de α en s.

Observacions.

1. Si $\beta : J \to S$ és una corba regular, i $\gamma : I \to S$ n'és una reparametrització positiva per la longitud d'arc, la curvatura geodèsica en $s = s(t)$ s'anomena curvatura geodèsica de β en $\beta(t)$. Com que dues reparametritzacions positives per la longitud d'arc difereixen només d'una translació del domini de definició, veiem que aquesta noció està ben definida.

2. Veiem fàcilment de l'expressió anterior de $\left[\frac{DX}{dt}\right]$ que si $\gamma : I \to S$ és ppla

$$k_g(s) = \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s) \wedge \gamma'(s) \rangle.$$

   Una fórmula similar es pot demostrar per la curvatura geodèsica d'una corba no ppla.

3. El signe de k_g depèn òbviament de l'orientació triada.

4. Una corba $\gamma : I \to S$ ppla ès geodèsica si i només si la seva curvatura geodèsica compleix $k_g \equiv 0$.

El resultat següent relaciona les diferents curvatures d'una corba sobre una superfície.

Proposició 3.4.7

Sigui $\gamma : I \to S$ una corba parametritzada per longitud d'arc. Si denotem per

$$\begin{cases} k(s) = \|\gamma''(s)\| & \text{(la seva curvatura)} \\ k_g(s) = \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s)) \wedge \gamma'(s) \rangle & \text{(la seva curvatura geodèsica),} \\ k_n(s) = \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s)) \rangle & \text{(la seva curvatura normal)} \end{cases}$$

aleshores

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

Demostració. Apliquem el teorema de Pitàgores:

$$k(s)^2 = \|\gamma''(s)\|^2 = \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s)) \wedge \gamma'(s) \rangle^2 + \langle \gamma''(s), \nu(\gamma(s)) \rangle^2 = k_g(s)^2 + k_n(s)^2.$$

□

CAPÍTOL 4

FORMES DIFERENCIALS

4.1 Camps vectorials de $\mathbb{R}^n$

Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert i $p \in \mathbb{R}^n$. Denotem per $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canònica de $\mathbb{R}^n$ i per $T_p\mathbb{R}^n$ l'espai vectorial[1] sobre $\mathbb{R}$ definit com

$$T_p\mathbb{R}^n := \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}.$$

4.1.1 Definicions i notacions

Definició 4.1.1

Un **camp vectorial** sobre U és una correspondència

$$X : p \in U \mapsto X(p) \in T_p\mathbb{R}^n.$$

Exemple. Definim per tot $i = 1, \ldots, n$ el camp vectorial $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sobre $\mathbb{R}^n$ per la fórmula

$$\forall p \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(p) = (p, e_i),$$

i utilitzarem la notació $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p := \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$.

Si h és una funció sobre U i X, Y són dos camps vectorials sobre U, es pot definir el camp vectorial $hX + Y$ sobre U fent servir la fórmula $(hX + Y)(p) := h(p)X(p) + Y(p)$. Aleshores tot camp vectorial X sobre U s'escriu, de manera única, en qualsevol punt $p \in U$ com $X(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$, és a dir

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

[1] amb la suma vectorial i el producte per escalar definits per $\lambda(p, v) + (p, w) := (p, \lambda v + w)$

on les **components** X_i són funcions sobre U.

Definició 4.1.2

Un **camp vectorial diferenciable** sobre U és un camp vectorial sobre U que s'escriu

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

amb cada component $X_i \in C^\infty(U)$. Denotarem per $\chi(U)$ el conjunt dels camps vectorials diferenciables sobre U. És un $C^\infty(U)$-mòdul, i en particular compleix la següent propietat: si $h \in C^\infty(U)$ i $X, Y \in \chi(U)$, llavors $h \cdot X + Y \in \chi(U)$.

Observació.

Via la identificació

$$\begin{array}{ccc} T_p\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (p, v) & \mapsto & v, \end{array}$$

podem identificar el camp vectorial $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ amb l'aplicació diferenciable $\bar{X} : p \in U \mapsto (X_1(p), \ldots, X_n(p)) \in \mathbb{R}^n$.

Definició 4.1.3

Sigui $f \in C^\infty(U)$ i $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(U)$. Es defineix la **derivada de f en la direcció de X** com la funció $X(f) \in C^\infty(U)$ definida per

$$X(f)(p) := \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Observació.

En particular veiem a posteriori que la notació és consistent, ja que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Definició 4.1.4

Es defineix el **producte escalar sobre $\chi(U)$** com la funció definida per

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : \chi(U) \times \chi(U) & \to & C^\infty(U) \\ (X, Y) & \mapsto & \left(\langle X, Y \rangle : p \in U \mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) Y_i(p) \right). \end{array}$$

Aquí hem escrit $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ i $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Aleshores es compleixen les següents proprietats.

Proposició 4.1.1

- $X(\lambda f + g) = \lambda X(f) + X(g)$;
- $X(fg) = X(f)g + fX(g)$;
- $X(f) = \langle X, \text{grad} f\rangle$.

Demostració. Demostrem només l'últim punt.

$$\begin{aligned} X(f)(p) &= \sum_i X_i(p)\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \\ &= \left\langle \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle(p) \\ &= \langle X, \text{grad} f\rangle(p). \end{aligned}$$

□

4.1.2 Corbes integrals

Definició 4.1.5

Sigui $X \in \chi(U)$. Diem que $\gamma : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ és una **corba integral de** X si satisfà $\forall t \in (a,b)$

$$X(\gamma(t)) = (\gamma(t), \gamma'(t)).$$

Si escrivim $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ i $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, aleshores γ és una corba integral de X si i només si

$$x_i'(t) = X_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$\forall t \in (a,b)$ i $\forall i = 1, \dots, n$. Com els $X_i \in C^\infty(U)$, veiem que és un sistema d'equacions diferencials ordinàries, i per tant es compleix el següent resultat.

Proposició 4.1.2 (Existència local de les corbes integrals)

Sigui $X \in \chi(U)$ i $p \in U$. $\exists V \subset U$ entorn obert de p, $\exists \varepsilon > 0$ i $\exists \Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to U$ tals que $\Psi(0,x) = x$ i tals que per tot $x \in V$ la corba $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \Psi(t,x)$ és una corba integral de X.

Denotarem Ψ_t la funció $\Psi(t, \cdot) : V \to U$.

Proposició 4.1.3 (Grup uniparàmetric local o flux)

Amb les notacions de la proposició anterior, tenim:

- $\Psi_0 = id_V$,
- $\Psi_t \circ \Psi_s = \Psi_{t+s}$.

En particular $\Psi_{-t} \circ \Psi_t = id_V$ per tot $t \in (\varepsilon, \varepsilon)$, i doncs $\{\Psi_t\}_t$ és una familia a un paràmetre de difeomorfismes.

Demostració. El primer punt és directe. Pel segon, si fixem s, calculem

$$\left.\frac{d}{dt'}\right|_t \Psi_{t'+s}(x) = \left.\frac{d}{d\bar{t}}\right|_{t+s} \Psi_{\bar{t}}(x) = X(\Psi(t+s,x)),$$

i com que $\Psi_{0+s}(x) = \Psi_s(x)$ deduïm que $t \mapsto \Psi_{t+s}(x)$ és una corba integral de X passant per $\Psi_s(x)$ en $t=0$. Per unicitat de les solucions d'un sistema d'EDOs, obtenim que aquesta corba coincideix amb la corba integral $t \mapsto \Psi_t(\Psi_s(x))$. $\square$

Definició 4.1.6

Direm que $F \in C^\infty(U)$ és una **integral primera** de $X \in \chi(U)$ si

- $dF_p \neq 0$ per tot $p \in U$,
- F és constant sobre les corbes integrals de X.

Observacions.

1. Si F és integral primera de X, qualsevol corba integral $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ està continguda dins la subvarietat de dimensió $n-1$ definida per $F^{-1}(F(\gamma(0)))$.

   En particular si disposem de $n-1$ integrals primeres $F_1, \ldots, F_{n-1}$ tal que en tot $p \in U$ les formes lineals $\{dF_i(p)\}_{i=1,\ldots,n-1}$ són linealment independents, aleshores la imatge d'una corba integrala està localment determinada geomètricament per la intersecció $\cap_{i=1}^{n-1} F_i^{-1}(F_i(\gamma(0)))$.

2. Si γ és corba integral de $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, tenim que

$$\gamma'(t) = (X_1(\gamma(t)), \ldots, X_n(\gamma(t)))$$

   i doncs

$$\begin{aligned} F \text{ és una integral primera de } X \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = (F \circ \gamma)'(t) = dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^n X_i(\gamma(t)) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma(t)) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = X(F). \end{aligned}$$

Proposició 4.1.4

Sigui $p \in U$, i $X \in \chi(U)$ tal que $X(p) \neq 0$.
Aleshores $\exists V \subset U$ entorn obert de p i $F : V \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ tal que F sigui integral primera de X.

Demostració. Sabem que $\exists V \subset U$ entorn obert de p i $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ difeomorfisme tal que $d\varphi(X) = X(\varphi) = e_1$. Definim aleshores $F = \pi \circ \varphi$ amb $\pi(x_1, \ldots, x_n) = x_2$. Aleshores les corbes integrals de X són de la forma $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x) + te_1)$ i tenim $F(\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_1)) = F(\varphi(x) + te_1) = F(\varphi(x))$, així doncs F és integral primera. $\square$

4.2 Àlgebra multilineal

Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió n del qual fixem una base $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Designem per $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espai dual de les formes lineals sobre E, i denotarem $B^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base dual de E^* definida per les relacions $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ per tot $i, j = 1, \ldots, n$.

4.2.1 Formes multilineals

Definició 4.2.1

Sigui $k \geq 1$. Una aplicació k-multilineal sobre E

$$\omega : E \times \overset{k}{\cdots} \times E \to \mathbb{R}$$

es diu **alternada** si es compleix la igualtat

$$\omega(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\ \omega(u_1, \ldots, u_k)$$

per tota k-tupla $(u_1, \ldots, u_k) \in E^k$ i per tot $\sigma \in \mathfrak{S}_k$[a].

Una aplicació k-multilineal alternada sobre E s'anomena una **k-forma multilineal**, i denotarem

$$\Lambda^k E^*$$

l'espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ de les k-formes (multilineals) sobre E. En particular $\Lambda^1 E^* = E^*$, i posem $\Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$ per conveni.

[a] Recordem que una aplicació $\omega : E \times \overset{k}{\cdots} \times E \to \mathbb{R}$ es diu k-multilineal si és lineal respecte cadascuna de les seves variables, i que $\mathfrak{S}_k$ és el grup de permutacions de k elements, també conegut com a grup simètric.

Exemple. L'aplicació determinant $\det : \mathbb{R}^n \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una aplicació n-multilineal alternada sobre $\mathbb{R}$, és a dir $\det \in \Lambda^n \mathbb{R}^*$.

Observacions.

1. Una aplicació k-multilineal de grau k es diu **antisimètrica** si ω es cancel·la sempre que dues de les seves variables siguin igual (és a dir la condició $u_i = u_j$ per dos índexs $i \neq j$ implica $\omega(u_1, \ldots, u_k) = 0$).

   Es pot comprovar fàcilment (exercici) que ω és alternada si i només si ω és antisimètrica.

2. Per $k > n$ tenim $\Lambda^k E^* = 0$.

   De fet, si agafem k vectors $u_1, \ldots, u_k \in E$ i descomposem aquests vectors en la base B com $u_i = \sum_{i=1}^n u_{ij} e_j$, tindrem per multilinealitat

   $$\omega(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} u_{1i_1} \ldots u_{ki_k}\ \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}).$$

   Com cada terme $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}, e_{i_{n+1}}, \ldots, e_{i_k})$ té al menys dues components idèntiques i que ω és alternada, concloem que $\omega(u_1, \ldots, u_k) = 0$ sempre.

4.2.2 Producte exterior

Definició 4.2.2

Siguin $\omega \in \Lambda^k E^*$ i $\eta \in \Lambda^\ell E^*$. Es definex el seu **producte exterior** $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+\ell} E^*$ per la fórmula

$$\omega \wedge \eta\,(u_1, \dots, u_{p+q}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma)\; \omega\big(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}\big)\; \eta\big(u_{\sigma(k+1)}, \dots, u_{\sigma(k+\ell)}\big).$$

Observacions.

1. Si $\alpha, \beta \in \Lambda^1 E^* = E^*$, llavors

$$\alpha \wedge \beta\,(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \beta(v)\alpha(w).$$

   En particular $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$.

2. Comprovem que $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+\ell} E^*$: la multilinealitat és clara, i $\forall \tau \in \mathfrak{S}_{k+\ell}$

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \eta\,(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(k+\ell)}) &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma)\, \omega\big(u_{\sigma(\tau(1))}, \dots, u_{\sigma(\tau(k))}\big)\, \eta\big(u_{\sigma(\tau(k+1))}, \dots, u_{\sigma(\tau(k+\ell))}\big) \\
&= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\rho = \sigma \circ \tau \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\rho \circ \tau^{-1})\, \omega\big(u_{\rho(1)}, \dots, u_{\rho(k)}\big)\, \eta\big(u_{\rho(k+1)}, \dots, u_{\rho(k+\ell)}\big) \\
&= \varepsilon(\tau^{-1})\, \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\rho)\, \omega\big(u_{\rho(1)}, \dots, u_{\rho(k)}\big)\, \eta\big(u_{\rho(k+1)}, \dots, u_{\rho(k+\ell)}\big) \\
&= \varepsilon(\tau)\, \omega \wedge \eta\,(u_1, \dots, u_{k+\ell}).
\end{aligned}$$

   La última igualtat és conseqüència del fet que $\varepsilon : \mathfrak{S}_k \to \mathbb{Z}_2$ és un morfisme de grups.

Proposició 4.2.1

$\forall \omega \in \Lambda^k E^*, \eta \in \Lambda^\ell E^*, \gamma \in \Lambda^m E^*$,

- $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$.
- El producte exterior és associatiu: $\omega \wedge (\eta \wedge \gamma) = (\omega \wedge \eta) \wedge \gamma$.

Demostració. Demostrarem aquesta proposició a classe de problemes. □

4.2.3 Avaluació del producte exterior via el determinant

El següent resultat serà molt útil a l'hora de calcular.

Proposició 4.2.2

Siguin $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1 E^* = E^*$ i $u_1, \dots, u_k \in E$.
Alehores

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_1, \dots, u_k) = \det(\alpha_i(u_j)) = \begin{vmatrix} \alpha_1(u_1) & \dots & \alpha_1(u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(u_1) & \dots & \alpha_k(u_k) \end{vmatrix}.$$

Demostració. El resultat és cert per k=1. Suposem-ho cert per $k-1$. Primer escrivim fent servir la definició de producte exterior

$$\begin{aligned} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_1, \dots, u_k) &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha_1(u_{\sigma(1)}) \cdot [\alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)})] \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{k} \alpha_1(u_i) \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k | \sigma(1)=i} \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}) \right), \end{aligned}$$

i observem el següent.

Lema 4.2.1

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$ tal que $\sigma(1) = i$ es compleix la igualtat següent:

$$\varepsilon(\sigma) \cdot \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}) = (-1)^{i-1} \cdot \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k).$$

Demostració. Definim $\tau \in \mathfrak{S}_{k-1}$ i $\kappa, \tilde{\tau} \in \mathfrak{S}_k$ per

$$\tau : (1, 2, \dots, \hat{i}, \dots, k) \mapsto (\sigma(2), \dots, \sigma(k))$$

$$\kappa : (1, 2, \dots, i, \dots, k) \mapsto (i, 1, \dots, \hat{i}, \dots, k)$$
$$\tilde{\tau} : (i, 1, \dots, \hat{i}, \dots, k) \mapsto (i, \sigma(2), \dots, \sigma(k)).$$

En particular $\sigma = \tilde{\tau} \circ \kappa$, i per tant $\varepsilon(\tau) = (-1)^{i-1}\varepsilon(\sigma)$ com $\varepsilon(\tilde{\tau}) = \varepsilon(\tau)$ i $\varepsilon(\kappa) = (-1)^{i-1}$.
Aleshores

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma)\alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}) &= (-1)^{i-1}\varepsilon(\tau) \cdot \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_{\tilde{\tau}\circ\kappa(2)}, \dots, u_{\tilde{\tau}\circ\kappa(k)}) \\ &= (-1)^{i-1}\varepsilon(\tau)\varepsilon(\tilde{\tau}) \cdot \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_{\kappa(2)}, \dots, u_{\kappa(k)}) \\ &= (-1)^{i-1}\varepsilon(\tau)^2 \cdot \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k(u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k) \end{aligned}$$

i concloem com $\varepsilon(\tau)^2 = 1$. □

Llavors, fent servir la hipotesi d'inducció i el fet que el conjunt $\{\sigma \in \mathfrak{S}_k \mid \sigma(1) = i\}$ és de cardinal

$(k-1)!$, obtenim

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k(u_1, \ldots, u_k) &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \cdot \alpha_1(u_i) \cdot \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k(u_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, u_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \cdot \alpha_1(u_i) \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2(u_1) & \ldots & \widehat{\alpha_2(u_i)} & \ldots & \alpha_2(u_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(u_1) & \ldots & \widehat{\alpha_k(u_i)} & \ldots & \alpha_k(u_k) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha_1(u_1) & \ldots & \alpha_2(u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(u_1) & \ldots & \alpha_k(u_k) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

on la darrera igualtat s'obté fent servir el desenvolupament de Laplace. □

Com a conseqüència directa obtenim:

Corol·lari 4.2.1

- $e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*(u_1, \ldots, u_n) = \det(u_{ij})$ si escrivim $u_i = \sum_j u_{ij} e_j$ per tot $i = 1, \ldots, n$,
- $e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } \{i_1, \ldots, i_k\} = \{j_1, \ldots, j_k\}, \\ 0 & \text{sinó.} \end{cases}$

En particular, dins el cas on $E = \mathbb{R}^n$ i on B és la base canònica, obtenim

$$\det = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*.$$

4.2.4 Descomposició de les formes multilineals

De forma menys directa, la proposició anterior implica el resultat de descomposició següent:

Proposició 4.2.3
$\forall \omega \in \Lambda^k E^*$, tenim la fórmula

$$\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \; e_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{j_k}^*.$$

Demostració. Per qualsevol $(u_1,\ldots,u_k)\in E^k$, calculem

$$\begin{aligned}
\omega(u_1,\ldots,u_k) &= \omega\left(\sum_{j_1=1}^{n} u_{1j_1}e_{j_1},\ldots,\sum_{j_k=1}^{n} u_{kj_k}e_{j_k}\right)\\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} u_{1j_1}\ldots u_{kj_k}\cdot\omega\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_k}\right)\\
&= \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n}\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} u_{1j_{\sigma(1)}}\ldots u_{kj_{\sigma(k)}}\cdot\omega\left(e_{j_{\sigma(1)}},\ldots,e_{j_{\sigma(k)}}\right)\\
&= \sum_{j_1<\ldots<j_k}\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\varepsilon(\sigma)\cdot u_{1j_{\sigma(1)}}\ldots u_{kj_{\sigma(k)}}\cdot\omega\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_k}\right)\\
&= \sum_{j_1<\ldots<j_k}\omega\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_k}\right)\cdot\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\varepsilon(\sigma)\cdot e^*_{j_{\sigma(1)}}(u_1)\ldots e^*_{j_{\sigma(k)}}(u_k)\right)\\
&= \sum_{j_1<\ldots<j_k}\omega\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_k}\right)\cdot e^*_{j_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{j_k}(u_1,\ldots,u_k).
\end{aligned}$$

□

Corol·lari 4.2.2

L'espai vectorial Λ^kE^* admet com a base el conjunt $(e^*_{j_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{j_k}\mid 1\le j_1<\ldots<j_k\le n)$. En particular Λ^kE^* té dimensió $\binom{n}{k}$.

Demostració. Sabem que la família de k-formes $\{e^*_{j_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{j_k}\mid 1\le j_1<\ldots<j_k\le n\}$ genera Λ^kE^* per la proposició anterior, i com és de cardinal $\binom{n}{k}$, només cal comprovar que són linealment independents. Però la igualtat

$$\sum_{j_1<\ldots<j_k}\lambda_{j_1\ldots j_k}\, e^*_{j_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{j_k}=0$$

avaluada sobre la k-tupla $(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})$ implica que tots els coeficients $\lambda_{i_1\ldots i_k}$ són zero. □

Observacions.

En particular $\Lambda^nE^*=\mathrm{Vect}(e^*_1\wedge\ldots\wedge e^*_n)$. Quan $E=\mathbb{R}^n$ i $B=(e_1,\ldots,e_n)$ és la base canònica, llavors existeix un $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\det=\lambda\cdot e^*_1\wedge\ldots\wedge e^*_n$. Avaluant sobre la n-tupla $(e_1,\ldots,e_n)$ deduïm $\lambda=1$ i tornem a obtenir que

$$\det=e^*_1\wedge\ldots\wedge e^*_n.$$

4.3 Formes diferencials sobre $\mathbb{R}^n$

Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert, i denotem per $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canònica de $\mathbb{R}^n$. Fixem $k \geq 1$.

4.3.1 Definició de forma diferencial

Definició 4.3.1 (k**-formes sobre un obert)**
Una **forma de grau** k **sobre** U (o k**-forma sobre** U) és una correspondència

$$\omega : p \in U \mapsto \omega_p \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*.$$

Exemple. Recordem que $T_p\mathbb{R}^n = \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$, i que $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right)$ és una base de $T_p\mathbb{R}^n$ on cada camp vectorial $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(\mathbb{R}^n)$ està definit per la fórmula

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = (p, e_i).$$

Denotem $\forall i = 1, \ldots, n$ per dx_i la 1-forma sobre $\mathbb{R}^n$ definida per les relacions

$$dx_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \right) = \delta_{ij}$$

per tot $i, j = 1, \ldots, n$. De forma equivalent $(dx_1|_p, \ldots, dx_n|_p)$ és la base de $(T_p\mathbb{R}^n)^*$ dual de la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right)$.

Per les proposicions anteriors, sabem que en tot punt p de $\mathbb{R}^n$ la família de k-formes (multilineals) $\left(dx_{j_1}|_p \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}|_p \mid 1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n \right)$ és una base de $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ i doncs tota k-forma ω sobre U s'escriu en tot punt $p \in U$ com

$$\omega_p = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k}(p) \cdot dx_{j_1}|_p \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}|_p$$

on els coeficients reals $\omega_{j_1 \ldots j_k}(p)$ estan univocament determinats.

Definició 4.3.2 (k**-formes diferencials sobre un obert)**
Una k**-forma diferencial sobre** U és una k-forma ω sobre U que s'escriu en tot punt $p \in U$

$$\omega_p = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k}(p) \cdot dx_{j_1}|_p \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}|_p$$

amb les funcions coeficients $\omega_{j_1 \ldots j_k} \in C^\infty(U)$.

Denotem $\Omega^k(U)$ el conjunt de k-formes diferencials sobre U, i posem $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ per conveni. Aleshores $\Omega^k(U)$ és un $C^\infty(U)$-mòdul, i en particular un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

Estenem ara de forma natural la noció de producte exterior a les k-formes diferencials.

Definició 4.3.3 **(Producte exterior de k-formes diferencials)**
Siguin $\omega \in \Omega^k(U)$ i $\eta \in \Omega^\ell(U)$. Es defineix el seu **producte exterior** $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+\ell}(U)$ a través de la fórmula següent: posem en tot punt p de U

$$(\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p \in \Lambda^{k+\ell}(T_p\mathbb{R}^n)^*.$$

En particular podrem escriure

$$\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k} \cdot dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k},$$

i podem comprovar fàcilment que

1. $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \cdot \eta \wedge \omega$,
2. El producte exterior és associatiu.

Observació.

Com $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ via $(p, v) \mapsto v$, tenim les identificacions $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^* \simeq \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$, i per tant una k-forma diferencial $\omega \in \Omega^k(U)$ es pot interpretar com l'aplicació C^∞-diferenciable de U fins $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ donada com $p \in U \mapsto (\omega_{j_1 \ldots j_k}(p))_{j_< \ldots < j_k}$.

Exemple. Sobre $\mathbb{R}^3$,

- Una 0-forma diferencial serà una funció C^∞-diferenciable $f(x, y, z)$,
- Una 1-forma diferencial serà per exemple la forma $\alpha = x^2ydx - e^z dy + sinxdz$,
- Una 2-form diferencial s'escirurà $\beta = fdx \wedge dy + gdy \wedge dz + hdx \wedge dz$ amb $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$,
- Una 3-forma serà per exemple la forma $\gamma = (x^2 - y^3)zdx \wedge dy \wedge dz$.

Proposició 4.3.1
Sigui $\omega \in \Omega^k(U)$. Aleshores l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\omega} : \chi(U) \times \overset{k}{\ldots} \chi(U) & \to & C^\infty(U) \\ (X_1, \ldots, X_k) & \mapsto & (p \in U \mapsto \omega_p(X_1(p), \ldots, X_k(p)) \end{array}$$

és $C^\infty(U)$-multilineal de grau k alternada.
Denotarem $\tilde{\omega}$ per ω.

Demostració. Si escrivim $X_i = \sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$ amb $a_{ij} \in C^\infty(U)$, és fàcil veure que per tot $p \in U$

$$\omega(X_1, \ldots, X_k)(p) = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k}(p) \cdot a_{1j_1}(p) \ldots a_{kj_k}(p),$$

i doncs efectivament que $\omega(X_1, \ldots, X_k) \in C^\infty(U)$. Les altres proprietats es desmostren de forma similar. $\square$

Exemple. Sobre $\mathbb{R}^3$ considerem

- $\alpha = zdx \wedge dy$,
- $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ i $Y = -z\frac{\partial}{\partial y}$.

Aleshores

$$\begin{aligned}
\alpha(X,Y) &= zdx \wedge dy \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, -z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= yz^2 dx \wedge dy \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) - xz^2 dx \wedge dy \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= yz^2.
\end{aligned}$$

4.3.2 Diferencial exterior

Comencem amb les 0-formes.

Definició 4.3.4 (Diferencial (exterior) d'una funció)
La **diferencial** d'una funció $h \in C^\infty(U)$ és la 1-forma $dh \in \Omega^1(U)$ definida per

$$dh = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i.$$

Observem que aquesta definició és coherent amb la noció classicà de diferencial d'una funció $h \in C^\infty(U)$: la 1-forma dh_p coincideix amb l'única forma lineal sobre $\mathbb{R}^n \simeq T_p\mathbb{R}^n$ que satisfà

$$h(p+v) = h(p) + dh_p(v) + o(\|v\|).$$

Proposició 4.3.2
$\forall h \in C^\infty(U)$ i $\forall X \in \chi(U)$ es compleix

$$dh(X) = X(h).$$

Demostració. Tenim

$$\begin{aligned}
dh(X) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \left(\sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial h}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

□

Aquesta noció de diferencial es generalitza a qualsevol grau de la forma següent.

Definició 4.3.5 (Diferencial exterior)
Sigui $k \geq 0$. La **diferencial exterior** d'una k-forma diferencial

$$\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_k} \omega_{j_1\ldots j_k} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k} \in \Omega^k(U)$$

és la $(k+1)$-forma diferencial sobre U definida com

$$d\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_k} d\omega_{j_1\ldots j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}.$$

L'aplicació lineal així obtinguda $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ s'anomena **diferencial exterior**, i satisfà les següents propietats :

1. $\forall \alpha \in \Omega^k(U)$ i $\forall \beta \in \Omega^\ell(U)$,
$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$
2. $\forall \alpha \in \Omega^k(U)$,
$$d(d\alpha) = 0.$$

Observació.

Tenim
$$d\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j_1<\ldots<j_k} \frac{\partial \omega_{j_1\ldots j_k}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k},$$
i comprovem efectivament que, si $h \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$, tornem a trobar la fórmula anterior $dh = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i$.

Demostració. Per demostrar la primera propietat, escrivim

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d\left(\left(\sum \alpha_{j_1\ldots j_k} \cdot dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_k}\right) \wedge \left(\sum \beta_{i_1\ldots i_\ell} \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_\ell}\right)\right) \\ &= d\left(\sum \alpha_{j_1\ldots j_k}\beta_{i_1\ldots i_\ell} \cdot dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_\ell}\right) \\ &= \sum d(\alpha_{j_1\ldots j_k}\beta_{i_1\ldots i_\ell}) \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_\ell} \end{aligned}$$

i acabem amb un càlcul senzill com

$$d(\alpha_{j_1\ldots j_k}\beta_{i_1\ldots i_\ell}) = \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial \alpha_{j_1\ldots j_k}}{\partial x_m}\beta_{i_1\ldots i_\ell} + \alpha_{j_1\ldots j_k}\frac{\partial \beta_{i_1\ldots i_\ell}}{\partial x_m}\right) dx_m.$$

Per la segon propietat, observerm que, per linealitat de la diferencial exterior d, ni ha prou a demostrar que $d^2(hdx_{j_1}\wedge\dots dx_{j_k})=0$. Ara bé

$$\begin{aligned}
d^2(hdx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}) &= d\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_m}dx_m\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}\right)\\
&= \sum_{m,\ell=1}^{n}\frac{\partial^2 h}{\partial x_\ell\partial x_m}dx_\ell\wedge dx_m\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}\\
&= \sum_{m\neq\ell}\frac{\partial^2 h}{\partial x_\ell\partial x_m}dx_\ell\wedge dx_m\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}\\
&= \sum_{m<\ell}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_\ell\partial x_m}-\frac{\partial^2 h}{\partial x_m\partial x_\ell}\right)dx_\ell\wedge dx_m\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}\\
&= 0
\end{aligned}$$

pel teorema de Schwarz. □

La següent definició proposa una operació inversa de la diferencial exterior. Serà molt útil a l'hora d'integrar formes diferencials.

Definició 4.3.6 **(Contracció interior)**
Siguin $X\in\chi(U)$i $\omega\in\Omega^k(U)$ amb $k\geq 1$. Es defineix la **contracció interior** de ω per X com la $(k-1)$-forma diferencial $i_X\omega\in\Omega^{k-1}(U)$ definida per

$$i_z\omega(Y_2,\dots,Y_k):=\omega(X,Y_2,\dots,Y_k).$$

Per conveni posem $i_Xh=0$ si $h\in\Omega^0(U)$. Es compleix la següent fórmula (exercici):

$$i_X(\alpha\wedge\beta)=i_X\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge i_X\beta$$

si α és de grau k.

4.3.3 Pullback d'una forma diferencial

Si tenim una aplicació diferenciable entre oberts, podem transportar les formes però en el sentit contrari:

Definició 4.3.7 **(Pullback d'una forma diferencial)**
Sigui $f:U\subset\mathbb{R}^n\to V\subset\mathbb{R}^m$ una aplicació C^∞. $\forall k\geq 1$ i $\omega\in\Omega^k(V)$, definim el **pullback** de ω per f com la k-forma diferencial $f^*\omega\in\Omega^k(U)$ definida $\forall X_1,\dots,X_k\in\chi(U)$ i $p\in U$ per

$$(f^*\omega)_p(X_1(p),\dots,X_k(p)):=\omega_{f(p)}(df_p(X_1(p)),\dots,df_p(X_k(p))).$$

Si $h\in\Omega^0(U)(=C^\infty(U))$, posem $f^*\omega=h\circ f$.
Aleshores obtenim $\forall k\geq 0$ una aplicació

$$f^*:\Omega^k(V)\to\Omega^k(U)$$

anomenada pullback per f que és lineal: $\forall a\in\mathbb{R}$, $\forall\omega,\eta\in\Omega^k(V)$,

$$f^*(a\omega+\eta)=af^*\omega+f^*\eta.$$

El pullback per una funció té moltes proprietats:

Proposició 4.3.3

Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^n \overset{C^\infty}{\to} V \subset \mathbb{R}^m$.

1. $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta,$ $\qquad (\forall \omega \in \Omega^k(V)$ i $\eta \in \Omega^\ell(V))$
2. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ $\qquad (\forall g : V \overset{C^\infty}{\to} W \subset \mathbb{R}^r)$
3. $f^*(h \cdot \omega) = (h \circ f) \cdot f^*\omega,$ $\qquad (\forall h \in C^\infty(V)$ i $\omega \in \Omega^k(V))$
4. $f^* \circ d = d \circ f^*$ i, en particular, $d(f^*h) = d(h \circ f) = f^*dh,$ $\qquad (\forall h \in C^\infty(V))$
5. $f^*dx_i = df_i.$ $\qquad (\forall i = 1, \dots, m)$

Demostració. Fixem $X, X_1, \dots, X_{k+\ell} \in \chi(U)$ i $p \in U$.

1. Calculem

$$\begin{aligned} f^*(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) &= (\omega \wedge \eta)(df(X_1), \dots, df(X_{k+\ell})) \\ &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma)\omega(df(X_{\sigma(1)}), \dots, df(X_{\sigma(k)}))\eta(df(X_{\sigma(k+1)}), \dots, df(X_{\sigma(k+\ell)})) \\ &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma)f^*\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})f^*\eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}) \\ &= (f^*\omega \wedge f^*\eta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}). \end{aligned}$$

2. Aquí

$$\begin{aligned} (g \circ f)^*\omega_p(X_1(p), \dots, X_k(p)) &= \omega_{g(f(p))}(d(g \circ f)_p(X_1(p)), \dots, d(g \circ f)_p(X_k(p)) \\ &= \omega_{g(f(p))}(dg_{f(p)}(df_p(X_1(p))), \dots, dg_{f(p)}(df_p(X_k(p))) \\ &= g^*\omega_{f(p)}(df_p(X_1(p)), \dots, df_p(X_k(p))) \\ &= f^*(g^*\omega)_p(X_1(p), \dots, X_k(p)). \end{aligned}$$

3. $f^*(h\omega)_p(X) = (h\omega)_{f(p)}(df_p(X)) = h(f(p))\omega_{f(p)}(df_p(X)) = (h \circ f)(p)f^*\omega_p(X).$

4. Per inducció sobre k:
   - Primer comprovem fàcilment que $d(f^*h) = d(h \circ f) = dh \circ df = f^*dh$ com
   $$dh_{f(p)}(df_p(X(p))) = f^*dh_p(X(p)).$$
   - Suposem la fórmula certa per $k-1$ i sigui $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$:
   $$\begin{aligned} f^*d(dx_i \wedge \omega) &= f^*(d^2x_i \wedge \omega - dx_i \wedge d\omega) \\ &= -f^*(dx_i \wedge d\omega) \\ \text{(per H.I.)} \quad &= -d(f^*x_i) \wedge d(f^*\omega) \\ &= d(f^*dx_i \wedge f^*\omega) \\ &= d \circ f^*(dx_i \wedge \omega, \end{aligned}$$

   i concloem fent servir el punt anterior.

5 $(f^*dx_i)_p(X) = (dx_i)_{f(p)}(df_p(X(p))) = dx_i(df_p(X(p))) = df_i|_p\,(X(p))$.

□

Corol·lari 4.3.1

Si
$$\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_k} \omega_{j_1\ldots j_k} \cdot dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k} \in \Omega^k(V),$$
llavors
$$f^*\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_k} \omega_{j_1\ldots j_k} \circ f \cdot df_{j_1} \wedge \ldots \wedge df_{j_k}.$$

4.3.4 Forma volum sobre $\mathbb{R}^n$

Definició 4.3.8 **(Element de volum de $\mathbb{R}^n$)**

La forma
$$\eta_{\mathbb{R}^n} := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$$
s'anomena **element de volum** de $\mathbb{R}^n$ i està caracteritzada per la següent propietat $(*)$:
$$\eta_{\mathbb{R}^n}|_p\,(u_1, \ldots, u_n) = 1$$
$\forall p \in \mathbb{R}^n$ i $(u_1, \ldots, u_n)$ base ortonormal positiva de $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

Efectivament, si $(u_1, \ldots, u_n)$ és una base ortonormal positiva de $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ i escrivim $u_i = \sum a_{ij} \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p$, aleshores $\det((a_{ij})) = 1$ i doncs

$$\begin{aligned}
\eta_{\mathbb{R}^n}|_p\,(u_1, \ldots, u_n) &= dx_1|_p \wedge \ldots \wedge dx_n|_p\,(u_1, \ldots, u_n) \\
&= e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*(u_1, \ldots, u_n) \\
&= \det(e_i^*(u_j)) \\
&= \det(a_{ij}) = 1.
\end{aligned}$$

D'altra banda, si $\tau \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ té aquesta propietat, com que $\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^* = 1$, llavors $\exists h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tau = h \cdot \eta_{\mathbb{R}^n}$ veiem fàcilment que $h \equiv 1$ i per tant $\tau = \eta_{\mathbb{R}^n}$.

El següent resultat ens serà molt útil per integrar.

Proposició 4.3.4

Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^n \overset{C^\infty}{\to} V \subset \mathbb{R}^n$. Aleshores
$$f^*\eta_{\mathbb{R}^n} = \det(Jac(f)) \cdot \eta_{\mathbb{R}^n}.$$

Demostració. Denotem $\eta_{\mathbb{R}^n}$ per η en aquesta demostració. Sabem que existeix $h \in C^\infty(U)$ tal que $f^*\eta = h \cdot \eta$ ja que $\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^* = 1$, i aquesta funció està determinada per

$$\begin{aligned} h &= (f^*\eta)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\ &= \eta_{f(\cdot)}\left(df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \ldots, df\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right) \\ &= \det\left(\sum \frac{\partial f_j}{\partial x_1} e_j, \ldots, \sum \frac{\partial f_j}{\partial x_n} e_j\right) \\ &= \det(Jac(f)). \end{aligned}$$

$\square$

4.4 Subvarietats amb vora

Denotem

$$\mathbb{R}^m_+ = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\} \quad \text{i} \quad \partial\mathbb{R}^m_+ = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m = 0\}.$$

4.4.1 Definicions

Primer necessitem una noció de diferenciabilitat de les funcions definides sobre oberts de $\mathbb{R}^n_+$.

Definició 4.4.1

Sigui $V \subset \mathbb{R}^m_+$ un obert.

Diem que $f : V \to \mathbb{R}^k$ és **diferenciable** (de classe C^∞) si per tot $p \in V$ existeix W un entorn obert de p dins $\mathbb{R}^m$ i una aplicació $\bar{f} : W \to \mathbb{R}^k$ de classe C^∞ tal que $\bar{f}_{|V\cap W} = f_{|V\cap W}$.

Aleshores es defineix la **diferencial** de f en $p \in V$ com $df_p := d\bar{f}_p$.

Evidentment, si $p \notin V \cap \partial\mathbb{R}^m_+$ tornem a trobar la noció clàssica de diferenciabilitat de les funcions sobre $\mathbb{R}^m$ amb valors a $\mathbb{R}^k$ agafant $\bar{f} = f$. La novetat és el cas $p \in V \cap \partial\mathbb{R}^k_+$, i llavors cal observar que la diferencial de $\bar{f}$ no depèn de l'extensió $\bar{f}$ triada.

Definició 4.4.2

Un subconjunt $M \subset \mathbb{R}^n$ és una **subvarietat amb vora** de dimensió m si per tot $p \in M$ existeix un entorn obert U de p dins $\mathbb{R}^n$, un obert $\Omega \subset \mathbb{R}^m_+$ i una aplicació diferenciable $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tal que

1. $\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} U \cap M$ és homeomorfisme ;
2. φ_x és una immersió, és a dir, $d\varphi_x$ és injectiva $\forall x \in \Omega$.

El parell (Ω, φ) s'anomena **parametrització local** de M.

Evidentment una subvarietat de dimensió m de $\mathbb{R}^n$ és una subvarietat amb vora (la vora de la qual és buida). Un primer exemple fàcil de subvarietat amb vora no buida és el subconjunt

$$\mathbb{R}^m_+ \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n.$$

Veiem intuïtivament que hi ha dos tipus de punts dins una subvarietat amb vora.

Definició 4.4.3

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat de dimensió m amb vora.
Diem que $p \in M$ és un **punt interior** si hi ha una parametrització local (Ω, φ) de M al voltant de p tal que $p \in \varphi(\Omega \setminus \partial\mathbb{R}^k_+)$. Denotem int$(M)$ el subconjunt de punts interiors de M i $\partial M = M \setminus$ int(M) el subconjunt complementari que s'anomena **vora** de M.

És fàcil observar que la definició anterior de punt interior no depèn de la parametrització local triada, i que tota parametrització local porta un punt de la vora topològica $\partial\mathbb{R}^m_+$ a la vora ∂M de M. Observem també que la vora d'una subvarietat definida al capítol 2 és buida. Així podrem identificar des d'ara les subvarietats amb vora buida amb les subvarietats que vam definir al capítol 2.

Sorprenentment, quan no és buida, la vora d'una subvarietat és un objecte geomètric molt raonable.

Proposició 4.4.1

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat de dimensió m amb vora. Llavors ∂M és una subvarietat (sense vora) de dimensió $m-1$.

Demostració. La demostració és molt senzilla. Sigui $p \in \partial M$ i $(\Omega, \varphi = \varphi(u_1, \dots, u_m))$ una parametrització local de M al voltant de p. Llavors $(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^m_+, \bar{\varphi} = \varphi(u_1, \dots, u_{m-1}, 0))$ serà parametrització local de ∂M al voltant de p. De fet $\Omega \cap \partial\mathbb{R}^m_+$ serà un obert de $\partial\mathbb{R}^m_+ \simeq \mathbb{R}^{m-1}$, i $\bar{\varphi}$ serà homeomorfisme sobre la seva imatge i immersió, per ser una restricció de φ, que també ho és. $\square$

Per tal de decidir quan un subconjunt és subvarietat amb vora de la mateixa dimensió que l'espai ambient, disposem del criteri següent.

Proposició 4.4.2

Un subconjunt $M \subset \mathbb{R}^n$ és subvarietat amb vora de dimensió n si i només si per tot $p \in M$ existeix una submersió $F : U \to \mathbb{R}$ definida sobre un entorn obert U de p tal que $U \cap M = F^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

Demostració. Notem en primer lloc que ∂M estarà formada pels punts p tals que $F(p) = 0$.

Suposem ara que p és un d'aquests punts i, sense pèrdua de generalitat, que $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$. L'aplicació

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, F(x_1, ..., x_n)) \end{array}$$

serà un difeomorfisme en algun entorn U de p, i denotem llavors la seva inversa per $\varphi = \psi^{-1} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Aleshores el parell $(\Omega \cap \mathbb{R}^n_+, \varphi)$ serà una parametrització local de M al voltant de p. En particular, ∂M serà parametritzada com una subvarietat de dimensió $n-1$ considerant l'aplicació

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega' \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

on l'obert Ω' de $\mathbb{R}^{n-1}$ està definit per $\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+ = \Omega' \times \{0\}$. $\square$

Exemple. Utilitzant la submersió $F(x_1, \dots, x_n) = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2$ veiem que la bola

$$\mathbb{B}^n := \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\} = F^{-1}(\mathbb{R}_+)$$

és una subvarietat de dimensió n $\mathbb{R}^n$ amb vora $\partial\mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$.

4.4.2 Camps vectorials

Primer estenem la definició d'espai tangent a la vora d'una subvarietat.

Definició 4.4.4

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat de dimensió m amb vora, i $(\Omega, \varphi = \varphi(u_1, \ldots, u_m))$ una parametrització local al voltant d'un punt $p \in \partial M$. Definim l'**espai tangent** a M en p com

$$T_pM := \text{Vect}(\bar{\varphi}_{u_1}(\varphi^{-1}(p)), \ldots, \bar{\varphi}_{u_m}(\varphi^{-1}(p))) \subset \mathbb{R}^n$$

on $\bar{\varphi}$ és qualsevol extensió de φ.

L'anterior definició no depèn de l'elecció de l'extensió ni tampoc de la parametrització triada, i d'ara endavant denotarem els vectors $\bar{\varphi}_{u_i}$ per φ_{u_i}. De fet podriem definir alternativament els φ_{u_i} fent les derivades direccionals

$$\varphi_{u_i}(\varphi^{-1}(p)) := \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(\varphi^{-1}(p) + te_i) - p}{t}$$

on recordem que $(e_1, \ldots, e_m)$ és la base canònica de $\mathbb{R}^m$. Per un punt $p \in \text{int}(M)$ guardem la mateixa definició d'espai tangent que en el capítol 2.

Els vectors tangents en un punt de la vora es poden classificar en dues classes.

Definició 4.4.5

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat de dimensió m amb vora i $p \in \partial M$. Es defineix el conjunt de **vectors interiors** de T_pM com

$$T_p^{int}M := \{\gamma'(0) \mid \gamma : [0, \varepsilon) \overset{C^\infty}{\to} M \quad \text{amb} \quad \gamma(0) = p\}$$

que serà un semi espai tancat de T_pM de frontera $T_p\partial M \simeq \mathbb{R}^{m-1}$.

Si (Ω, φ) és parametrització local de M al voltant de p, llavors

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \varphi_{u_i} \in T_p^{int}M \quad \iff \quad X_m \geq 0.$$

Els elements de $T_pM \setminus T_p^{int}M$ s'anomenen **vectors exteriors**.

Aleshores definim la noció de camps vectorials sobre una subvarietat amb vora de la manera següent.

Definició 4.4.6

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat de dimensió m amb vora.

Un **camp vectorial tangent de** M és una aplicació $X : M \to \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que per tot $p \in M$ es compleix

$$X(p) \in T_pM.$$

Recordem que X es diferenciable si $\forall(\Omega, \varphi)$ parametrització local de M, la composició $X \circ \varphi$

és de classe C^∞ sobre Ω. Aleshores, com $(\varphi_{u_1}, \ldots, \varphi_{u_m})$ és una base de T_pM per tot $p = \varphi(u_1, \ldots, u_m)$, obtenim la definició equivalent següent: X és camp vectorial tangent sobre M si es pot escriure en cada parametrització local (Ω, φ) com

$$X \circ \varphi(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{i=1}^{m} X_i(u_1, \ldots, u_m)\varphi_{u_i}$$

amb els X_i funcions diferenciables sobre Ω.

Denotarem $\chi(M)$ el conjunt de camps vectorials tangent de M.

Exemple. Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert tal que $M \subset U$, i $Y \in \chi(U)$ un camp vectorial tal que per tot $p \in M$ tenim $Y(p) \in T_pM$. Aleshores $Y_{|M}$ és camp vectorial tangent de M.

De fet aquest exemple és el cas general: tot camp vectorial sobre M es pot constuire d'aquesta manera fent servir un teorema potent i que no demostrarem aquí que s'anomena teorema de l'entorn tubular.

4.4.3 Formes diferencials i orientació

Sigui M^m una subvarietat amb vora de $\mathbb{R}^n$ de dimensió m.

Recordem que si $(\Omega, \varphi = \varphi(u_1, \ldots, u_m))$ és una parametrització local de M al voltant d'un punt $p \in M$ (possiblament $p \in \partial M$), aleshores la família de vectors $(\varphi_{u_1}(\varphi^{-1}(p)), \ldots, \varphi_{u_m}(\varphi^{-1}(p)))$ és una base de T_pM. Denotem per $(du_1|_p, \ldots, du_m|_p)$ la base de $(T_pM)^*$ dual.

Definició 4.4.7

Una **k-forma diferencial** sobre M és una correspondència

$$\omega : p \in M \mapsto \omega_p \in \Lambda^k(T_pM)^*$$

tal que per tota parametrització local (Ω, φ) la k-forma ω es descomposa sobre $\varphi(\Omega)$ com

$$\omega_{\varphi(u_1,\ldots,u_m)} = \sum_{j_1<\ldots<j_k} \omega_{j_1\ldots j_k}(u_1, \ldots, u_m) du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_k}$$

on les aplicacions $\omega_{j_1\ldots j_k}$ són diferenciables sobre Ω. Denotem $\Omega^k(M)$ el conjunt de k-formes diferencials sobre M que és un $C^\infty(M)$-mòdul, i en particular un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

Aleshores totes les propietats de les formes diferencials sobre un obert de $\mathbb{R}^n$ s'estenen sense dificultat a les formes diferencials sobre una subvarietat fent servir parametritzacions locals. En particular definim

$$d\omega = \sum_{i,j_1,\ldots,j_k} \frac{\partial \omega_{j_1\ldots j_k}}{\partial u_i} du_i \wedge du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_k}$$

i això no depèn de l'expressió local de ω.

Utilitzant aquestes formes diferencials podem definir la noció d'orientació de les subvarietats amb vora.

Definició 4.4.8

Diem que M és **orientable** si $\exists \omega \in \Omega^m(M)$ tal que per tot $p \in M$ es compleix la condició $\omega_p \neq 0$.

Aleshores una base $(X_1, \ldots, X_m)$ de vectors de T_pM es diu **positiva** si es compleix la condició $\omega_p(X_1, \ldots, X_m) > 0$.

Per exemple, la subvarietat $M = \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$ és orientable per $\eta_{\mathbb{R}^n} = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Com ho vam demostrar aquesta forma té la propietat següent: per tot $p \in \mathbb{R}^n$ i per tota base ortonormal positiva $(u_1, \ldots, u_n)$ de $T_p\mathbb{R}^n$, tenim $\eta_{\mathbb{R}^n}|_p(u_1, \ldots, u_n) = 1$.

Això es pot generalitzar a qualsevol subvarietat amb vora.

Proposició 4.4.3

Si M és orientable, aleshores $\exists!$ m-forma diferencial denotada per $\eta_M \in \Omega^m(M)$ tal que si $(X_1, \ldots, X_m)$ és base ortonormal[a] positiva de T_pM llavors $\eta_M|_p(X_1, \ldots, X_m) = 1$.

Aquesta m-forma η_M s'anomena **element de volum**.

[a] és a dir, base de T_pM tal que $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$ per tot $i, j = 1, \ldots, m$.

Demostració. Si M està orientada per una m-forma diferencial ω, sabem que qualsevol m-forma sobre M s'escriurà de la forma $f \cdot \omega$ per una certa funció $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable. Aleshores si $(X_1, \ldots, X_m)$ és una base ortonormal positiva de T_pM posem

$$f(p) = \frac{1}{\omega_p(X_1, \ldots, X_k)}.$$

Aquesta expressió no dependrà de la base ortonormal positiva triada (per les propietats de les formes multilineals) i defineix una funció diferenciable. Per tant deduïm el resultat. $\square$

Exemple. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular orientada per un camp normal unitari $\nu : S \to \mathbb{S}^2$. Aleshores S serà orientable per l'element de volum

$$\eta_S = i_\nu(dx \wedge dy \wedge dz),$$

i les dues nocions d'orientació que vam definir per a les superfícies coincideixen: per tota base ortonormal (X_1, X_2) de T_pS positiva dins el sentit que (X_1, X_2, ν) és base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ per la seva forma volum (orientació induïda per ν), tindrem que

$$\begin{aligned} \eta_S(X_1, X_2) &= i_\nu(dx \wedge dy \wedge dz)(X_1, X_2) \\ &= (dx \wedge dy \wedge dz)(\nu, X_1, X_2) \\ &= (dx \wedge dy \wedge dz)(X_1, X_2, \nu) \\ &= 1 \end{aligned}$$

i serà positiva per l'orientació induïda per la 2-forma η_S.

En el cas de les superfícies regulars, la forma volum tindrà l'expressió local següent.

Proposició 4.4.4

Siguin S una superfície regular orientada per ν, i (Ω, φ) una parametrització local compatible amb l'orientació[a]. Aleshores

$$\varphi^* \eta_S = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv.$$

[a] És a dir que $\nu = \varphi_u \wedge \varphi_v / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$

Demostració. Sabem que $\varphi^* \eta_S = A du \wedge dv$ amb $A > 0$, i calculem

$$\begin{aligned} A &= \varphi^* \eta_S \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = \eta_S \left(d\varphi \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), d\varphi \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right) \\ &= \eta_S (\varphi_u, \varphi_v) = i_\nu \eta_{\mathbb{R}^3} (\varphi_u, \varphi_v) \\ &= \underbrace{\eta_{\mathbb{R}^3} (\nu, \varphi_u, \varphi_v)}_{\text{volum paral·lelepípede}} = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

$\square$

En fi, observem que la vora d'una subvarietat amb vora està naturalment orientada.

Definició 4.4.9

Suposem $\partial M \neq \emptyset$. Definim el **camp exterior normal unitari** com la correspondència

$$\nu_{\partial M} : p \in \partial M \mapsto \nu_{\partial M}(p) \in T_p M$$

determinada de manera única per les condicions següents:

- $\|\nu_{\partial M}(p)\| = 1$;
- $\nu_{\partial M}(p) \in T_p^{ext} M$;
- $\nu_{\partial M}(p) \perp T_p \partial M$.

Aleshores, si M és orientable, i si $\eta_M \in \Omega^m(M)$ és l'element de volum de M associat a l'orientació, tindrem que la forma diferencial

$$\eta_{\partial M} = i_{\nu_{\partial M}}(\eta_M) \in \Omega^{m-1}(\partial M)$$

sobre ∂M no s'anul·la, i l'orientació associada de ∂M s'anomena **orientació induïda**.

Exemple. Si el semi espai $\mathbb{R}^m_+$ està orientat per l'element de volum $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$, aleshores

$$\nu_{\partial \mathbb{R}^m_+} = -\frac{\partial}{\partial x_m}$$

i obtenim

$$\eta_{\partial \mathbb{R}^m_+} = i_{\nu_{\partial \mathbb{R}^m_+}} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m = (-1)^m dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{m-1}.$$

4.5 Integració de formes i Teorema de Stokes

4.5.1 Integració

Comencem amb l'integració d'una forma diferencial sobre un obert de $\mathbb{R}^m$.

Definició 4.5.1

Siguin

- Ω un obert de l'espai $\mathbb{R}^m$ del qual denotem $(u_1, \ldots, u_m)$ les seves coordenades,
- $\omega = h \cdot du_1 \wedge \ldots \wedge du_m \in \Omega^m(\mathbb{R}^m)$ una m-forma diferencial on $h \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que el seu **suport**

  $$\text{spt}(\omega) := \overline{\{p \in \mathbb{R}^m \mid \omega_p \neq 0\}}$$

  sigui compacte i contingut dins l'obert Ω.

Es defineix la **integral** de ω sobre Ω com la quantitat

$$\int_\Omega \omega = \int_\Omega h\ du_1 \wedge \ldots \wedge du_m := \int_\Omega h\ du_1 \ldots du_m.$$

Observem que la condició que el suport sigui compacte ens assegura que la integral sigui ben definida. Ara passem a la definició de la integral d'una forma sobre un domini d'una subvarietat que sigui parametritzat.

Definició 4.5.2

Siguin

- $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat amb vora orientada
- (Ω, φ) una parametrització local de M compatible amb l'orientació[a],
- $\omega \in \Omega^m(M)$ tal que $\text{spt}(\omega) := \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}$ sigui compacte i contingut dins l'obert $\varphi(\Omega)$.

Es defineix la **integral** de ω sobre M com la quantitat

$$\int_M \omega := \int_\Omega \varphi^* \omega = \int_\Omega \omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_m} \right) du_1 \wedge \ldots \wedge du_m,$$

i per tant

$$\int_M \omega = \int_\Omega \omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_m} \right) du_1 \ldots du_m.$$

[a] És a dir que la família $(\varphi_{u_1}, \ldots, \varphi_{u_m})$ és una base ortonormal positiva de T_pM.

Proposició 4.5.1

L'anterior definició no depèn de l'elecció de la parametrització local (Ω, φ).

Demostració. Sigui (Ω', ψ) una altre parametrització complint les mateixes condicions. Suposarem que $\varphi(\Omega) = \psi(\Omega')$ sense pérdua de generalitat. La composició $f = \varphi^{-1} \circ \psi$ està definida sobre Ω' i spt$(\omega) \subset \varphi(\Omega) = \psi(\Omega')$. Posem $\varphi^*\omega = A\ du_1 \wedge \ldots \wedge du_m$ on $A = \omega(\varphi_{u_1}, \ldots, \varphi_{u_m})$. Llavors es compleix

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} \psi^*\omega &= \int_{\Omega'} (\varphi \circ f)^*\omega = \int_{\Omega'} f^*(A\ du_1 \wedge \ldots \wedge du_m) \\
&= \int_{\Omega'} (A \circ f)\ f^*(du_1 \wedge \ldots \wedge du_m) \\
&\overset{(*)}{=} \int_{\Omega'} (A \circ f)\ \det(Jac(f)) du_1 \ldots du_m \\
&\overset{(**)}{=} \int_{f(\Omega')=\Omega} A\ du_1 \ldots du_m \\
&= \int_{\Omega} \varphi^*\omega
\end{aligned}$$

on la igualtat $(*)$ resulta de la fórmula $f^*\eta_{\mathbb{R}^m} = \det(Jac(f)) \cdot \eta_{\mathbb{R}^m}$ que vam demostrar i la igualtat $(**)$ del teorema del canvi de variables ja que $\det(Jac(f)) > 0$. □

Per tal d'integrar les formes diferencials de grau m sobre les subvarietats de dimensió m, necessitarem la noció de partició de la unitat.

Proposició 4.5.2

Sigui $K \subset \mathbb{R}^m$ un compacte i $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recobriment obert[a] de K. Aleshores $\exists k \geq 1$ funcions $\rho_1, \ldots, \rho_k \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que

- Per tot $i = 1, \ldots, k$, $\rho_i \geq 0$ i spt$(\rho_i) \subset V_{\alpha_i}$ per un $\alpha_i \in A$,
- $\sum_{i=1}^k \rho_i(x) = 1$ per tot punt $x \in K$.

La família de funcions $\{\rho_i\}_i$ s'anomena **partició de la unitat** de K subordonada a $\{V_\alpha\}_\alpha$.

[a] Es a dir que els V_α són oberts i $K \subset U_{\alpha \in A} V_\alpha$.

Demostració. Per a cada punt $x \in K$ escollim un parell de boles obertes centrades en x, que denotem $B(x)$ i $D(x)$, de manera que $\bar{B}(x) \subset D(x) \subset \bar{D}(x) \subset V_\alpha$ per algun $\alpha \in A$. Per ser K compacte, hi ha un nombre finit de punts $x_1, ..., x_k \in K$ tals que $K \subset B(x_1) \cup \ldots \cup B(x_k)$. Podem trobar funcions $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciables i, amb valors a $[0, 1]$ tals que $f_i \equiv 1$ sobre $B(x_i)$ i spt$(f_i) \subset D(x_i)$. Definim

$$\begin{cases}
\rho_1 = f_1, \\
\rho_2 = (1 - f_1) f_2, \\
\qquad \vdots \\
\rho_k = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - f_i) \cdot f_k.
\end{cases}$$

Aquestes funcions són totes ≥ 0 i veiem per inducció que

$$\sum_{i=1}^m \rho_i = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - f_i).$$

Per tant tenim que per tot $x \in K$

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i(x) = 1$$

ja que x pertany a alguna bola $B(x_i)$. Això conclou la demostració. $\square$

La demostració de la proposició anterior s'adapta sense dificulats per provar que si K és un subconjunt compacte d'una subvarietat M^m de $\mathbb{R}^n$ i $\{(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ és una família de parametritzacions de M amb $K \subset \cup_\alpha \varphi_\alpha(\Omega_\alpha)$, llavors hi ha una partició de la unitat $\{\rho_i\}_i$ de K subordinada al recobriment $\{\varphi_\alpha(\Omega_\alpha)\}$ on els $\rho_i \in C^\infty(M)$.

Definició 4.5.3

Sigui M^m una subvarietat amb vora de $\mathbb{R}^n$. Denotarem per $\Omega_c^m(M)$ l'espai vectorial de les m-formes diferencials de M amb suport compacte.

Utilitzant aquestes particions de la unitat, podem finalment definir la integral d'una forma diferencial amb suport compacte sobre una subvarietat amb vora.

Definició 4.5.4

Siguin

- $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat orientada,
- $\{(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ una família de parametritzacions locals de M compatible amb l'orientació i tal que $M = \cup_\alpha \varphi_\alpha(\Omega_\alpha)$ (una tal família es diu un **atles** de M),
- $\omega \in \Omega_c^m(M)$ i denotem $K := \text{spt}(\omega)$ el seu suport compacte,
- $\{\rho_i\}_{i=1,\dots,k}$ una partició de la unitat de K subordinada al recobriment $\{\varphi_\alpha(\Omega_\alpha)\}$,
- per tot $i = 1, \dots, k$ denotem α_i l'índex que compleix $\text{spt}(\rho_i) \subset \varphi_{\alpha_i}(\Omega_{\alpha_i})$.

Es defineix la **integral** de ω sobre M com la quantitat

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{k} \int_M \rho_i \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_{\alpha_i}} (\rho_i \circ \varphi_{\alpha_i})\ \varphi_{\alpha_i}^* \omega.$$

Com anteriorment, aquesta definició no depèn de la partició de la unitat o de l'atles escollides.

Definició 4.5.5

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat orientada. Definim el seu **volum** com la quantitat

$$\text{Vol}(M) = \int_M \eta_M.$$

A l'hora de calcular integrals de formes diferencials sobre subvarietats, no utilitzarem les particions de la unitat sinó que farem servir el resultat que segueix, del qual deixem la demostració com a exercici.

Proposició 4.5.3
Siguin $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat orientada, i $\{(\Omega_i, \varphi_i)\}_i$ una família de parametritzacions locals de M compatible amb l'orientació tal que

1. $M \setminus \cup_i \varphi_\alpha(\Omega_i)$ és una unió de subvarietats de dimensió $< m$,
2. $\varphi_i(\Omega_i) \cap \varphi_j(\Omega_j) = \emptyset$ per tot $i \neq j$.

Aleshores es compleix

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_i} \varphi_i^* \omega$$

per tot $\omega \in \Omega_c^m(M)$.

Un altre resultat tècnic útil a l'hora de calcular aquestes integrals és el següent.

Proposició 4.5.4
Sigui $f : M^m \subset \mathbb{R}^n \to N^m \subset \mathbb{R}^k$ un difeomorfisme entre subvarietats orientables tal que per tot $p \in M$ la seva diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ preserva orientacions. Llavors

$$\int_N \omega = \int_M f^* \omega$$

per tot $\omega \in \Omega_c^m(M)$.

Demostració. Només cal recordar que si (ω, φ) és una parametrització local de M, llavors $(\omega, f \circ \varphi)$ és parametrització local de N. $\square$

4.5.2 Teorema de Stokes

Aquest teorema s'enuncia així.

Teorema 4.5.1 (Stokes)
Siguin $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat orientada, i $\omega \in \Omega_c^{m-1}(M)$. Aleshores

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Demostració. Denotem

- $\{(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ un atles de M compatible amb l'orientació,
- $K := \text{spt}(\omega)$ compacte,
- $\{\rho_i\}_{i=1,\dots,k}$ una partició de la unitat de K subordinada a $\{\varphi_\alpha(\Omega_\alpha)\}$,
- α_i l'índex per tot $i = 1, \dots, k$ que compleix $\text{spt}(\rho_i) \subset \varphi_{\alpha_i}(\Omega_{\alpha_i})$.

Posem $J := \{i \in I \mid \text{spt}(\rho_i) \cap \partial M \neq \emptyset\}$ i suposarem que $\alpha_i = i$. Escrivim $\omega = \sum_i \rho_i \omega$, i llavors

$$\begin{aligned}\int_M \omega &= \sum_i \int_M d(\rho_i \omega) = \sum_i \int_{\Omega_i} \varphi_i^*(d(\rho_i \omega)) \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^m_+} d\,\underbrace{\varphi_i^*(\rho_i \omega)}_{:=\bar{\omega}_i}\end{aligned}$$

i observem que les formes $\bar{\omega}_i$ són elements de $\Omega_c^{m-1}(\mathbb{R}^m_+)$.

Lema 4.5.1

Si $\bar{\omega} \in \Omega_c^{m-1}(\mathbb{R}^m_+)$, aleshores

1. Si $\text{spt}(\bar{\omega}) \cap \partial\mathbb{R}^m_+ = \emptyset$ aleshores $\int_{\mathbb{R}^m_+} d\bar{\omega} = 0$.
2. Si $\text{spt}(\bar{\omega}) \cap \partial\mathbb{R}^m_+ \neq \emptyset$ aleshores $\int_{\mathbb{R}^m_+} d\bar{\omega} = \int_{\partial\mathbb{R}^m_+} \bar{\omega}$.

Demostració. Escrivim

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^m f_i(u_1, \dots, u_m)\, du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du_i} \wedge \dots \wedge du_m$$

i per tant

$$d\bar{\omega} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial u_i}\, du_i \wedge du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du_i} \wedge \dots \wedge du_m = \left(\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial u_i}\right) du_1 \wedge \dots \wedge du_m.$$

Aleshores

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m_+} d\bar{\omega} &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^m_+} \frac{\partial f_i}{\partial u_i}\, du_1 \dots du_m \\ \text{(Fubini)} &= \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^{m-1}_+} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_i\right) du_1 \dots \widehat{du_i} \dots du_m \\ &\quad + (-1)^{m-1} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_i\right) du_1 \dots \widehat{du_i} \dots du_m.\end{aligned}$$

Ara bé, com el suport de $\bar{\omega}$ és compacte, tenim per $i = 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_i &= f(u_1, \dots, u_{i-1}, +\infty, u_{i+1}, \dots, u_m) - f(u_1, \dots, u_{i-1}, -\infty, u_{i+1}, \dots, u_m) \\ &= 0\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_m}{\partial u_m} du_m &= f(u_1, \dots, u_{i-1}, +\infty, u_{i+1}, \dots, u_m) - f(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m) \\ &= -f(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m).\end{aligned}$$

Al final obtenim

$$\int_{\mathbb{R}^m_+} d\bar{\omega} = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(u_1, \dots, u_{m-1}, 0) \cdot \underbrace{(-1)^m du_1 \wedge \dots \wedge du_{m-1}}_{\eta_{\partial\mathbb{R}^m_+}} = \int_{\partial\mathbb{R}^m_+} \bar{\omega}.$$

□

Acabem la demostració:

$$
\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \sum_{i\in J}\int_{\mathbb{R}^m_+} d\bar{\omega}_i + \sum_{i\notin J}\int_{\mathbb{R}^m_+} d\bar{\omega}_i \\
&= \sum_{i\in J}\int_{\partial\mathbb{R}^m_+} \bar{\omega}_i = \sum_{i\in J}\int_{\Omega_i\cap\partial\mathbb{R}^m_+} \varphi_i^*(\rho_i\omega) \\
&= \sum_{i\in J}\int_{\partial M} \rho_i\omega = \int_{\partial M}\sum_{i\in J}\rho_i\omega \\
&= \int_{\partial M}\omega.
\end{aligned}
$$

□

El corol·lari següent és directe.

Corol·lari 4.5.1

Sigui $M^m \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat orientada amb $\partial M = \emptyset$. Llavors

$$\int_M d\omega = 0$$

per tot $\omega \in \Omega_c^{m-1}(M)$.

El corol·lari següent és clàssic.

Corol·lari 4.5.2

Sigui $D \subset$ una subvarietat amb vora de dimensió 2, i $P, Q \in C^\infty(D)$. Llavors

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D}(Pdx + Qdy).$$

Demostració. Apliquem el teorema de Stokes amb la 2-forma $\omega = Pdx + Qdy$. □

CAPÍTOL 5

BIBLIOGRAFIA

1. *Manfredo P. do Carmo*. **Geometría diferencial de curvas y superfícies**. Alianza Editorial (1990).
2. *Theodore Shifrin*. **Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces**. Accessible a pàgina personal de l'autor (2021).
3. *Sebastián Montiel y Antonio Ros*. **Curvas y superfícies**. Proyecto Sur (1998).
4. *Michael Spivak*. **Cálculo en Variedades**. Ed. Reverté (1970).
5. *Victor A. Toponogov*. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Birkhäuser (2006).
6. *Shoshichi Kobayashi*. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Springer (2019).

Formulari

Fórmules de Frenet, curvatura i torsió

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s)N(s) \\ N'(s) &= -k(s)T(s) - \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= \tau(s)N(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \\ \tau(t) &= -\frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} \end{aligned}$$

on $s =$ paràmetre arc i $t =$ paràmetre arbitrari.

Segona forma fonamental

$$e = \langle \nu, \varphi_{uu} \rangle, \quad f = \langle \nu, \varphi_{uv} \rangle, \quad g = \langle \nu, \varphi_{vv} \rangle, \qquad \text{on} \quad \nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

Curvatura mitjana, curvatura de Gauss i curvatures principals

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}, \qquad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \qquad k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

Línies de curvatura i línies asimptòtiques

$$\begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0, \qquad e\, u'^2 + 2f\, u'v' + g\, v'^2 = 0.$$

Símbols de Christoffel

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1\, \varphi_u + \Gamma_{11}^2\, \varphi_v + e\, \nu \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1\, \varphi_u + \Gamma_{12}^2\, \varphi_v + f\, \nu \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1\, \varphi_u + \Gamma_{22}^2\, \varphi_v + g\, \nu \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 \cdot E + \Gamma_{11}^2 \cdot F &= \tfrac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 \cdot F + \Gamma_{11}^2 \cdot G &= F_u - \tfrac{1}{2} E_v \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{12}^1 \cdot E + \Gamma_{12}^2 \cdot F &= \tfrac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 \cdot F + \Gamma_{12}^2 \cdot G &= \tfrac{1}{2} G_u \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{22}^1 \cdot E + \Gamma_{22}^2 \cdot F &= F_v - \tfrac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 \cdot F + \Gamma_{22}^2 \cdot G &= \tfrac{1}{2} G_v \end{aligned} \right.$$

Equacions del transport paral·lel

$$\left\{\begin{array}{rcl} a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{21}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv' & = & 0 \\ b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{21}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv' & = & 0 \end{array}\right.$$

Equacions de les geodèsiques

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\,\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 & = & 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\,\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Curvatura de Gauss: teorema egregi

$$EK = (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2.$$

Curvatura de Gauss en coordenades ortogonals

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right]$$

Curvatura geodèsica i curvatura normal

$$k_g = \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds}\right] = \langle \alpha''(s), \nu \wedge \alpha'(s)\rangle \qquad \text{on} \quad \nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \ \text{ i } \ s = \text{ paràmetre arc}$$

$k^2 = k_n^2 + k_g^2$

Fórmula de Green

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

Formes associades a un camp X i a una funció h

$$\omega_X^1(Y) = \langle X, Y\rangle, \qquad \omega_X^2(Y,Z) = \det(X,Y,Z), \qquad \omega_h^3(X,Y,Z) = h\cdot\det(X,Y,Z).$$

Circulació

$$\int_C X = \int_C \omega_X^1 = \int_a^b \big\langle X(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle\, dt$$

Flux

$$\int_S X = \int_S \omega_X^2 = \int_S \langle X, \nu\rangle\, dS$$