Sous-variétés

Exercice 1. Montrer que si $f(x, y) = x^3 - y^3$, alors l'ensemble $M = f^{-1}(0)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

Exercice 2. Montrer que l'ensemble $V = \{xy = 0\}$ n'est pas une sous-variété.

Exercice 3. Montrer que la courbe $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(t) = \sin t \cos t(\cos t, \sin t)$$

est une immersion injective, dont l'image n'est pas une sous-variété.

Exercice 4. L'image de l'application

$$g(t) = (t^2, t^3)$$

est-elle une sous-variété ?

Exercice 5. Montrer que la surface de $\mathbb{R}^3$ obtenue en faisant tourner autour de l'axe $(0z)$ un cercle centré en $(0, R, 0)$ de rayon r contenu dans le plan $(y0z)$ $(r < R)$ est une sous-variété de dimension 2.

Exercice 6. Soit $0 < r \leq R$. On considére le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } x^2 + z^2 = r^2\}$$

formé par l'intersection de deux cylindres. Montrer que V est une sous-variété si et seulement si $r < R$.

Exercice 7. Montrer que le groupe $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension ainsi que l'équation de son plan tangent en tout point. Même question pour $SO_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Montrer que si M_1 et M_2 sont deux sous-variétés, alors pour tout $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$

$$T_{(x_1,x_2)}M_1 \times M_2 = T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2.$$

Exercice 9. Identifions $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$ et posons

$$f(z_1, z_2) = (iz_1, iz_2).$$

Montrer que ce champ de vecteurs est linéaire et tangent à la sphère unité. Déterminer les courbes intégrales sur la sphère. Montrer qu'elles sont périodiques et obtenue comme l'intersection de la sphère avec une droite complexe.

Exercice 10. Déterminer les points critiques et les extremums de la fonction hauteur sur la sphère

$$\begin{array}{rcl} h : S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & z. \end{array}$$

Exercice 11. Déterminer les points critiques et les extremums de la fonction hauteur sur l'ensemble

$$\begin{array}{rcl} h : \{x^2 - y^2 = z\} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & z. \end{array}$$

Exercice 12. Pour $s > 0$ montrer que l'ensemble

$$M = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = s\}$$

est une sous-variété et maximiser alors la fonction $f : M \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

En déduire l'inégalité arithmético-géométrique

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Exercice 13. Trouver le maximum de la fonction $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ sur l'ensemble

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Exercice 14. Soit

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{R}_+^*)^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x \log x + y \log y + z \log z \end{array}$$

Déterminer les extrema de f sur la sous-variété $V_a = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \mid x+y+z-3a = 0\}$.

Exercice 15. Soit $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = z^2\} \cap \{z \geq 0\}$ le cône standard de $\mathbb{R}^3$. Nous allons montrer que celui-ci n'est pas une sous-variété.

Pour cela, supposons que $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ soit une submersion de classe C^∞ définissant $\mathcal{C}$ sur un voisinage ouvert U de l'origine :

$$(0, 0, 0) \in \mathcal{C} \cap U = f^{-1}(0).$$

1) En utilisant que l'origine est un minimum global de la fonction hauteur $h(x, y, z) = z$, montrer à l'aide du théorème des extrema liés que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = 0.$$

2) On considère la courbe $\gamma :]0, +\infty[\to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ définie par $\gamma(t) = (t, 0, t)$. Montrer en utilisant cette courbe que pour tout $t > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, 0, t) + \frac{\partial f}{\partial z}(t, 0, t) = 0.$$

3) En déduire que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = 0$$

et conclure.

Exercice 16. 1) Montrer que l'ensemble

$$S = \{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{x + y + z = 1\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

2) Montrer qu'elle est compacte et déterminer sa dimension.

3) A l'aide du théorème des extrema liés, chercher les points critiques de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ sur S. En déduire les extrema de cette fonction sur S.

4) Trouver une paramétrisation de S et confirmer que le minimum de f sur S est bien atteint en exactement deux points.

Exercice 17. Dans le plan euclidien, trouver par la méthode des extrema liés les points de l'ensemble

$$\{x^6 + y^6 = 1\}$$

les plus proches et les plus éloignés de l'origine.

Exercice 18. Soit $p > 1$ un réel. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}.$$

On souhaite montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Ainsi $\| \cdot \|_p$ satisfait l'inégalité triangulaire, et définit bien une norme.

1) Montrer que l'on peut se ramener au cas où x et y sont tous deux des éléments de $\mathbb{R}_+^n$.

2) Par induction, montrer que l'on peut se ramener au cas où x et y sont tous deux des éléments dont toutes les coordonnées sont strictements positives.

3) On fixe $a, b > 0$. Montrer que

$$S_{a,b} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \times (\mathbb{R}_+^*)^n \mid \|x\|_p = a \text{ et } \|y\|_p = b\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

4) A l'aide du théorème des extrema liés, chercher les points critiques de la fonction $f(x, y) = \|x + y\|_p^p$ sur $S_{a,b}$.

5) Conclure.