Différentiabilité du flot d'un champ de vecteurs

Considérons un champ de vecteurs $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 défini sur un ouvert U. Nous voulons montrer que le flot associé φ est une application de classe C^1, et exprimer $\partial\varphi/\partial x$. Dans le cours, nous avons prouvé que son domaine de définition Ω était un ouvert de $\mathbb{R} \times U$ contenant $\{0\} \times U$, sur lequel φ était continue. Nous avons aussi appris que le flot vérifiait la formule $\varphi(t_1 + t_2, x) = \varphi(t_2, \varphi(t_1, (x)))$ pour tout t_1, t_2 tels que $t_1 + t_2 \in J(x)$. Nous savons enfin que φ est de classe C^1 respectivement au paramètre t puisque

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, x) = f(\varphi(t, x)).$$

Il nous faut donc prouver que φ est de classe C^1 respectivement à la variable x. Pour cela, nous allons nous ramener à une équation différentielle linéaire non-autonome.

Première partie : Equations différentielles linéaires non-autonomes

Etant donné un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ et une application $A : J \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ continue, on s'intéresse à l'équation différentielle linéaire non-autonome

$$u' = A(t)u. \tag{1}$$

On se fixe $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous allons prouver qu'il existe une unique solution u de cette équation définie sur tout J telle que $u(0) = u_0$.

1) Montrer le théorème du point fixe suivant : si E est un espace métrique complet, et $T : E \to E$ est une application telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T^k est contractante, alors T admet un point fixe.

On se fixe un sous-intervalle fermé $[a, b] \subset J$ contenant 0, on définit l'opérateur

$$\begin{aligned} T : C^0([a,b], \mathbb{R}^n) &\to C^0([a,b], \mathbb{R}^n) \\ v &\mapsto (t \mapsto u_0 + \int_0^t A(s)v(s)ds) \end{aligned}$$

et on munit $C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ de la norme sup $\|\cdot\|_\infty$ qui en fait un espace complet.

2) Montrer par récurrence que pour tout $v, w \in C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [a,b]$ on a

$$\|T^k(v)(t) - T^k(w)(t)\| \leq C^k \frac{|t|^k}{k!} \|v - w\|_\infty$$

où $C =: max_{s\in[a,b]} \|A(s)\|$.

3) En déduire que T admet un point fixe, et donc que l'équation (1) admet une unique solution u sur $[a, b]$ telle que $u(0) = u_0$. Conclure le résultat annoncé.

4) Soit $B : J \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ une autre application continue telle qu'il existe un $\epsilon > 0$ pour lequel

$$\|A(t) - B(t)\| \leq \epsilon$$

pour tout $t \in J$. On note alors les solutions u et v des équations différentielles linéaires $u' = Au$ et $v' = Bv$ respectivement vérifiant $u(0) = v(0)$ et définies sur J. Montrer que pour tout intervalle fermé $[a, b] \subset J$ on a

$$\|u(t) - v(t)\| \leq C' \cdot \epsilon \cdot (e^{K|t|} - 1)$$

pour tout $t \in [a, b]$ où K et C' sont des constantes que l'on précisera.

Seconde Partie : Equation variationnelle le long d'une solution

On fixe donc $x_0 \in U$ et $t_0 \in J(x_0)$. On définit une application $A : J(x_0) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ en posant

$$A(t) = df_{\gamma_{x_0}(t)}$$

pour chaque $t \in J(x_0)$.

1) Justifier à l'aide de la première partie que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ l'équation

$$u' = A(t)u$$

admet une unique solution u_h définie sur tout $J(x_0)$ et telle que $u_h(0) = h$.

2) Nous allons tout d'abord prouver que pour tout $t_0 \in J(x_0)$ on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_0, x_0)h = u_h(t_0).$$

Pn suppose sans perte de généralité que $t_0 > 0$.

a) Montrer que pour tout $t \in [0, t_0]$

$$\|\varphi(t, x_0 + h) - \varphi(t, x_0) - u_h(t)\| \leq \int_0^t \|df_{\phi(s,x_0)}(\varphi(s, x_0 + h) - \varphi(s, x_0) - u_h(s))\| ds$$
$$+ \int_0^t o(\|\varphi(s, x_0 + h) - \varphi(s, x_0)\|) ds.$$

b) Posons

$$v(t) = \|\varphi(t, x_0 + h) - \varphi(t, x_0) - u_h(t)\|.$$

Montrer qu'alors pour h suffisament petit

$$v(t) \leq K' \int_0^t v(s) ds + o(\|h\|)$$

où K'.

c) Conclure en utilisant le lemme de Gronwall que

$$\|\varphi(t, x_0 + h) - \varphi(t, x_0) - u_h(t)\| = o(\|h\|)$$

$\forall t \in [0, t_0]$, et donc que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_0, x_0)h = u_h(t_0).$$

d) Montrer que $h \mapsto u_h(t_0)$ est linéaire.

e) Conclure que le flot est C^1, en utilisant la question 4) de la première partie.