

ACADEMIE DE MONTPELLIER  
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II  
- SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC -

## THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II**

Discipline : Mathématiques (25ème Section CNU)

Formation Doctorale : Mathématiques

Ecole Doctorale : Information, Structures, Systèmes

---

### **Inégalités isopérimétriques sur les graphes et applications en géométrie différentielle**

---

présentée et soutenue publiquement le 11 Juillet 2005

par

**Florent BALACHEFF**

Rapporteurs :

**M.Victor BANGERT**

Université de Freiburg

**M.Christophe BAVARD**

Université Bordeaux I

Composition du jury :

**M.Ivan BABENKO**

Université Montpellier II      Directeur

**M.Christophe BAVARD**

Université Bordeaux I      Rapporteur

**M.Gérard BESSON**

Université Grenoble I      Président

**M.Marc HERZLICH**

Université Montpellier II      Examineur

**M.Daniel MASSART**

Université Montpellier II      Examineur



# Remerciements

Tout d'abord, mes plus sincères remerciements vont à Ivan Babenko, sans lequel ce travail n'aurait jamais pu aboutir. Il a su me guider au travers ces quatre années de formation, avec patience, disponibilité et intelligence. La qualité de son enseignement et l'excellence de sa connaissance des mathématiques m'ont porté là où je suis maintenant, et me permettront j'en suis sûr de poursuivre plus avant mes recherches.

Christophe Bavard et Victor Bangert m'ont tous deux fait l'honneur d'accepter de rapporter cette thèse, qu'ils en soient ici vivement remerciés. Je suis également très heureux que Daniel Massart et Marc Herzlich aient accepté de faire partie du jury, et que Gérard Besson en ait accepté la présidence.

Je souhaite remercier l'ensemble de l'équipe du département de mathématiques de Montpellier pour son accueil. Mes remerciements s'adressent plus spécialement à Jacques Lafontaine, qui m'a toujours soutenu dans mon parcours, et a su me faire profiter de sa culture mathématique, ainsi qu'à l'ensemble des (ex-)doctorants : Olivier Brahic, Yves Guiraud, Daniel Maerten, Pierre Mounoud, Christophe Nègre, Athoumane Niang, Jérôme Petit, Guillaume Ricotta et Hassène Siby . . . Les nombreux échanges que j'ai partagé avec Stéphane Sabourau m'ont été très utiles, ainsi que l'aide dont il m'a gratifié. C'est un plaisir de le remercier ici.

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans le soutien de nombreuses personnes, qui m'ont suivi, conseillé, encouragé et ont partagé nombre de discussions parfois déterminantes pour ma construction personnelle. Qu'elles trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude. Plus particulièrement, je tiens tout d'abord à remercier ma mère, pour l'inconditionnalité de sa confiance et de son attention, mon père pour m'avoir donné dès le plus jeune âge le goût de l'abstraction, mais également Emeline, Simon, Edouard pour l'affection dont ils ont su m'entourer, Fred, Julien et Max pour leur amitié, ainsi

que Hugo et Dikus pour les longues soirées passées à discuter tout autant de maths que d'autres sujets. Enfin, plus que quiconque, Nuria, qui partage mon quotidien et l'entoure de son amour, mérite spécialement mes remerciements.





# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>Introduction et présentation des résultats</b>	<b>10</b>
<b>1 Inégalités isopérimétriques sur les graphes</b>	<b>20</b>
1.1 Définitions élémentaires sur les graphes . . . . .	22
1.2 Problème systolique sur les graphes . . . . .	24
1.3 Entropie volumique et systole d'un graphe . . . . .	29
1.3.1 Entropie volumique et systole des graphes réguliers . .	30
1.3.2 Entropie volumique et systole des graphes pondérés . .	33
1.3.3 Entropie volumique et échelle d'un graphe . . . . .	36
1.3.4 Entropie et chaîne de Markov topologique . . . . .	37
1.4 Norme stable des graphes . . . . .	39
1.4.1 Démonstration du théorème I.B . . . . .	41
1.4.2 Volume de la boule stable d'un graphe combinatoire . .	45
1.4.3 Volume de la boule stable d'un graphe pondéré . . . . .	46
<b>2 Boule unité de la norme stable sur une variété, polytope et classe conforme</b>	<b>50</b>
2.1 Historique . . . . .	53
2.2 Préparatifs . . . . .	55
2.3 Construction d'une métrique de référence . . . . .	58
2.4 Démonstration du théorème II . . . . .	61
<b>3 Sommes connexes et revêtements cycliques</b>	<b>64</b>
3.1 Sommes connexes . . . . .	70
3.1.1 Préliminaires topologiques . . . . .	70
3.1.2 Préparatifs métriques . . . . .	70

3.1.3	Fabrication d'une écumoire . . . . .	71
3.1.4	Construction d'une éponge . . . . .	73
3.1.5	Obtention de l'estimée supérieure . . . . .	77
3.1.6	Démonstration des corollaires . . . . .	78
3.2	Revêtements cycliques . . . . .	79
3.2.1	Exemples de comportement . . . . .	79
3.2.2	Démonstration du théorème III.B . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Systoles et diamètre sur les variétés simplement connexes</b>	<b>86</b>
4.1	Passage aux métriques analytiques réelles . . . . .	93
4.2	Démonstration du théorème IV dans le cas d'une métrique analytique réelle . . . . .	94
	<b>Bibliographie</b>	<b>99</b>







# Introduction et présentation des résultats

Le thème central de cette thèse est la géométrie systolique. Nous commençons par décrire brièvement l'émergence de ce sujet de recherche et les différentes étapes de son essor, pour ensuite énoncer nos résultats, en soulignant les motivations par une présentation du contexte dans lequel ils ont été élaborés.

Etant donnée une variété riemannienne non simplement connexe  $(M, g)$ , la systole désigne la plus petite longueur d'une géodésique fermée non contractile de cette variété et est notée  $\text{sys}(M, g)$ . C.Loewner a minoré l'aire d'un tore bidimensionnel  $\mathbb{T}^2$  par la systole :

$$\text{Aire}(\mathbb{T}^2, g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sys}(\mathbb{T}^2, g)^2, \quad (0.1)$$

pour toute métrique riemannienne  $g$ , le cas d'égalité étant réalisé par le tore plat hexagonal. Ce résultat n'a pas été publié (voir [15]).

Cette inégalité constitue la première étude d'un type de constante dite *constante systolique* et qui consiste en la quantité suivante : pour une variété riemannienne fermée non simplement connexe  $(M^m, g)$  de dimension  $m$ , on pose

$$\sigma(M) = \inf_g \frac{\text{Vol}(M, g)}{\text{sys}(M, g)^m},$$

où  $g$  parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes lisses sur  $M$ . L'inégalité (0.1) nous donne donc

$$\sigma(\mathbb{T}^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La valeur exacte de la constante systolique est connue dans le cas de trois variétés seulement. Outre le cas précédemment cité, nous avons

$$\sigma(\mathbb{R}P^2) = \frac{2}{\pi},$$

où  $\mathbb{R}P^2$  désigne le plan projectif réel (voir P.Pu [56]), le cas d'égalité étant atteint par la métrique à courbure constante, et

$$\sigma(\mathbb{K}^2) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

où  $\mathbb{K}^2$  désigne la bouteille de Klein (voir C.Bavard [12]), le cas d'égalité étant dans ce cas-là atteint par une métrique singulière le long d'un cercle.

Le premier enjeu fût de déterminer un critère assurant la non trivialité de cet invariant numérique. Un résultat spectaculaire est dû à M.Gromov [32] : la constante systolique des variétés essentielles est strictement positive. Plus précisément, on dit d'une variété  $M$  quelconque (non simplement connexe) qu'elle est *essentielle*, si l'application canonique (uniquement définie à homotopie près)

$$\Phi : M \rightarrow K(\pi_1(M), 1),$$

où  $K(\pi_1(M), 1)$  désigne l'espace d'Eilenberg-Maclane (voir [62]), est non triviale en homologie de dimension supérieure. Autrement dit, si  $[M]_k$  désigne la classe fondamentale de  $M$  considérée à coefficients dans  $k = \mathbb{Z}$  lorsque la variété est orientable et dans  $k = \mathbb{Z}_2$  sinon, la variété est essentielle si  $\Phi_*([M]_k) \neq 0$ .

Cette condition suffisante pour assurer la stricte positivité de la constante systolique est en fait nécessaire dans le cas d'une variété orientable, comme cela a été montré par I.Babenko [2]. De plus, il a été prouvé sous certaines hypothèses topologiques que, pour les variétés orientables, la valeur de la constante systolique ne dépendait que de la classe d'homologie de  $\Phi_*([M]_k) \in H_m(\pi_1(M), \mathbb{Z})$  (voir [4]).

Un autre enjeu fut l'étude de la constante systolique d'une surface en fonction du genre. Soit  $\Sigma_{\pm}(h)$  une surface de genre  $h > 1$  où le signe  $\pm$  désigne le cas orientable ou non orientable. La constante systolique

$$\sigma_{\pm}(h) = \sigma(\Sigma_{\pm}(h))$$

est strictement positive (car les surfaces non simplement connexes sont essentielles) mais la distribution des valeurs de cette fonction n'est pas encore bien

étudiée. Cependant, on connaît le comportement de cette fonction à l'infini (voir M.Gromov [32], M.Katz & S.Sabourau [40]; P.Buser & P.Sarnak [24]) :

$$\pi \frac{h}{(\ln h)^2} \lesssim \sigma_{\pm}(h) \lesssim \frac{9\pi}{4} \frac{h}{(\ln h)^2}. \quad (0.2)$$

Comme nous le verrons dans la suite, cette estimée fournit un point de départ stimulant pour de nombreuses recherches.

Plusieurs directions de généralisation de ces inégalités systoliques ont été explorées, mais nous préférons ici présenter le matériel minimum pour notre exposé futur : le lecteur intéressé pourra se reporter aux survols [16], [27] et [33] ainsi qu'aux livres [17] et [34]. Notons cependant que le problème systolique est bien posé pour les polyèdres riemanniens (voir [3]).

Nous allons maintenant présenter les résultats contenus dans cette thèse. Ce travail de recherche est divisé en quatre chapitres. Afin de permettre une lecture plus aisée, les rappels nécessaires sont placés dans l'introduction ainsi qu'au début de chaque chapitre. Par souci de concision, nous effectuons un renvoi à la littérature chaque fois que nécessaire.

**I).** La première partie traite des questions systoliques pour les graphes métriques. En effet, il est naturel de s'intéresser aux complexes simpliciaux de dimension 1, *i.e.* aux graphes métriques (ou graphes pondérés) : pour un graphe métrique  $(\Gamma, w)$ , la systole (appelée girth en théorie des graphes), notée  $\text{sys}(\Gamma, w)$ , est définie comme la plus petite longueur d'un cycle de  $\Gamma$  et le volume, noté  $\text{Vol}(\Gamma, w)$ , comme la somme des longueurs des arêtes. Le problème systolique a été bien étudié pour les graphes combinatoires (voir [20], [28], [43], [46] et [47] par exemple), mais peu pour les graphes métriques (voir [13], [21] et [42]). Nous commençons par présenter un survol du problème systolique unidimensionnel. Nous observons ainsi que l'inégalité (0.2) admet un analogue dans le cas des graphes :

$$\frac{3 \ln 2}{2} \frac{b}{\ln b} \lesssim \sigma_1(b) \lesssim 8 \ln 2 \frac{b}{\ln b},$$

où  $\sigma_1(b)$  désigne l'infimum des constantes systoliques d'un graphe métrique de premier nombre de Betti (ou nombre maximal de cycles indépendants en langage combinatoire)  $b$ .

Ceci nous motive alors pour explorer d'autres objets métriques définis dans le cadre des variétés en les adaptant aux graphes. C'est ainsi que dans un premier temps, nous travaillons sur l'entropie volumique. Soit  $(\tilde{X}, \tilde{g})$  le revêtement universel d'un polyèdre riemannien fini  $(X, g)$  de dimension  $m$ . Fixons un point  $x$  de  $X$  et un relevé  $\tilde{x}$ . L'entropie volumique (ou *volume asymptotique*) est définie comme

$$h_{vol}(X, g) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\text{Vol}B(\tilde{x}, R))}{R},$$

où  $\text{Vol}B(\tilde{x}, R)$  désigne le volume riemannien d'une boule centrée en  $\tilde{x}$  de rayon  $R$  dans  $\tilde{X}$ . Cette limite existe et ne dépend pas de  $x$  (voir [45]). Cette quantité a été principalement étudié après normalisation par le volume (voir [2], [18], [31], [38] et [39]) mais nous pouvons également normaliser l'entropie volumique par la systole. Ce problème a été étudié dans le cas des surfaces (voir [60]), et nous avons obtenu pour les graphes :

**Théorème I.A** *Soit  $(\Gamma, w)$  un graphe métrique de premier nombre de Betti  $b$ . Alors*

$$h_{vol}(\Gamma, w) \cdot \text{sys}(\Gamma, w) \leq 2 \ln(8b^3 - 1).$$

Nous établissons également diverses inégalités isopérimétriques faisant intervenir l'entropie volumique.

Ensuite, nous nous sommes intéressé à l'étude de la norme stable associée à un graphe métrique. Pour un polyèdre fini riemannien  $(M, g)$  de classe  $C^0$ , l'homologie réelle possède une norme naturelle appelée *masse* ou *norme stable* (voir [29], [34]). Cette norme est particulièrement intéressante pour l'homologie de dimension 1 : elle contrôle le comportement à l'infini de la géométrie relevée sur le revêtement homologique correspondant. Nous rappelons ici la plus géométrique des définitions en renvoyant le lecteur à [29] pour les différentes approches et la démonstration des équivalences entre celles-ci.

**Définition.** *Soit  $v \in H_1(M, \mathbb{R})$  une classe entière. On pose*

$$\|v\|_g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_g(\gamma_n)}{n},$$

où  $\gamma_n$  est la plus petite courbe fermée réalisant la classe  $n.v$  et  $L_g$  désigne la longueur respectivement à  $g$ . Cela définit par continuité une norme sur  $H_1(M, \mathbb{R})$  appelée *norme stable*. On pose alors :

$$\mathcal{B}_{st}(g) = \{u \in H_1(M, \mathbb{R}) \mid \|u\|_g \leq 1\}.$$

Un point  $s$  de  $H_1(M, \mathbb{R})$  est dit *de direction rationnel* s'il existe une classe entière  $v$  telle que  $s \in \langle v \rangle$  la droite engendrée par  $v$ . Dans le cas contraire, le point est dit *de direction irrationnelle*.

Comme nous le démontrons dans la section I.4, la boule unité de la norme stable d'un graphe pondéré est toujours un polytope dont les sommets sont de direction rationnelle. On peut décrire complètement la forme de ce polytope par la combinatoire du graphe. Pour cela, étant donné un graphe  $\Gamma$ , un chemin fermé orienté parcourant tous ses sommets une seule fois est dit *circuit simple orienté*. Deux circuits simples qui coïncident géométriquement et sont de même orientation, mais qui diffèrent par leur point initial sont identifiés. On considère l'espace vectoriel  $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R})$  engendré par les arêtes de  $\Gamma$  après le choix d'une orientation arbitraire. A chaque circuit simple orienté est associé un vecteur de  $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R})$  - la somme (avec les signes nécessaires) des arêtes formant ce circuit. Les vecteurs ainsi construits sont de nouveau appelés circuits simples orientés. Notons qu'à un circuit géométrique simple correspond deux circuits simples orientés.

**Théorème I.B** *Soit  $(\Gamma, w)$  un graphe pondéré. On note  $\{C_j\}_{j \in J}$  l'ensemble de ses circuits simples orientés.*

*Alors la boule unité de la norme stable dans  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  pour la métrique  $w$  coïncide avec l'enveloppe convexe dans  $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R})$  des vecteurs  $\{C_j / \|C_j\|_w\}_{j \in J}$ .*

A premier nombre de Betti  $b$  fixé, le nombre de circuits simples orientés d'un graphe admet une majoration évidente :

**Corollaire I.B** *Soit  $(\Gamma, w)$  un graphe pondéré de premier nombre de Betti  $b$ . Alors la boule unité de sa norme stable est un polytope  $b$ -dimensionnel dont le nombre de sommets est majoré par  $2(2^b - 1)$ .*

Enfin, nous étudions le volume de ce polytope pour une mesure  $\mu_w$  définie de manière naturelle sur l'homologie réelle. Nous obtenons ainsi :

**Théorème I.C** *Soit  $\Gamma$  un graphe de premier nombre de Betti  $b$  muni de la fonction poids constante  $w = 1$ . Alors*

$$\frac{2^b}{b!} \left( \frac{b}{\text{Vol}(\Gamma, w)} \right)^b \leq \mu_w(\mathcal{B}_{st}(w)) \leq \frac{2^b}{b!}.$$

*Les deux cas d'égalités sont simultanément réalisés par le bouquet de  $b$  cercles  $\bigvee_{i=1}^b S_i^1$ .*

**Théorème I.D** *Pour tout graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  de premier nombre de Betti  $b$ ,*

$$\mu_w(\mathcal{B}_{st}(w)) \cdot \text{Vol}(\Gamma, w)^{b/2} \geq \omega_b,$$

*où  $\omega_b$  désigne le volume euclidien de la boule unité euclidienne de  $\mathbb{R}^b$ .*

**II).** Dans le prolongement de cette première partie, nous allons nous intéresser aux normes qui peuvent être réalisées comme norme stable d'une métrique lisse (*i.e* de classe  $C^\infty$ ) d'une variété fermée  $M^m$  de dimension  $m$ . Nous commencerons par récapituler dans ce chapitre l'ensemble des résultats traitant de cette question puis nous montrerons le résultat suivant :

**Théorème II** *Soit  $(M^m, g)$  une variété fermée riemannienne lisse de dimension  $m \geq 3$  et de premier nombre de Betti  $b \geq 1$ . On considère un polytope fini convexe  $K$  de  $H_1(M, \mathbb{R})$ , à symétrie centrale, tel que son intérieur soit non vide et les directions de ses sommets soient rationnelles. Alors il existe une métrique  $g'$  lisse sur  $M$  conforme à  $g$  telle que*

$$\mathcal{B}_{st}(g') = K.$$

Nous obtenons ainsi une large classe de polytopes comme boule unité de la norme stable d'une métrique sur une variété de dimension supérieure à 3, de sorte que :

**Corollaire II** *Soient  $(M^m, g)$  une variété riemannienne de dimension  $m \geq 3$  et de premier nombre de Betti  $b \geq 1$  et  $\|\cdot\|$  une norme sur l'espace vectoriel  $H_1(M, \mathbb{R})$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une métrique  $g(\varepsilon)$  conforme à  $g$  telle que*

$$\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{g(\varepsilon)} \leq (1 + \varepsilon)\|\cdot\|.$$

**III).** Dans ce troisième chapitre, nous étudions la constante systolique de la somme connexe de  $n$  exemplaires d'une variété  $M$  en fonction de ce nombre. Le comportement asymptotique de cette constante, connu dans le cas deux dimensionnel, demeure un problème ouvert dans les dimensions plus grandes que deux. Nous exhibons une borne supérieure, montrant ainsi que la croissance de la constante systolique en fonction de  $n$  est toujours plus lente que la croissance linéaire. La méthode utilisée est ensuite appliquée à l'étude du comportement systolique des revêtements cycliques en fonction du nombre de feuilles.



Plus précisément, nous montrerons le résultat suivant :

**Théorème III.A** *Soient  $M$  une variété fermée de dimension  $m \geq 3$ . Alors il existe une constante  $C(M)$  telle que pour tout  $n \geq 3$ , l'inégalité suivante soit vérifiée :*

$$\sigma(\#_n M) \leq C(M) \frac{n\sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

Le cas deux-dimensionnel étant couvert par (0.2), ce théorème permet d'obtenir le corollaire suivant :

**Corollaire III.A1** *Pour toute variété fermée  $M$ , on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\#_n M)}{n} = 0.$$

Soient  $M$  une variété,  $\pi = \pi_1(M)$  son groupe fondamental et  $f : M \rightarrow K(\pi, 1)$  l'application canonique, où  $K(\pi, 1)$  désigne l'espace d'Eilenberg-MacLane. Si  $\mathbf{a} = f_*([M])$  est une classe homologique d'ordre infini dans  $H_m(\pi, \mathbf{Z})$ , alors, comme il a été démontré dans [4],  $\sigma(M)$  ne dépend que de cette classe. On note cette constante systolique  $\sigma(\mathbf{a})$ .

**Corollaire III.A2** *On suppose ici  $m \geq 4$ . Soit  $\mathbf{a} \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$  une classe homologique d'ordre infini représentable par une variété. Alors il existe une constante  $C_1 = C_1(\mathbf{a})$  telle que pour tout  $n \geq 3$ , on ait l'inégalité suivante :*

$$\sigma(n\mathbf{a}) \leq C_1 \frac{n\sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

La somme connexe représente un moyen naturel de fabriquer une suite de variétés en partant d'une variété donnée. Un autre moyen de fabrication d'une telle suite est le passage au revêtement cyclique. Soit  $M$  une variété dont le premier nombre de Betti  $b_1(M)$  est non nul. On choisit une classe non-triviale  $\mathbf{h} \in H^1(M, \mathbf{Z})$ , et on considère le revêtement cyclique à  $n$  feuilles  $M_{\mathbf{h}}(n)$  correspondant à la classe  $\mathbf{h}$ . Une borne supérieure de la constante systolique de la suite de variétés obtenue  $\{M_{\mathbf{h}}(n); n = 1, 2, \dots\}$  est donnée par le théorème suivant :

**Théorème III.B** *Soient  $M$  une variété fermée de dimension  $m \geq 3$  et  $\mathbf{h} \in H^1(M, \mathbf{Z})$  une classe non-triviale. Il existe une constante  $C(M, \mathbf{h})$*

dépendant de  $\mathbf{h}$  et de la topologie de  $M$  tels que pour tout  $n \geq 3$ , on ait l'inégalité suivante :

$$\sigma(M_{\mathbf{h}}(n)) \leq C(M, \mathbf{h}) \frac{n\sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

Remarquons que dans le cas des surfaces, l'étude du comportement systolique du revêtement cyclique est couvert par (0.2).

**IV).** Nous présenterons dans ce chapitre l'ensemble des résultats connus sur certaines inégalités universelles (*i.e.* sans hypothèses de courbure) entre des longueurs de courbes et le diamètre d'une variété riemannienne simplement connexe dont le second groupe homotopique est non trivial, puis nous démontrons une nouvelle inégalité de ce type.

Etant donnée une variété fermée riemannienne  $(M, g)$  simplement connexe dont le second groupe homotopique est non trivial, on cherche à estimer la systole généralisée, quantité obtenue en considérant l'infimum des longueurs de courbes géodésiques fermées non triviales et notée  $\text{sys}_0(M, g)$ , par le diamètre  $\text{Diam}(M, g)$  de la variété. Un outil technique efficace permettant de majorer cette grandeur est fourni par le principe de minimax. Si  $\text{mm}(M, g)$  désigne la longueur obtenue par un procédé de minimax sur l'espace des courbes fermées de  $M$  (voir [19] et [26]), cette longueur est réalisée comme la longueur d'une géodésique fermée et permet donc d'estimer supérieurement la systole. Cependant, cette approche efficace dans le cadre bidimensionnel (voir [26] et [44]) s'avère infructueuse dans le cas des dimensions supérieures. On introduit alors la quantité suivante : étant donné un point  $p$  de  $M$ , soit

$$\text{lsys}_p(M, g) = \inf\{l_g(\gamma) \mid \gamma \text{ lacet géodésique non trivial basé en } p\},$$

où  $l_g(\gamma)$  désigne la longueur de  $\gamma$ . Essentiellement, le contrôle de la longueur de ce plus petit lacet géodésique nous permet de construire un procédé de Birkhoff de contraction des courbes de petite longueur basé en le point  $p$ . Nous pouvons alors prouver le résultat suivant :

**Théorème IV** *Soit  $M^m$  une variété fermée de dimension  $m \geq 4$  simplement connexe. Supposons que son second groupe homotopique soit non trivial. Alors pour tout  $p \in M$  et pour toute métrique riemannienne  $g$  sur  $M$ ,*

$$\min\left\{\frac{1}{2}\text{lsys}_p(M, g), \frac{1}{4}\text{mm}(M, g)\right\} \leq \text{Diam}(M, g).$$

La démonstration utilise à nouveau les graphes, qui seront ici obtenus comme intersection du cut-locus du point  $p$  et d'une 2-sphère non triviale. Comme corollaire, nous obtenons en notant  $L_{\text{sys}}(M, g) = \max_{p \in M} l_{\text{sys}_p}(M, g)$  :

**Corollaire IV** *Sous les hypothèses du théorème IV, on a*

$$\min\left\{\frac{1}{2}L_{\text{sys}}(M, g), \frac{1}{4}mm(M, g)\right\} \leq \text{Diam}(M, g).$$

Notons que A.Nabutovsky & R.Rotman (voir [55]) ont obtenu dans un cadre similaire (*i.e.* pour une variété simplement connexe de second groupe homotopique non trivial) une inégalité du même type entre la systole, la longueur obtenue par un procédé de minimax sur l'espace des cycles unidimensionnels (qui n'est en général pas réalisée comme la longueur d'une géodésique fermée mais par celle d'une paire de lacets géodésiques) et le diamètre.



# Chapitre 1

## Inégalités isopérimétriques sur les graphes



Nous présentons dans ce chapitre de nouvelles inégalités isopérimétriques sur les graphes. Après quelques rappels sur les définitions élémentaires, nous rassemblons l'ensemble des résultats connus sur le problème systolique posé pour les graphes. Nous observons ainsi que les inégalités isopérimétriques valables sur les variétés peuvent parfois être adaptées aux graphes avec succès : nous relierons alors l'entropie volumique (ou volume asymptotique), la systole et le premier nombre de Betti des graphes pondérés en analogie avec l'étude faite en [60]. Nous montrons ensuite que la boule stable d'un graphe est un polytope dont les sommets sont complètement décrits par la combinatoire et estimons son volume. Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de plusieurs articles, dont un en collaboration avec I. Babenko (voir [6], [8] et [9]).

## 1.1 Définitions élémentaires sur les graphes

Pour de plus amples détails, le lecteur pourra se reporter au livre [14]. Un *graphe fini*  $\Gamma = (V, E)$  est un complexe simplicial fini de dimension 1. C'est la donnée d'une paire d'ensembles finis  $(V, E)$ , où  $V$  désigne les *sommets* et  $E$  les *arêtes*. Les graphes sont supposés connexes et non orientés. On autorise les arêtes multiples et les boucles (on peut rencontrer pour ce type de graphe la dénomination de *multigraphe* dans la littérature). Dans ce qui suit, un tel graphe fini sera appelé tout simplement *graphe* (voir figure 1.1). Un graphe sera dit *simple* s'il ne possède ni boucles, ni arêtes multiples.

Une arête  $e$  est *incidente* à un sommet  $v$  s'il existe  $w \in V$  tel que  $e = (v, w)$  si le graphe est non orienté. La *valence* d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Le graphe est dit  *$k$ -régulier* si la valence de ses sommets est constante égale à  $k$ . Deux arêtes sont dites *adjacentes* si elles sont incidentes à un même sommet. Nous supposerons dorénavant que les graphes ont leurs sommets de valence au moins 2.

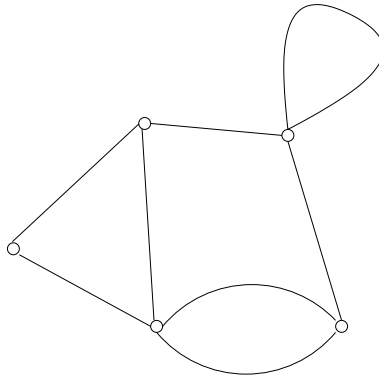


FIG. 1.1 – Un graphe

Un *chemin* de  $\Gamma = (V, E)$  est une suite  $[v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{p-1}, e_p, v_p]$ , où  $v_i \in V$  pour  $i = 0, \dots, p$  et  $e_j \in E$  pour  $j = 1, \dots, p$ , telle que  $e_j$  soit incidente à  $v_{j-1}$  et à  $v_j$  pour  $j = 1, \dots, p$ . Un tel cycle est considéré comme un sous-graphe de  $\Gamma$ . Le chemin est dit *fermé* si  $v_0 = v_p$  (un chemin fermé s'appelle un *cycle* ou un *circuit*); le cycle est dit *simple* si parmi les arêtes composant le cycle, les seules arêtes adjacentes à une arête donnée sont celle qui la précède et celle qui lui succède dans le cycle.

Nous nous plaçons dans le cadre des *graphes pondérés*. Un *graphe pondéré* est une paire  $(\Gamma, w)$  où  $\Gamma = (V, E)$  est un graphe et  $w$  est une *fonction poids* sur les arêtes  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On appelle  $w(e)$  le *poids* d'une arête ou d'un lacet. Le poids d'un sous-graphe est la somme des poids de ses arêtes. Le poids du graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  est appelé *volume* et est noté  $\text{Vol}(\Gamma, w)$ . Tout graphe est naturellement identifié à un graphe pondéré dans lequel le poids de chaque arête vaut 1 (nous appellerons dans la suite *graphe combinatoire* un tel graphe). Dans ce cas, le volume coïncide avec le nombre d'arêtes du graphe et on note  $\text{Vol}(\Gamma)$  celui-ci.

Le type d'homotopie d'un graphe donné  $\Gamma = (V, E)$  est caractérisé par le nombre  $b_1(\Gamma)$  de cycles indépendants, ou premier nombre de Betti. On a la formule :

$$b_1(\Gamma) = |E| - |V| + 1$$

où  $|X|$  désigne le cardinal d'un ensemble fini  $X$ .

Notons qu'à premier nombre de Betti fixé, les graphes combinatoires sont



en nombre fini à homéomorphisme près.

## 1.2 Problème systolique sur les graphes

La *systole* de  $(\Gamma, w)$  est définie comme la quantité

$$\text{sys}(\Gamma, w) = \inf\{l_w(\gamma) \mid \gamma \text{ circuit simple de } \Gamma\},$$

où la longueur (son poids) d'un circuit simple  $\gamma$  est notée  $l_w(\gamma)$ . Dans le cas d'un graphe combinatoire (*i.e.*  $w = 1$ ), la systole est usuellement dénommée *tour de taille* ("girth" en anglais et "Tailleweite" en allemand) et nous notons dans ce cas  $\text{sys}(\Gamma)$  la systole.

Nous pouvons définir le *volume systolique* de  $\Gamma$  par la formule

$$\sigma(\Gamma) = \inf_w \frac{\text{Vol}(\Gamma, w)}{\text{sys}(\Gamma, w)},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des fonctions poids du graphe  $\Gamma$ . On pose également pour  $b \geq 1$ ,

$$\sigma_1(b) = \inf\{\sigma(\Gamma) \mid \Gamma \text{ tel que } b_1(\Gamma) = b\}.$$

A  $b \geq 2$  fixé, on voit facilement que l'on peut se restreindre pour l'étude de  $\sigma_1(b)$  aux graphes de valence minimale 3 (la valence de chacun des sommets est au moins 3). Un argument de compacité montre que (voir [13]) :

- Pour tout graphe  $G$ , il existe un graphe  $(\Gamma, w)$  (non nécessairement homéomorphe à  $G$ ) avec  $b_1(\Gamma) = b_1(G)$  et

$$\frac{\text{Vol}(\Gamma, w)}{\text{sys}(\Gamma, w)} = \sigma(G).$$

- Pour tout entier  $b \geq 1$ , il existe un graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  avec  $b_1(\Gamma) = b$  tel que

$$\frac{\text{Vol}(\Gamma, w)}{\text{sys}(\Gamma, w)} = \sigma_1(b).$$

On constate également que les poids des arêtes de ces graphes extrémaux sont rationnelles, et on en déduit donc que toutes ces constantes sont rationnelles.

La première minoration de  $\sigma_1(b)$  dont l'ordre de grandeur soit optimal revient à N.Alon (résultat non publié, voir [13]). Cette minoration a été récemment améliorée :

**Théorème I.1 (B.Bollobás & E.Szemerédi [21]) :** *Pour  $b \geq 3$ ,*

$$\sigma_1(b) \geq \frac{3}{2} \frac{b-1}{\log_2(b-1) + \log_2 \log_2(b-1) + 4},$$

où  $\log_2$  désigne le logarithme en base 2.

Remarquons que les auteurs ont également prouvé dans cet article la croissance de  $\sigma_1(b)$  en  $b$ . Cette minoration fournit une estimée inférieure asymptotique en terme du premier nombre de Betti  $b$  :

$$\sigma_1(b) \geq \frac{3 \ln 2}{2} \frac{b}{\ln b} + o\left(\frac{b}{\ln b}\right), \quad (1.1)$$

où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

En théorie des graphes, on étudie plus volontiers ce problème en le restreignant aux graphes simples et réguliers. Pour  $k \geq 2$  et  $l \geq 3$ , on note  $f(k, l)$  le plus petit nombre, tel qu'il existe un graphe simple  $\Gamma$   $k$ -régulier avec  $|V(\Gamma)| = f(k, l)$  et  $\text{sys}(\Gamma) \geq l$ . P.Erdős & H.Sachs [28] ont montré le résultat suivant :

*Pour  $k \geq 2$  et  $l \geq 3$ ,*

$$f(k, l) \geq 1 + k \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{l-3}{2} \rfloor} (k-1)^t. \quad (1.2)$$

La démonstration peut se résumer ainsi : on estime inférieurement le nombre de sommets d'un graphe de valence  $k$  et de systole au moins  $l$  par le nombre de sommets d'une boule centrée en un sommet de rayon  $\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor$ .

On obtient ainsi en utilisant la minoration (1.2) de  $f(k, l)$  l'estimée (1.1) pour tout graphe  $k$ -régulier simple combinatoire.

Nous nous intéressons maintenant à la recherche de graphes extrémaux ainsi qu'à l'obtention d'une estimée supérieure de  $\sigma_1(b)$ . Rappelons qu'étant donné un graphe combinatoire  $\Gamma$ , un *cycle hamiltonien* est un chemin fermé simple passant en chacun de ses sommets. Tout d'abord, citons un premier résultat :

**Théorème I.2 (P.Erdős & H.Sachs [28])** *Soient  $k \geq 2$ ,  $l \geq 4$  et posons*

$$N(k, l) = 2 \sum_{t=1}^{l-2} (k-1)^t. \quad (1.3)$$

*Alors pour  $n \geq N(k, l)$ , il existe un graphe simple  $k$ -régulier  $\Gamma$  à  $2n$  sommets tel que  $\text{sys}(\Gamma) \geq l$  (pour la fonction poids constante égale à 1). De plus, on peut choisir ce graphe de sorte qu'il possède un cycle hamiltonien.*

Autrement dit, pour tout  $k \geq 2$  et  $l \geq 3$ ,

$$f(k, l) \leq 4 \sum_{t=0}^{l-2} (k-1)^t,$$

où le cas  $l = 3$  découle de l'analyse du graphe complet à  $k+1$  sommets  $K_{k+1}$  (le graphe à  $k+1$  sommets tel qu'il existe une arête entre chaque paire de sommets distincts).

**Remarque :** Pour tout  $k \geq 3$ , une famille de graphes  $\{G_n\}$   $k$ -réguliers vérifiant

$$\text{sys}(G_n) \geq (C + o(1)) \log_{k-1} |E(G_n)|,$$

où  $C > 0$ , s'appelle une *famille à grand tour de taille*. Les auteurs du théorème I.2 établissent ainsi par une méthode non constructive l'existence pour tout  $k \geq 3$  d'une famille de graphes  $k$ -réguliers à grand tour de taille avec  $C = 1$ . De l'inégalité (1.2), on obtient que  $C \leq 2$ . Citons la construction de G.A.Margulis [46], utilisant des graphes de Cayley et parfaitement élémentaire, de familles à grand tour de taille avec  $C \simeq 0,831$ .

La meilleure valeur connue à l'heure actuelle a été obtenue indépendamment en 1988 par A.Lubotzky, R.Phillips et P.Sarnak [43] d'une part, G.A.Margulis [47] d'autre part et vaut  $C = 4/3$ .

On déduit du théorème précédent la majoration suivante :

**Corollaire I.A** *Pour  $b \geq 2$ ,*

$$\sigma_1(b) \leq 8 \ln 2 \frac{b}{\ln b}. \quad (1.4)$$

**Démonstration.** Soit  $\Gamma(2; b)$  le graphe à deux sommets et  $b + 1$  arêtes entre ces deux sommets (voir figure 1.2).

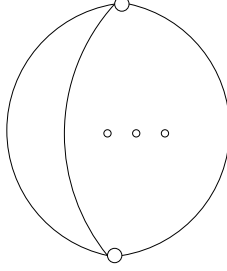


FIG. 1.2 – Le graphe  $\Gamma(2; b)$

On a

$$b_1(\Gamma(2; b)) = b, \quad \text{Vol}(\Gamma(2; b)) = b + 1 \quad \text{et} \quad \text{sys}(\Gamma(2; b)) = 2.$$

L'inégalité (1.4) est donc vérifiée avec  $\Gamma(2; b)$  pour  $b \leq 16$ . Supposons maintenant  $b \geq 16$ . Pour  $l \geq 4$ , notons  $\Gamma(l)$  un graphe 3-régulier à  $2^{l+1} - 2$  sommets vérifiant le théorème I.2 pour  $k = 3$  et ce  $l$ . On calcule facilement

$$b_1(\Gamma(l)) = 2^l, \quad \text{Vol}(\Gamma(l)) = 3 \cdot 2^l - 3 \quad \text{et} \quad \text{sys}(\Gamma(l)) \geq l.$$

On déduit de là l'inégalité suivante :

$$\sigma(\Gamma(l)) \leq 3 \ln 2 \frac{b}{\ln b}.$$

Soit  $b$  un entier naturel vérifiant  $2^l < b < 2^{l+1}$  où  $l \geq 4$ , et posons  $b' = b - 2^l$ . On peut ôter  $2^l - b'$  arêtes à  $\Gamma(l)$ , et ainsi obtenir un nouveau graphe  $\Gamma(l; b')$  de premier nombre de Betti  $b_1(\Gamma(l; b')) = b'$ . Cette opération diminue le volume mais ne diminue pas la systole. Ensuite on considère le bouquet de deux graphes

$$\Gamma(b) = \Gamma(l) \vee \Gamma(l; b').$$

$\Gamma(b)$  vérifie les propriétés suivantes :

$$b_1(\Gamma(b)) = b_1(\Gamma(l)) + b_1(\Gamma(l; b')) = 2^l + b' = b,$$

$$\text{Vol}(\Gamma(b)) = \text{Vol}(\Gamma(l)) + \text{Vol}(\Gamma(l; b')) \leq 2(3 \cdot 2^l - 3),$$

et  $\text{sys}(\Gamma(b)) \geq l$ .

On tire de ces estimées

$$\sigma(\Gamma(b)) \leq \frac{6(2^l - 1)}{l} \leq 6 \ln 2 \frac{b}{\ln b - \ln 2}.$$

La dernière borne supérieure est inférieure à celle du corollaire pour  $b > 16$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

On déduit de (1.1) et (1.4) le comportement asymptotique de  $\sigma_1(b)$  en fonction de  $b$  :

$$\frac{3 \ln 2}{2} \frac{b}{\ln b} \lesssim \sigma_1(b) \lesssim 8 \ln 2 \frac{b}{\ln b}.$$

Donc l'estimée de  $\sigma_1(b)$  fournit un comportement asymptotique du volume systolique en terme du premier nombre de Betti analogue au cas des surfaces. Rappelons que, si  $\Sigma_{\pm}(h)$  désigne une surface de genre  $h > 1$  où le signe  $\pm$  désigne le cas orientable ou non orientable, la constante systolique

$$\sigma_{\pm}(h) = \sigma(\Sigma_{\pm}(h))$$

est strictement positive et vérifie :

$$\pi \frac{h}{(\ln h)^2} \lesssim \sigma_{\pm}(h) \lesssim \frac{9\pi}{4} \frac{h}{(\ln h)^2}.$$

Pour terminer ce tour d'horizon du problème systolique adapté aux graphes, nous allons montrer comment retrouver l'estimée inférieure précédente dans le cas orientable (néanmoins avec une constante moins bonne) en utilisant le théorème I.1 :

**Corollaire I.B** *Pour  $h \geq 1$ ,*

$$\sigma(\Sigma_h^+) \gtrsim \frac{3(\ln 2)^2}{8} \frac{h}{(\ln h)^2}.$$

**Démonstration.** S.Kodani a relié la constante systolique d'une surface orientable de genre  $h$  à la constante systolique d'un graphe de premier nombre de Betti  $1 + 2h$  :

**Théorème I.3 (S.Kodani [42])** *Pour tout  $h \geq 1$ ,*

$$\sigma(\Sigma_h^+) \geq \frac{(\sigma_1(1+2h))^2}{12(2h+1)}.$$

En combinant cette inégalité avec le théorème I.1, on déduit alors facilement le corollaire I.B :

$$\sigma(\Sigma_h^+) \gtrsim \frac{3(\ln 2)^2}{8} \frac{h}{(\ln h)^2}.$$

□

### 1.3 Entropie volumique et systole d'un graphe

Nous nous intéressons ici à la normalisation de l'entropie volumique par la systole. Soit  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{w})$  le revêtement universel (pondéré) de  $(\Gamma, w)$ . Fixons  $x_0 \in \Gamma$  et  $\tilde{x}_0 \in \tilde{\Gamma}$  un relevé de  $x_0$ . L'entropie volumique (ou *volume asymptotique*) de  $(\Gamma, w)$  est défini comme

$$h_{vol}(\Gamma, w) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\text{Vol}_{\tilde{w}} B(\tilde{x}_0, R))}{R} \quad (1.5)$$

où  $\text{Vol}_{\tilde{w}} B(\tilde{x}_0, R)$  est le volume d'une boule centrée en  $\tilde{x}_0$  de rayon  $R$  dans  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{w})$ . Comme le graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  est compact, la limite (1.5) existe et ne dépend pas du point  $x_0 \in \Gamma$  et de son relevé (voir [45]). Dans le cas d'un graphe combinatoire  $\Gamma$ , nous notons  $h_{vol}(\Gamma)$  l'entropie volumique qui lui est associée.

Le produit  $h_{vol}(\Gamma, w) \cdot \text{sys}(\Gamma, w)$  est invariant par changement d'échelle et a été étudié dans [60] pour les surfaces. L'auteur a montré que cette quantité est majorée par une constante ne dépendant que du genre de la surface. Nous démontrons ici une majoration de ce produit pour les graphes pondérés.

**Théorème I.A** *Soit  $(\Gamma, w)$  un graphe pondéré de premier nombre de Betti  $b$ . Alors*

$$h_{vol}(\Gamma, w) \cdot \text{sys}(\Gamma, w) \leq 2 \ln(8b^3 - 1). \quad (1.6)$$

Nous étudions également une normalisation de l'entropie par une quantité que nous avons baptisé *échelle microscopique* d'un graphe (qui correspond dans le cas d'un graphe dont les sommets sont de valence au moins trois à la plus petite longueur d'une arête présente dans ce graphe). Nous établissons ensuite un résultat analogue à l'inégalité (1.6) pour les chaînes de Markov topologiques associées à une matrice  $A$  de taille  $n \times n$ , en reliant l'entropie topologique  $h_{top}$  et la plus petite période d'une orbite périodique  $T_{min}$ .

**Proposition I.A** *Pour chaque chaîne de Markov topologique  $(\Sigma_A, \phi_A)$ ,*

$$h_{top}(\Sigma_A, \phi_A) \cdot T_{min}(\Sigma_A, \phi_A) \leq \ln b_A,$$

où  $b_A = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} - n + 1$ .

Cette inégalité est facile à prouver. Nous la présentons ici car, à la connaissance de l'auteur, aucune référence de ce résultat n'existe dans la littérature.

### 1.3.1 Entropie volumique et systole des graphes réguliers

Dans cette sous-section, nous établissons une borne supérieure de l'entropie volumique normalisée par le volume pour les graphes réguliers combinatoires en estimant le rayon d'injectivité. Cette estimée est meilleure que celle fournie par le théorème I.A.

**Proposition I.B** *Soit  $\Gamma$  un graphe régulier de premier nombre de Betti  $b$ . Alors*

$$h_{vol}(\Gamma) \cdot sys(\Gamma) \leq 3 \ln b. \tag{1.7}$$

**Démonstration.** Soit  $k$  la valence de  $\Gamma$ . Nous avons

$$h_{vol}(\Gamma) = \ln(k - 1). \tag{1.8}$$

Pour voir cela, fixons un sommet  $\tilde{x}_0$  dans le revêtement universel  $\tilde{\Gamma}$ . Comme  $\tilde{\Gamma}$  est un arbre infini régulier de valence  $k$ ,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B(\tilde{x}_0, R)) &= k(1 + (k - 1) + \dots + (k - 1)^{R-1}) \\ &= k \frac{(k - 1)^R - 1}{k - 2} \end{aligned}$$

pour chaque entier positif  $R$ . Nous en déduisons (1.8).

Dans le cas où  $b = 1$ , nous obtenons  $k = 2$  et donc  $h_{vol}(\Gamma) = 0$ . L'inégalité (1.7) est alors triviale.

Dans le cas où  $\text{sys}(\Gamma) = 1$ , comme  $b = |E| - |V| + 1$ , que, par des considérations élémentaires,  $2|E| = k|V|$ , et que  $|V| \geq 1$ , nous obtenons  $b \geq k/2$ . D'où,

$$\begin{aligned} h_{vol}(\Gamma) &= \ln(k-1) \\ &\leq \ln(2b-1) \\ &\leq 3 \ln b, \end{aligned}$$

et (1.7) est vérifiée dans ce cas.

Supposons maintenant que  $b > 1$  et  $\text{sys}(\Gamma) > 1$ . Nous allons montrer le lemme suivant.

**Lemme I.A**

$$\text{sys}(\Gamma) \leq \frac{3 \ln b}{\ln(k-1)}. \quad (1.9)$$

**Démonstration du lemme.** Pour tout  $R < \text{sys}/2$ , la boule de rayon  $R$  centrée en n'importe quel point  $x$  de  $\Gamma$  est un arbre. Le calcul du volume de la boule centrée en un sommet et de rayon  $[\text{sys}(\Gamma)/2]$  fournit l'estimée suivante (comparer avec [20], p.14)

$$|E| \geq k \frac{(k-1)^{[\text{sys}(\Gamma)/2]} - 1}{k-2}.$$

Avec  $|E| = k(b-1)/(k-2)$ , nous déduisons

$$[\text{sys}(\Gamma)/2] \leq \frac{\ln b}{\ln(k-1)}.$$

Alors

$$\text{sys}(\Gamma) \leq 1 + 2 \frac{\ln b}{\ln(k-1)} \leq 3 \frac{\ln b}{\ln(k-1)},$$

d'où le résultat. □



Il suffit alors de combiner les inégalités (1.8) et (1.9) pour obtenir (1.7).  $\square$

Si l'on considère le bouquet de  $b$  cercles  $\bigvee_{i=1}^b S_i^1$ , vu comme le graphe composé d'un sommet et de  $b$  boucles de poids 1 (voir figure 1.3), on a :

$$\text{sys}(\bigvee_{i=1}^b S_i^1) = 1$$

et

$$h_{\text{vol}}(\bigvee_{i=1}^b S_i^1) = \ln(2b - 1),$$

et ainsi

$$h_{\text{vol}}(\bigvee_{i=1}^b S_i^1) \cdot \text{sys}(\bigvee_{i=1}^b S_i^1) = \ln(2b - 1) \underset{b \rightarrow +\infty}{\sim} \ln b.$$

L'estimée supérieure (1.7) est donc pertinente.

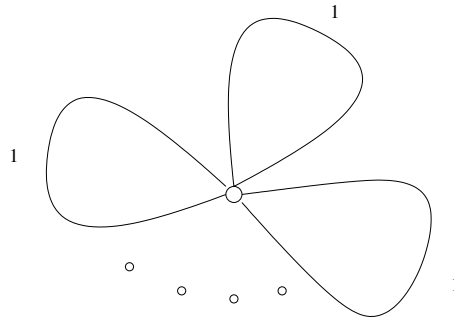


FIG. 1.3 – Le bouquet de  $b$  cercles  $\bigvee_{i=1}^b S_i^1$

Dans le cas d'un graphe dont on contrôle la valence de ses sommets, nous obtenons facilement un encadrement de l'entropie volumique. Nous noterons  $v(s)$  la valence d'un sommet  $s \in V$ .

**Proposition I.C** *Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe. Supposons qu'il existe deux entiers  $2 \leq \delta \leq \Delta$  tels que pour tout  $s \in V$ ,  $\delta \leq v(s) \leq \Delta$ . Alors*

$$\ln(\delta - 1) \leq h_{\text{vol}}(\Gamma) \leq \ln(\Delta - 1). \quad (1.10)$$

**Démonstration.** On note  $T_\delta$  (respectivement  $T_\Delta$ ) l'arbre infini (*i. e.* le graphe simplement connexe) régulier de valence  $\delta$  (respectivement  $\Delta$ ). Si on se fixe  $\tilde{x}_0$  un sommet de  $\tilde{\Gamma}$ , et deux sommets  $v_\delta$  et  $v_\Delta$  de  $T_\delta$  et  $T_\Delta$  respectivement, on a alors les inégalités suivantes :

$$\text{Vol}(B^{T_\delta}(v_\delta, R)) \leq \text{Vol}^\Gamma(B(\tilde{x}_0, R)) \leq \text{Vol}^{T_\Delta}(B(v_\Delta, R)),$$

soit

$$\delta \frac{(\delta - 1)^R - 1}{\delta - 2} \leq \text{Vol}(B(\tilde{x}_0, R)) \leq \Delta \frac{(\Delta - 1)^R - 1}{\Delta - 2},$$

d'où l'inégalité (1.10).

### 1.3.2 Entropie volumique et systole des graphes pondérés

Nous démontrons maintenant le théorème I.A généralisant la proposition I.B aux graphes pondérés.

**Démonstration du théorème I.A** La preuve s'inspire de [63]. Fixons un domaine fondamental  $D$  de  $\tilde{\Gamma}$  et un point  $\tilde{x}_0$  de  $D$  tel que les points du bord ne soient pas des sommets de  $\tilde{\Gamma}$ .  $D$  est un arbre et notons par  $\{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m\}$  les points formant son bord. Nous avons  $m \leq 2b$ . Soient  $p : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  l'application revêtement universel et  $\{z_1, \dots, z_k\}$  les points images de  $\{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m\}$  par  $p$ . Il est évident que  $k \leq b$ . On pose  $x_0$  la projection de  $\tilde{x}_0$ .

Soit  $s = \text{sys}(\Gamma, w)/2$ . Nous notons  $N$  le nombre minimal de domaines translats  $\gamma.D$  sous l'action du  $\pi_1(\Gamma, x_0)$  formant un voisinage de  $D$  tel que chaque point n'appartenant pas à ce voisinage soit à une distance de  $D$  supérieure à  $s$ . Nous allons majorer  $N$ . Choisissons un point  $\tilde{y}_i$  du bord et énumérons les chemins issus de  $\tilde{y}_i$  de longueur  $s$  sortant du domaine  $D$ . Ce nombre de chemins est inférieur au nombre de chemins issus de  $p(\tilde{y}_i)$  de longueur  $s$ , qui est lui-même majoré par  $2b$ . Il est clair que chacun de ces chemins passe au plus une fois par chacun des points de  $\{z_1, \dots, z_k\}$  (comme  $s = \text{sys}(\Gamma, w)/2$ ). Si nous considérons un chemin  $\tilde{c}$  de  $\tilde{\Gamma}$  issu de  $\tilde{y}_i$  de longueur  $s$ , le nombre de domaines translats que ce chemin traverse coïncide avec le nombre de points de  $\{z_1, \dots, z_k\}$  appartenant à  $p(\tilde{c})$ . Donc ce nombre est majoré par  $k \leq b$ . Le nombre de domaines translats d'intersection non nulle avec un chemin issu de  $\tilde{y}_i$  de longueur  $s$  est alors majoré par  $2b^2$ .

Comme il y a  $m$  éléments dans le bord de  $D$ , et que  $m \leq 2b$ , nous obtenons  $N \leq 4b^3$ .

Notons par  $\Sigma = \{\gamma_i\}_{i=1}^N$  le système de générateurs de  $\pi_1(\Gamma, x_0)$  tel que pour tout  $x \notin \cup_{i=0}^N \gamma_i.D$ , nous ayons  $d_{\tilde{w}}(x, D) \geq s$  (ici,  $\gamma_0$  désigne par convention l'élément neutre du  $\pi_1(\Gamma, x_0)$ ).

Nous allons estimer le volume d'une boule centrée en  $\tilde{x}_0 \in D$  de rayon  $ns$  où  $n \in \mathbb{N}$ . Pour cela, définissons la *longueur algébrique* d'un élément  $\alpha$  de  $\pi_1(\Gamma, x_0)$  respectivement à  $\Sigma$ , notée  $|\alpha|_\Sigma$ , comme le plus petit entier  $k$  tel que  $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_k$ , où  $\alpha_i \in \Sigma \cup \Sigma^{-1}$ . Nous avons alors facilement

$$B(\tilde{x}_0, ns) \subset B(\Sigma, n) \subset \tilde{\Gamma},$$

où  $B(\Sigma, n) := \bigcup \{\alpha.D \mid \alpha \in \pi_1(\Gamma, x_0) \text{ et } |\alpha|_\Sigma \leq n\}$ .

Nous en déduisons

$$\text{Vol}_{\tilde{w}}(B^{\tilde{\Gamma}}(\tilde{x}_0, ns)) \leq \text{Vol}_{\tilde{w}}(\Gamma).N_\Sigma(n),$$

où  $N_\Sigma(n) = \text{card}\{\alpha \in \pi_1(\Gamma, x_0) \mid |\alpha|_\Sigma \leq n\}$ , et comme

$$N_\Sigma(n) \leq 1 + \sum_{p=0}^{n-1} 2.N(2.N-1)^p = 1 + 2.N \frac{(2.N-1)^n - 1}{2.N-2},$$

on obtient

$$s.h_{vol}(\Gamma, w) \leq \ln(2.N-1).$$

L'inégalité (1.6) se déduit immédiatement. □

Notons

$$h_{vol}(b) = \sup_{\{(\Gamma, w)/b_1(\Gamma)=b\}} h_{vol}(\Gamma, w).sys(\Gamma, w).$$

On obtient alors à l'aide de l'inégalité (1.6) et du calcul pour le bouquet de  $b$  cercles l'encadrement asymptotique suivant :

$$\ln b \lesssim h_{vol}(b) \lesssim 6 \ln b.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, le bouquet de  $b$  cercles fournit un graphe dont l'entropie volumique normalisée par la systole est  $\ln(2b-1)$ . En fait, pour une classe plus large de graphes, nous pouvons montrer que l'entropie volumique normalisée par la systole est au moins  $\ln(2b-1)$ .

Nous disons d'un graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  qu'il possède une *base systolique* s'il existe  $x_0 \in V(\Gamma)$  et un système de générateurs  $\Sigma_0 = \{\gamma_i\}_{i=1}^b$  du  $\pi_1(\Gamma, x_0)$  tels que  $l_w(\gamma_i) = \text{sys}(\Gamma, w)$  pour  $i = 1, \dots, b$ . Un graphe pondéré possédant une base systolique admet la minoration suivante :

**Proposition I.D** *Soit  $(\Gamma, w)$  un graphe pondéré de premier nombre de Betti  $b$ . Supposons que  $(\Gamma, w)$  admette une base systolique. Alors*

$$h_{\text{vol}}(\Gamma, w) \cdot \text{sys}(\Gamma, w) \geq \ln(2b - 1), \quad (1.11)$$

et le cas d'égalité est réalisé par le bouquet de  $b$  cercles  $\bigvee_{i=1}^b S_i^1$ .

**Démonstration.** Nous allons faire usage du lemme suivant, qui utilise un mécanisme général de comparaison que nous retrouverons au lemme II.A :

**Lemme I.B** *Soient  $(X_i, h_i)$ ,  $i = 1, 2$  deux complexes simpliciaux finis munis de métriques simpliciales et  $f : X_1 \rightarrow X_2$  une application simpliciale contractant les distances, telle que l'application induite  $f_* : \pi_1(X_1, x_1) \rightarrow \pi_1(X_2, x_2)$  soit un isomorphisme pour tout couple de points  $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$  tel que  $f(x_1) = x_2$ . Alors*

$$h_{\text{vol}}(X_1, h_1) \leq h_{\text{vol}}(X_2, h_2). \quad (1.12)$$

**Démonstration du lemme.** On note  $(\tilde{X}_1, \tilde{h}_1)$  (respectivement  $(\tilde{X}_2, \tilde{h}_2)$ ) le revêtement universel muni de la métrique relevée de  $(X_1, h_1)$  (respectivement  $(X_2, h_2)$ ). L'application  $f : X_1 \rightarrow X_2$  se relève alors en une application  $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  qui contracte encore les distances, et donc pour tout  $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$  relevé de  $x_1$  et tout  $R > 0$ ,

$$\tilde{f}(B(\tilde{x}_1, R)) \subset B(\tilde{f}(\tilde{x}_1), R).$$

On a donc, pour tout  $\gamma \in \pi_1(X_1, x_1)$  tel que  $\gamma \cdot \tilde{x}_1 \in B(\tilde{x}_1, R)$ ,  $\tilde{f}(\gamma \cdot \tilde{x}_1) = f_*(\gamma) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}_1) \in B(\tilde{f}(\tilde{x}_1), R)$ . De plus, si il existe deux éléments  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $\pi_1(X_1, x_1)$  tels que  $f_*(\gamma_1) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}_1) = f_*(\gamma_2) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}_1)$ , alors  $\gamma_1 = \gamma_2$  puisque  $f_*$  est un isomorphisme. On en déduit

$$N_1(x_1, R) \leq N_2(x_2, R)$$

où  $N_i(x_i, R) = \text{card}\{\gamma \in \pi_1(X_i, x_i) \mid \gamma \cdot \tilde{x}_i \in B(\tilde{x}_i, R) \subset X_i\}$  pour  $i = 1, 2$ . Comme

$$h_{\text{vol}}(X_i, h_i) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln N_i(x_i, R)}{R}$$

pour  $i = 1, 2$  (voir [63]), ceci permet de déduire facilement (1.12).  $\square$

Maintenant, comme  $(\Gamma, w)$  admet une base systolique  $\Sigma_0$  en  $x_0$ , on peut construire facilement une application  $f$  du graphe  $(\bigvee_{i=1}^b S_i^1, w')$ , où  $w'$  est la fonction constante égale à  $\text{sys}(\Gamma, w)$  sur chaque arête, dans  $(\Gamma, w)$  et qui contracte les distances, en envoyant chaque générateur du bouquet de cercles dans un élément de la base systolique. Cette application peut être réalisée de sorte à vérifier les hypothèses du lemme I.B et on obtient ainsi :

$$h_{vol}(\Gamma, w) \geq h_{vol}(\bigvee_{i=1}^b S_i^1, w'),$$

et  $\text{sys}(\bigvee_{i=1}^b S_i^1, w') = \text{sys}(\Gamma, w)$ . On en déduit alors l'inégalité annoncée. Le cas d'égalité est réalisé par le bouquet  $\bigvee_{i=1}^b S_i^1$ .  $\square$

### 1.3.3 Entropie volumique et échelle d'un graphe

Soit  $(\Gamma, w)$  un graphe pondéré. Une *chaîne* de  $\Gamma$  est un chemin tel que la valence de chaque sommet intermédiaire soit exactement 2.

Nous définissons l'*échelle microscopique* de  $(\Gamma, w)$  comme

$$C_{min}(\Gamma, w) = \min\{l_w(C) \mid C \text{ chaîne de } \Gamma\},$$

et l'*échelle macroscopique* de  $(\Gamma, w)$  comme

$$C_{max}(\Gamma, w) = \max\{l_w(C) \mid C \text{ chaîne de } \Gamma\}.$$

Le but de cette sous-section est de prouver des inégalités isopérimétriques faisant intervenir l'entropie volumique et l'échelle (microscopique et macroscopique) des graphes pondérés.

Notons que pour un graphe  $k$ -régulier pondéré  $(\Gamma, w)$  avec  $k \geq 3$ , nous avons  $C_{min}(\Gamma, w) = \min_{e \in E} w(e)$  et  $C_{max}(\Gamma, w) = \max_{e \in E} w(e)$ .

**Proposition I.E** *Soit  $(\Gamma, w)$  un graphe  $k$ -régulier pondéré.*

*Alors*

$$\frac{\ln(k-1)}{C_{max}(\Gamma, w)} \leq h_{vol}(\Gamma, w) \leq \frac{\ln(k-1)}{C_{min}(\Gamma, w)}. \quad (1.13)$$

**Démonstration.** Soit  $T_k$  l'arbre infini régulier de valence  $k$ . On se fixe un sommet  $v$  de  $T_k$  et  $v'$  de  $\Gamma$ . Notons par  $w_{min}$  (respectivement  $w_{max}$ ) la fonction poids sur  $T_k$  constante égale à  $C_{min}(\Gamma, w)$  (respectivement  $C_{max}(\Gamma, w)$ ). Alors, pour tout  $R > 0$ ,

$$\text{Vol}_{w_{max}}(B_{w_{max}}^{T_k}(v, R)) \leq \text{Vol}_w(B^{\tilde{\Gamma}}(v', R)) \leq \text{Vol}_{w_{min}}(B_{w_{min}}^{T_k}(v, R))$$

et donc

$$k((k-1)^{\lceil R/C_{max} \rceil} - 1) \cdot C_{max} \leq \text{Vol}_w(B^{\tilde{\Gamma}}(v', R)) \leq k((k-1)^{\lceil R/C_{min} \rceil + 1} - 1) \cdot C_{min}.$$

Nous en déduisons (1.13).  $\square$

Si on s'intéresse à la normalisation de l'entropie volumique par l'échelle microscopique, on obtient

**Proposition I.F** *Soit  $(\Gamma, w)$  un graphe pondéré de premier nombre de Betti  $b$ . Alors*

$$h_{vol}(\Gamma, w) \cdot C_{min}(\Gamma, w) \leq \ln(2b - 1). \quad (1.14)$$

*Le cas d'égalité est réalisé par le bouquet de  $b$  cercles  $\bigvee_{i=1}^b S_i^1$ .*

**Démonstration.** On se fixe un arbre maximal  $T$  de  $\Gamma$ . Si on contracte cet arbre en un point, on obtient un bouquet de  $b$  cercles  $\bigvee_{i=1}^b S_i^1$  dont chaque générateur est de longueur au moins  $C_{min}(\Gamma, w)$ , et l'application ainsi définie contracte les distances. En appliquant le lemme I.B et la proposition I.E, on obtient facilement la proposition annoncée.  $\square$

### 1.3.4 Entropie et chaîne de Markov topologique

Nous prouvons ici la proposition I.A énoncée précédemment. Rappelons d'abord quelques définitions (voir [61]). Soit  $n$  un entier strictement positif. Notons  $\mathbb{N}_n$  l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  et  $\Sigma(n)$  l'espace produit  $\mathbb{N}_n^{\mathbb{Z}}$ . La topologie produit est alors induite par la métrique suivante sur  $\Sigma(n)$

$$d(a, b) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d_i(a, b)}{2^{2|i|+1}},$$

où  $d_i(a, b)$  est égale à 0 si  $a_i = b_i$  et à 1 sinon. Notons que la suite  $(a^j)_{j \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  la suite  $(a_i^j)_{j \in \mathbb{N}}$  converge. Soit  $\phi$

l'homomorphisme de  $\Sigma(n)$  défini par  $(\phi(a))_i = a_{i+1}$ . Cet homomorphisme est appelé *décalage*.

Notons par  $M_n$  l'espace des matrices  $n \times n$  dont les coefficients sont 0 ou 1. Si  $A \in M_n$ , nous définissons

$$\Sigma_A = \{a \in \Sigma(n) \mid A_{a_i, a_{i+1}} = 1\}.$$

L'ensemble  $\Sigma_A$  est un sous-espace de  $\Sigma(n)$  fermé et  $\phi$ -invariant. Notons par  $\phi_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  la restriction de  $\phi$  à  $\Sigma_A$ . La paire  $(\Sigma_A, \phi_A)$  est appelée un *sous-décalage de type fini* ou *chaîne de Markov topologique*.

L'*entropie topologique* d'un système dynamique (voir [1] pour une définition générale) est notée  $h_{top}$ . Dans le cas d'une chaîne de Markov topologique  $(\Sigma_A, \phi_A)$ , nous avons

$$h_{top}(\Sigma_A, \phi_A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N(\Sigma_A, k))}{k},$$

où  $N(\Sigma_A, k)$  est le nombre d'ensembles ouverts du recouvrement suivant

$$\mathcal{A}_k = \{\{a \in \Sigma(n) \mid \forall j = 0, \dots, k-1, a_j = i_j\} \mid \{i_j\} \in \mathbb{N}_n^k\}.$$

Nous introduisons également  $N_i(\Sigma_A, k)$  le cardinal des ensembles ouverts dans  $\mathcal{A}_k \cap \{a \mid a_0 = i\}$ . Nous avons

$$N(\Sigma_A, k) = \sum_{i=0}^k N_i(\Sigma_A, k).$$

C'est un résultat classique que l'entropie topologique de  $(\Sigma_A, \phi_A)$  coïncide avec le logarithme népérien du rayon spectral de  $A$ .

D'un autre point de vue,  $\Sigma_A$  peut être identifié avec l'espace des chemins bi-infinis d'un graphe orienté  $\Gamma_A$  dont les sommets sont les points de  $\mathbb{N}_n$  et les arêtes sont les paires  $(i, j)$  de sommets telles que  $A_{i,j} = 1$ . Nous définissons la *période minimale* de  $(\Sigma_A, \phi_A)$ , notée par  $T_{min}(\Sigma_A, \phi_A)$ , comme la plus petite période d'une orbite périodique du système dynamique  $(\Sigma_A, \phi_A)$ . Elle coïncide avec la plus petite longueur d'un circuit orienté de  $\Gamma_A$ . Notons  $b_A$  le premier nombre de Betti de  $\Gamma_A$  qui peut être exprimé comme  $b_A = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} - n + 1$ . Rappelons ici l'énoncé de la proposition I.A en précisant le cas d'égalité :

**Proposition I.A.** *Pour une chaîne de Markov topologique  $(\Sigma_A, \phi_A)$ ,*

$$h_{top}(\Sigma_A, \phi_A) \cdot T_{min}(\Sigma_A, \phi_A) \leq \ln b_A. \quad (1.15)$$

Le cas d'égalité est réalisé pour chaque  $b \geq 1$  par la chaîne de Markov définie par la matrice de taille  $b + 1$  suivante :

$$\begin{cases} A_{1,j} = A_{j,1} = 1 \text{ for } j \neq 1, \\ A_{i,j} = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (1.16)$$

**Démonstration.** Posons  $t = T_{min}(\Sigma_A, \phi_A)$ . Pour chaque sommet  $v \in \mathbb{N}_n$  de  $\gamma_A$ , le nombre de chemins orientés issus de  $v$  de longueur  $t$  est au plus  $b_A$ .

Nous obtenons

$$N_i(\Sigma_A, nt) \leq b_A^n,$$

d'où

$$N(\Sigma_A, nt) \leq n.b_A^n.$$

Alors

$$t.h(\Sigma_A, \phi_A) \leq \ln b_A.$$

et nous obtenons (1.15). Il est aisé de vérifier que la chaîne de Markov topologique définie par (1.16) réalise le cas d'égalité.  $\square$

## 1.4 Norme stable des graphes

Nous allons commencer par donner une description de la boule unité de la norme stable associée à un graphe pondéré. On se fixe pour cela un graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  de premier nombre de Betti  $b$ . Nous choisissons pour chaque arête une orientation arbitraire et notons ces arêtes  $\mathbb{E} = \{e_i\}_{i=1}^k$ . L'espace vectoriel  $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R})$  engendré par les arêtes orientées  $\{e_i\}_{i=1}^k$  coïncide avec l'espace des chaînes simpliciales du complexe simplicial  $\Gamma$  :

$$\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R}) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ pour } i = 1, \dots, k \right\}.$$

Comme les graphes n'ont pas de cellule pour les dimensions plus grandes que 2, l'homologie de  $\Gamma$  de dimension 1 à coefficients réels  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  est plongée naturellement dans  $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R})$  comme un sous-espace vectoriel de dimension  $b$ . L'homologie de  $\Gamma$  de dimension 1 à coefficients entiers  $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ , en l'absence de torsion dans ce cadre unidimensionnel, constitue un réseau du sous-espace  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  (comparer avec [7]).



Pour  $u = \sum_{i=1}^k u_i \cdot e_i \in \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R})$ , on note

$$|u|_{w,1} = \sum_{i=1}^k w_i |u_i|, \quad (1.17)$$

où  $w_i = w(e_i)$  pour  $i = 1, \dots, k$ . On voit facilement que cette norme coïncide avec la norme stable  $\|\cdot\|_w$  sur  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$ . En effet, la norme stable de  $v \in H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  est donnée par la formule

$$\|v\|_w = \inf \left\{ \sum_{i=1}^s |\alpha_i| w(\sigma_i) \mid v = \sum_{i=1}^s \alpha_i [\sigma_i], \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ et } \sigma_i \in \mathbb{E} \right\}.$$

Cette définition est équivalente à la définition géométrique donnée en introduction (voir [29]).

La boule stable  $\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w)$  est donc l'intersection de la boule unité de la norme  $|\cdot|_{w,1}$  dans l'espace des arêtes  $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R})$  avec le sous-espace vectoriel de dimension  $b$  image par le plongement naturel de l'homologie réelle de  $\Gamma$  de dimension 1. On en déduit donc que la boule stable  $\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w)$  est un polytope. Plus précisément,

**Théorème I.B** *Soit  $(\Gamma, w)$  un graphe pondéré. On note  $\{C_j\}_{j \in J}$  l'ensemble de ses circuits simples orientés.*

*Alors la boule unité de la norme stable dans  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  pour la métrique  $w$  coïncide avec l'enveloppe convexe dans  $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R})$  des vecteurs  $\{C_j / \|C_j\|_w\}_{j \in J}$ .*

A premier nombre de Betti  $b$  fixé, le nombre de circuits simples orientés d'un graphe admet une majoration évidente :

**Corollaire I.B** *Soit  $(\Gamma, w)$  un graphe pondéré de premier nombre de Betti  $b$ . Alors la boule unité de sa norme stable est un polytope  $b$ -dimensionnel dont le nombre de sommets est majoré par  $2(2^b - 1)$ .*

Nous pouvons maintenant définir une mesure sur l'espace  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  de la manière suivante. Soit  $w$  une fonction poids sur  $\Gamma$ . On peut définir un produit scalaire sur  $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R})$  que l'on notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  par la formule

$$\langle e_i, e_j \rangle_w = w_i \delta_{ij},$$

pour  $i, j = 1, \dots, |E|$ , où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker. Ce produit scalaire induit par restriction un produit scalaire sur  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  et nous noterons  $\mu_w$  la mesure associée. Remarquons que pour un graphe combinatoire

$\Gamma$ , cette mesure que nous noterons dans ce cas  $\mu$  coïncide avec la restriction au sous-espace  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  de la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ . Nous obtenons alors les estimées suivantes :

**Théorème I.C** *Soit  $\Gamma$  un graphe de premier nombre de Betti  $b$ . Alors*

$$\frac{2^b}{b!} \left( \frac{b}{\text{Vol}(\Gamma)} \right)^b \leq \mu(\mathcal{B}_{st}(\Gamma)) \leq \frac{2^b}{b!}. \quad (1.18)$$

*Les deux cas d'égalités sont simultanément réalisés par le bouquet de  $b$  cercles  $\bigvee_{i=1}^b S_i^1$ .*

**Théorème I.D** *Pour tout graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  de premier nombre de Betti  $b$ ,*

$$\mu_w(\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w)) \cdot \text{Vol}(\Gamma, w)^{b/2} \geq \omega_b, \quad (1.19)$$

*où  $\omega_b$  désigne le volume euclidien de la boule unité euclidienne de  $\mathbb{R}^b$ .*

### 1.4.1 Démonstration du théorème I.B

La démonstration du théorème I.B est une conséquence immédiate des lemmes suivants.

**Lemme I.C1** *Tout circuit simple orienté de  $\Gamma$ , identifié au vecteur correspondant de  $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R})$ , est proportionnel à un sommet de  $\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w)$ . Le facteur de proportionnalité est exactement la longueur de ce circuit.*

**Démonstration.** Notons  $B_{w,1}$  la boule unité pour la norme (1.17) dans  $\mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R})$ . Comme

$$\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w) = B_{w,1} \cap H_1(\Gamma, \mathbb{R}),$$

les sommets de  $\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w)$  sont donnés par les points d'intersection de  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  avec l'intérieur des faces de  $B_{w,1}$  de codimension plus grande ou égale à  $b$  dans le cas où cette intersection est réduite à un point. Pour  $C$  un circuit simple orienté, on note

$$C = \sum_{i \in I(C)} \varepsilon_i e_i \quad (1.20)$$

son développement dans la base des arêtes  $\{e_i\}_{i=1}^k$  (ici,  $\varepsilon_i = \pm 1$ ). Il est évident que le nombre  $|I(C)|$  des arêtes dans (1.20) n'excède pas  $k - b + 1$ .

On considère la face  $|I(C)| - 1$  dimensionnelle  $F(C)$  de  $B_{w,1}$  contenant les vecteurs

$$\frac{\varepsilon_i}{w(e_i)}e_i, \quad i \in I(C).$$

On voit facilement que

$$X = \frac{1}{\|C\|_w}C = \frac{1}{\sum_{i \in I(C)} w(e_i)} \sum_{i \in I(C)} \varepsilon_i e_i$$

est un point de  $\text{int}(\text{conv}(\{\frac{\varepsilon_i}{w(e_i)}e_i, i \in I(C)\}))$  où  $\text{conv}(A)$  désigne l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points  $A$  et  $\text{int}(B)$  désigne l'intérieur affine d'un ensemble  $B$ .

On montre alors que l'intersection  $H_1(\Gamma, \mathbb{R}) \cap \text{int}(F(C))$  est réduite à ce point. En effet, si  $v$  est un autre point de  $H_1(\Gamma, \mathbb{R}) \cap \text{int}(F(C))$ , les points  $v$  et  $X$  définissent un segment contenu dans l'intersection. Ceci implique qu'il existe des points d'intersection entre  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  et  $F(C)$  dans un voisinage arbitraire de  $X$ . Autrement dit, il existe des points d'intersection (différents de  $X$ ) appartenant à l'enveloppe convexe des  $\{\frac{\varepsilon_i}{w(e_i)}e_i, i \in I(C)\}$ . Si  $u$  est un tel point, on peut écrire  $u$  comme une combinaison linéaire des  $\{\frac{\varepsilon_i}{w(e_i)}e_i, i \in I(C)\}$  dont les coefficients sont tous non nuls :

$$u = \sum_{i \in I(C)} \alpha_i \frac{\varepsilon_i}{w(e_i)}e_i.$$

On complète alors le vecteur  $C$  en une base de  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  formée de circuits simples  $\{C_1 = C, C_2, \dots, C_b\}$  de sorte que, pour chaque  $i$  dans  $\{1, \dots, b\}$ , il existe une arête  $f_i$  contenue dans  $C_i$  et n'appartenant pas aux  $C_j$  pour  $j \neq i$ . L'analyse de la décomposition du vecteur  $u$  dans cette base nous montre que le vecteur  $u$  est nécessairement proportionnel à  $C$ . D'où une contradiction.

Maintenant, comme  $\dim(F(C)) \leq k - b$ , le vecteur  $C/\|C\|_w$  est bien un sommet de  $\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w)$ . Ceci achève la démonstration.  $\square$

**Lemme I.C2** Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux circuits simples orientés. Alors il existe des circuits simples orientés  $\{D_j\}_{j \in J}$  (non uniquement définis) pour lesquels chaque arête n'est parcourue que dans un seul sens et tels que dans  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  :

$$[C_1 + C_2] = \sum_{j \in J} [D_j].$$

**Démonstration.** On note  $\{e_i\}_{i \in I}$  les arêtes de  $\Gamma$  figurant dans  $C_1$  et  $C_2$  avec des directions opposées. On ôte les arêtes  $\{e_i\}_{i \in I}$  de la réunion  $C_1 \cup C_2$ . Notons  $C$  la courbe obtenue. Elle possède une orientation induite par celles de  $C_1$  et de  $C_2$ . En suivant cette orientation,  $C$  se sépare naturellement en quelques courbes fermées et orientées  $\{P_l\}_{l \in L}$ . Cette représentation préserve la classe d'homologie :

$$[C_1 + C_2] = \sum_{l \in L} [P_l].$$

Chaque courbe  $P_l$  n'est pas, en général, un circuit simple car elle peut avoir des auto-intersections : des sommets, ou bien des arêtes parcourues plusieurs fois dans la même direction. On part d'un point d'auto-intersection et on parcourt  $P_l$  en suivant l'orientation. En revenant au point de départ pour la première fois, nous coupons  $P_l$  en deux courbes fermées et orientées. Chacune de ces deux nouvelles courbes a moins d'auto-intersections que la courbe initiale  $P_l$ . En répétant suffisamment ce procédé, nous obtenons un certain nombre de circuits simples qui engendrent la classe  $[P_l]$ . On applique ce procédé pour chaque  $P_l$ ,  $l \in L$ . L'ensemble des circuits simples obtenus est noté  $\{D_j\}_{j \in J}$ . Pour achever la démonstration, il reste à remarquer que, par construction, les circuits simples orientés construits n'ont pas d'arête commune parcourue dans des directions opposées.  $\square$

**Lemme I.C3** *Pour chaque classe entière  $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ , il existe des circuits simples  $\{C_s\}_{s \in S}$  (non uniquement définis) tels que*

$$a = \sum_{s \in S} [C_s] \quad \text{et} \quad \|a\|_w = \sum_{s \in S} \|C_s\|_w.$$

**Démonstration.** Comme les circuits simples orientés engendrent  $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ , nous pouvons présenter une classe fixée  $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$  comme une somme de circuits simples orientés :

$$a = \sum_{r \in R} [D_r]. \tag{1.21}$$

Remarquons que la représentation (1.21) n'est pas uniquement définie et que certains circuits figurent, en général, plusieurs fois dans cette somme. En appliquant systématiquement le lemme I.C2 sur chaque paire de circuits  $(D_{r_1}, D_{r_2})$  ayant des arêtes en commun parcourues dans des directions opposées, nous arrivons au bout de ce procédé itératif sur une nouvelle

représentation par des circuits  $\{C_s\}_{s \in S}$  vérifiant le lemme.  $\square$

**Lemme I.C4** *Soit  $(\Gamma, w)$  un graphe pondéré dont la fonction poids  $w$  est à valeurs rationnelles. Alors chaque sommet de  $\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w)$  est proportionnel à un circuit simple orienté de  $\Gamma$ .*

**Démonstration.** On considère un sommet  $X$  de  $\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w)$ . On sait que c'est l'unique point d'intersection de  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  et d'une face de  $B_{w,1}$  de codimension plus grande ou égale à  $b$ . Comme les poids  $\{w(e_i), 1 \leq i \leq k\}$  sont rationnels, les coordonnées des sommets de  $B_{w,1}$  sont rationnelles. Le sous-espace  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  est engendré par des vecteurs dont les coordonnées sont entières. Ceci implique que les coordonnées de  $X$  sont rationnelles. On constate donc que  $X = \lambda a$ , où  $a \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$  est un vecteur indivisible et  $\lambda$  est un facteur rationnel positif. On a également

$$1 = \|X\|_w = \lambda \|a\|_w. \quad (1.22)$$

Décomposons  $a$  en circuits simples orientés selon le lemme I.C3 :

$$a = \sum_{s \in S} [C_s].$$

On tire alors du lemme I.C3 et de (1.22) l'égalité suivante :

$$X = \frac{1}{\sum_{s \in S} \|C_s\|_w} \sum_{s \in S} \left( \|C_s\|_w \left( \frac{1}{\|C_s\|_w} [C_s] \right) \right) \quad (1.23)$$

D'après le lemme I.C1, les vecteurs  $[C_s]/\|C_s\|_w$  pour  $s \in S$  sont des sommets de  $\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w)$  et (1.23) implique à son tour que  $X$  est un point de l'intérieur de l'enveloppe convexe de ces points. Comme  $X$  est un sommet, on obtient donc que  $S$  contient un seul circuit (la répétition d'un unique circuit n'étant pas possible, puisque  $a$  a été choisi indivisible). La démonstration est achevée.  $\square$

Les lemmes I.C1 et I.C4 impliquent le théorème I.B pour tout graphe pondéré dont la fonction poids est à valeurs rationnelles. D'autre part, ces lemmes montrent également que les directions des sommets de  $\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w)$  ( $w$  étant à valeurs rationnelles) sont uniquement définies et ne dépendent que des circuit simples. Ceci, par continuité, implique le résultat pour des poids quelconques.

### 1.4.2 Volume de la boule stable d'un graphe combinatoire

Nous démontrons ici le théorème I.C. Nous avons déjà noté que

$$\mathcal{B}_{st}(\Gamma) = B_1^k \cap H_1(\Gamma, \mathbb{R}), \quad (1.24)$$

où  $k = |E|$  et  $B_1^k = \{(x_i) \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{i=1}^k |x_i| \leq 1\}$ .

Nous invoquons alors une estimée du volume euclidien de l'intersection de la boule unité de la norme  $|\cdot|_1$  avec un sous-espace vectoriel (voir [52]). Pour tout sous-espace vectoriel  $P^b$  de dimension  $b$  de  $\mathbb{R}^k$

$$\mu(B_1^k \cap P^b) \geq \mu_k(B_1^k)^{b/k},$$

où  $\mu_n$  désigne le volume canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Nous déduisons de (1.24) que

$$\mu(B_{st}(\Gamma)) \geq \mu_k(B_1^k)^{b/k}.$$

Comme  $\mu_n(B_1^n) = 2^n/n!$  pour tout  $n \geq 1$ , nous avons

$$\mu(B_{st}(\Gamma)).k^b \geq \frac{2^b.k^b}{(k!)^{b/k}}.$$

Avec  $k \geq b$ , nous obtenons

$$\mu(B_{st}(\Gamma)).k^b \geq \frac{(2b)^b}{b!}.$$

De  $k = |E| = \text{Vol}(\Gamma)$ , nous déduisons l'inégalité de gauche de la formule (1.18).

Pour la majoration, nous commençons avec une autre estimée obtenue dans [52]. Pour tout sous-espace vectoriel  $P^b$  de dimension  $b$  de  $\mathbb{R}^k$ ,

$$\mu_k(B_1^k \cap P^b) \leq \mu_b(B_1^b).$$

Donc

$$\mu(B_{st}(\Gamma)) \leq \mu_b(B_1^b),$$

ce qui fournit la seconde inégalité de (1.18).

Pour le bouquet de  $b$  cercles

$$\mu(B_{st}(\bigvee_{i=1}^b S_i^1)) = \frac{2^b}{b!}$$

et  $\text{Vol}(\bigvee_{i=1}^b S_i^1) = b$ , donc  $\bigvee_{i=1}^b S_i^1$  réalise les deux cas d'égalité.

**Remarque.** Pour un graphe régulier  $\Gamma$  de valence  $v \geq 3$ , nous obtenons

$$\left(\frac{v-2}{v}\right)^b \frac{2^b}{b!} \leq \mu(\mathcal{B}_{st}(\Gamma)) \leq \frac{2^b}{b!}.$$

### 1.4.3 Volume de la boule stable d'un graphe pondéré

Nous démontrons ici le théorème I.D. Supposons d'abord que le résultat soit vrai pour les graphes combinatoires. Soit  $(\Gamma, w)$  un graphe pondéré de premier nombre de Betti  $b$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , nous pouvons trouver une fonction poids  $w_\epsilon$  proche de  $w$  dans le sens de la topologie  $C^0$  telle que

$$|\mu_{w_\epsilon}(\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w_\epsilon)) - \mu_w(\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w))| < \epsilon,$$

$$|\text{Vol}(\Gamma, w_\epsilon) - \text{Vol}(\Gamma, w)| < \epsilon,$$

et telle que  $w_\epsilon(e)$  soit rationnel pour tout  $e \in E$ . Soit  $\lambda$  un entier tel que  $\lambda w_\epsilon(e) \in \mathbb{N}^*$  pour tout  $e \in E$ . Nous avons

$$\mu_{\lambda w_\epsilon}(\mathcal{B}_{st}(\Gamma, \lambda w_\epsilon)) \cdot \text{Vol}(\Gamma, \lambda w_\epsilon)^{b/2} = \mu_{w_\epsilon}(\mathcal{B}_{st}(\Gamma, w_\epsilon)) \cdot \text{Vol}(\Gamma, w_\epsilon)^{b/2}.$$

On se fixe une énumération  $\{e_i\}_{i=1}^{|E|}$  des arêtes de  $\Gamma$  (cette fois, elle n'ont pas d'orientation fixée). Si nous subdivisons chaque arête  $e_i$  de  $\Gamma$  en  $k_\epsilon(i) = \lambda w_\epsilon(e_i)$  arêtes notées  $e'_{i,j}$  pour  $j = 1, \dots, k_\epsilon(i)$ , nous obtenons un graphe  $\Gamma'_\epsilon$  de premier nombre de Betti  $b$ , qui est isométrique à  $(\Gamma, \lambda w_\epsilon)$  une fois muni de la fonction poids constante égale à  $w = 1$ . Soit  $f$  cette isométrie et notons  $E'$  l'ensemble des arêtes de  $\Gamma'_\epsilon$ . Nous avons

$$\mu(\mathcal{B}_{st}(\Gamma'_\epsilon)) = \mu_{\lambda w_\epsilon}(\mathcal{B}_{st}(\Gamma, \lambda w_\epsilon)). \quad (1.25)$$

Pour voir cela, observons que l'isométrie  $f$  induit une application linéaire  $F$  de  $C(\Gamma, \mathbb{R})$  dans  $C(\Gamma'_\epsilon, \mathbb{R})$  (et un isomorphisme entre  $H_1(\Gamma, \mathbb{R})$  et  $H_1(\Gamma'_\epsilon, \mathbb{R})$ ) qui satisfait

$$F(e_i) = \sum_{j=1}^{k_\epsilon(i)} e'_{i,j},$$

pour  $i = 1, \dots, |E|$ . La famille

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{k_\epsilon(i)}} e_i \right\}_{i=1}^{|E|}$$

est une base orthonormale pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\lambda_{w_\epsilon}}$  de  $\mathbb{R}^{|E|}$  et

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{k_\epsilon(i)}} \sum_{j=1}^{k_\epsilon(i)} e'_{i,j} \right\}_{i=1}^{|E|}.$$

est une base orthonormale de  $I(C(\Gamma, \mathbb{R}))$  pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans  $\mathbb{R}^{|E'|}$ . Nous trouvons donc que l'application  $F|_{H_1(\Gamma, \mathbb{R})}$  exprimée dans ces bases orthonormales est la matrice identité, et nous obtenons ainsi l'égalité (1.25).

Cette construction peut être réalisée pour tout  $\epsilon > 0$ . Donc si le théorème I.D est vérifié pour chaque graphe combinatoire, il est alors vérifié pour les graphes pondérés.

Maintenant, soit  $\Gamma' = (E', V')$  un graphe de premier nombre de Betti  $b$  et notons  $k = |E'|$ . Pour tout  $u \in \mathbb{R}^k$ ,

$$|u|_1 \leq k \cdot |u|_2^2$$

où  $|u|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^k u_i^2}$  désigne la norme euclidienne. Donc

$$\mu(\mathcal{B}_{st}(\Gamma')) \geq \mu(B_2(\frac{1}{\sqrt{k}})),$$

où  $B_2(R)$  désigne la boule de rayon  $R$  pour la norme  $|\cdot|_2$  dans  $H_1(\Gamma', \mathbb{R})$ . Nous déduisons l'inégalité (1.19) pour les graphes combinatoires.







## Chapitre 2

Boule unité de la norme stable  
sur une variété, polytope et  
classe conforme



Le contenu de ce chapitre peut être trouvé dans l'article [6] écrit en collaboration avec I.Babenko.

Etant fixée une variété fermée  $M^m$  de dimension  $m \geq 3$ , nous allons nous intéresser aux normes qui peuvent être réalisées comme norme stable d'une métrique lisse (*i.e* de classe  $C^\infty$ ). Nous avons déjà vu que les polytopes apparaissent de manière systématique comme boule unité de la norme stable des graphes pondérés, et que leurs sommets étaient décrits par la combinatoire du graphe.

Rappelons ici qu'un vecteur  $s$  de  $H_1(M, \mathbb{R})$  est dit *de direction rationnelle* s'il existe une classe entière  $v$  telle que  $s \in \langle v \rangle$  la droite engendrée par  $v$ . Dans le cas contraire, le point est dit *de direction irrationnelle*. Nous avons le résultat suivant :

**Théorème II** *Soit  $(M^m, g)$  une variété fermée riemannienne lisse de dimension  $m \geq 3$  et de premier nombre de Betti  $b \geq 1$ . On considère un polytope fini convexe  $K$  de  $H_1(M, \mathbb{R})$ , à symétrie centrale, tel que son intérieur soit non vide et les directions de ses sommets soient rationnelles. Alors il existe une métrique  $g'$  lisse sur  $M$  conforme à  $g$  telle que*

$$\mathcal{B}_{st}(g') = K.$$

Nous obtenons ainsi une large classe de polytopes comme boule unité de la norme stable d'une métrique sur une variété de dimension supérieure à 3, de sorte que :

**Corollaire II** *Soient  $(M^m, g)$  une variété riemannienne de dimension  $m \geq 3$  et de premier nombre de Betti  $b \geq 1$  et  $\|\cdot\|$  une norme sur l'espace vectoriel  $H_1(M, \mathbb{R})$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une métrique  $g(\varepsilon)$  conforme à  $g$  telle que*

$$\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{g(\varepsilon)} \leq (1 + \varepsilon)\|\cdot\|.$$

En effet, il suffit de considérer une approximation suffisamment fine de la boule unité de la norme  $\| \cdot \|$  par un polytope symétrique  $K_\epsilon$ , tel que ses sommets soient de directions rationnelles et de norme 1 : on applique alors le théorème II.

Nous commençons par présenter un survol des résultats liés à l'étude de la géométrie des boules stables.

## 2.1 Historique

Nous récapitulons ici l'ensemble des résultats traitant de la question suivante : étant fixée une variété  $M$ , quelles normes peuvent être réalisées comme norme stable associée à une métrique  $g$  ?

**Cas du tore bidimensionnel.** M.Morse [51] a tout d'abord remarqué que la norme stable du tore bidimensionnel  $\mathbb{T}^2$  associée à une métrique lisse est strictement convexe. V.Bangert a ensuite montré le résultat suivant :

**Théorème (V.Bangert [11])** *Soit  $(\mathbb{T}^2, g)$  un tore riemannien lisse. La norme stable est différentiable dans les points de direction irrationnelle et est différentiable dans les points de direction rationnelle si et seulement si le tore est feuilleté par les géodésiques minimisantes représentant l'élément correspondant de  $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ .*

**Cas des surfaces.** On note  $\Sigma_h$  la surface fermée orientable de genre  $h$ . On se fixe une métrique  $g$  lisse. Un *sous-espace affine support* de  $\mathcal{B}_{st}(g)$  est un sous-espace affine  $H$  tel que  $H \cap \mathcal{B}_{st}(g) = H \cap \partial \mathcal{B}_{st}(g)$ . On dit d'un sous-ensemble  $F$  de  $\partial \mathcal{B}_{st}(g)$  qu'elle est une *face plate* si il existe un sous-espace affine support  $H$  tel que  $F = H \cap \partial \mathcal{B}_{st}(g)$ . La dimension de  $F$  est alors définie comme la dimension de l'espace affine  $A$  qu'elle engendre et l'intérieur de  $F$  est son intérieur dans  $A$ . Enfin une face plate est *rationnelle* si elle coïncide avec l'enveloppe convexe de points de  $\partial \mathcal{B}_{st}(g)$  de direction rationnelle. Dans [48], D.Massart montre que l'ensemble des faces contenant un point de  $\partial \mathcal{B}_{st}(g)$  dans leur intérieur peut être ordonné par inclusion et admet un maximum unique. Il montre également le résultat suivant :

**Théorème (D.Massart [48])** *Soit  $g$  une métrique lisse sur  $\Sigma_h$  avec  $h \geq 2$ . 1. La dimension d'une face plate est majorée par  $h - 1$ .*

2. Tout point de direction rationnelle est contenu dans une face plate rationnelle de dimension  $h - 1$ .

3. En un point  $v$  de  $\partial\mathcal{B}_{st}(g)$  de direction rationnelle, la norme stable est différentiable seulement dans les directions tangentes à  $F$ , où  $F$  est la face plate rationnelle maximale contenant  $v$  dans son intérieur.

On en déduit immédiatement que la norme stable d'une surface  $(\Sigma_h, g)$  de genre  $h \geq 2$  n'est donc ni lisse, ni strictement convexe, ni définie par un polytope. Remarquons également qu'il existe une infinité de points exposés de direction rationnelle pour de telles surfaces (un point est dit *exposé* si la face rationnelle maximale le contenant dans son intérieur est réduite à ce point) (voir [49]).

Dans [50], D.Massart relie la dérivabilité de la norme stable en une classe d'homologie au degré d'irrationalité de cette classe. Plus précisément, une classe d'homologie  $v$  est dite *k-irrationalle* si  $k$  est la dimension du plus petit sous-espace de  $H_1(\Sigma_h, \mathbb{R})$  engendré par des classes entières et contenant  $v$ .

**Théorème (D.Massart [50])** *Soit  $g$  une métrique lisse sur  $\Sigma_h$  avec  $h \geq 1$ . En une classe  $v$  d'homologie  $k$ -irrationalle, la norme stable est différentiable dans au moins  $k - 1$  directions non radiales.*

**Cas des dimensions supérieures.** G.A.Hedlund a construit pour le tore de dimension 3 une métrique Riemannienne [36] pour laquelle la norme stable est donnée par un octaèdre régulier. Cet exemple est fondamental, puisqu'il montre que la situation en dimension plus grande que 3 est radicalement différente de celle en dimension 2 : les polytopes peuvent apparaître comme boule unité d'une norme stable associée à une métrique.

D'autre part, D.Burago, S.Ivanov et B.Kleiner [23] ont démontré le résultat suivant, qui généralise le résultat de V.Bangert :

**Théorème (D.Burago, S.Ivanov & B.Kleiner [23])** *Soit  $(\mathbb{T}^n, g)$  un tore riemannien de classe  $C^3$  de dimension  $n \geq 2$ . Soit  $v$  un point de direction irrationnelle. Alors la norme stable est différentiable en  $v$  dans au moins une direction non radiale.*

Dans ce même papier, les auteurs montrent que, pour tout entier  $k$ , il existe un entier  $n$  et une métrique de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{T}^n$  telle que pour presque tous les points de direction irrationnelle  $v$ , la norme stable soit non différentiable en  $v$ . Cela montre qu'une généralisation complète du théorème de V.Bangert concernant les directions irrationnelles est impossible.

Nous allons maintenant passer à la démonstration du théorème II. Elle va découler de plusieurs propositions techniques. On travaille dans la classe des métriques simpliciales. Ce sont des métriques lisses sur chaque simplexe d'une triangulation lisse avec une condition naturelle de coïncidence sur les faces communes. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [3]. L'idée de la démonstration est la suivante : nous construisons un complexe simplicial riemannien  $P_2$  qui contient comme rétracte le tore jacobien  $\mathbb{T}^b = H_1(M, \mathbb{R})/i(H_1(M, \mathbb{Z}))$  de  $M$ , et dont la boule stable est le polytope  $K$ . Ceci nous permet de construire une métrique  $h$  sur  $M$ , dont la boule stable est à nouveau le polytope  $K$ . Nous montrons ensuite que l'on peut déformer la métrique initiale sur  $M$  dans sa classe conforme en une métrique  $g'$ , et ainsi définir une application de  $(M, g')$  dans  $(M, h)$  qui contracte les distances (ce qui permet de comparer les boules stables de  $M$  pour les métriques  $g'$  et  $h$ ), et dont la longueur des courbes associées aux sommets du polytope  $K$  soit contrôlée.

## 2.2 Préparatifs

**Lemme II.A** *Soient  $(X_i, h_i)$ ,  $i = 1, 2$  deux variétés munies de métriques simpliciales et  $f : X_1 \rightarrow X_2$  une application simpliciale contractant les distances. On note  $f_*$  l'application induite sur les homologies réelles unidimensionnelles. Alors*

$$f_*(\mathcal{B}_{st}(h_1)) \subset \mathcal{B}_{st}(h_2).$$

**Démonstration.** Soit  $\mathbf{a}$  un élément de  $H_1(X_1, \mathbb{Z})$  et supposons que  $\gamma_n$  soit une courbe fermée lisse par morceaux réalisant la classe  $n\mathbf{a}$ . Comme  $f$  contracte les distances, on a  $l_{h_1}(\gamma_n) \geq l_{h_2}(f(\gamma_n))$ , ce qui implique que

$$\|\mathbf{a}\|_{h_1} \geq \|f_*(\mathbf{a})\|_{h_2}. \quad (2.1)$$

Par continuité de la norme, l'inégalité (2.1) est valable pour toute classe réelle. On en déduit le résultat.  $\square$

On note  $\{s_1, \dots, s_k\}$  un sous-ensemble de sommets de  $K$  tels que

$$K = \text{conv}_s\{s_1, \dots, s_k\}$$



où  $\text{conv}_s$  désigne l'enveloppe convexe du symétrisé d'un ensemble. Les sommets de  $K$  étant rationnels, on peut trouver pour tout  $i = 1 \dots k$  un nombre  $l_i > 0$  tel que

$$s_i = l_i \cdot \mathbf{v}_i,$$

où  $\mathbf{v}_i$  est un vecteur entier indivisible. On se fixe  $k$  courbes de  $M$  lisses, disjointes, fermées et simples notées  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  telles que  $[\gamma_i] = \mathbf{v}_i$  pour  $i = 1, \dots, k$ . On les suppose paramétrisées par longueur d'arc respectivement à la métrique donnée  $g$ .

**Lemme II.B** *Dans  $(M, g)$ , il existe  $k$  voisinages tubulaires disjoints  $\{U_i\}_{i=1}^k$  des courbes  $\{\gamma_i\}_{i=1}^k$  et une métrique  $g_1$  lisse conforme à  $g$  tels que*

1.  $l_{g_1}(\gamma_i) = l_i^{-1}$ ,  $1 \leq i \leq k$  ;
2. les  $U_i$  sont fibrés par des disques  $g_1$ -orthogonaux à  $\gamma_i$  et les projections  $p_i : U_i \longrightarrow \gamma_i$  le long de ces disques contractent les  $g_1$ -distances.

**Démonstration.** On se fixe  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour que les  $\varepsilon$ -voisinages tubulaires des courbes  $\gamma_i$  respectivement à la métrique  $g$  soient disjoints et qu'ils soient fibrés par des disques  $g$ -géodésiques orthogonaux aux  $\gamma_i$ . Notons  $U_i$  ces voisinages tubulaires. On choisit une fonction  $\lambda$  strictement positive sur  $M$  qui soit constante égale à  $(l_i \cdot l_g(\gamma_i))^{-1}$  sur  $U_i$ . La métrique  $\hat{g} = \lambda^2 g$  vérifie la propriété 1. et les disques fibrant  $U_i$  sont toujours géodésiques et orthogonaux aux  $\gamma_i$  pour la métrique  $\hat{g}$ . Puisque  $\hat{g}$  est conforme à  $g$ , et pour simplifier nos futures notations, nous pouvons supposer que la métrique de départ vérifie la propriété 1.

Soit  $p_i : U_i \longrightarrow \gamma_i$  le fibré normale de  $\gamma_i$ . On considère un système de coordonnées semi-géodésique sur  $U_i$  :

$$(s, x_2, x_3, \dots, x_m), \tag{2.2}$$

où  $s = x_1$  est le paramètre naturel le long de  $\gamma_i$  et les  $(x_2, x_3, \dots, x_m) = \bar{x}$  sont les coordonnées géodésiques sur les disques orthogonaux. Ce système est bien défini sur chaque ouvert du type  $p_i^{-1}([s - \delta, s + \delta])$  pour  $\delta > 0$  suffisamment petit. Pour  $q = (s, \bar{x}) \in U_i$ , notons également  $\mathbf{r}(q) = \text{dist}(q, \gamma_i)$ . Alors  $\mathbf{r}^2$  est une fonction lisse définie sur  $U_i$ . Soient  $\{g_{kl}(s, \bar{x})\}_{k,l=1}^m$  les coefficients de  $g$  dans (2.2). Nous avons par construction

$$g_{11}(s, \bar{0}) = 1; \quad g_{1l}(s, \bar{0}) = 0, \quad 2 \leq l \leq m. \tag{2.3}$$

Tout vecteur tangent  $\mathbf{v} \in T_q U_i$  s'écrit dans la base  $\{\frac{\partial}{\partial x_k}\}_{k=1}^m$

$$\mathbf{v} = (\alpha, \bar{v}); \quad \text{où } \bar{v} = (v_2, v_3, \dots, v_m).$$

Nous pouvons calculer sa norme :

$$\|\mathbf{v}\|_g^2 = g_{11}(s, \bar{x})\alpha^2 + 2\alpha \sum_{k=2}^m g_{1k}(s, \bar{x})v_k + \|\bar{v}\|_{g'}^2, \quad (2.4)$$

où  $g'$  est la restriction de  $g$  à l'espace tangent au disque normal correspondant, sa matrice coïncidant au bloc de  $g$  dual à  $g_{11}$ .

Cherchons maintenant le facteur conforme défini sur  $U_i$  sous la forme suivante :

$$\lambda_i^2(q) = \frac{1 + a\mathbf{r}(q)^2}{g_{11}(q)}, \quad (2.5)$$

où  $a$  est une constante que nous allons choisir afin de vérifier la propriété 2. du lemme. Sur chaque  $U_i$ , pour la métrique  $g_1 = \lambda_i^2 g$ , on tire de (2.4) que :

$$\|\mathbf{v}\|_{g_1}^2 - \alpha^2 = \lambda_i^2 \left( \frac{ag_{11}(s, \bar{x})\mathbf{r}^2(s, \bar{x})}{1 + a\mathbf{r}^2(s, \bar{x})} \alpha^2 + 2\alpha \sum_{k=2}^m g_{1k}(s, \bar{x})v_k + \|\bar{v}\|_{g'}^2 \right). \quad (2.6)$$

Compte-tenu de (2.3), on a

$$\left| \sum_{k=2}^m g_{1k}v_k \right| \leq A\mathbf{r}(s, \bar{x})\|\bar{v}\|_{g'}$$

pour une constante  $A > 0$  appropriée. Nous obtenons alors de (2.6) l'inégalité suivante :

$$\|\mathbf{v}\|_{g_1}^2 - \alpha^2 \geq \lambda_i^2 \left( \frac{ag_{11}\mathbf{r}^2}{1 + a\mathbf{r}^2} \alpha^2 - 2A|\alpha|\mathbf{r}\|\bar{v}\|_{g'} + \|\bar{v}\|_{g'}^2 \right). \quad (2.7)$$

Nous avons dans les parenthèses une forme quadratique en les arguments  $|\alpha|\mathbf{r}$  et  $\|\bar{v}\|_{g'}$ , qui est positive si

$$\frac{ag_{11}}{1 + a\mathbf{r}^2} > A^2.$$

Prenons  $a = 2A^2$ , alors cette inégalité est vérifiée pour  $\mathbf{r} = 0$  en accord avec (2.3). On en déduit par continuité qu'elle est vérifiée sur l'ouvert  $U_i$  tout entier si l'on a choisi  $\varepsilon$  suffisamment petit au départ. Finalement, pour le facteur conforme (2.5) avec  $a = 2A^2$ , on obtient de (2.7)

$$\|\mathbf{v}\|_{g_1} \geq |\alpha|$$

et la propriété 2. est donc vérifiée.

Pour achever la démonstration, il reste à prolonger les facteurs locaux conformes  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  en une fonction lisse  $\lambda$  strictement positive.  $\square$

## 2.3 Construction d'une métrique de référence

Nous allons commencer par construire une métrique de référence sur  $M$  pour laquelle la boule unité de la norme stable est bien le polytope demandé. Cette métrique n'appartient en général pas à la classe conforme de la métrique de départ.

**Proposition II** *Il existe une métrique lisse  $h$  sur  $M$  tel que*

1.  $\|\frac{d\gamma_i(s)}{ds}\|_h = \|\frac{d\gamma_i(s)}{ds}\|_{g_1}$ , où  $s$  est le paramètre  $g_1$ -naturel le long des  $\gamma_i$  ;
2.  $\mathcal{B}_{st}(M, h) = K$ .

**Démonstration.** La démonstration se déroule en deux étapes. Dans la première, on montre que l'on peut se ramener à construire une métrique simpliciale sur  $M$  réalisant le polytope  $K$  comme boule stable, et dans une seconde étape, on explicite la construction de cette métrique simpliciale.

**Lemme II.C** *Supposons qu'il existe une métrique  $\hat{h}$  sur  $M$  simpliciale, telle que :*

1.  $\mathcal{B}_{st}(\hat{h}) = K$ .
  2.  $\exists \epsilon > 0$  tels que la métrique  $\hat{h}$  soit lisse sur les  $\epsilon$ -voisinages tubulaires  $U_\epsilon(\gamma_i)$  de  $\gamma_i$  (qui sont disjoints).
  3. les  $\gamma_i$  sont des géodésiques minimisantes de longueur  $l_{\hat{h}}(\gamma_i) = |v_i|_{st} = l_i^{-1}$ .
- Alors la proposition est vérifiée.

**Démonstration du lemme.** On se fixe une métrique lisse  $h'$  sur  $M$ , qui coïncide avec  $\hat{h}$  sur les  $U_\epsilon(\gamma_i)$ . On peut choisir une fonction  $\zeta$  lisse, telle que  $\zeta = 1$  sur  $U_{\epsilon/3}(\gamma_i)$ ,  $\zeta = L$  sur  $M \setminus \cup_{i=1}^k U_{2\epsilon/3}(\gamma_i)$  et qui soit croissante sur chaque  $U_\epsilon(\gamma_i)$  respectivement à la coordonnée radiale. On choisit  $L$  suffisamment grand pour que la métrique  $h = \zeta \cdot h' \geq \hat{h}$ . Pour  $i = 1, \dots, k$ ,  $v_i \in \mathcal{B}_{st}(h)$ . On conclut alors en utilisant le lemme II.A et la convexité de la boule stable.  $\square$

Nous allons maintenant construire une métrique simpliciale satisfaisant les hypothèses du lemme II.C. Soit  $\mathbb{T}^b = H_1(M, \mathbb{R})/i(H_1(M, \mathbb{Z}))$  le jacobien

de  $M$  ( $i$  désigne l'inclusion canonique). On considère une métrique euclidienne  $h_0$  sur  $\mathbb{T}^b$  telle que pour toute courbe  $\gamma$  telle que  $[\gamma] = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot v_i$  avec  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  pour  $i = 1, \dots, k$ ,  $l_{h_0}(\gamma) \geq \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \cdot l_i^{-1} + 3$ . Fixons un point  $x_0$  de  $\mathbb{T}^b$ . Soient  $\bigvee_{i=1}^k C_i$  un bouquet de  $k$  cercles pointé en un point  $x_1$ . On forme un graphe  $\Gamma$  en ajoutant à  $x_1$  une arête notée  $a$  dont une des extrémités est libre. Soit  $h'_0$  une métrique simpliciale sur  $\Gamma$  telle que  $l_{h'_0}(C_i) = l_i^{-1}$  et  $l_{h'_0}(a) = 1$ . On fixe sur  $\mathbb{T}^b$  une triangulation linéaire telle que  $x_0$  soit un 0-simplexe. On considère le complexe simplicial  $(P_1, h_1)$  formé en recollant l'extrémité libre de  $(\Gamma, h'_0)$  à  $(\mathbb{T}^b, h_0)$  en  $x_0$  (voir figure 2.1).

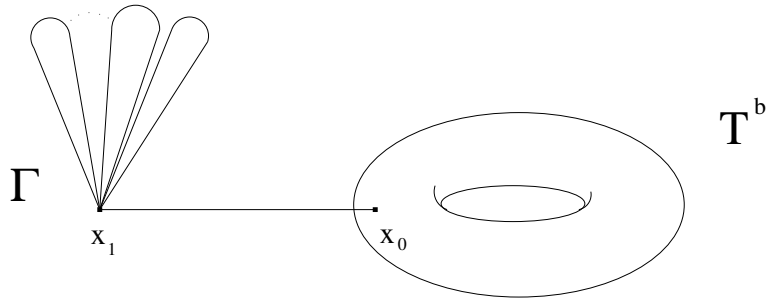


FIG. 2.1 – Le complexe  $P_1$

On a une application évidente  $f_1 : P_1 \rightarrow \mathbb{T}^b$  qui est l'identité sur  $\mathbb{T}^b$  et qui envoie  $C_i$  sur  $c_i$  la géodésique minimisante réalisant  $v_i$  basée en  $x_0$  en dilatant les distances.

Comme  $f_1$  est l'identité sur  $\mathbb{T}^b$ , l'application induite en homologie  $(f_1)_* : H_1(P_1, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^b, \mathbb{R})$  est surjective. Pour  $i = 1, \dots, k$ , on réalise le cylindre de l'application  $(f_1)|_{C_i} : C_i \rightarrow c_i$  de sorte que l'arête  $a$  coïncide avec une génératrice du cylindre  $Z_i$ . On obtient ainsi un nouveau complexe simplicial  $P_2$  dont  $P_1 \subset P_2$  est un sous-complexe. Remarquons également que  $\mathbb{T}^b \subset P_2$  est un rétract par déformation. On prolonge la métrique  $h_1$  de  $P_1$  à  $P_2$  de la manière suivante. On note  $q_i$  la longueur de la concaténation de  $C_i = a \star C_i \star a^{-1}$  et  $c_i$ . Soit  $p_i : S_i^1 \rightarrow C_i \star c_i$  une application linéaire contractant deux fois les distances. Pour  $i = 1, \dots, k$ , on considère le cylindre de cette application, et on recolle une demi-sphère deux-dimensionnelle de rayon  $q_i/\pi$  isométriquement le long de  $S_i^1$  (qui est de longueur  $2q_i$ ). On note  $h_2$  la métrique induite par notre construction.

Clairement,

$$H_1(P_2, \mathbb{R}) \simeq H_1(\mathbb{T}^b, \mathbb{R}).$$

Remarquons que pour toute courbe lisse par morceaux  $\gamma \subset P_2$ , il existe une courbe  $\gamma' \subset P_1$  telle que  $[\gamma] = [\gamma']$  et  $l_{h_2}(\gamma') \leq l_{h_2}(\gamma)$ .

**Lemme II.D**

$$\mathcal{B}_{st}(h_2) = K.$$

**Démonstration du lemme.** Il est clair qu'une courbe minimisante de  $(P_2, h_2)$  est contenue dans  $P_1$ . On se fixe une classe entière  $v$  appartenant au sous-réseau  $\Delta_k$  engendré par  $\{v_i\}_{i=1}^k$ . Etant donné  $n \geq 1$ , on choisit  $\beta_n$  une courbe réalisant  $n.v$ . Quitte à modifier notre courbe  $\beta_n$ , on peut supposer que la courbe est obtenue comme la concaténation de deux courbes : la première  $\beta_{n,1}$  est contenue dans  $\mathbb{T}^b$  et la seconde  $\beta_{n,2}$  dans  $\Gamma$ . La classe  $v$  appartenant au sous-réseau  $\Delta_k$ , et de la structure de l'homologie réelle unidimensionnelle de  $\Gamma$ , on déduit que  $v$  et  $[\beta_{n,2}] \in \Delta_k$  et donc que  $[\beta_{n,1}] \in \Delta_k$ . On écrit  $[\beta_{n,1}] = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot [C_i]$  et comme  $l_{h_0}(\beta_{n,1}) \geq \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \cdot l_i^{-1} + 3$ , on peut diminuer la longueur de  $\beta_n$  en remplaçant la partie  $\beta_{n,1}$  par la courbe  $a \star \prod_{i=1}^k C_i^{\alpha_i} \star a^{-1}$ . Ceci entraîne que toute courbe minimisante est contenue dans  $\Gamma$ . Donc  $|v|_{st} = \min\{\sum_{i=1}^k |\alpha_i| \cdot l_i^{-1} \mid v = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot v_i\}$  pour tout  $v$  dans le sous-réseau engendré par les  $\{v_i\}_{i=1}^k$ . Par continuité de la norme et du fait que  $\text{rang}(\Delta_k) = b$  (comme  $\text{int}(K) \neq \emptyset$ ), on en déduit le résultat.  $\square$

On peut remplacer dans notre complexe simplicial  $P_2$  les cercles  $C_i$  pour  $i = 1, \dots, k$  par des tubes  $m$ -dimensionnels  $C_i \times D^{m-1}$  ou  $C_i \widehat{\times} D^{m-1}$  (selon l'orientabilité des  $U_i$ ), munis d'une métrique produit (euclidienne sur  $D^{m-1}$ ) dont la projection radiale contracte les distances et telle que les disques 2-dimensionnels rattachés le soient le long d'un cercle du bord de ce tube. On note à nouveau  $(P_2, h_2)$  le complexe simplicial obtenu. Cette opération ne modifie pas la forme de la boule stable.

Soit  $\mathcal{J} : M \rightarrow \mathbb{T}^b \subset P_2$ . Etant donnés les  $k$  voisinages tubulaires topologiques disjoints  $U_i$  de  $\gamma_i$  pour  $i = 1, \dots, k$ , on modifie  $\mathcal{J}$  dans sa classe d'homotopie de sorte que  $\mathcal{J}(\gamma_i) = C_i$  et que  $\mathcal{J}(U_i) = C_i \times D^{m-1}$  ou  $C_i \widehat{\times} D^{m-1}$ .

On peut alors approximer  $\mathcal{J}$  par une application  $\mathcal{J}_1$  qui soit simpliciale sur  $M$  et qui coïncide avec  $\mathcal{J}$  dans chaque  $U_i$  pour  $i = 1, \dots, k$  (voir [62]). La métrique  $\mathcal{J}_1^*(h_2)$  tirée en arrière peut être dégénérée en-dehors des voisinages tubulaires. On se fixe une métrique lisse quelconque  $h_3$  sur  $M$  et  $\xi$  une

fonction lisse et croissante d'argument  $q$  vérifiant

$$\xi(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \in \cup_{i=1}^k U_i(\frac{2\varepsilon}{3}); \\ 1 & \text{si } q \in M \setminus \cup_{i=1}^k U_i(\varepsilon). \end{cases}$$

Alors  $\mathcal{J}_1 : (M, \mathcal{J}_1^*(h_2) + \xi h_3) \rightarrow (P_2, h_2)$  contracte les distances et la métrique ainsi construite vérifie les propriétés annoncées.  $\square$

## 2.4 Démonstration du théorème II

Sur la variété initiale  $(M, g)$ , on considère maintenant les objets construits dans le lemme II.B et la proposition ci-dessus. On choisit deux fonction lisses et croissantes d'argument  $t$  vérifiant

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \frac{\varepsilon}{3}; \\ t & \text{si } \frac{2\varepsilon}{3} \leq t; \end{cases}$$

et

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \frac{\varepsilon}{9}; \\ 1 & \text{si } \frac{2\varepsilon}{9} \leq t; \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  est le rayon des voisinages tubulaires  $\{U_i\}_{i=1}^k$  du lemme II.B. On considère un point  $q \in U_i$  et  $\mathbf{r}(q)$  la fonction radiale définie ci-dessus. Soit  $\eta_q(s)$  l'unique géodesique locale passant par  $q$ , orthogonale à  $\gamma_i$  et telle que  $\eta_q(0) \in \gamma_i$ . On définit les applications

$$G_i : U_i \longrightarrow U_i; \quad 1 \leq i \leq k$$

en posant  $G_i(q) = \eta_q(\phi(\mathbf{r}(q)))$ . Remarquons que  $G_i(q) = q$  si  $\mathbf{r}(q) \geq \frac{2\varepsilon}{3}$  et que  $G_i(q) = \eta_q(0)$  si  $\mathbf{r}(q) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Les applications locales  $\{G_i\}_{i=1}^k$  se prolongent en une application

$$G : M \longrightarrow M.$$

Remarquons que  $G$  induit en homologie l'application identité.

On définit maintenant les fonctions locales suivantes

$$\Psi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}; \quad 1 \leq i \leq k$$

en posant  $\Psi_i(q) = \psi(\mathbf{r}(q))$ . Remarquons que  $\Psi_i(q) = 1$  si  $\mathbf{r}(q) \geq \frac{2\varepsilon}{9}$  et que  $\Psi_i(q) = 0$  si  $\mathbf{r}(q) \leq \frac{\varepsilon}{9}$ . Ces fonctions locales  $\{\Psi_i\}_{i=1}^k$  se prolongent en une fonction

$$\Psi : M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Choisissons finalement  $B > 0$  tel que

$$g' = (1 + B\Psi)g_1 \geq g_1 + \Psi G_*(h).$$

On voit facilement par construction et de la propriété 2. de la proposition II que  $G : (M, g') \rightarrow (M, h)$  contracte les distances. Du lemme II.A, on tire

$$\mathcal{B}_{st}(g') \subset \mathcal{B}_{st}(h) = K.$$

Par construction, les métrique  $g'$  et  $g_1$  coïncident dans les  $\frac{\varepsilon}{9}$ -voisinages tubulaires des  $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ . Ceci avec la propriété 1. du lemme II.B implique que les sommets de  $K$  appartiennent à  $\mathcal{B}_{st}(g')$ . La convexité nous donne alors le résultat.





## Chapitre 3

### Sommes connexes et revêtements cycliques



Les résultats de ce chapitre sont contenus dans le papier [5] écrit en collaboration avec I.Babenko.

Soit  $\Sigma_{\pm}(h)$  une surface de genre  $h > 1$  où le signe  $\pm$  désigne le cas orientable ou non orientable. Nous avons vu que la constante systolique

$$\sigma_{\pm}(h) = \sigma(\Sigma_{\pm}(h))$$

était strictement positive et vérifiait :

$$\pi \frac{h}{(\ln h)^2} \lesssim \sigma_{\pm}(h) \lesssim \frac{9\pi}{4} \frac{h}{(\ln h)^2}. \quad (3.1)$$

Nous pouvons voir les surfaces de grand genre comme des sommes connexes d'une même variété :

$$\Sigma_+(h) = \#_{i=1}^h \mathbb{T}_i^2 \quad \text{et} \quad \Sigma_-(h) = \#_{i=1}^h \mathbb{R}P_i^2.$$

Le comportement (3.1) s'interprète maintenant comme celui d'une fonction du nombre de copies dans la somme connexe correspondante. Remarquons que le comportement (3.1) est intéressant puisqu'il établit une croissance en  $h$  un peu moins rapide que la croissance linéaire à laquelle on peut s'attendre en faisant la somme connexe de  $h$  exemplaires du tore  $\mathbb{T}^2$  dans le cas orientable ou du plan projectif  $\mathbb{R}P^2$  dans le cas non orientable. Ce point de vue nous amène à la première question abordée dans ce chapitre.

**Question 1** *Soit  $M$  une variété fermée de dimension  $m \geq 3$ . On considère la somme connexe*

$$\#_n M = \#_{i=1}^n M_i$$

*de  $n$  copies de  $M$ . Comment se comporte  $\sigma(\#_n M)$  en fonction de  $n$  ?*

On suppose évidemment  $M$  essentielle pour que cette question soit non vide. Si  $M$  est orientable, les choix d'orientation pour les différents termes de la somme connexe ne jouent pas de rôle fondamental. Pour être précis, nous supposons que les termes sont orientés de manière cohérente. La somme connexe est une opération topologique fondamentale en topologie des variétés, et la question 1 est donc tout à fait naturelle. Posée il y a déjà plusieurs années (voir par exemple [33]), elle représente un problème non-trivial. Il est même difficile de conjecturer l'éventuel comportement de  $\sigma(\#_n M)$  dans le cas général, et le lecteur pourra trouver dans [33] différents exemples de comportements envisageables. Il n'est pas évident de savoir si (3.1) est la manifestation d'une règle générale ou bien si c'est un phénomène deux-dimensionnel. Un des principaux buts de ce chapitre est le résultat suivant.

**Théorème III.A** *Soient  $M$  une variété fermée de dimension  $m \geq 3$ . Alors il existe une constante  $C(M)$  telle que pour tout  $n \geq 3$ , l'inégalité suivante soit vérifiée :*

$$\sigma(\#_n M) \leq C(M) \frac{n\sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés de même dimension  $m \geq 3$ . Dans la somme connexe  $M_1 \# M_2$ , on contracte la sphère de recollement dans un point : on obtient ainsi la projection naturelle

$$M_1 \# M_2 \longrightarrow M_1 \bigvee M_2$$

qui induit un isomorphisme des groupes fondamentaux. Nous en déduisons l'inégalité suivante :

$$\sigma(M_1 \# M_2) \leq \sigma(M_1) + \sigma(M_2).$$

Ceci implique que quelle que soit la variété  $M$ , la fonction  $\sigma(\#_n M)$  est semi-additive en  $n$ , et par conséquent que la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\#_n M)}{n}$$

existe. Le cas deux-dimensionnel est couvert par (3.1), et donc du théorème III.A, nous obtenons immédiatement :

**Corollaire III.A1** *Pour toute variété fermée  $M$ , on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\#_n M)}{n} = 0.$$

Soient  $M$  une variété,  $\pi = \pi_1(M)$  son groupe fondamental et  $f : M \rightarrow K(\pi, 1)$  l'application canonique, où  $K(\pi, 1)$  désigne l'espace d'Eilenberg-MacLane. Si  $\mathbf{a} = f_*([M])$  est une classe homologique d'ordre infini dans  $H_m(\pi, \mathbf{Z})$ , alors, comme il a été démontré dans [3],  $\sigma(M)$  ne dépend que de cette classe. On note cette constante systolique  $\sigma(\mathbf{a})$ .

**Corollaire III.A2** *On suppose ici  $m \geq 4$ . Soit  $\mathbf{a} \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$  une classe homologique d'ordre infini représentable par une variété. Alors il existe une constante  $C_1 = C_1(\mathbf{a})$  telle que pour tout  $n \geq 3$ , on ait l'inégalité suivante :*

$$\sigma(n\mathbf{a}) \leq C_1 \frac{n\sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

On suppose évidemment que  $\mathbf{a}$  est représentable par une variété, sinon on remplace  $\mathbf{a}$  par un multiple convenable (voir [64]).

La somme connexe représente un moyen naturel de fabriquer une suite de variétés en partant d'une variété donnée. Un autre moyen de fabrication d'une telle suite est le passage au revêtement cyclique. Soit  $M$  une variété dont le premier nombre de Betti  $b_1(M)$  est non nul. On choisit une classe non-triviale  $\mathbf{h} \in H^1(M, \mathbf{Z})$ , et on considère le revêtement cyclique à  $n$  feuilles  $M_{\mathbf{h}}(n)$  correspondant à la classe  $\mathbf{h}$ . La suite de variétés obtenue  $\{M_{\mathbf{h}}(n); n = 1, 2, \dots\}$  nous conduit à la seconde question abordée dans ce chapitre (voir également [33] à ce sujet).

**Question 2** *Comment se comporte  $\sigma(M_{\mathbf{h}}(n))$  en fonction de  $n$  ?*

Dans le cas des variétés orientables deux-dimensionnelles, cette question se réduit à la question 1, le cas non-orientable en différant légèrement. Dans les dimensions supérieures, la différence entre ces deux questions est plus marquée. Dans la section (3.3), nous avons indiqué quelques exemples montrant que le comportement de  $\sigma(M_{\mathbf{h}}(n))$  peut varier considérablement. Cependant, notre méthode nous permet d'établir une borne supérieure pour  $\sigma(M_{\mathbf{h}}(n))$  analogue à celle du théorème III.A.

**Théorème III.B** Soient  $M$  une variété fermée de dimension  $m \geq 3$  et  $\mathbf{h} \in H^1(M, \mathbb{Z})$  une classe non-triviale. Il existe une constante  $C(M, \mathbf{h})$  dépendant de  $\mathbf{h}$  et de la topologie de  $M$  tels que pour tout  $n \geq 3$ , on ait l'inégalité suivante :

$$\sigma(M_{\mathbf{h}}(n)) \leq C(M, \mathbf{h}) \frac{n\sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

Compte-tenu des résultats obtenus, du cas des surfaces et du cas des graphes, nous pouvons formuler deux conjectures sur les fonctions  $\sigma(\#_n M)$  et  $\sigma(M_{\mathbf{h}}(n))$  :

**Conjecture 1** Pour toute variété fermée essentielle de dimension  $m$ , on a

$$\sigma(\#_n M) \sim \frac{n}{(\ln n)^m}.$$

**Conjecture 2** Pour toute variété fermée essentielle de dimension  $m$  et pour une classe  $\mathbf{h} \in H^1(M, \mathbb{Z})$  non nulle, on a

$$\sigma(M_{\mathbf{h}}(n)) \lesssim \frac{n}{(\ln n)^m}, \quad n \gg 1.$$

La section suivante est consacrée à la démonstration du théorème III.A. Pour une somme connexe d'un grand nombre de copies d'une variété donnée, nous construisons une métrique spéciale adaptée à cette somme. Ceci nous permet d'estimer supérieurement la constante systolique pour un très grand nombre de copies dans la somme connexe. Dans notre construction métrique, la somme connexe ressemble à une éponge très poreuse, le graphe systoliquement économique donné par la méthode non constructive de P.Erdős & H.Sachs (voir [28]) jouant le rôle d'une ossature pour cette somme. Dans la section (3.3), pour un revêtement cyclique d'un grand nombre de feuilles, nous utilisons à nouveau la construction de graphes d'Erdős et Sachs. On peut choisir ces graphes de sorte qu'ils possèdent une chaîne passant en chacun des sommets du graphe (circuit *hamiltonien*), à laquelle on recolle un certain nombre d'arêtes supplémentaires. Dans notre construction, le circuit hamiltonien correspond au revêtement et les arêtes supplémentaires à des anses ajoutées à celui-ci. Ces anses supplémentaires apparaissent pour des raisons techniques et jouent un rôle important. En effet, le recollement d'anses d'indice 1 ne modifie pas la constante systolique.

## 3.1 Sommes connexes

### 3.1.1 Préliminaires topologiques

Pour cette section, soit  $M^m$  une variété fermée de dimension  $m \geq 3$ . Nous étudions le comportement asymptotique de  $\sigma(\#_n M)$  en fonction de  $n$ . Nous utiliserons de manière décisive le résultat technique suivant :

**Proposition (I.Babenko [4])** *Soit  $M$  une variété de dimension  $m \geq 3$ . Alors*

$$\sigma(M\#(S^1 \times S^{m-1})) = \sigma(M). \quad (3.2)$$

Le contenu topologique de notre construction est le suivant. On prend  $2n$  exemplaires de  $M$  dont on a ôté au préalable  $D$  disques  $m$ -dimensionnels disjoints. On recolle deux exemplaires entre eux le long de la frontière d'un disque : nous obtenons ainsi la somme connexe de deux exemplaires percée de  $2D - 2$  trous. On répète l'opération en recollant l'un après l'autre les exemplaires à la somme connexe formée à l'étape précédente jusqu'à obtenir la somme connexe de  $2n$  exemplaires de  $M$  percée de  $2n(D - 2) + 2$  trous. Recollons maintenant deux par deux les frontières de ces trous : on forme ainsi  $n(D - 2) + 1$  anses sur la somme connexe et l'égalité (3.2) implique que la variété ainsi obtenue possède la même constante systolique que la somme connexe elle-même.

Pour estimer supérieurement cette constante, nous allons donc construire une métrique sur la variété  $M$  percée de  $D$  trous et fixer les anses selon un arrangement particulier.

### 3.1.2 Préparatifs métriques

Rappelons que  $m \geq 3$ . Soit  $\Theta$  une partition de  $M$  en cubes  $m$ -dimensionnels, de sorte que deux cubes s'intersectent toujours par une unique face de dimension inférieure. Pour une telle partition, les faces  $(m - 1)$ -dimensionnelles sont communes à deux  $m$ -cubes exactement. Une telle partition existe : on peut la construire par exemple à partir d'une triangulation de  $M$  en décomposant chaque  $m$ -simplexe en  $m+1$  cubes. On choisit  $\Theta$  avec un nombre minimal d'éléments que l'on notera  $c(M)$ .

On munit chaque cube  $m$ -dimensionnel de la métrique plate euclidienne, de sorte que ses arêtes soient de longueur 1. Cela définit une métrique po-

lyhédrale que nous notons  $g_0$  (voir [3]). Immédiatement,

$$\text{Vol}(M, g_0) = c(M).$$

Posons  $l_0 = \text{sys}(M, g_0)$ . On a :

**Lemme III.A**

$$l_0 \geq 2.$$

**Démonstration.** Considérons une courbe qui réalise la systole de  $M$  pour  $g_0$ . Remarquons que la courbe est linéaire par morceaux. Soit  $T \in \Theta$  un cube contenant un point de cette courbe dans son intérieur. On prend le pl-voisinage ouvert contractile et maximal de  $T$  contenu dans l'étoile de  $T$  (voir [57]), la systole doit intersecter le bord de ce voisinage en deux points au moins. Ceci démontre le lemme.  $\square$

Soit un entier naturel  $k > 2(2 + \lceil \sqrt{m-1}/2 \rceil)$  et fixons un  $m$ -cube  $\mathcal{C}^m$  de  $\Theta$ . Nous subdivisons de manière évidente  $\mathcal{C}^m$  en  $k^m$  cubes réguliers de taille  $1/k$  et on note  $\mathcal{F}(\mathcal{C}^m, k)$  la famille de cubes ainsi obtenue. Considérons la sous-famille suivante

$$\mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k) = \left\{ C \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^m, k); d(C, \partial\mathcal{C}^m) \geq \frac{2 + \lceil \sqrt{m-1}/2 \rceil}{k} \right\}$$

de cardinal  $(k - 2(2 + \lceil \sqrt{m-1}/2 \rceil))^m$ .

### 3.1.3 Fabrication d'une écumoire

On perce maintenant dans chaque cube  $C$  de  $\mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k)$  le petit cube (ouvert)  $C' = \{x \in C; d(x, \partial C) > 1/(2k^2)\}$  de taille  $(k-1)/k^2$  centré en le barycentre de  $C$ . L'ensemble  $\mathcal{C}^m(k) = \mathcal{C}^m \setminus \{C'; C \in \mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k)\}$  est le cube initial  $\mathcal{C}^m$  auquel on a ôté  $(k - 2(2 + \lceil \sqrt{m-1}/2 \rceil))^m$  cubes identiques disjoints.

**Lemme III.B**

$$\text{Vol}(\mathcal{C}^m(k)) \leq \frac{4m^{3/2}}{k}. \quad (3.3)$$



**Démonstration.** En étudiant le volume de  $\cup\{C'; C \in \mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k)\}$  et le volume de  $\mathcal{C}^m \setminus \{C \in \mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k)\}$  séparément, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathcal{C}^m(k)) &\leq 1 - \left(1 - \frac{2(2 + [\sqrt{m-1}/2])}{k}\right)^m \\ &\quad + \frac{(k - 2(2 + [\sqrt{m-1}/2]))^m}{k^m} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^m\right) \\ &\leq \frac{m(4 + \sqrt{m-1})}{k} + \frac{m}{k} \\ &\leq \frac{m(4\sqrt{m})}{k}. \end{aligned}$$

□

Définissons la  $k$ -écumoire de la variété  $(M, g_0)$  en posant

$$M(k) = \bigcup_{\mathcal{C}^m \in \Theta} \mathcal{C}^m(k), \quad (3.4)$$

munie de la métrique  $\bar{g}_0$  induite par  $g_0$ . De (3.3) et de (3.4), on déduit

$$\text{Vol}(M(k), \bar{g}_0) \leq \frac{4m^{3/2}}{k} c(M). \quad (3.5)$$

$M$  et  $k$  étant fixés, on note

$$D = (k - 2(2 + [\sqrt{m-1}/2]))^m c(M).$$

$M(k)$  est la pl-variété à bord obtenue en ôtant  $D$  disques  $m$ -dimensionnels à  $M$ .

Définissons le graphe suivant :

$$\mathcal{A}_D = \{\{s_0, \dots, s_D\}; \{(s_0, s_i), 1 \leq i \leq D\}\}. \quad (3.6)$$

Chaque élément de  $\bigcup_{\mathcal{C}^m \in \Theta} \mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k)$  est indexé comme  $C_1, \dots, C_D$ .

On note  $\bar{C}_i = C_i \cap M(k)$  pour  $i$  variant de 1 à  $D$ . Définissons alors l'application  $f : M(k) \rightarrow \mathcal{A}_D$  par les formules :

$$f(x) = \begin{cases} s_0 & \text{si } x \notin \bigcup_{i=1}^D \bar{C}_i, \\ 2k^2 d(x, \partial C_i) s_i + (1 - 2k^2 d(x, \partial C_i)) s_0 & \text{si } x \in \bar{C}_i. \end{cases} \quad (3.7)$$

On munit  $\mathcal{A}_D$  de la métrique linéaire, où la longueur de chaque arête vaut  $1/(2k^2)$ . Quelque soit  $x \in \overline{C}_i$ , on a :

$$d(s_0, f(x)) = d(x, \partial C_i).$$

**Lemme III.C**  $f : M(k) \rightarrow \mathcal{A}_D$  contracte les distances.

**Démonstration.** Choisissons deux éléments  $x$  et  $y$  de  $M(k)$ .

- Si  $f(x)$  et  $f(y)$  appartiennent à deux arêtes différentes  $(s_0, s_i)$  et  $(s_0, s_j)$ , alors

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d(f(x), s_0) + d(s_0, f(y)) \\ &= d(x, \partial C_i) + d(y, \partial C_j) \\ &\leq d(x, y). \end{aligned}$$

- Si  $f(x)$  et  $f(y)$  appartiennent à une même arête  $(s_0, s_i)$ , alors

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |d(x, \partial C_i) - d(y, \partial C_i)| \\ &\leq d(x, y), \end{aligned}$$

comme l'application  $d(A, \cdot)$  est 1-lipschitz pour tout sous-ensemble  $A$  d'un espace métrique  $(X, d)$ .

□

### 3.1.4 Construction d'une éponge

Nous allons maintenant construire à partir d'un grand nombre d'écumoières une *éponge*.

D'après le théorème I.2 et comme  $k > 1$ , on peut choisir pour tout  $n \geq N(D, k^2)$  un graphe  $\Gamma$  à  $2n$  sommets de valence  $D$  tel que la longueur de la systole combinatoire soit plus grande que  $k^2$ . Construisons une nouvelle variété  $M(2n, k)$  ainsi qu'une application  $F : M(2n, k) \rightarrow \Gamma$ . On considère tout d'abord la subdivision barycentrique  $\overline{\Gamma}$  de  $\Gamma$  : c'est un graphe, qui n'est plus  $D$  régulier. On note  $t_1, \dots, t_{2n}$  les sommets de valence  $D$  de  $\overline{\Gamma}$ , et  $t_{ij}$  les barycentres de  $(t_i, t_j)$ , si  $(t_i, t_j) \in \Gamma$  où  $1 \leq i, j \leq 2n$ .

En considérant  $\overline{\Gamma}$  comme un complexe simplicial, on peut identifier

$$\mathcal{A}_{D,i} = \text{st}(t_i); 1 \leq i \leq 2n,$$

où  $st$  désigne l'étoile d'un sommet. Chaque  $\mathcal{A}_{D,i}$  est une copie de  $\mathcal{A}_D$  (voir (3.6)). Remarquons que  $\mathcal{A}_{D,i} \cap \mathcal{A}_{D,j} \neq \emptyset$  si et seulement si  $(t_i, t_j) \in \Gamma$ , et alors  $\mathcal{A}_{D,i} \cap \mathcal{A}_{D,j} = t_{ij}$ .

On munit  $\bar{\Gamma}$  de la métrique linéaire  $h$ , pour laquelle la longueur de chaque arête vaut  $1/(2k^2)$ . On a donc  $\text{sys}(\bar{\Gamma}, h) \geq 1$ . Ce graphe se plonge alors naturellement au sens métrique dans le graphe  $\Gamma$  muni de la métrique linéaire pour laquelle la longueur de chaque arête vaut  $1/k^2$ . Si on considère  $2n$  copies  $M_1(k), \dots, M_{2n}(k)$  de  $M(k)$ , on peut définir par analogie avec (3.7), une application pour tout  $i \in \{1, \dots, 2n\}$

$$f_i : M_i(k) \rightarrow \mathcal{A}_{D,i}. \quad (3.8)$$

Soient  $i, j \in \{1, \dots, 2n\}$  tels que  $\mathcal{A}_{D,i} \cap \mathcal{A}_{D,j} = t_{ij}$ . Les images réciproques de ce point par  $f_i$  et  $f_j$  sont deux bords de cubes  $m$ -dimensionnels isométriques, que l'on recolle naturellement par une isométrie  $\alpha_{ij}$ .

Définissons alors la  $(2n, k)$ -éponge

$$M(2n, k) = \prod_{i=1}^{2n} M_i(k) / \sim \quad (3.9)$$

où  $\sim$  est donnée par l'identification selon les isométries  $\alpha_{ij}$  définies pour  $\mathcal{A}_{D,i} \cap \mathcal{A}_{D,j} = t_{ij}$ . Remarquons que  $M(2n, k)$  dépend du graphe  $\Gamma$  choisi. On a facilement

$$M(2n, k) = \#_{i=1}^{2n} M_i \quad \#_{j=1}^{n(D-2)+1} (S^1 \times S^{m-1})_j.$$

Rappelons ici que  $D$  dépend de  $M$  et de  $k$ . De (3.2), nous déduisons :

$$\sigma(M(2n, k)) = \sigma(\#_{2n} M). \quad (3.10)$$

$M(2n, k)$  est munie de la métrique  $g_1$  coïncidant sur chaque  $M_i(k)$  avec  $\bar{g}_0$ . On note  $l_1 = \text{sys}(M(2n, k), g_1)$ . Pour cette métrique,

$$\text{Vol}(M(2n, k), g_1) = 2n \text{Vol}(M(k), \bar{g}_0). \quad (3.11)$$

**Proposition III.A** *L'application*

$$\begin{aligned} F : M(2n, k) &\longrightarrow \bar{\Gamma} \subset \Gamma \\ x &\longrightarrow f_i(x) \text{ si } x \in M_i(k) \end{aligned}$$

est bien définie et contracte les distances.

**Démonstration.** Si  $i, j$  sont tels que  $\mathcal{A}_{D,i} \cap \mathcal{A}_{D,j} = t_{ij}$ , on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
M_i(k) & \longleftarrow & f_i^{-1}(t_{ij}) & \xrightarrow{\sim} & f_j^{-1}(t_{ij}) & \longrightarrow & M_j(k) \\
\downarrow f_i & & \downarrow f_i & & \downarrow f_j & & \downarrow f_j \\
\mathcal{A}_{D,i} & \longleftarrow & \{t_{ij}\} & \xrightarrow{id} & \{t_{ij}\} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{D,j}
\end{array}$$

donc  $F$  est bien définie.

Pour chaque paire  $x, y \in M(2n, k)$ , si  $x, y \in M_i(k)$ , l'application  $f_i$  contracte les distances, comme démontré dans le lemme III.C.

Si  $x \in M_i(k)$  et  $y \in M_j(k)$  avec  $i \neq j$ ,  $d_h(F(x), F(y)) = d_h(f_i(x), f_j(y))$ . Soit  $\tau$  un chemin de  $x$  à  $y$ , tel que  $l_{g_1}(\tau) = d(x, y)$ . Il existe  $(i_2, \dots, i_{s-1}) \in \{1, \dots, 2n\}$  deux à deux distincts tel que  $\tau$  se décompose en une concaténation  $\tau_1 \star \dots \star \tau_s$  de chemins paramétrés sur l'intervalle  $[0, 1]$  avec  $\tau_1 \subset M_i(k), \tau_2 \subset M_{i_2}(k), \dots, \tau_{s-1} \subset M_{i_{s-1}}(k)$  et  $\tau_s \subset M_j(k)$ .

Alors

$$\begin{aligned}
d_h(F(x), F(y)) &\leq d_h(f_i(x), f_i(\tau_1(1))) + d_h(f_{i_2}(\tau_2(0)), f_{i_2}(\tau_2(1))) + \dots \\
&\quad + d_h(f_{i_{s-1}}(\tau_{s-1}(0)), f_{i_{s-1}}(\tau_{s-1}(1))) + d_h(f_s(\tau_s(0)), f_s(y)) \\
&\leq d_{g_1}(x, \tau_1(1)) + d_{g_1}(\tau_2(0), \tau_2(1)) + \dots + d_{g_1}(\tau_s(0), y) \\
&\leq l_{g_1}(\tau) = d(x, y),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

**Proposition III.B** Pour  $n \geq N(D, k^2)$ ,

$$\frac{\sigma(\#_{2n}M)}{2n} \leq \frac{4m^{3/2}c(M)}{k}. \tag{3.12}$$

**Démonstration.** Soit  $\gamma : S^1 \rightarrow M(2n, k)$  une courbe qui réalise la systole de  $M(2n, k)$  pour la métrique  $g_1$ .

Si  $F(\gamma)$  est une courbe non contractile de  $\bar{\Gamma}$ , on a :

$$\begin{aligned} l_1 = l_{g_1}(\gamma) &\geq l_h(F(\gamma)) \\ &\geq \text{sys}(\bar{\Gamma}, h) \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $F(\gamma)$  est contractile.

– Si il existe  $i \in \{1, \dots, 2n\}$  tel que  $\gamma \subset M_i(k)$ , on a

$$l_1 \geq l_0 \geq 2.$$

– Supposons que  $\gamma$  intersecte l'intérieur de plusieurs exemplaires de  $M(k)$ . On énumère les exemplaires  $\{M_{i_1}(k), \dots, M_{i_l}(k)\}$  pour lesquels  $\gamma \cap \text{int}(M_{i_p}(k)) \neq \emptyset$  pour  $p = 1, \dots, l$  (où  $\text{int}(A)$  désigne l'intérieur d'un sous-ensemble).

Donc il existe  $t_1, t_2 \in S^1$  tels que, pour un  $i \in \{1, \dots, 2n\}$  et un  $j \in \{1, \dots, D\}$ ,  $\gamma(t_1)$  et  $\gamma(t_2) \in \partial C'_{i,j}$  et  $\gamma_{][t_1, t_2[} \subset \text{int}(M_i(k))$ , où  $C'_{i,j}$  est le  $j$ -ème cube de taille  $(k-1)/k^2$  que l'on a percé dans  $M_i$ .

On introduit  $\nu$  un arc géodésique minimisant de  $\gamma(t_1)$  à  $\gamma(t_2)$  dans  $\partial C'_{i,j}$ . On a :

$$l_g(\nu) \leq (2 + \sqrt{m-1})/k.$$

Si  $\gamma_{][t_1, t_2]}$  est un élément non trivial de  $\pi_1(M_i(k), \partial C'_{i,j})$ , la concaténation de  $\gamma_{][t_1, t_2]}$  avec  $\nu$  nous fournit un élément non trivial de  $\pi_1(M_i(k))$ , d'où, comme  $k > \sqrt{m-1} + 2$ ,

$$l_1 \geq l_0 - \frac{\sqrt{m-1} + 2}{k} \geq 1.$$

Supposons maintenant que  $\gamma_{][t_1, t_2]}$  est trivial dans  $\pi_1(M_i(k), \partial C'_{i,j})$ . Si il existe  $t_3 \in ]t_1; t_2[$  tel que  $\gamma(t_3) \in \partial \mathcal{C}^m$  où  $\mathcal{C}^m \in \Theta_i$  est le cube de taille 1 contenant  $C'_{i,j}$ ,

$$\begin{aligned} l_{g_1}(\gamma_{][t_1, t_2]}) &\geq d_{g_1}(\gamma(t_1), \partial \mathcal{C}^m) + d_{g_1}(\gamma(t_2), \partial \mathcal{C}^m) \\ &\geq 2 \left( \frac{2 + \lceil \sqrt{m-1}/2 \rceil}{k} \right) \\ &> \frac{\sqrt{m-1} + 2}{k}. \end{aligned}$$

On peut alors remplacer  $\gamma_{|[t_1; t_2]}$  par  $\nu$  ce qui diminue la systole de  $M(2n, k)$  : une contradiction.

Si  $\gamma_{|[t_1; t_2]} \subset \mathcal{C}^m$ , on peut à nouveau diminuer la longueur de la systole par le même procédé. D'où une contradiction.

Donc

$$l_1 = \text{sys}(M(2n, k), g_1) \geq 1.$$

Cette estimée implique, avec (3.5) et (3.11),

$$\frac{1}{2n} \frac{\text{Vol}(M(2n, k), g_1)}{\text{sys}(M(2n, k), g_1)^m} \leq \frac{4m^{3/2}c(M)}{k}.$$

De (3.10), on déduit le résultat.  $\square$

### 3.1.5 Obtention de l'estimée supérieure

Notre but est maintenant d'estimer la constante systolique  $\sigma(\#_n M)$  en fonction de  $n$ . D'après (1.3),

$$N(D, k^2) = 2 \sum_{t=1}^{k^2-2} (D-1)^t,$$

avec  $D = (k - 2(2 + \lceil \sqrt{m-1}/2 \rceil))^m c(M)$ . Prenons

$$(k^m c(M))^{k^2} \leq n \leq ((k+1)^m c(M))^{(k+1)^2}.$$

Pour  $k$  suffisamment grand ( $k \geq k_0$  où  $k_0$  est un entier naturel), on a

$$\frac{\ln \ln 2n}{\ln 2n} \geq \frac{1}{4mk^2}.$$

Comme  $n \geq N(D, k^2)$ , l'estimée (3.12) est valable et on obtient pour tout  $n \geq N_1(M) = (k_0^m c(M))^{k_0^2}$

$$\frac{\sigma(\#_{2n} M)}{2n} \leq 8m^2 c(M) \sqrt{\frac{\ln \ln 2n}{\ln 2n}}.$$

D'autre part, on a

$$\sigma(\#_{2n+1}M) \leq \sigma(\#_{2n}M) + \sigma(M).$$

Fixons  $N_2(M)$  le premier entier naturel plus grand que  $N_1(M)$  vérifiant pour tout  $n \geq N_2(M)$

$$\sigma(M) \leq 16m^2c(M)\frac{n\sqrt{\ln \ln 2n}}{\sqrt{\ln 2n}}.$$

Nous obtenons pour tout  $n \geq N_2(M)$

$$\begin{aligned} \sigma(\#_{2n+1}M) &\leq 16m^2c(M)\frac{n\sqrt{\ln \ln 2n}}{\sqrt{\ln 2n}} + \sigma(M) \\ &\leq (4m)^2c(M)\frac{(2n+1)\sqrt{\ln \ln(2n+1)}}{\sqrt{\ln(2n+1)}}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $n \geq N(M) = 2N_2(M)$ ,

$$\sigma(\#_nM) \leq (4m)^2c(M)\frac{n\sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

On en déduit le théorème III.A.

### 3.1.6 Démonstration des corollaires

Comme nous l'avons déjà noté, le corollaire III.A1 est immédiat. Démontrons le corollaire III.A2. Soient  $\mathbf{a} \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$  une classe d'ordre infinie et  $M$  une variété qui représente  $\mathbf{a}$ . Cela signifie que  $\pi_1(M) = \pi$  et que, pour l'application classifiante  $f : M \rightarrow K(\pi, 1)$ , on a  $f_*([M]) = \mathbf{a}$ . Remarquons alors que  $M$  est nécessairement orientable. On considère la somme connexe  $\#_nM$  et l'application naturelle  $p : \#_nM \rightarrow M$  de degré  $n$ . Pour l'application

$$f \circ p : \#_nM \rightarrow K(\pi, 1),$$

on a  $(f \circ p)_*([\#_nM]) = n\mathbf{a}$ . D'autre part, d'après [3], nous avons

$$\sigma(n\mathbf{a}) = \sigma_{p_*}(\#_nM) \leq \sigma(\#_nM).$$

Ceci avec le théorème III.A implique le corollaire III.A2.

## 3.2 Revêtements cycliques

Dans cette section, étant donnée une variété  $M$  dont le premier nombre de Betti est non nul, nous allons étudier le comportement systolique asymptotique du revêtement cyclique à  $k$  feuilles associé à une classe cohomologique de  $H^1(M, \mathbb{Z})$ .

Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $m \geq 2$ , telle que  $b_1(M) > 0$ . On choisit un élément  $a \in H^1(M, \mathbb{Z})$  non trivial.

On note  $M(a)$  le revêtement de  $M$  correspondant au sous-groupe  $G$  du groupe fondamental obtenu comme noyau de l'application suivante :

$$\pi_1(M) \xrightarrow{H} H_1(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{a} \mathbb{Z},$$

où  $H$  désigne l'homomorphisme de Hurewicz.

$\mathbb{Z}$  agit librement sur cette variété, et donc,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , on considère le revêtement cyclique à  $k$  feuilles obtenu comme le quotient

$$M_k(a) = M(a)/k\mathbb{Z}.$$

On s'intéresse ici au comportement asymptotique de  $\sigma(M_k(a))$ . Les exemples suivants montrent que le comportement de  $\sigma(M_k(a))$  en fonction de  $k$  est bien plus irrégulier que celui de  $\sigma(\#_k M)$ . Il dépend fortement de la topologie de  $M$ . Cependant, une borne supérieure universelle en  $k$  pour ce comportement existe.

### 3.2.1 Exemples de comportement

**Exemple 1.** Soient  $X$  une variété de dimension  $n \geq 3$  et  $Y$  une variété de dimension  $(n + 1)$ . Posons

$$M = (X \times S^1)\#Y.$$

Nous projettons naturellement la variété  $M$  sur  $S^1$  en contractant d'abord la variété  $Y$  dans un point puis en projetant  $X \times S^1$  sur  $S^1$  par la projection sur le second facteur. Cette application nous définit une classe  $h \in H^1(M, \mathbb{Z})$ , et pour les revêtements correspondants, nous obtenons

$$M_k = (X \times S^1)\#_k Y,$$



d'où

$$\sigma(M_k) \leq \sigma(X \times S^1) + \sigma(\#_k Y).$$

De plus, si les variétés sont supposées orientables (voir [3]) ,

$$\sigma(\#_k Y) \leq \sigma(M_k),$$

ce qui fournit le comportement

$$\frac{\sigma(M_k)}{k} \sim \frac{\sigma(\#_k Y)}{k}.$$

Du théorème III.A nous obtenons l'estimée supérieure :

$$\frac{\sigma(M_k)}{k} \leq C \frac{\sqrt{\ln \ln k}}{\sqrt{\ln k}} + \frac{\sigma(X \times S^1)}{k} \lesssim C \frac{\sqrt{\ln \ln k}}{\sqrt{\ln k}}.$$

**Exemple 2.** Soit  $p : M \rightarrow S^1$  un fibré de fibre  $N$ . Il existe un difféomorphisme  $F$  de  $N$  tel que

$$M = N \times I / F$$

où  $I$  désigne le segment  $[0, 1]$ . On note  $a = p^*(d\phi)$  où  $d\phi$  est la 1-forme canonique de  $S^1$ . Si on définit, pour  $k$  entier naturel,  $M_k$  comme le revêtement cyclique à  $k$  feuilles de  $M$  correspondant à la classe  $a$ , on obtient :

$$M_k = N \times I / F^k.$$

Dans le cas où  $F$  est un difféomorphisme périodique de période  $l$ , la suite  $\{\sigma(M_k)\}_k$  est une suite périodique de période  $l$ .

En particulier, si  $M = \mathbb{K}^2$  est la bouteille de Klein et  $p$  sa projection naturelle sur le cercle,

$$M_k = \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \mathbb{T}^2 & \text{si } k \text{ est pair,} \end{cases}$$

et  $\sigma(M_k)$  vaut alternativement  $2\sqrt{2}/\pi$  et  $\sqrt{3}/2$ .

### 3.2.2 Démonstration du théorème III.B

Dans cette démonstration, nous utilisons les mêmes idées et la même technique que pour la démonstration du théorème III.A. La plupart des étapes fonctionnent de manière similaire et, dans un souci de concision, seuls les détails spécifiques au théorème III.B sont précisés.

**Préparatifs métriques.** Etant donnée une classe  $\mathbf{h} \in H^1(M, \mathbb{Z})$  que nous choisirons toujours indivisible, soit

$$f : M \rightarrow S^1$$

une application classifiante pour  $h$ . On peut supposer cette application lisse, et choisir un point  $x_0$  régulier, ce qui nous fournit un cobordisme : la variété  $M$  peut être identifiée au quotient d'une variété à bord  $M'$ , où  $\partial M' = N_1 \cup N_2$  consiste en deux exemplaires de la sous-variété  $f^{-1}(x_0) = N$ , par l'application identité entre les deux composantes du bord. On note  $q : M' \rightarrow M$  cette application. Il existe une partition  $\Theta$  de  $M$  par une famille de cubes  $m$ -dimensionnels, tels que toute face  $(m-1)$ -dimensionnelle soit l'intersection de deux cubes  $m$ -dimensionnels, et  $N$  soit l'union de faces de dimension  $m-1$ . Cette partition fournit une partition  $\Theta'$  de  $M'$  en cubes  $m$ -dimensionnels par l'application  $q$ . On choisit  $f$ ,  $x_0$  et  $\Theta'$  de sorte que  $\Theta'$  ait un nombre minimal de cubes que l'on note  $c'(M, \mathbf{h})$ . Munissons  $M'$  de la pl-métrie  $h_0$  construite de manière similaire à celle construite dans le paragraphe 3.1.2. Cette métrique se projette en une métrique sur  $M$  que l'on note  $q_*h_0$ . Notons  $l'_0 = \text{sys}(M, q_*h_0)$ . Du lemme III.A, on déduit aussitôt :

$$l'_0 \geq 2.$$

**Fabrication de l'écumoire.** Soit  $k > 2(2 + [\sqrt{m-1}/2])$ . Comme en (3.4), on considère la  $k$ -écumoire de cette variété à bord :

$$M(\mathbf{h}, k) = \bigcup_{\mathcal{C}^m \in \Theta'} \mathcal{C}^m(k),$$

munie de la pl-métrie  $\overline{h_0}$  induite par  $h_0$ . L'image de  $M(\mathbf{h}, k)$  par  $q$  est la variété  $M$  percée de  $(k - 2(2 + [\sqrt{m-1}/2]))^m c'(M, \mathbf{h})$  trous isométriques.

Nous obtenons (voir (3.3) et (3.5)) :

$$\text{Vol}(M(\mathbf{h}, k), \overline{h_0}) \leq \frac{4m^{3/2}}{k} c'(M, \mathbf{h}).$$

Chaque élément de  $\cup\{\mathcal{G}(\mathcal{C}^m, k) \mid \mathcal{C}^m \in \Theta'\}$  est indexé comme  $C_1, \dots, C_{D'}$ , où  $D' = (k - 2(m + 1))^m c'(M, \mathbf{h})$ , et posons  $\overline{C}_i = C_i \cap M(\mathbf{h}, k)$ .

Par analogie avec la formule (3.7) et ayant à l'esprit la définition (3.6), définissons l'application  $\psi : M(\mathbf{h}, k) \rightarrow \mathcal{A}_{D'+2}$  par les formules :

$$\psi(x) = \begin{cases} s_0 & \text{si } x \notin \cup \overline{C}_i \text{ et } d(x, \partial M(\mathbf{h}, k)) > \frac{1}{2k^2}; \\ 2k^2 d(x, \partial C_i) s_i + (1 - 2k^2 d(x, \partial C_i)) s_0 & \text{si } x \in \overline{C}_i, 1 \leq i \leq D'; \\ 2k^2 d(x, N_j) s_0 + (1 - 2k^2 d(x, N_j)) s_{D'+j} & \text{si } d(x, N_j) \leq \frac{1}{2k^2} \text{ et } j = 1, 2. \end{cases}$$

On munit  $\mathcal{A}_{D'+2}$  de la métrique linéaire, où la longueur de chaque arête vaut  $\frac{1}{2k^2}$ . Par analogie avec le lemme III.C, on obtient

**Lemme III.D**  $\psi : M(\mathbf{h}, k) \rightarrow \mathcal{A}_{D'+2}$  contracte les distances.

**Construction d'une éponge.** D'après le théorème I.2, on peut choisir pour  $n \geq N(D' + 2, k^2)$  un graphe  $\Gamma'$  à  $2n$  sommets de valence  $D' + 2$  tel que la longueur de la systole soit minorée par  $k^2$ .

Nous allons construire une nouvelle variété  $M(\mathbf{h}, k; 2n)$  à l'aide de  $\Gamma'$  et de  $M(\mathbf{h}, k)$  de sorte que  $\sigma(M(\mathbf{h}, k; 2n)) = \sigma(M_{\mathbf{h}}(2n))$ .

On considère tout d'abord une subdivision barycentrique  $\overline{\Gamma}'$  de  $\Gamma'$ . D'après le théorème I.2, on peut noter  $\{t_1, \dots, t_{2n}\}$  les sommets de  $\Gamma'$  de sorte qu'ils forment un chemin fermé simple  $c$ . On note, pour  $1 \leq i, j \leq 2n$  tels que  $(t_i, t_j) \in \Gamma'$ ,  $t_{i,j}$  le barycentre de  $(t_i, t_j)$ .

Considérant  $\overline{\Gamma}'$  comme un complexe simplicial, posons

$$\mathcal{A}_{D'+2,i} = \text{st}(t_i),$$

pour  $1 \leq i \leq 2n$ . On munit  $\overline{\Gamma}'$  de la métrique linéaire pour laquelle la longueur de chaque arête vaut  $\frac{1}{2k^2}$ .

Considérons  $2n$  copies  $M_1(\mathbf{h}, k), \dots, M_{2n}(\mathbf{h}, k)$  de  $M(\mathbf{h}, k)$  et définissons par analogie avec (3.8) pour chaque  $1 \leq i \leq 2n$

$$\psi_i : M_i(\mathbf{h}, k) \rightarrow \mathcal{A}_{D'+2,i},$$

de sorte que  $\psi_i^{-1}(t_{i-1,i}) = N_{1,i}$  et  $\psi_i^{-1}(t_{i,i+1}) = N_{2,i}$ .

Soient  $1 \leq i, j \leq 2n$  tels que  $t_{i,j} \in \overline{\Gamma'}$  mais  $t_{i,j} \notin c$ . Alors  $\psi_i^{-1}(t_{i,j})$  et  $\psi_j^{-1}(t_{i,j})$  sont deux bords de cubes  $m$ -dimensionnels isométriques que l'on recolle par une isométrie  $\beta_{i,j}$ .

Si  $1 \leq i \leq 2n - 1$ ,  $\psi_i^{-1}(t_{i,i+1})$  et  $\psi_{i+1}^{-1}(t_{i,i+1})$  sont deux exemplaires de la même variété que l'on recolle par l'application identité  $\beta_{i,i+1}$ . De même,  $\psi_1^{-1}(t_{2n,1})$  et  $\psi_{2n}^{-1}(t_{2n,1})$  sont deux exemplaires de la même variété que l'on identifie par l'application identité  $\beta_{2n,1}$ .

On définit alors par analogie avec (3.9)

$$M(\mathbf{h}, k; 2n) = \prod_{i=1}^{2n} M_i(\mathbf{h}, k) / \sim,$$

où la relation  $\sim$  est donnée par l'identification selon les isométries  $\{\beta_{i,j}\}$  pour  $1 \leq i, j \leq 2n$  avec  $t_{i,j} \in \overline{\Gamma'}$ .

On a :

$$M(\mathbf{h}, k; 2n) = M_{\mathbf{h}}(2n) \#_{j=1}^{nD'} (S^1 \times S^{m-1})_j.$$

De (3.2), on déduit :

$$\sigma(M(\mathbf{h}, k; 2n)) = \sigma(M_{\mathbf{h}}(2n)).$$

$M(\mathbf{h}, k; 2n)$  est munie de la métrique  $h_1$  coïncidant sur chaque exemplaire  $M_i(\mathbf{h}, k)$  avec  $\bar{h}_0$ .

Pour cette métrique,

$$\text{Vol}(M(\mathbf{h}, k; 2n), h_1) = 2n \cdot \text{Vol}(M(\mathbf{h}, k), \bar{h}_0).$$

De manière similaire à la proposition III.A, nous obtenons

**Proposition III.C** *L'application*

$$\begin{aligned} \Psi : M(\mathbf{h}, k; 2n) &\longrightarrow \overline{\Gamma'} \\ x &\longrightarrow \psi_j(x) \text{ si } x \in M_j(\mathbf{h}, k) \end{aligned}$$

*est bien définie et contracte les distances.*

En estimant inférieurement la systole de  $M(\mathbf{h}, k; 2n)$  pour la métrique  $h_1$  par 1, on obtient :

**Proposition III.E** *Pour  $n \geq N(D' + 2, k^2)$ ,*

$$\frac{\sigma(M(\mathbf{h}, k; 2n), h_1)}{2n} \leq \frac{4m^{3/2}}{k} c'(M, \mathbf{h}).$$

**Obtention de l'estimée supérieure.** On procède comme dans le paragraphe 3.1.5. Il existe un entier naturel  $k'_0$  tel que pour tout  $k \geq k'_0$ , et  $n$  vérifiant

$$(k^m c'(M, \mathbf{h}) + 2)^{k^2} \leq n \leq ((k+1)^m c'(M, \mathbf{h}) + 2)^{(k+1)^2},$$

on ait

$$\frac{\ln \ln 2n}{\ln 2n} \geq \frac{1}{4mk^2}.$$

Donc, si on pose

$$N'_1(M, \mathbf{h}) = (k'_0{}^m c'(M, \mathbf{h}) + 2)^{k'_0{}^2},$$

pour tout  $n \geq N'_1 = N'_1(M, \mathbf{h})$ ,

$$\sigma(M_{\mathbf{h}}(2n)) \leq 8m^2 c'(M, \mathbf{h}) \frac{2n \sqrt{\ln \ln 2n}}{\sqrt{\ln 2n}}.$$

On fixe  $N' = N'(M, \mathbf{h})$  comme le premier entier supérieur à  $N'_1$  tel que pour  $n \geq N'$ ,

$$\text{Vol}(M', h_0) \leq 8m^2 c'(M, \mathbf{h}) \frac{2n \sqrt{\ln \ln 2n}}{\sqrt{\ln 2n}}.$$

On insère alors de manière évidente au-dessus de  $t_{2n,1}$  entre les exemplaires  $M_{2n}(\mathbf{h}, k)$  et  $M_1(\mathbf{h}, k)$  de  $M(\mathbf{h}, k; 2n)$  un exemplaire de  $M'$  muni de la métrique  $h_0$ , ce qui ne diminue pas la systole et augmente le volume de  $\text{Vol}(M', h_0)$ . La variété  $M(\mathbf{h}, k; 2n+1)$  ainsi obtenue vérifie pour tout  $n \geq N'$

$$\begin{aligned} \sigma(M_{\mathbf{h}}(2n+1)) &= \sigma(M(\mathbf{h}, k; 2n+1)) \\ &\leq \sigma(M(\mathbf{h}, k; 2n)) + \text{Vol}(M', h_0) \\ &\leq (4m)^2 c'(M, \mathbf{h}) \frac{(2n+1) \sqrt{\ln \ln(2n+1)}}{\sqrt{\ln(2n+1)}}. \end{aligned}$$

On en déduit pour tout  $n \geq 2N'$

$$\sigma(M_{\mathbf{h}}(n)) \leq (4m^2) c'(M, \mathbf{h}) \frac{n \sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

Le théorème III.B est alors immédiat.



## Chapitre 4

# Systoles et diamètre sur les variétés simplement connexes





Nous présentons dans ce chapitre l'ensemble des résultats connus sur certaines inégalités universelles (*i.e.* sans hypothèses de courbure) entre des longueurs de courbes et le diamètre d'une variété riemannienne simplement connexe dont le second groupe homotopique est non trivial, puis nous démontrons une nouvelle inégalité de ce type. Ce chapitre constitue une partie de l'article [8].

Désignons par  $M^m$  une variété fermée de dimension  $m$  simplement connexe et  $g$  une métrique riemannienne. Nous supposons dans toute cette section que le second groupe homotopique de  $M$  est non trivial :  $\pi_2(M) \neq 0$ . Nous introduisons différentes longueurs associées à la variété riemannienne  $(M, g)$ .

On définit tout d'abord la *systole* que l'on note  $\text{sys}_0(M, g)$  comme la plus petite longueur d'une géodésique fermée de  $M$  (non triviale). Malheureusement, dans le cas simplement connexe, la systole est difficile à estimer en fonction du diamètre de la variété (voir [54] à ce sujet), et on est obligé d'introduire d'autres longueurs.

Etant donné un point  $p$  de  $M$ , la *l-systole en  $p$*  que l'on note  $\text{lsys}_p(M, g)$  est la plus petite longueur d'un lacet géodésique non trivial de  $M$  basé en  $p$ . La dénomination de cette longueur est justifiée par le fait qu'elle est réalisée comme la longueur d'un lacet géodésique basé en  $p$  appelé *lacet systolique basé en  $p$* . La *l-systole* que l'on note  $\text{lsys}(M, g)$  est la plus petite longueur d'un lacet géodésique de  $M$  non trivial. Cette quantité est réalisée comme la longueur d'un lacet géodésique dit *lacet systolique*. On a

$$\text{lsys}(M, g) = \min_{p \in M} \text{lsys}_p(M, g).$$

Comme  $M$  est compacte et  $g$  lisse,  $\text{lsys}(M, g) > 0$ .

On définit ensuite  $\text{mm}(M, g)$  la longueur obtenue par un procédé de mini-max sur l'espace des courbes fermées de  $M$ . Plus précisément (voir [41]), on

considère  $\Lambda M$  l'espace des courbes  $c : S^1 \rightarrow M$  lisses par morceaux fermées de  $M$  muni de la topologie  $C^0$ . On note  $\Lambda^0 M$  le sous-ensemble de  $\Lambda M$  formé des courbes constantes. De l'isomorphisme  $\pi_1(\Lambda M, \Lambda^0 M) = \pi_2(M) \neq 0$ , on obtient que

$$\min\{\max_{s \in [0,1]} l_g(\gamma_s) \mid \{\gamma_s\} \neq 0 \in \pi_1(\Lambda M, \Lambda^0 M)\}$$

est une quantité non nulle et on note  $\text{mm}(M, g)$  cette quantité ( $l_g(\cdot)$  désigne ici la longueur d'une courbe induite par la métrique riemannienne  $g$ ). C'est un résultat classique que  $\text{mm}(M, g)$  est réalisée comme la longueur d'une géodésique fermée, et on obtient ainsi  $\text{sys}_0(M, g) \leq \text{mm}(M, g)$ . Cette technique, appelée principe du minimax, a été initiée par G. Birkhoff [19].

Enfin, on définit  $\text{mm}_2(M, g)$  la longueur obtenue par un procédé de minimax sur l'espace  $G$  des paires de courbes de  $M$ . Plus précisément (voir [25] et [53]), on considère  $CM$  l'espace des chemins  $c : [0, 1] \rightarrow M$  lisses par morceaux. On définit ensuite les espaces

$$G_1 = \{\Phi = (c_1, c_2) \in CM \times CM \mid c_1(1) = c_1(0) \text{ et } c_2(1) = c_2(0)\},$$

et

$$G_2 = \{\Phi = (c_1, c_2) \in CM \times CM \mid c_1(1) = c_2(0) \text{ et } c_2(1) = c_1(0)\}.$$

On pose

$$G = G_1 \cup G_2.$$

On note  $G^0$  le sous-ensemble de  $G$  formé des paires de courbes constantes et on définit  $L_g(\Phi) = l_g(c_1) + l_g(c_2)$ . Dans le cas où  $M$  est simplement connexe,  $\pi_1(G, G^0)$  est naturellement isomorphe à  $\pi_2(M)$  (voir [58]), ce qui nous permet d'obtenir une valeur non triviale de minimax

$$\text{mm}_2(M, g) = \min\{\max_{s \in [0,1]} L_g(\Phi_s) \mid \{\Phi_s\} \neq 0 \in \pi_1(G, G^0)\}.$$

Cette valeur est réalisée soit par une géodésique fermée, soit par une paire de géodésiques fermées, soit par une paire de lacets géodésiques basés en un même point de sorte que les quatre vecteurs unitaires tangents à l'origine des deux lacets géodésiques soient de somme nulle.

Dans le cas où  $\dim M = 2$ , cette dernière condition implique que les deux lacets forment une géodésique fermée en huit. On obtient en particulier

$$\text{sys}_0(S^2, g) \leq \text{mm}_2(S^2, g). \quad (4.1)$$

D'une manière générale,

$$\text{lsys}(M, g) \leq \text{sys}_0(M, g) \leq \text{mm}(M, g), \quad (4.2)$$

et

$$\text{lsys}(M, g) \leq \text{mm}_2(M, g) \leq \text{mm}(M, g). \quad (4.3)$$

L'exemple de la sphère avec trois longs doigts dont un est contracté en son milieu et un autre très fin nous montre que ces inégalités peuvent être strictes simultanément (voir la figure 4.1).

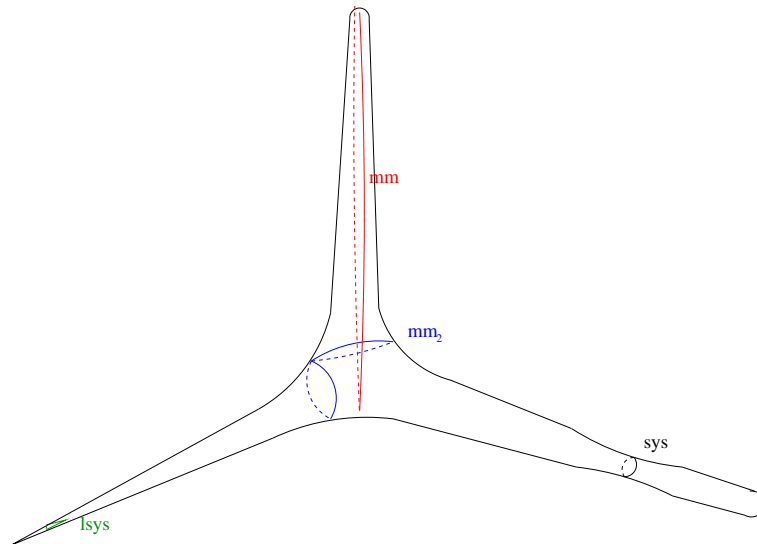


FIG. 4.1 – Sphère à trois longs doigts

Nous nous intéressons ici aux inégalités géométriques que l'on peut obtenir entre ces longueurs et le diamètre de la variété. L'inégalité la plus intéressante est de la forme suivante :

$$\text{sys}_0(M, g) \leq C(M)\text{Diam}(M, g), \quad (4.4)$$

pour toute métrique Riemannienne lisse  $g$  où  $C(M)$  est une constante ne dépendant que de la topologie de  $M$  et  $\text{Diam}(M, g)$  désigne le diamètre. Ce résultat, bien qu'évident pour les variétés non simplement connexes pour lesquelles  $\text{sys}_0 \leq 2\text{Diam}$ , n'est pas encore démontré dans le cas d'une variété simplement connexe de dimension plus grande que 3. Le cas de la sphère 2-dimensionnelle est un peu à part comme nous allons le voir. Nous résumons ici les principaux résultats trouvés dans cette direction.

M.Maeda, améliorant une inégalité obtenue par C.Croke [26], a montré le

**Théorème IV.1 (M.Maeda [44])** *Soit  $(S^2, g)$  une sphère riemannienne. Alors*

$$\min\left\{\frac{1}{2}\text{sys}_0(S^2, g), \frac{1}{5}\text{mm}(S^2, g)\right\} \leq \text{Diam}(S^2, g).$$

De l'inégalité (4.2), on déduit que

$$\text{sys}_0(S^2, g) \leq 5.\text{Diam}(S^2, g).$$

Cette dernière inégalité a été améliorée simultanément par S.Sabourau d'une part, A.Nabutovsky et R.Rotman d'autre part, dans le sens suivant :

**Théorème IV.2 (S.Sabourau [59] ; A.Nabutovsky & R.Rotman [53])** *Soit  $(S^2, g)$  une sphère riemannienne. Alors*

$$\min\left\{\frac{1}{2}\text{sys}_0(S^2, g), \frac{1}{4}\text{mm}_2(S^2, g)\right\} \leq \text{Diam}(S^2, g).$$

De l'inégalité (4.1), on déduit que

$$\text{sys}_0(S^2, g) \leq 4.\text{Diam}(S^2, g).$$

A l'heure actuelle, nous ne connaissons pas de contre-exemple à la conjecture  $\text{sys}_0(S^2, g) \leq 2.\text{Diam}(S^2, g)$ , le cas d'égalité étant réalisé par la métrique ronde.

Pour les variétés simplement connexes de dimension strictement supérieure à 2 telles que  $\pi_2(M) \neq 0$ , nous pouvons citer les résultats suivants.

S. Sabourau a obtenu une inégalité entre la l-systole et le diamètre d'une variété riemannienne complète :

**Théorème IV.3 (S.Sabourau [58])**

*Soit  $(N, g')$  une variété riemannienne complète. Alors*

$$lsys(N, g') \leq c_m Diam(N, g'),$$

*où  $c_m$  est une constante ne dépendant que de la dimension  $m$  de  $N$ .*

Enfin, il a été montré le

**Théorème IV.4 (A. Nabutovsky & R. Rotman [55])**

*Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée simplement connexe. Supposons que le second groupe homotopique de  $M$  est non trivial. Alors*

$$\min\left\{\frac{1}{2}sys_0(M, g), \frac{1}{4}mm_2(M, g)\right\} \leq Diam(M, g).$$

En combinant ce résultat aux inégalités (4.2) et (4.3), on obtient

$$lsys(M, g) \leq 4.Diam(M, g).$$

A notre connaissance, il n'existe pas d'autres inégalités de ce type valables sur les variétés simplement connexes de second groupe homotopique non trivial. Nous allons montrer dans la section suivante une nouvelle inégalité de ce type :

**Théorème IV** *Soit  $M^m$  une variété fermée de dimension  $m \geq 4$  simplement connexe. Supposons que son second groupe homotopique soit non trivial. Alors pour tout  $p \in M$  et pour toute métrique riemannienne  $g$  sur  $M$ ,*

$$\min\left\{\frac{1}{2}lsys_p(M, g), \frac{1}{4}mm(M, g)\right\} \leq Diam(M, g).$$

Comme corollaire, nous obtenons en notant  $Lsys(M, g) = \max_{p \in M} lsys_p(M, g)$  :

**Corollaire IV** *Sous les hypothèses du théorème IV, on a*

$$\min\left\{\frac{1}{2}Lsys(M, g), \frac{1}{4}mm(M, g)\right\} \leq Diam(M, g).$$

La suite de la section est consacrée à la démonstration du théorème IV.

## 4.1 Passage aux métriques analytiques réelles

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée, vérifiant les hypothèses du théorème IV et  $p$  un point de  $M$ . Nous allons montrer dans cette section que, si la conclusion du théorème IV est vérifiée pour une métrique analytique réelle, elle l'est pour toute métrique riemannienne lisse.

On suppose donc que, pour toute métrique riemannienne analytique réelle, la conclusion du théorème IV est vérifiée. Soit  $g$  une métrique riemannienne lisse. De la densité des métriques analytiques réelles dans l'espace des métriques lisses pour la topologie  $C^1$  (voir [37]), on peut trouver une suite de métriques analytiques réelles  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergeant vers la métrique  $g$ .

On peut supposer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall c \in CM$

$$|l_g(c) - l_{g_n}(c)| \leq \frac{1}{n} l_g(c).$$

Le théorème IV étant vérifié pour les métriques analytiques réelles, deux cas se présentent à nous : soit il apparait une infinité de lacets géodésiques  $c_n : [0, 1] \rightarrow M$  basés en  $p$  vérifiant  $l_{g_n}(c_n) \leq 2 \cdot \text{Diam}(M, g_n)$ , soit pour une infinité de  $n$  on a  $\text{mm}(M, g_n) \leq 4 \cdot \text{Diam}(M, g_n)$ .

Clairement, le diamètre dépendant continûment de la métrique, nous avons

$$\text{Diam}(M, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Diam}(M, g_n).$$

Dans le premier cas, on peut extraire en appliquant le théorème d'Ascoli une sous-suite de courbes uniformément convergente. On note  $c$  la courbe limite obtenue. Par un passage à la limite dans l'équation différentielle locale vérifiée par une géodésique, on observe que la courbe  $c$  est encore une géodésique sauf éventuellement en  $c(0) = c(1) = p$ . La courbe  $c$  est donc un lacet géodésique vérifiant, par passage à la limite,

$$l_g(c) \leq 2 \cdot \text{Diam}(M, g).$$

Dans le second cas, fixons  $\eta > 0$ . Pour chaque  $n$  il existe une application  $F_n^\eta : [0, 1] \rightarrow \Lambda M$  telle que  $F_n^\eta(0) = F_n^\eta(1) = p$ , vérifiant

$$\max\{l_{g_n}(F_n^\eta(t)); t \in [0, 1]\} \leq 4 \cdot \text{Diam}(M, g_n) + \eta.$$

et telle que l'application induite en homotopie de dimension 2 soit non triviale. On en déduit

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \max\{l_g(F_n^\eta(t)); t \in [0, 1]\} \leq 4 \cdot \text{Diam}(M, g_n) + \eta,$$

d'où,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\text{mm}(M, g) \leq 4.\text{Diam}(M, g_n) + \eta,$$

et, par passage à la limite,

$$\text{mm}(M, g) \leq 4.\text{Diam}(M, g) + \eta.$$

Ce résultat étant valable pour tout  $\eta > 0$ , on obtient

$$\text{mm}(M, g) \leq 4.\text{Diam}(M, g).$$

Il nous reste donc à démontrer l'inégalité annoncée dans le théorème IV pour une métrique analytique réelle quelconque.

## 4.2 Démonstration du théorème IV dans le cas d'une métrique analytique réelle

On se fixe une métrique analytique réelle  $g$  et un point  $p$  de  $M$ . Supposons que  $\text{lsys}_p(M, g) > 2.\text{Diam}(M, g)$  (dans le cas contraire, la conclusion du théorème IV est immédiate). Soit  $\epsilon > 0$  un réel vérifiant  $\text{lsys}_p(M, g) > 2(\text{Diam}(M, g) + \epsilon)$  et  $\epsilon < \text{Inj}(M, g)$  où  $\text{Inj}(M, g)$  désigne le rayon d'injectivité de  $(M, g)$ .

Nous allons utiliser le procédé de Birkhoff de contraction des courbes avec extrémités fixes défini sur l'espace des lacets basés en  $p$  noté  $CM_p = \{c \in CM; c(0) = c(1) = p\}$  (voir [41]). Etant donné un élément  $c \in CM_p$ , ce procédé nous fournit une famille continue  $\{c_t\}$  d'éléments de  $CM_p$  telle que  $l_g(c_s) \leq l_g(c_t)$  dès que  $s \geq t$ . Dans notre situation, si nous appliquons ce procédé à une courbe  $c \in CM_p$  vérifiant

$$l_g(c) \leq 2(\text{Diam}(M, g) + \epsilon),$$

nous obtenons une famille  $\{c_t\}_{t \in [0,1]}$  de courbes de  $CM_p$  de longueur décroissante telle que  $c_0 = c$  et  $c_1$  est la courbe constante de  $CM_p$ , *i.e.*  $c_1 = \text{cste} = p$ .

Comme la métrique  $g$  est analytique réelle, le cut-locus  $C(p)$  de  $M$  pour la métrique  $g$  est un ensemble sous-analytique réel et admet une structure simpliciale de dimension au plus  $m - 1$  (voir [22]). On se fixe  $f : S^2 \rightarrow M$  un élément non trivial du  $\pi_2(M)$  transverse à  $C(p)$  qui soit une immersion

analytique réelle (ce qui est possible puisque  $m \geq 4$ , voir [37]). L'intersection de l'image de l'application  $f$  avec  $C(p)$  est alors un complexe simplicial de dimension 0 ou 1, *i.e.* un graphe fini que l'on note  $\Gamma$ . Soit  $\tilde{\Gamma} = f^{-1}(\Gamma)$  le graphe induit sur  $S^2$ .

**Cas de la dimension 0.** Si  $\tilde{\Gamma}$  est de dimension 0, on note  $\{y_1, \dots, y_k\}$  ses sommets et on procède ainsi. Pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, k\}$ , on note  $B(y_i, \epsilon)$  la boule géodésique de rayon  $\epsilon$  centrée en  $y_i$  pour la métrique tirée en arrière  $f^*g$  (cette métrique est bien définie puisque l'application  $f$  est une immersion) et étant donné un  $y$  de  $S^2 \setminus \cup_{i=1}^k B(y_i, \epsilon)$ , on note  $\gamma_y$  l'unique géodésique minimisante de  $p$  à  $f(y)$ . On a  $l_g(\gamma_y) \leq \text{Diam}(M, g)$ . Pour tout point  $y$  de  $S^2 \setminus \cup_{i=1}^k B(y_i, \epsilon)$ , en rétractant l'image  $f(y)$  en  $p$  le long de  $\gamma_y$ , on obtient un nouvel élément du  $\pi_2(M)$  que l'on note encore  $f$  vérifiant :

$$f(S^2) = \cup_{i=1}^k (\{\gamma_y \mid y \in \partial B(y_i, \epsilon)\} \cup f(B(y_i, \epsilon))).$$

Soit  $i \in \{1, \dots, k\}$ . A chaque sommet  $y_i$  de  $\tilde{\Gamma}$ , on associe une famille de courbes basées en  $p$ . Pour cela, on choisit une paramétrisation  $c_i : [0, 1] \rightarrow S^2$  de  $\partial B(y_i, \epsilon)$ . On note  $\{\omega_i(s)\}_{s \in [0, 1]}$  la famille de courbes définie pour tout  $s$  de  $[0, 1]$  par :

$$\omega_i(s) = \gamma_{c_i(s)} \cup [c_i(s), y_i] \cup [y_i, c_i(0)] \cup (-\gamma_{c_i(0)}),$$

où  $[c_i(s), y_i]$  désigne l'image par  $f$  de l'unique segment géodésique minimisant de  $c_i(s)$  à  $y_i$ .

Chaque  $\omega_i$  induit une application  $[\omega_i] : S^2 \rightarrow M$ . Dans  $\pi_2(M)$ ,

$$[f] = \sum_{i=1}^k [\omega_i],$$

et comme  $[f] \neq 0$ , il existe un  $i$  tel que  $[\omega_i] \neq 0$ .

Comme pour tout  $s \in [0, 1]$ ,

$$l_g(\omega_i(s)) \leq 2(\text{Diam}(M, g) + \epsilon),$$

on en déduit  $\text{mm}(M, g) \leq 2(\text{Diam}(M, g) + \epsilon)$ , et ce raisonnement étant valable pour tout  $\epsilon$  suffisamment petit, on obtient

$$\text{mm}(M, g) \leq 2\text{Diam}(M, g).$$



**Cas de la dimension 1.** Supposons que  $\tilde{\Gamma}$  est connexe de dimension 1. On énumère les sommets (de valence plus grande que 3) du graphe  $\tilde{\Gamma}$  par  $\{x_1, \dots, x_n\}$  et ses arêtes par  $\{a_1, \dots, a_l\}$ , de sorte que les extrémités des  $a_j$  soient dans l'ensemble  $\{x_1, \dots, x_n\}$  pour  $j = 1, \dots, l$ .

On peut choisir un réel  $\eta > 0$  suffisamment petit pour que le  $\eta$ -voisinage tubulaire  $T_\eta(\tilde{\Gamma})$  dans  $S^2$  pour la métrique tirée en arrière  $f^*g$  vérifie les propriétés suivantes :

- Pour chaque sommet  $x_i$  de  $\tilde{\Gamma}$ , il existe exactement  $k_i$  points de  $\partial T_\eta(\tilde{\Gamma})$  à distance minimale de  $x_i$ , que l'on note  $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,k_i}\}$  ( $k_i$  est la valence de  $x_i$ ). Une orientation de  $S^2$  étant fixée au préalable, on énumère ces  $k_i$  points en tournant autour du point  $x_i$  dans le sens trigonométrique.
- Pour tout  $x \in \tilde{\Gamma}$ ,

$$d_{f^*g}(x, \partial T_\eta(\tilde{\Gamma})) \leq \epsilon.$$

On note  $T_\eta(\Gamma)$  son image par  $f$ . Pour tout  $x \in S^2 \setminus T_\eta(\tilde{\Gamma})$ , il existe une unique géodésique minimisante de  $p$  à  $f(x)$  notée  $\gamma_x$  dépendant continûment de  $x$ . On a l'inégalité  $l_g(\gamma_x) \leq \text{Diam}(M, g)$ . En rétractant pour chaque point  $x$  de  $S^2 \setminus T_\eta(\tilde{\Gamma})$  l'image  $f(x)$  le long de  $\gamma_x$ , on obtient un nouvel élément  $f_1 : S^2 \rightarrow M$  non trivial du  $\pi_2(M)$  tel que

$$f_1(S^2) = T_\eta(\Gamma) \cup \{\gamma_x; x \in \partial T_\eta(\tilde{\Gamma})\}.$$

Soit  $j \in \{1, \dots, l\}$ . A chaque arête  $a_j : [0, 1] \rightarrow S^2$  du graphe  $\tilde{\Gamma}$ , on associe une famille de courbes basées en  $p$  de la manière suivante. L'ensemble  $\{x \in \partial T_\eta(\tilde{\Gamma}) \mid d(x, a_j) \leq \eta\}$  peut être décrit par deux courbes  $a_{j,1}$  et  $a_{j,2}$  paramétrées sur  $[0, 1]$  de sorte que  $d(a_j(t), a_{j,1}(t)) = d(a_j(t), a_{j,2}(t)) \leq \epsilon$ . Remarquons que les extrémités de ces courbes sont des points de l'ensemble  $\{x_{i,j} \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k_i\}$ . On note  $[a_{j,1}(t), a_{j,2}(t)]$  l'image par  $f_1$  de la courbe de  $T_\eta(\tilde{\Gamma})$  formée de la concaténation des deux segments géodésiques minimisants (uniques comme  $\epsilon < \text{Inj}(S^2, f^*g)$ ) de  $T_\eta(\tilde{\Gamma})$  de  $a_{j,1}(t)$  à  $a_j(t)$  et de  $a_j(t)$  à  $a_{j,2}(t)$  respectivement. Comme

$$\text{lsys}_p(M, g) > 2(\text{Diam}(M, g) + \epsilon)$$

et

$$l_g(\gamma_{a_{j,1}(0)} \cup [a_{j,1}(0), a_{j,2}(0)] \cup (-\gamma_{a_{j,2}(0)})) \leq 2(\text{Diam}(M, g) + \epsilon),$$

on obtient en appliquant le procédé de Birkhoff à la courbe  $\gamma_{a_{j,1}(0)} \cup [a_{j,1}(0), a_{j,2}(0)] \cup (-\gamma_{a_{j,2}(0)})$  une famille de courbes basées en  $p$  que

l'on note  $\alpha_j(1/3 - s)$  pour  $s$  variant de 0 à  $1/3$  de sorte que  $\alpha_j(0) = p$ ,  $\alpha_j(1/3) = \gamma_{a_{j,1}(0)} \cup [a_{j,1}(0), a_{j,2}(0)] \cup (-\gamma_{a_{j,2}(0)})$  et

$$l_g(\alpha_j(s)) \leq 2(\text{Diam}(M, g) + \epsilon),$$

pour  $s \in [0, 1/3]$ . Ensuite, pour  $s$  variant de  $1/3$  à  $2/3$ , on note à nouveau  $\alpha_j(s)$  la courbe  $\gamma_{a_{j,1}(3s-1)} \cup [a_{j,1}(3s-1), a_{j,2}(3s-1)] \cup (-\gamma_{a_{j,2}(3s-1)})$ , et enfin, comme

$$l_g(\gamma_{a_{j,1}(1)} \cup [a_{j,1}(1), a_{j,2}(1)] \cup (-\gamma_{a_{j,2}(1)})) \leq 2(\text{Diam}(M, g) + \epsilon),$$

$\alpha_j(2/3)$  se contracte en  $p$  via une seconde homotopie que l'on note  $\alpha_j(s)$  pour  $s$  variant de  $2/3$  à 1. On a alors une application continue

$$\alpha_j : [0, 1] \rightarrow CM_p \subset \Lambda M$$

associée à  $a_j$  telle que  $\alpha_j(0) = \alpha_j(1) = p$  et  $l_g(\alpha_j(s)) \leq 2(\text{Diam}(M, g) + \epsilon)$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On associe maintenant à chaque sommet  $x_i$  une famille  $\beta_i : [0, 1] \rightarrow \Lambda M$  de courbes basées en  $p$  vérifiant  $l_g(\beta_i(s)) \leq 4(\text{Diam}(M, g) + \epsilon)$  pour  $s \in [0, 1]$ . On procède comme suit. Pour chaque couple  $(k, k')$  d'entiers (distincts) de  $\{1, \dots, k_i\}$ , on note  $[x_{i,k}, x_{i,k'}]$  l'image par  $f_1$  de la courbe formée de la concaténation des deux segments géodésiques minimisants de  $T_\eta(\tilde{\Gamma})$  de  $x_{i,k}$  à  $x_i$  et de  $x_i$  à  $x_{i,k'}$ , et  $[x_i, x_{i,k}]$  l'image du segment de  $x_i$  à  $x_{i,k}$ . Pour chaque  $k$  variant de 1 à  $k_i - 1$ , comme

$$\text{lsys}_p(M, g) > 2(\text{Diam}(M, g) + \epsilon),$$

la courbe  $\gamma_{x_{i,k}} \cup [x_{i,k}, x_{i,k+1}] \cup (-\gamma_{x_{i,k+1}})$  se contracte en  $p$  via une homotopie qui nous fournit une famille de courbes de longueur décroissante. Il en va de même pour la courbe  $\gamma_{x_{i,k_i}} \cup [x_{i,k_i}, x_{i,1}] \cup (-\gamma_{x_{i,1}})$ . On note alors  $\beta_i$  la famille de courbes obtenue en partant de  $p$  jusqu'à  $\gamma_{x_{i,1}} \cup [x_{i,1}, x_{i,2}] \cup (-\gamma_{x_{i,2}})$  en suivant l'homotopie précédente en sens inverse, puis en concaténant cette courbe à l'homotopie de  $p$  à  $\gamma_{x_{i,2}} \cup [x_{i,2}, x_{i,3}] \cup (-\gamma_{x_{i,3}})$ , ensuite en rétractant de manière évidente la courbe  $[x_i, x_{i,2}] \cup (-\gamma_{x_{i,2}}) \cup \gamma_{x_{i,2}} \cup [x_{i,2}, x_i]$  en  $x_i$ . On obtient ainsi la courbe  $\gamma_{x_{i,1}} \cup [x_{i,1}, x_{i,3}] \cup (-\gamma_{x_{i,3}})$  que l'on concatène avec l'homotopie de  $p$  à  $\gamma_{x_{i,3}} \cup [x_{i,3}, x_{i,4}] \cup (-\gamma_{x_{i,4}})$  puis on rétracte la courbe  $[x_i, x_{i,3}] \cup (-\gamma_{x_{i,3}}) \cup \gamma_{x_{i,3}} \cup [x_{i,3}, x_i]$  en  $x_i$ . On obtient ainsi  $\gamma_{x_{i,1}} \cup [x_{i,1}, x_{i,4}] \cup (-\gamma_{x_{i,4}})$ . En procédant ainsi de suite, on arrive finalement sur la courbe  $\gamma_{x_{i,1}} \cup [x_{i,1}, x_{i,k_i}] \cup (-\gamma_{x_{i,k_i}})$ . On suit alors l'homotopie qui contracte cette courbe en  $p$ . Cette séquence

d'homotopie nous fournit  $\beta_i : [0, 1] \rightarrow \Lambda M$  qui vérifie  $\beta_i(0) = \beta_i(1) = p$ , et  $l_g(\beta_i(s)) \leq 4(\text{Diam}(M, g) + \epsilon)$ .

Chaque  $\alpha_j$  (respectivement  $\beta_i$ ) induit une application  $[\alpha_j] : S^2 \rightarrow M$  (respectivement  $[\beta_i] : S^2 \rightarrow M$ ). Dans  $\pi_2(M)$ ,

$$[f_1] = \sum_{i=1}^n [\beta_i] + \sum_{j=1}^l [\alpha_j],$$

et comme  $[f_1] \neq 0$ , il existe un  $i$  tel que  $[\beta_i] \neq 0$  ou un  $j$  tel que  $[\alpha_j] \neq 0$ .

On en déduit  $\text{mm}(M, g) \leq 4(\text{Diam}(M, g) + \epsilon)$ , et ce raisonnement étant valable pour tout  $\epsilon$  suffisamment petit, on obtient le résultat.

Il reste à considérer le cas où  $\tilde{\Gamma}$  est de dimension 1, mais n'est pas connexe. On peut alors, en considérant séparément les composantes connexes de  $\tilde{\Gamma}$  et en les traitant suivant les deux cas décrits précédemment, écrire notre élément  $[f]$  initial comme une somme d'éléments du type  $[\omega_i]$ ,  $[\alpha_j]$  ou  $[\beta_{j'}]$ . Ceci achève la démonstration.



# Bibliographie

- [1] Adler, R., Konheim, A. & McAndrew, M. : *Topological entropy*. Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 309-319.
- [2] Babenko, I. : *Asymptotic invariants of smooth manifolds*. (Russe) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992), no 4, 707-751 ; traduction dans Russian Acad. Sci. Izv. Math. **41** (1993), no. 1, 1-38.
- [3] Babenko, I. : *Souplesse intersystolique forte des variétés fermées et des polyèdres*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002) no. 4, 1259-1284.
- [4] Babenko, I. : *Nature topologique des systoles unidimensionnelles*. Preprint consultable sur [www.math.univ-montp2.fr/prepublications/03-07.pdf](http://www.math.univ-montp2.fr/prepublications/03-07.pdf).
- [5] Babenko, I. & Balacheff, F. : *Géométrie systolique des sommes connexes et des revêtements cycliques*. A paraître dans Mathematische Annalen, preprint consultable sur [www.math.univ-montp2.fr/prepublications/04-05.pdf](http://www.math.univ-montp2.fr/prepublications/04-05.pdf).
- [6] Babenko, I. & Balacheff, F. : *Sur la forme de la boule unité de la norme stable unidimensionnelle*. Soumis, preprint consultable sur [www.arxiv.org/abs/math.DG/0502454](http://www.arxiv.org/abs/math.DG/0502454).
- [7] Bacher, R., de la Harpe, P. & Nagnibeda T. : *The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph*. Bull. Soc. Math. France **125** (1997), 167-198.
- [8] Balacheff, F. : *Sur des problèmes de la géométrie systolique*. Sem. Geom. Th. Spec. **22** (2004), 71-82.
- [9] Balacheff, F. : *Volume entropy, systole and stable norm on graphs*. Soumis, preprint consultable sur [www.arxiv.org/abs/math.MG/0411578](http://www.arxiv.org/abs/math.MG/0411578).
- [10] Bangert, V. : *Minimal geodesics*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **10** (1989), 263-286.

- [11] Bangert, V. : *Geodesics rays, Busemann functions and monotone twist maps* Calc. Var. **2** (1994), 49-63.
- [12] Bavard, C. : *Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein.* Math. Ann. **274** (1986), 439-441.
- [13] Bavard, C. : *Inégalités systoliques conformes.* Comment. Math. Helvetici **67** (1992), 146-166.
- [14] Berge, C. : *Graphes et Hypergraphes.* Dunod, Paris (1969).
- [15] Berger, M. : *A l'ombre de Loewner.* Ann. scient. École Norm. sup. **5** (1972), 241-260.
- [16] Berger, M. : *Systoles et applications selon Gromov.* Séminaire N. Bourbaki **216** (1993), Exp. No 771, 5, 279-310.
- [17] Berger, M. : *Riemannian geometry during the second half of the twentieth century.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein **100** (1998), 45-208.
- [18] Besson, G., Courtois & Gallot, S. : *Volume et entropie minimale des espaces localement symétriques.* Invent. Math. **103** (1991), 417-445.
- [19] Birkhoff, G. : *Dynamical systems with two degrees of freedom.* Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917), 199-300.
- [20] Bollobás, B. : *Extremal graph theory with emphasis on probabilistic methods.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics **62** (1986), 1-64.
- [21] Bollobás, B. & Szemerédi, E. : *Girth of sparse graphs.* J. Graph Theory **39** (2002), 194-200.
- [22] Buchner, M. : *Simplicial structure of real analytic cut locus.* Proc. Amer. Math. Soc. **64** (1977), 118-121.
- [23] Burago, D., Ivanov, S. & Kleiner, B. : *On the structure of the stable norm of periodic metrics.* Math. Res. Let. **4** (1997), 791-808.
- [24] Buser, P. & Sarnak, P. : *On the period matrix of a Riemann surface of large genus.* Inv. Math. **117** (1994), 27-56.
- [25] Calabi, C. & Cao, J. : *Simple closed geodesics on convex surfaces.* J. Differential Geometry **36**, (1992), 517-549.
- [26] Croke, C. : *Area and the length of the shortest closed geodesic.* J. Differential Geometry **27** (1988), 1-22.
- [27] Croke, C. & Katz, M. : *Universal volume bounds in Riemannian manifolds.* Surv. Differ. Geom. **VIII** (Boston, MA, 2002), 109-137, Surv. Differ. Geom. **VIII**, Int. Press, Somerville, MA, 2003.

- [28] Erdős, P. & Sachs, H. : *Reguläre Graphen gegebener Tailleweite mit minimaler Knotenzahl*. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ.Halle-Wittenberg **12** (1963), 251-257.
- [29] Federer, H. : *Real flat chains, cochains and variational problems*. Indiana Univ. Math. J. **24** (1974), 351-407.
- [30] Gallot, S., Hulin, D. & Lafontaine, J. : *Riemannian geometry*. Springer, 1993.
- [31] Gromov, M. : *Volume and bounded cohomology*. Publ. Math. IHES **56** (1982), 5-100.
- [32] Gromov, M. : *Filling Riemannian Manifolds*. J. Differential Geom. **18** (1983), 1-147.
- [33] Gromov, M. : *Systoles and intersystolic inequalities*. Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle, Sem. Congr. **1** (1996), Soc. Math. France, 291-362.
- [34] Gromov, M. : *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Birkhäuser (1999).
- [35] De la Harpe, P. : *Uniform growth in groups of exponential growth*. Proceedings of the conference on the geometric and combinatorial group theory , Part II (Haifa 2000), Geom. Dedicata **95** (2002), 1-17.
- [36] Hedlund, G.A. : *Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients*. Ann. of Math. **33** (1932), 719-739.
- [37] Hirsch, M. : *Differential Topology*. Graduate Texts in Math. **33**, Springer Verlag New-York, (1976).
- [38] Kapovich, I. & Nagnibeda, T. : *The Patterson-Sullivan embedding and minimal volume entropy for outer space*, preprint consultable sur [www.arxiv.org/abs/math.GR/0504445](http://www.arxiv.org/abs/math.GR/0504445).
- [39] Katok, A. : *Entropy and closed geodesics*. Ergod. th. Dynam. Sys. **2** (1983), 339-365.
- [40] Katz, M. & Sabourau, S. : *Entropy of systolically extremal surfaces and asymptotic bounds*. A paraître dans Erg. Th. Dyn. Sys., preprint consultable sur [www.arxiv.org/abs/math.DG/0410312](http://www.arxiv.org/abs/math.DG/0410312).
- [41] Klingenberg, W. : *Lectures on closed geodesics*. Grundlehren Math. Wiss. **230**, Springer Verlag, Berlin (1978).
- [42] Kodani, S. : *On two dimensional isosystolic inequalities*. Kodai. Math. J. **10** (1987), 314-327.

- [43] Lubotzky, A., Phillips, R. & Sarnak, P. : *Ramanujan graphs*. *Combinatorica* **8** (1988), 261-267.
- [44] Maeda, M. : *The length of a closed geodesic on a compact surface*, *Kyushu J. Math.* **48** (1994), no 1, 9-18.
- [45] Manning, A. : *Topological entropy for geodesic flows* *Ann. of Math.* **110** (1979), no 2 , 567-573.
- [46] Margulis, G.A. : *Explicit constructions of graphs without short cycles and low density codes*. *Combinatorica* **2** (1982), 71-78.
- [47] Margulis, G.A. : *Explicit group-theoretical constructions of combinatorial schemes and their application to the design of expanders and concentrators*. *J.Probl.Inf.Transm.* **24** (1988), no 1, 39-46.
- [48] Massart, D. : *Stable norm of surfaces : local structure of the unit ball at rational directions*. *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), 996-1010.
- [49] Massart, D. : *Normes stables des surfaces*. thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon (1996).
- [50] Massart, D. : *On Aubry sets and Mather's action functional*. *Isr. J. Math.* **134** (2003), 157-171.
- [51] Morse, M. : *A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one*. *Trans. Amer. Soc.* **26** (1924), 25-60.
- [52] Meyer, M. & Pajor, A. : *Sections of the unit ball of  $l_p^n$* . *J. Funct. Anal.* **80** (1988), 109-123.
- [53] Nabutovsky, A. & Rotman, R. : *The length of the shortest closed geodesic on a 2-dimensional sphere*. *Int. Math. Res. Not.* **23** (2002), 1211-1222.
- [54] Nabutovsky, A. & Rotman, R. : *Upper bounds on the length of a shortest closed geodesic and quantitative Hurewicz theorem*. *J. Eur. Math. Soc.* **5** (2003), no 3, 203-244.
- [55] Nabutovsky, A. & Rotman, R. : *Volume, Diameter and the minimal mass of a stationary 1-cycle*. *Geom. Funct. Anal.* **14** (2004), no. 4, 748-790.
- [56] Pu, P. : *Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds*. *Pacific. J. Math.* **2** (1952), 55-72.
- [57] Rourke, C. & Sanderson, B. : *Introduction to piecewise-linear topology*. Springer (1972).



- [58] Sabourau, S. : *Global and local volume bounds and the shortest geodesic loops*. Comm. Anal. Geom. **12** (2004), no. 5, 1039-1053.
- [59] Sabourau, S. : *Filling radius and short closed geodesic of the sphere*. Bull. SMF **132** (2004), 105-136.
- [60] Sabourau, S. : *Entropy and systoles on surfaces*. preprint.
- [61] Shub, M. : *Stabilité globale des systèmes dynamiques*. Astérisque **56**, SMF, Paris (1978).
- [62] Spanier, E. : *Algebraic Topology*. McGraw-Hill Book Company (1966).
- [63] Švarc, A. : *A volume invariant of coverings*. Dokl. Ak. Nauk. SSSR **1058** (1955), 32-34.
- [64] Thom, R. : *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*. Comment.Math.Helv. **28** (1954), 17-86.