Sur des problèmes de la géométrie systolique

Florent Balacheff *

8 février 2006

Résumé

Dans la première partie de cet article, nous présentons l'ensemble des résultats connus sur certaines inégalités universelles (*i.e.* sans hypothèses de courbure) entre des longueurs de courbes et le diamètre d'une variété riemannienne simplement connexe dont le second groupe homotopique est non trivial, puis nous démontrons une nouvelle inégalité de ce type. Dans la seconde partie, nous montrons comment déduire une estimée inférieure de la constante systolique d'une surface en fonction de son genre, précédemment obtenue par M. Gromov, à partir des résultats de S. Kodani et B. Bollobás & E. Szemerédi.

Mathematics Subject Classification (2000) : 05C10, 53C23.

1 Longueurs et diamètre des variétés simplement connexes de second groupe homotopique non trivial

1.1 Préliminaires

Désignons par M^m une variété fermée de dimension m simplement connexe et g une métrique riemannienne. Nous supposons dans toute cette section que le second groupe homotopique de M est non trivial : $\pi_2(M) \neq 0$. Nous introduisons différentes longueurs associées à la variété riemannienne (M, g).

On définit tout d'abord la *systole* que l'on note $\mathrm{sys}_0(M, g)$ comme la plus petite longueur d'une géodésique fermée de M (non triviale). Malheureusement, dans le cas simplement connexe, la systole est difficile à estimer en fonction du diamètre de la variété (voir [16] à ce sujet), et on est obligé d'introduire d'autres longueurs.

Etant donné un point p de M, la *l-systole en p* que l'on note $\mathrm{lsys}_p(M, g)$ est la plus petite longueur d'un lacet géodésique non trivial de M basé en p. La dénomination de cette longueur est justifiée par le fait qu'elle est réalisée comme la longueur d'un lacet géodésique basé en p appelé *lacet systolique basé en p*. La *l-systole* que l'on note $\mathrm{lsys}(M, g)$ est la plus petite longueur d'un lacet géodésique de

*F. Balacheff UMR 5030, Département des Sciences Mathématiques Université Montpellier II Case Courrier 051 - place Eugène Bataillon 34095 Montpellier Cedex 5, France (email : balachef@math.univ-montp2.fr)

M non trivial. Cette quantité est réalisée comme la longueur d'un lacet géodésique dit *lacet systolique*. On a

$$\mathrm{lsys}(M,g) = \min_{p\in M} \mathrm{lsys}_p(M,g).$$

Comme M est compacte et g lisse, $\mathrm{lsys}(M,g) > 0$.

On définit ensuite $\mathrm{mm}(M,g)$ la longueur obtenue par un procédé de minimax sur l'espace des courbes fermées de M. Plus précisément (voir [12]), on considère ΛM l'espace des courbes $c : S^1 \to M$ lisses par morceaux fermées de M muni de la topologie C^0. On note $\Lambda^0 M$ le sous-ensemble de ΛM formé des courbes constantes. De l'isomorphisme $\pi_1(\Lambda M, \Lambda^0 M) = \pi_2(M) \neq 0$, on obtient que

$$\min\{\max_{s\in[0,1]} l_g(\gamma_s) \mid \{\gamma_s\} \neq 0 \in \pi_1(\Lambda M, \Lambda^0 M)\}$$

est une quantité non nulle et on note $\mathrm{mm}(M,g)$ cette quantité ($l_g(.)$ désigne ici la longueur d'une courbe induite par la métrique riemannienne g). C'est un résultat classique que $\mathrm{mm}(M,g)$ est réalisée comme la longueur d'une géodésique fermée, et on obtient ainsi $\mathrm{sys}_0(M,g) \leq \mathrm{mm}(M,g)$. Cette technique, appelée principe du minimax, a été initiée par G. Birkhoff [3].

Enfin, on définit $\mathrm{mm}_2(M,g)$ la longueur obtenue par un procédé de minimax sur l'espace G des paires de courbes de M. Plus précisément (voir [7] et [15]), on considère CM l'espace des chemins $c : [0,1] \to M$ lisses par morceaux. On définit ensuite les espaces

$$G_1 = \{\Phi = (c_1, c_2) \in CM \times CM \mid c_1(1) = c_1(0) \text{ et } c_2(1) = c_2(0)\},$$

et

$$G_2 = \{\Phi = (c_1, c_2) \in CM \times CM \mid c_1(1) = c_2(0) \text{ et } c_2(1) = c_1(0)\}.$$

On pose

$$G = G_1 \cup G_2.$$

On note G^0 le sous-ensemble de G formé des paires de courbes constantes et on définit $L_g(\Phi) = l_g(c_1) + l_g(c_2)$. Dans le cas où M est simplement connexe, $\pi_1(G, G^0)$ est naturellement isomorphe à $\pi_2(M)$ (voir [20]), ce qui nous permet d'obtenir une valeur non triviale de minimax

$$\mathrm{mm}_2(M,g) = \min\{\max_{s\in[0,1]} L_g(\Phi_s) \mid \{\Phi_s\} \neq 0 \in \pi_1(G, G^0)\}.$$

Cette valeur est réalisée soit par une géodésique fermée, soit par une paire de géodésiques fermées, soit par une paire de lacets géodésiques basés en un même point de sorte que les quatres vecteurs unitaires tangents à l'origine des deux lacets géodésiques soient de somme nulle.

Dans le cas où $\dim M = 2$, cette dernière condition implique que les deux lacets forment une géodésique fermée en huit. On obtient en particulier

$$\mathrm{sys}_0(S^2, g) \leq \mathrm{mm}_2(S^2, g). \tag{1.1}$$

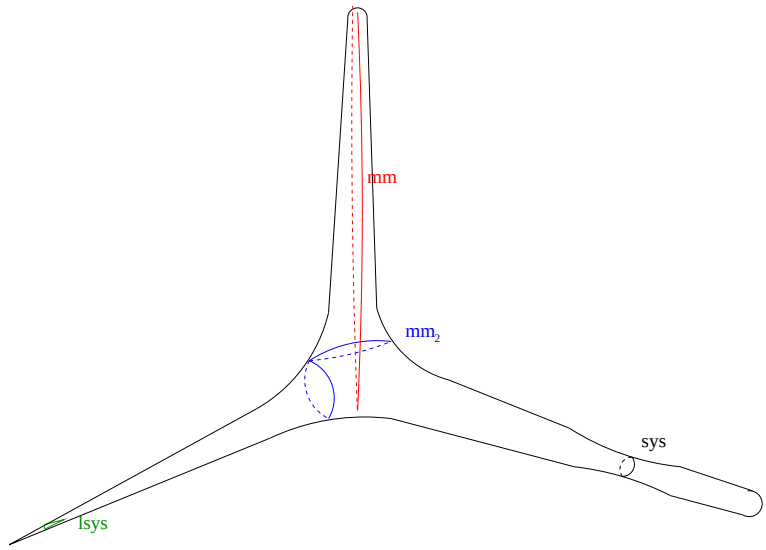
D'une manière générale,

$$\mathrm{lsys}(M,g) \leq \mathrm{sys}_0(M,g) \leq \mathrm{mm}(M,g), \tag{1.2}$$

et

$$\mathrm{lsys}(M,g) \leq \mathrm{mm}_2(M,g) \leq \mathrm{mm}(M,g). \tag{1.3}$$

L'exemple de la sphère avec trois longs doigts dont un est contracté en son milieu et un autre très fin nous montre que ces inégalités peuvent être strictes simultanément (voir la figure ci-dessous).



Nous nous intéressons ici aux inégalités géométriques que l'on peut obtenir entre ces longueurs et le diamètre de la variété. L'inégalité la plus intéressante est de la forme suivante :

$$\mathrm{sys}_0(M,g) \leq C(M)\mathrm{Diam}(M,g), \tag{1.4}$$

pour toute métrique Riemannienne lisse g où $C(M)$ est une constante ne dépendant que de la topologie de M et $\mathrm{Diam}(M,g)$ désigne le diamètre. Ce résultat, bien qu'évident pour les variétés non simplement connexes pour lesquelles $\mathrm{sys}_0 \leq 2\mathrm{Diam}$, n'est pas encore démontré dans le cas d'une variété simplement connexe de dimension plus grande que 3. Le cas de la sphère 2-dimensionnelle est un peu à part comme nous allons le voir. Nous résumons ici les principaux résultats trouvés dans cette direction.

M. Maeda [14], améliorant une inégalité obtenue par C. Croke [8], a montré le

Théorème 1 *Soit (S^2,g) une sphère riemannienne. Alors*

$$\min\{\frac{1}{2}sys_0(S^2,g), \frac{1}{5}mm(S^2,g)\} \leq Diam(S^2,g).$$

De l'inégalité (1.2), on déduit que

$$\mathrm{sys}_0(S^2,g) \leq 5.\mathrm{Diam}(S^2,g).$$

Cette dernière inégalité a été améliorée simultanément par S. Sabourau [19] d'une part, A. Nabutovsky et R. Rotman [15] d'autre part, dans le sens suivant :

Théorème 2 *Soit (S^2, g) une sphère riemannienne. Alors*

$$\min\{\frac{1}{2}sys_0(S^2, g), \frac{1}{4}mm_2(S^2, g)\} \leq Diam(S^2, g).$$

De l'inégalité (1.1), on déduit que

$$\mathrm{sys}_0(S^2, g) \leq 4.\mathrm{Diam}(S^2, g).$$

A l'heure actuelle, nous ne connaissons pas de contre-exemple à la conjecture $\mathrm{sys}_0(S^2, g) \leq 2.\mathrm{Diam}(S^2, g)$, le cas d'égalité étant réalisé par la métrique ronde.

Pour les variétés simplement connexes de dimension strictement supérieure à 2 telles que $\pi_2(M) \neq 0$, nous pouvons citer les résultats suivants.

S. Sabourau [20] a obtenu une inégalité entre la l-systole et le diamètre d'une variété riemannienne complète :

Théorème 3 *Soit (N, g') une variété riemannienne complète. Alors*

$$lsys(N, g') \leq c_m Diam(N, g'),$$

où c_m est une constante ne dépendant que de la dimension m de N.

Enfin, A. Nabutovsky et R. Rotman [17] ont montré le :

Théorème 4 *Soit (M, g) une variété riemannienne fermée simplement connexe. Supposons que le second groupe homotopique de M est non trivial. Alors*

$$\min\{\frac{1}{2}sys_0(M, g), \frac{1}{4}mm_2(M, g)\} \leq Diam(M, g).$$

En combinant ce résultat aux inégalités (1.2) et (1.3), on obtient

$$\mathrm{lsys}(M, g) \leq 4.\mathrm{Diam}(M, g).$$

A notre connaissance, il n'existe pas d'autres inégalités de ce type valables sur les variétés simplement connexes de second groupe homotopique non trivial. Nous allons montrer dans la section suivante une nouvelle inégalité de ce type :

Théorème A *Soit M^m une variété fermée de dimension $m \geq 4$ simplement connexe. Supposons que son second groupe homotopique soit non trivial. Alors pour tout $p \in M$ et pour toute métrique riemannienne g sur M,*

$$\min\{\frac{1}{2}lsys_p(M, g), \frac{1}{4}mm(M, g)\} \leq Diam(M, g).$$

Comme corollaire, nous obtenons en notant $\mathrm{Lsys}(M, g) = \max_{p \in M} \mathrm{lsys}_p(M, g)$:

Corollaire *Sous les hypothèses du théorème* **A**, *on a*

$$\min\{\frac{1}{2}Lsys(M, g), \frac{1}{4}mm(M, g)\} \leq Diam(M, g).$$

La suite de la section est consacrée à la démonstration du théorème **A**.

1.2 Passage aux métriques analytiques réelles

Soit (M, g) une variété riemannienne fermée, vérifiant les hypothèses du théorème **A** et p un point de M. Nous allons montrer dans cette section que, si la conclusion du théorème **A** est vérifiée pour une métrique analytique réelle, elle l'est pour toute métrique riemannienne lisse.

On suppose donc que, pour toute métrique riemannienne analytique réelle, la conclusion du théorème **A** est vérifiée. Soit g une métrique riemannienne lisse. De la densité des métriques analytiques réelles dans l'espace des métriques lisses pour la topologie C^1 (voir [11]), on peut trouver une suite de métriques analytiques réelles $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers la métrique g.

On peut supposer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall c \in CM$

$$|l_g(c) - l_{g_n}(c)| \leq \frac{1}{n} l_g(c).$$

Le théorème **A** étant vérifié pour les métriques analytiques réelles, deux cas se présentent à nous : soit il apparait une infinité de lacets géodésiques $c_n : [0,1] \to M$ basés en p vérifiant $l_{g_n}(c_n) \leq 2.\mathrm{Diam}(M, g_n)$, soit pour une infinité de n on a $\mathrm{mm}(M, g_n) \leq 4.\mathrm{Diam}(M, g_n)$.

Clairement, le diamètre dépendant continûment de la métrique, nous avons

$$\mathrm{Diam}(M, g) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Diam}(M, g_n).$$

Dans le premier cas, on peut extraire en appliquant le théorème d'Ascoli une sous-suite de courbes uniformément convergente. On note c la courbe limite obtenue. Par un passage à la limite dans l'équation différentielle locale vérifiée par une géodésique, on observe que la courbe c est encore une géodésique sauf éventuellement en $c(0) = c(1) = p$. La courbe c est donc un lacet géodésique vérifiant, par passage à la limite,

$$l_g(c) \leq 2.\mathrm{Diam}(M, g).$$

Dans le second cas, fixons $\eta > 0$. Pour chaque n il existe une application $F_n^\eta : [0,1] \to \Lambda M$ telle que $F_n^\eta(0) = F_n^\eta(1) = p$, vérifiant

$$\max\{l_{g_n}(F_n^\eta(t)); t \in [0,1]\} \leq 4.\mathrm{Diam}(M, g_n) + \eta.$$

et telle que l'application induite en homotopie de dimension 2 soit non triviale. On en déduit

$$(1 - \frac{1}{n}) \max\{l_g(F_n^\eta(t)); t \in [0,1]\} \leq 4.\mathrm{Diam}(M, g_n) + \eta,$$

d'où,

$$(1 - \frac{1}{n})\mathrm{mm}(M, g) \leq 4.\mathrm{Diam}(M, g_n) + \eta,$$

et, par passage à la limite,

$$\mathrm{mm}(M, g) \leq 4.\mathrm{Diam}(M, g) + \eta.$$

Ce résultat étant valable pour tout $\eta > 0$, on obtient $\mathrm{mm}(M, g) \leq 4.\mathrm{Diam}(M, g)$.

Il nous reste donc à démontrer l'inégalité annoncée dans le théorème **A** pour une métrique analytique réelle quelconque.

1.3 Démonstration du théorème A dans le cas d'une métrique analytique réelle

On se fixe une métrique analytique réelle g et un point p de M. Supposons que $\mathrm{lsys}_p(M,g) > 2.\mathrm{Diam}(M,g)$ (dans le cas contraire, la conclusion du théorème **A** est immédiate). Soit $\epsilon > 0$ un réel vérifiant $\mathrm{lsys}_p(M,g) > 2(\mathrm{Diam}(M,g)+\epsilon)$ et $\epsilon < \mathrm{Inj}(M,g)$ où $\mathrm{Inj}(M,g)$ désigne le rayon d'injectivité de (M,g).

Nous allons utiliser le procédé de Birkhoff de contraction des courbes avec extrémités fixes défini sur l'espace des lacets basés en p noté $CM_p = \{c \in CM; c(0) = c(1) = p\}$ (voir [12]). Etant donné un élément $c \in CM_p$, ce procédé nous fournit une famille continue $\{c_t\}$ d'éléments de CM_p telle que $l_g(c_s) \leq l_g(c_t)$ dès que $s \geq t$. Dans notre situation, si nous appliquons ce procédé à une courbe $c \in CM_p$ vérifiant

$$l_g(c) \leq 2(\mathrm{Diam}(M,g)+\epsilon),$$

nous obtenons une famille $\{c_t\}_{t\in[0,1]}$ de courbes de CM_p de longueur décroissante telle que $c_0 = c$ et c_1 est la courbe constante de CM_p, *i.e.* $c_1 = cste = p$.

Comme la métrique g est analytique réelle, le cut-locus $C(p)$ de M pour la métrique g est un ensemble sous-analytique réel et admet une structure simpliciale de dimension au plus $m-1$ (voir [5]). On se fixe $f : S^2 \to M$ un élément non trivial du $\pi_2(M)$ transverse à $C(p)$ qui soit une immersion analytique réelle (ce qui est possible puisque $m \geq 4$, voir [11]). L'intersection de l'image de l'application f avec $C(p)$ est alors un complexe simplicial de dimension 0 ou 1, *i.e.* un graphe fini que l'on note Γ. Soit $\tilde{\Gamma} = f^{-1}(\Gamma)$ le graphe induit sur S^2.

Cas de la dimension 0**.** Si $\tilde{\Gamma}$ est de dimension 0, on note $\{y_1,\ldots,y_k\}$ ses sommets et on procède ainsi. Pour tout i de $\{1,\ldots,k\}$, on note $B(y_i,\epsilon)$ la boule géodésique de rayon ϵ centrée en y_i pour la métrique tirée en arrière f^*g (cette métrique est bien définie puisque l'application f est une immersion) et étant donné un y de $S^2 \setminus \cup_{i=1}^k B(y_i,\epsilon)$, on note γ_y l'unique géodésique minimisante de p à $f(y)$. On a $l_g(\gamma_y) \leq \mathrm{Diam}(M,g)$. Pour tout point y de $S^2 \setminus \cup_{i=1}^k B(y_i,\epsilon)$, en rétractant l'image $f(y)$ en p le long de γ_y, on obtient un nouvel élément du $\pi_2(M)$ que l'on note encore f vérifiant :

$$f(S^2) = \cup_{i=1}^k(\{\gamma_y \mid y \in \partial B(y_i,\epsilon)\} \cup f(B(y_i,\epsilon))).$$

Soit $i \in \{1,\ldots,k\}$. A chaque sommet y_i de $\tilde{\Gamma}$, on associe une famille de courbes basées en p. Pour cela , on choisit une paramétrisation $c_i : [0,1] \to S^2$ de $\partial B(y_i,\epsilon)$. On note $\{\omega_i(s)\}_{s\in[0,1]}$ la famille de courbes définie pour tout s de $[0,1]$ par :

$$\omega_i(s) = \gamma_{c_i(s)} \cup [c_i(s), y_i] \cup [y_i, c_i(0)] \cup (-\gamma_{c_i(0)}),$$

où $[c_i(s), y_i]$ désigne l'image par f de l'unique segment géodésique minimisant de $c_i(s)$ à y_i.

Chaque ω_i induit une application $[\omega_i] : S^2 \to M$. Dans $\pi_2(M)$,

$$[f] = \sum_{i=1}^k [\omega_i],$$

et comme $[f] \neq 0$, il existe un i tel que $[\omega_i] \neq 0$.

Comme pour tout $s \in [0,1]$,

$$l_g(\omega_i(s)) \leq 2(\mathrm{Diam}(M,g)+\epsilon),$$

on en déduit $\mathrm{mm}(M,g) \leq 2(\mathrm{Diam}(M,g)+\epsilon)$, et ce raisonnement étant valable pour tout ϵ suffisamment petit, on obtient

$$\mathrm{mm}(M,g) \leq 2\mathrm{Diam}(M,g).$$

Cas de la dimension 1. Supposons que $\tilde{\Gamma}$ est connexe de dimension 1. On énumère les sommets (de valence plus grande que 3) du graphe $\tilde{\Gamma}$ par $\{x_1,\ldots,x_n\}$ et ses arêtes par $\{a_1,\ldots,a_l\}$, de sorte que les extrémités des a_j soient dans l'ensemble $\{x_1,\ldots,x_n\}$ pour $j=1,...,l$.

On peut choisir un réel $\eta>0$ suffisamment petit pour que le η-voisinage tubulaire $T_\eta(\tilde{\Gamma})$ dans S^2 pour la métrique tirée en arrière f^*g vérifie les propriétés suivantes :

- Pour chaque sommet x_i de $\tilde{\Gamma}$, il existe exactement k_i points de $\partial T_\eta(\tilde{\Gamma})$ à distance minimale de x_i, que l'on note $\{x_{i,1},\ldots,x_{i,k_i}\}$ (k_i est la valence de x_i). Une orientation de S^2 étant fixée au préalable, on énumère ces k_i points en tournant autour du point x_i dans le sens trigonométrique.
- Pour tout $x\in\tilde{\Gamma}$,

$$d_{f^*g}(x,\partial T_\eta(\tilde{\Gamma})) \leq \epsilon.$$

On note $T_\eta(\Gamma)$ son image par f. Pour tout $x\in S^2\setminus T_\eta(\tilde{\Gamma})$, il existe une unique géodésique minimisante de p à $f(x)$ notée γ_x dépendant continûment de x. On a l'inégalité $l_g(\gamma_x)\leq \mathrm{Diam}(M,g)$. En rétractant pour chaque point x de $S^2\setminus T_\eta(\tilde{\Gamma})$ l'image $f(x)$ le long de γ_x, on obtient un nouvel élément $f_1 : S^2\to M$ non trivial du $\pi_2(M)$ tel que

$$f_1(S^2) = T_\eta(\Gamma)\cup\{\gamma_x; x\in\partial T_\eta(\tilde{\Gamma})\}.$$

Soit $j\in\{1,\ldots,l\}$. A chaque arête $a_j:[0,1]\to S^2$ du graphe $\tilde{\Gamma}$, on associe une famille de courbes basées en p de la manière suivante. L'ensemble $\{x\in\partial T_\eta(\tilde{\Gamma})\mid d(x,a_j)\leq\eta\}$ peut être décrit par deux courbes $a_{j,1}$ et $a_{j,2}$ paramétrées sur $[0,1]$ de sorte que $d(a_j(t),a_{j,1}(t)) = d(a_j(t),a_{j,2}(t))\leq\epsilon$. Remarquons que les extrémités de ces courbes sont des points de l'ensemble $\{x_{i,j}\mid i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,k_i\}$. On note $[a_{j,1}(t),a_{j,2}(t)]$ l'image par f_1 de la courbe de $T_\eta(\tilde{\Gamma})$ formée de la concaténation des deux segments géodésiques minimisants (uniques comme $\epsilon<\mathrm{Inj}(S^2,f^*g)$) de $T_\eta(\tilde{\Gamma})$ de $a_{j,1}(t)$ à $a_j(t)$ et de $a_j(t)$ à $a_{j,2}(t)$ respectivement. Comme

$$\mathrm{lsys}_p(M,g) > 2(\mathrm{Diam}(M,g)+\epsilon)$$

et

$$l_g(\gamma_{a_{j,1}(0)}\cup[a_{j,1}(0),a_{j,2}(0)]\cup(-\gamma_{a_{j,2}(0)}))\leq 2(\mathrm{Diam}(M,g)+\epsilon),$$

on obtient en appliquant le procédé de Birkhoff à la courbe $\gamma_{a_{j,1}(0)}\cup[a_{j,1}(0),a_{j,2}(0)]\cup(-\gamma_{a_{j,2}(0)})$ une famille de courbes basées en p que l'on note $\alpha_j(1/3-s)$ pour s variant de 0 à 1/3 de sorte que $\alpha_j(0)=p$, $\alpha_j(1/3)=\gamma_{a_{j,1}(0)}\cup[a_{j,1}(0),a_{j,2}(0)]\cup(-\gamma_{a_{j,2}(0)})$ et

$$l_g(\alpha_j(s))\leq 2(\mathrm{Diam}(M,g)+\epsilon),$$

pour $s\in[0,1/3]$. Ensuite, pour s variant de 1/3 à 2/3, on note à nouveau $\alpha_j(s)$ la courbe $\gamma_{a_{j,1}(3s-1)}\cup[a_{j,1}(3s-1),a_{j,2}(3s-1)]\cup(-\gamma_{a_{j,2}(3s-1)})$, et enfin, comme

$$l_g(\gamma_{a_{j,1}(1)}\cup[a_{j,1}(1),a_{j,2}(1)]\cup(-\gamma_{a_{j,2}(1)}))\leq 2(\mathrm{Diam}(M,g)+\epsilon),$$

$\alpha_j(2/3)$ se contracte en p via une seconde homotopie que l'on note $\alpha_j(s)$ pour s variant de $2/3$ à 1. On a alors une application continue

$$\alpha_j : [0,1] \to CM_p \subset \Lambda M$$

associée à a_j telle que $\alpha_j(0) = \alpha_j(1) = p$ et $l_g(\alpha_j(s)) \leq 2(\mathrm{Diam}(M,g) + \epsilon)$.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On associe maintenant à chaque sommet x_i une famille $\beta_i : [0,1] \to \Lambda M$ de courbes basées en p vérifiant $l_g(\beta_i(s)) \leq 4(\mathrm{Diam}(M,g) + \epsilon)$ pour $s \in [0,1]$. On procède comme suit. Pour chaque couple (k,k') d'entiers (distincts) de $\{1, \ldots, k_i\}$, on note $[x_{i,k}, x_{i,k'}]$ l'image par f_1 de la courbe formée de la concaténation des deux segments géodésiques minimisants de $T_\eta(\tilde{\Gamma})$ de $x_{i,k}$ à x_i et de x_i à $x_{i,k'}$, et $[x_i, x_{i,k}]$ l'image du segment de x_i à $x_{i,k}$. Pour chaque k variant de 1 à $k_i - 1$, comme

$$\mathrm{lsys}_p(M,g) > 2(\mathrm{Diam}(M,g) + \epsilon),$$

la courbe $\gamma_{x_{i,k}} \cup [x_{i,k}, x_{i,k+1}] \cup (-\gamma_{x_{i,k+1}})$ se contracte en p via une homotopie qui nous fournit une famille de courbes de longueur décroissante. Il en va de même pour la courbe $\gamma_{x_{i,k_i}} \cup [x_{i,k_i}, x_{i,1}] \cup (-\gamma_{x_{i,1}})$. On note alors β_i la famille de courbes obtenue en partant de p jusqu'à $\gamma_{x_{i,1}} \cup [x_{i,1}, x_{i,2}] \cup (-\gamma_{x_{i,2}})$ en suivant l'homotopie précédente en sens inverse, puis en concaténant cette courbe à l'homotopie de p à $\gamma_{x_{i,2}} \cup [x_{i,2}, x_{i,3}] \cup (-\gamma_{x_{i,3}})$, ensuite en rétractant de manière évidente la courbe $[x_i, x_{i,2}] \cup (-\gamma_{x_{i,2}}) \cup \gamma_{x_{i,2}} \cup [x_{i,2}, x_i]$ en x_i. On obtient ainsi la courbe $\gamma_{x_{i,1}} \cup [x_{i,1}, x_{i,3}] \cup (-\gamma_{x_{i,3}})$ que l'on concatène avec l'homotopie de p à $\gamma_{x_{i,3}} \cup [x_{i,3}, x_{i,4}] \cup (-\gamma_{x_{i,4}})$ puis on rétracte la courbe $[x_i, x_{i,3}] \cup (-\gamma_{x_{i,3}}) \cup \gamma_{x_{i,3}} \cup [x_{i,3}, x_i]$ en x_i. On obtient ainsi $\gamma_{x_{i,1}} \cup [x_{i,1}, x_{i,4}] \cup (-\gamma_{x_{i,4}})$. En procédant ainsi de suite, on arrive finalement sur la courbe $\gamma_{x_{i,1}} \cup [x_{i,1}, x_{i,k_i}] \cup (-\gamma_{x_{i,k_i}})$. On suit alors l'homotopie qui contracte cette courbe en p. Cette séquence d'homotopie nous fournit $\beta_i : [0,1] \to \Lambda M$ qui vérifie $\beta_i(0) = \beta_i(1) = p$, et $l_g(\beta_i(s)) \leq 4(\mathrm{Diam}(M,g) + \epsilon)$.

Chaque α_j (respectivement β_i) induit une application $[\alpha_j] : S^2 \to M$ (respectivement $[\beta_i] : S^2 \to M$). Dans $\pi_2(M)$,

$$[f_1] = \sum_{i=1}^{n} [\beta_i] + \sum_{j=1}^{l} [\alpha_j],$$

et comme $[f_1] \neq 0$, il existe un i tel que $[\beta]_i \neq 0$ ou un j tel que $[\alpha_j] \neq 0$.

On en déduit $\mathrm{mm}(M,g) \leq 4(\mathrm{Diam}(M,g) + \epsilon)$, et ce raisonnement étant valable pour tout ϵ suffisamment petit, on obtient le résultat.

Il reste à considérer le cas où $\tilde{\Gamma}$ est de dimension 1, mais n'est pas connexe. On peut alors, en considérant séparément les composantes connexes de $\tilde{\Gamma}$ et en les traitant suivant les deux cas décrits précédemment, écrire notre élément $[f]$ initial comme une somme d'éléments du type $[\omega_i]$, $[\alpha_j]$ ou $[\beta_{j'}]$. Ceci achève la démonstration.

2 Inégalité systolique sur les surfaces

2.1 Constante systolique et genre des surfaces

Soit (Σ, g) une surface riemannienne fermée. On note $\mathrm{Aire}(\Sigma, g)$ son aire et $\mathrm{sys}(\Sigma, g)$ la longueur de la plus petite géodésique fermée non contractile dans (Σ, g).

On pose

$$\sigma(\Sigma) = \inf \frac{\mathrm{Aire}(\Sigma, g)}{\mathrm{sys}(\Sigma, g)^2},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des métriques riemanniennes lisses de Σ. Cette quantité s'appelle *la constante systolique* de Σ et est strictement positive pour toute surface de genre non nul ([9]).

Les valeurs explicites de $\sigma(\Sigma)$ sont connues dans les trois cas suivants :

1. Le tore $\mathbb{T}^2$ (C. Loewner, non publié) pour lequel $\sigma(\mathbb{T}^2) = \sqrt{3}/2$, l'égalité étant atteinte pour le tore plat équilatéral.

2. Le plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$ (P. Pu [18]), pour lequel $\sigma(\mathbb{R}P^2) = 2/\pi$, l'égalité étant atteinte pour la métrique ronde.

3. La bouteille de Klein $\mathbb{K}^2$ (C. Bavard [2]), pour laquelle $\sigma(\mathbb{K}^2) = 2\sqrt{2}/\pi$, l'égalité étant atteinte pour une métrique à courbure constante positive avec singularités le long d'un cercle.

Le comportement asymptotique de la constante systolique en fonction du genre de la surface représente un problème intéressant. On note pour cela $\Sigma_h^{\pm}$ une surface de genre $h \geq 1$, le $+$ étant attribué au cas orientable et le $-$ au cas non orientable.

Le résultat suivant a été démontré d'une part par M. Gromov [9], [10] pour l'estimée inférieure, d'autre part par P. Buser et P. Sarnak [6] pour l'estimée supérieure :

Théorème 5 *Il existe des constantes universelles c et C telles que pour tout $h \geq 1$,*

$$c\frac{h}{(\ln h)^2} \leq \sigma(\Sigma_h^{\pm}) \leq C\frac{h}{(\ln h)^2}.$$

Pour une généralisation de ce type d'estimée dans le cas des dimensions plus grandes que 3, on pourra consulter [1].

En combinant les résultats d'une part de B. Bollobás et E. Szemerédi [4], et d'autre part de S. Kodani [13], nous retrouvons cette estimée inférieure asymptotique dans le cas orientable :

Théorème B *Pour $h \geq 1$,*

$$\sigma(\Sigma_h^{+}) \geq \frac{3(\ln 2)^2}{8}\frac{h}{(\ln h)^2} + o\left(\frac{h}{(\ln h)^2}\right).$$

Le résultat de S. Kodani relie la constante systolique d'une surface orientable de genre h à la constante systolique d'un graphe de caractéristique d'Euler $-2h$. Cette dernière a été estimée inférieurement par B. Bollobás et E. Szemerédi.

Dans la section suivante, nous présentons les résultats connus pour le problème systolique sur les graphes, puis nous démontrons le théorème **B**.

2.2 Problème systolique sur les graphes et démonstration du théorème B

Rappelons quelques définitions standards au sujet des graphes. Un *graphe fini* $G = (V, E)$ est un complexe simplicial fini de dimension 1. C'est la donnée d'une paire d'ensembles finis $\{V, E\}$, où V désigne les *sommets* et E les *arêtes* du graphe. Tous les graphes considérés ici sont des *multigraphes*, i.e. des graphes finis dans lesquels on autorise les boucles et les arêtes multiples. Les graphes seront également supposés connexes et non orientés.

Suivant [4], nous nous plaçons dans le cadre des *multigraphes pondérés*. Un *graphe pondéré* est une paire (G, w) où $G = (V, E)$ est un graphe et w est une *fonction poids* sur les arêtes $w : E \to \mathbb{R}_+$.On appelle $w(e)$ le *poids* d'une arête ou d'un lacet. Le *poids* d'un sous-graphe est la somme des poids de ses arêtes. Le poids du graphe pondéré (G, w) est appelé *volume* et est noté $\mathrm{Vol}(G, w)$. Tout graphe est naturellement identifié à un graphe pondéré dans lequel le poids de chaque arête vaut 1. On note $\chi(G)$ la *caractéristique d'Euler* de G. On appelle *systole* de (G, w) et on note $\mathrm{sys}(G, w)$ le minimum des poids d'un cycle non trivial de G (en théorie des graphes, on utilise le terme de *girth*). On pose pour $r \geq 1$,

$$\sigma_1(r) = \inf\{\frac{\mathrm{Vol}(G, w)}{\mathrm{sys}(G, w)} \mid (G, w) \text{ tel que } \chi(G) = -r\}.$$

On dispose de l'estimée inférieure suivante [4] :

Théorème 6 *Pour $r \geq 2$*

$$\sigma_1(r) \geq \frac{3}{2} \frac{r}{\log_2(r) + \log_2 \log_2(r) + 4},$$

où $\log_2$ désigne le logarithme en base 2.

On en déduit

$$\sigma_1(r) \geq \frac{3 \ln 2}{2} \frac{r}{\ln r} + o\left(\frac{r}{\ln r}\right). \tag{2.1}$$

Ce comportement asymptotique est le bon, puisque l'on dispose de l'estimée supérieure (voir [1]) pour $r \geq 2$,

$$\sigma_1(r) \leq 8 \ln 2 \frac{r}{\ln r}.$$

Enonçons maintenant le résultat de S. Kodani [13] :

Théorème 7 *Pour tout $h \geq 1$,*

$$\sigma(\Sigma_h^+) \geq \frac{(\sigma_1(2h))^2}{12(2h+1)}. \tag{2.2}$$

Des inégalités (2.1) et (2.2), on déduit alors facilement le théorème **B** :

$$\sigma(\Sigma_h^+) \geq \frac{3(\ln 2)^2}{8} \frac{h}{(\ln h)^2} + o\left(\frac{h}{(\ln h)^2}\right).$$

Remerciements

Je remercie I. Babenko pour son encadrement et ses conseils, ainsi que S. Sabourau pour son aide durant la rédaction de ce papier.

Références

[1] Babenko, I. & Balacheff, F. : *Géométrie systolique des sommes connexes et des revêtements cycliques*, preprint (www.math.univ-montp2.fr/prepublications/04-05.pdf).

[2] Bavard, C. : *Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein*, Math. Ann., Vol 274, 1986, pp. 439-441.

[3] Birkhoff, G. : *Dynamicals systems with two degrees of freedom*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol 18, 1917, pp.199-300.

[4] Bollobás, B. & Szemerédi, E. : *Girth of sparse graphs*, J. Graph Theory, Vol 39, 2002, pp. 194-200.

[5] Buchner, M. : *Simplicial structure of real analytic cut locus*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol 64, 1977, pp. 118-121.

[6] Buser, P. & Sarnak, P. : *On the period matrix of a Riemann surface of large genus*, Inv. Math., Vol 117, 1994, pp. 27-56.

[7] Calabi, C. & Cao, J. : *Simple closed geodesics on convex surfaces*, J. Differential Geometry, Vol 36, 1992, pp. 517-549.

[8] Croke, C. : *Area and the length of the shortest closed geodesic*, J. Differential Geometry, Vol 27, 1988,pp. 1-22.

[9] Gromov, M. : *Filling Riemannian Manifolds*, J. Differential Geometry, Vol 18, 1983, pp. 1-147.

[10] Gromov, M. : *Systoles and intersystolic inequalities*, Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle, Sem. Congr., Vol 1, 1996, Soc. Math. France, pp. 291-362.

[11] Hirsch, M. : *Differential Topology*, Graduate Texts in Math., Springer Verlag New-York, Vol 33, 1976.

[12] Klingenberg, W. : *Lectures on closed geodesics*, Grundlehren Math. Wiss., Vol 230, Springer Verlag, Berlin, 1978.

[13] Kodani, S. : *On two dimensional isosystolic inequalities*, Kodai Math. J., Vol 10, 1987, pp. 314-327.

[14] Maeda, M. : *The length of a closed geodesic on a compact surface*, Kyushu J. Math., Vol 48, no 1, 1994, pp. 9-18.

[15] Nabutovsky, A. & Rotman, R. : *The length of the shortest closed geodesic on a 2-dimensional sphere*, Int. Math. Res. Not., Vol 23, 2002, pp.1211-1222.

[16] Nabutovsky, A. & Rotman, R. : *Upper bounds on the length of a shortest closed geodesic and quantitative Hurewicz theorem*, J. Eur. Math. Soc., Vol 5, no 3, 2003, pp. 203-244.

[17] Nabutovsky, A. & Rotman, R. : *Volume, Diameter and the minimal mass of a stationnary 1-cycle*, arXiv :Math.DG/0201269, 2002.

[18] Pu, P. : *Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds*, Pacific. J. Math., Vol 2, 1952, pp. 55-72.

[19] Sabourau, S. : *Filling radius and short closed geodesic of the sphere*, Bull. SMF, Vol 132, 2004, pp. 105-136.

[20] Sabourau, S. : *Global and local volume bounds and the shortest geodesic loop*, à paraître dans Communications in Analysis and Geometry.