

# A fórmula de Kontsevich para curvas racionais planas

Joachim Kock e Israel Vainsencher

Recife, maio de 1999



*A Andréa e a Kátia*



# Prefácio

O **objetivo** deste livro é introduzir idéias e técnicas recentes que revolucionaram a geometria enumerativa: *mapas estáveis* e *cohomologia quântica*. Uma prova contundente do seu potencial é a Fórmula de Kontsevich que responde à seguinte questão:

*Quantas curvas racionais de grau  $d$  passam por  $3d - 1$  pontos dados em posição geral no plano projetivo?*

A resposta é a fórmula recursiva 3.3.1 que expressa cada número em termos dos números anteriores; uma só informação inicial é necessária para a recursão: o caso  $d = 1$ , ou seja, o fato de que por dois pontos passa uma única reta.

Assumindo a existência dos espaços de Kontsevich e suas propriedades básicas, apresentamos uma demonstração completa da referida fórmula.

A **referência canônica** para este tópico é o já clássico artigo *Notes on Stable Maps and Quantum Cohomology* de Fulton e Pandharipande [20], que doravante citaremos como FP-NOTES.

Introduzimos algumas simplificações em troca de perda de generalidade. Optamos por não incluir os detalhes técnicos da construção, em favor da apresentação de exemplos e discussões heurísticas. Ressaltamos que nosso texto não pretende nem pode substituir FP-NOTES; ao contrário, esperamos motivar o leitor para se aprofundar nas referidas notas. Você já tem uma cópia? Se não, aponte o seu navegador para <http://xxx.if.usp.br/ps/alg-geom/9608011>, e a obtenha ainda hoje. . .

**Pré-requisitos:** uma certa maturidade em geometria algébrica; familiaridade com divisores, variedades de Grassmann, famílias, teoria de interseção elementar incluindo as noções de imagem recíproca e imagem direta de ciclos e classes, dualidade de Poincaré. A referência consagrada para o assunto é Fulton [18] ou seu resumo em [19]. O texto do 15º Colóquio [42] é suficiente. Finalmente,

o leitor deve ter uma noção do que é um espaço de módulos, ao nível por exemplo da Introdução do livro de Esteves [16] do 21º Colóquio.

**Agradecimentos.** Apreciamos a ocasião proporcionada pela Coordenação do 22º Colóquio de nos forçar a enfrentar dúvidas e melhor estruturar nosso conhecimento do assunto.

A idéia do livro e do estilo teve sua origem no mini-curso apresentado por Letterio Gatto, *Intersection theory over moduli spaces of curves*, na Escola de Verão'98 da UFPE (veja Gatto [22]). Ele nos mostrou que era possível expor de maneira inteligível sobre mapas estáveis, e que a fórmula de Kontsevich não era uma mágica inatingível da física teórica, e sim material que se encaixa perfeitamente na tradição da geometria enumerativa.

O texto foi baseado em notas de seminários de conteúdo similar, dado pelo primeiro autor em três ocasiões durante 1998: em fevereiro-março em Recife, em outubro em Belo Horizonte, e em dezembro no encontro ALGA em Maragogi. Agradecemos a Elizabeth Gasparim, Francesco Russo e Letterio Gatto pela leitura de uma versão preliminar e comentários que em muitos casos levaram a melhoramentos da exposição. Agradecemos também a S. L. Kleiman e a R. Pandharipande que responderam a algumas perguntas pertinentes ao texto. O primeiro (resp. segundo) autor é apoiado por uma bolsa do Conselho de Pesquisa da Dinamarca (resp. CNPq) e registra aqui sua gratidão.

Encorajamos o leitor que tenha comentários ou sugestões, que nos contate a respeito.

Recife, 31 de abril de 1999      JOACHIM KOCK      e      ISRAEL VAINSENER  
jojo@dmat.ufpe.br      israel@dmat.ufpe.br

# Conteúdo

Prefácio	v
Introdução	ix
Convenções globais	xiii
<b>1 Curvas <math>n</math>-marcadas estáveis</b>	<b>1</b>
1.1 Curvas racionais lisas marcadas . . . . .	1
1.2 Curvas racionais marcadas estáveis . . . . .	5
1.3 Estabilização, esquecimento, contração . . . . .	10
1.4 Esboço de construção de $\overline{M}_{0,n}$ . . . . .	14
1.5 A fronteira . . . . .	16
1.6 Generalizações e referências . . . . .	22
<b>2 Mapas estáveis</b>	<b>25</b>
2.1 Mapas $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$ . . . . .	25
2.2 Famílias a 1 parâmetro . . . . .	32
2.3 Mapas estáveis de Kontsevich . . . . .	36
2.4 Idéia da construção de $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ . . . . .	38
2.5 Mapas de avaliação . . . . .	42
2.6 Mapas de esquecimento . . . . .	43
2.7 A fronteira . . . . .	47
2.8 Exemplos . . . . .	50
2.9 Cônicas completas . . . . .	52
2.10 Generalizações e referências . . . . .	57
<b>3 Geometria enumerativa via mapas estáveis</b>	<b>61</b>
3.1 Geometria enumerativa clássica . . . . .	61

---

3.2	Contando cônicas e cúbicas racionais via mapas estáveis . . .	64
3.3	A fórmula de Kontsevich . . . . .	69
3.4	Generalizações e referências . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Invariantes de Gromov-Witten</b>	<b>73</b>
4.1	Significado enumerativo . . . . .	73
4.2	Propriedades dos invariantes de Gromov-Witten . . . . .	83
4.3	Recursão . . . . .	85
4.4	O teorema da reconstrução . . . . .	88
4.5	Generalizações e referências . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Cohomologia quântica</b>	<b>95</b>
5.1	O produto quântico . . . . .	95
5.2	Associatividade . . . . .	97
5.3	A fórmula de Kontsevich via cohomologia quântica . . . . .	100
5.4	Generalizações e referências . . . . .	102
	<b>Bibliografia</b>	<b>106</b>
	<b>Índice</b>	<b>111</b>

# Introdução

A geometria enumerativa tem como objetivo contar quantas figuras geométricas satisfazem a um certo número de condições. Um exemplo que aprendemos logo cedo é a questão de *quantas retas passam por dois pontos distintos*.

Uma extensão natural desta pergunta é o problema de *calcular o número  $N_d$  de curvas racionais que passam por  $3d-1$  pontos em posição geral no plano projetivo*. O número  $3d-1$  não é arbitrário: é a dimensão da família de curvas em questão e resulta ser exato para se obter um número finito de soluções sob as condições impostas.

O charme desses problemas que encantaram os matemáticos desde o início dos tempos, é que são fáceis de formular, a resposta é sempre simples — afinal é um número inteiro — mas a solução, quando encontrada, muitas vezes exigiu caminhos inovadores.

Na segunda parte do século XIX, a arte de resolver problemas enumerativos chegou a um alto grau de sofisticação, a ponto de se tornar uma construção muito mais pesada do que o próprio fundamento da teoria podia então sustentar. Hilbert incluiu como 15º problema na sua lista a fundamentação da geometria enumerativa. Veja Kleiman [29] para um interessante passeio histórico, com muitas referências.

O século XX testemunhou um grande avanço da teoria de interseção, ferramenta indispensável para a geometria enumerativa. Nas décadas de 70 e 80, muitos problemas enumerativos antigos foram resolvidos. Porém, a pergunta geral da determinação dos números  $N_d$  se mostrou mais difícil, tendo os anos 80 dado a luz apenas à solução  $N_5 = 87304$ . A revolução ocorreu em 94 quando surgiu uma ligação entre a física teórica (teoria das cordas) e a geometria enumerativa. Como corolário, Kontsevich obteve uma solução do problema, em termos da fórmula recursiva

$$N_d = \sum_{d_A+d_B=d} N_{d_A} N_{d_B} d_A^2 d_B \left( d_B \binom{3d-4}{3d_A-2} - d_A \binom{3d-4}{3d_A-1} \right).$$

Não apenas a fórmula permite calcular facilmente tantos  $N_d$ 's quantos você quiser, mas faz também um apelo muito grande à sensibilidade estética dos matemáticos. De fato, ela reduz a determinação de números que há mais de cem anos resistiam a intensa investigação, ao número  $N_1 = 1$  de retas passando por dois pontos distintos!

A fórmula é o resultado de novas teorias de *mapas estáveis* e *cohomologia quântica* que não tardaram a achar outras aplicações enumerativas. Um objeto central dessas teorias é o espaço de módulos  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ . Trata-se de uma compactificação do espaço de (classes de isomorfismo) de mapas  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  de grau  $d$ , com  $n$  pontos marcados, e com uma certa condição de estabilidade.

Porém, historicamente, o caminho para chegar à fórmula de Kontsevich foi outro, e não é errado dizer que a ligação com geometria enumerativa veio como uma grande e agradável surpresa. Na teoria das cordas, desenvolvida por Witten e outros (veja por exemplo [46]), a área chamada “topological quantum field theory” introduziu a noção de cohomologia quântica.

Para a fundamentação matemática dessas construções foram concebidos os invariantes de Gromov-Witten. Estes, por sua vez, necessitavam da existência dos espaços de módulos de mapas. Kontsevich foi o primeiro a indicar como seria a natureza daqueles espaços (veja Kontsevich-Manin [33]), e pôde mostrar que suas propriedades implicavam as propriedades requeridas da cohomologia quântica. Em particular, provou que o produto quântico para  $\mathbb{P}^2$  seria associativo se e somente se valesse a fórmula recursiva (argumento que exporemos no capítulo 5). Uma vez descoberta a fórmula, não foi difícil estabelecer uma demonstração formal, que é basicamente a que veremos no capítulo 3.

O artigo original de Kontsevich e Manin [33] ignorava a existência formal do espaço de módulos  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ , que apenas foi construído mais tarde por Ruan e Tian [40] (na categoria simplética) e por Behrend e Manin [7] na categoria algébrica. A construção é bastante técnica e ocupa 20 páginas de FP-NOTES.

Passamos a descrever resumidamente o conteúdo por capítulo.

Uma traço característico dos mapas estáveis são as *marcas*. Estas desempenham um papel importante também para estabilizar curvas, e são igualmente úteis na hora de fazer aplicações enumerativas. A teoria de como distribuir marcas em curvas é o assunto do primeiro capítulo: descrevemos o espaço de módulos de *curvas  $n$ -marcadas estáveis* de Knudsen-Mumford. É uma peça chave para a compreensão do material subsequente. Muitas das propriedades dos espaços de mapas estáveis vêm dos espaços de curvas  $n$ -marcadas.

---

No segundo capítulo começamos por uma discussão heurística que leva naturalmente à introdução do conceito de mapas estáveis. Enunciamos aqui o teorema de existência do espaço de módulos  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ . Esboçamos a idéia de sua construção e coletamos sem demonstração suas propriedades mais importantes: projetividade, normalidade, mapas naturais de avaliação e de esquecimento e a estrutura recursiva da fronteira — a chave da fórmula de Kontsevich. Discutimos por fim, com algum detalhe técnico, o folclórico exemplo do espaço de cônicas completas.

No terceiro capítulo fazemos inicialmente uma curta introdução à geometria enumerativa de curvas racionais, comparando as abordagens baseadas em *equações* (sistemas lineares) com as baseadas em *parametrizações* (mapas). Em seguida, usamos a estrutura recursiva do espaço de módulos de mapas estáveis para contar cônicas passando por 5 pontos, e depois cúbicas racionais passando por 8 pontos. Estas contas são formalizadas para dar uma primeira demonstração da fórmula de Kontsevich.

Nos dois últimos capítulos situamos a fórmula de Kontsevich num contexto mais amplo, por meio das noções de *invariantes de Gromov-Witten* e *cohomologia quântica*. No capítulo 4 introduzimos os invariantes de Gromov-Witten como um sistema de organizar informação enumerativa. Os exemplos do capítulo 3 são formalizados nesta nova linguagem de sorte que a fórmula passa a ser um caso particular do *teorema da reconstrução*. Este afirma que todos os invariantes de Gromov-Witten podem ser reconstruídos a partir do primeiro,  $I_1(h^r, h^r) = 1$ , que de novo nada mais é que a afirmação de que por dois pontos passa uma única reta.

No quinto capítulo, definimos a álgebra de cohomologia quântica de  $\mathbb{P}^r$ , e repetimos deste novo ponto de vista os argumentos da seção anterior, para estabelecer sua *associatividade*. Daí resulta a fórmula de Kontsevich como um corolário formal.

Cada capítulo tem no fim uma seção intitulada *Generalizações e referências* onde tentamos reunir algumas silhuetas do material que cuidadosamente cortamos do texto principal e que estendem naturalmente o exposto no capítulo. Esperamos assim fornecer um guia para leitura subsequente. Algumas das referências indicadas são bastante avançadas, e certamente o presente texto não é uma preparação adequada para a compreensão das mesmas. Mesmo assim recomendamos que o leitor as folheie, tanto para saborear os resultados como para ter uma idéia do que vem sendo feito nesta área de intensa atividade, da qual tratamos aqui apenas alguns aspectos enumerativos.

Tomamos emprestado de Sir Michael F. Atiyah [3] a última palavra desta introdução:

*What we are now witnessing on the geometry/physics frontier is, in my opinion, one of the most refreshing events in the mathematics of the 20th century. The ramifications are vast and the ultimate nature and scope of what is being developed can barely be glimpsed. It might well come to dominate the mathematics of the 21st century. [...]*

*For the students who are looking for a solid, safe PhD thesis, this field is hazardous, but for those who want excitement and action, it must be irresistible.*

## Convenções globais

Trabalhamos sobre o corpo dos números complexos. Uma variedade significa um esquema quase-projetivo, reduzido, equidimensional e de tipo finito sobre  $\mathbb{C}$ . Todos os mapas são  $\mathbb{C}$ -morfismos. Um *ponto* de uma variedade é sempre um ponto fechado (i.e. um  $\mathbb{C}$ -ponto).



# Capítulo 1

## Curvas $n$ -marcadas estáveis

Nosso principal objeto de estudo são os espaços  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  de mapas estáveis, cuja introdução adiamos para a seção 2.3. Muitas das suas propriedades são herdadas de  $\overline{M}_{0,n}$ , o importante espaço de Knudsen-Mumford de módulos de curvas racionais  $n$ -marcadas estáveis. A construção de  $\overline{M}_{0,n}$  será omitida. Mas discutiremos com alguns detalhes e exemplos os casos  $n \leq 5$ . Em particular, a combinatória da fronteira merece uma descrição cuidadosa. A principal referência para este tópico é Knudsen [30]; veja também Keel [27].

### 1.1 Curvas racionais lisas marcadas

**1.1.1 Automorfismos de  $\mathbb{P}^1$ .** O grupo de automorfismos de  $\mathbb{P}^1$  é

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^1) = \text{PGL}(2),$$

o grupo tridimensional de matrizes inversíveis  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  módulo fator constante. Ele age em  $\mathbb{P}^1$  por multiplicação,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix},$$

onde  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  denota coordenadas homogêneas do ponto  $[x : y] \in \mathbb{P}^1$ . Em coordenadas afins a ação expressa-se como a transformação fracionária (chamada também de transformação de Möbius)

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}.$$

É bem sabido que, dada qualquer terna de pontos distintos  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^1$ , existe um único automorfismo  $\varphi$  tal que

$$p_1 \mapsto 0, \quad p_2 \mapsto 1, \quad p_3 \mapsto \infty.$$

**1.1.2 Razão cruzada.** Seja agora  $p_4$  um quarto ponto de  $\mathbb{P}^1$  (distinto dos três primeiros). A imagem de  $p_4$  pelo único automorfismo  $\varphi$  acima é dada pela fórmula

$$p_4 \mapsto \lambda(p_1, p_2, p_3, p_4) := \frac{(p_2 - p_3)(p_4 - p_1)}{(p_2 - p_1)(p_4 - p_3)}.$$

Classicamente esta é chamada a *razão cruzada* da quádrupla  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$ . (Variam na literatura as convenções sobre a ordem dos quatro pontos.) Observe que a razão cruzada nunca atinge qualquer dos três valores  $0, 1, \infty$ .

É fácil ver que, dadas duas quádruplas de pontos distintos em  $\mathbb{P}^1$ , existe um automorfismo que leva uma na outra se, e só se, as duas razões cruzadas são iguais. Mais geralmente, pode-se mostrar que duas  $n$ -uplas  $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  e  $(p'_1, p'_2, p'_3, \dots, p'_n)$  são projetivamente equivalentes em  $\mathbb{P}^1$  se e só se vale a igualdade de razões cruzadas  $\lambda(p_1, p_2, p_3, p_i) = \lambda(p'_1, p'_2, p'_3, p'_i)$  para cada  $i$  de 4 a  $n$ .

Estas observações levam facilmente a uma solução do problema de classificação de “ $n$ -uplas de pontos distintos em  $\mathbb{P}^1$ ”, módulo equivalência projetiva. Porém, como ficará claro na próxima seção, é conveniente mudar um pouco o ponto de vista, de sorte a permitir lidar também com limites quando os pontos se aproximam.

**1.1.3 Exercício.** Mostre que o mapa  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \text{diagonais} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  que associa a cada terna de pontos distintos o único mapa que os leva ordenadamente em  $0, 1, \infty$  é um morfismo.

**Definição.** Uma *curva racional lisa  $n$ -marcada*

$$(C, p_1, \dots, p_n)$$

é uma curva racional lisa projetiva  $C$  munida da escolha de  $n$  pontos *distintos*  $p_1, \dots, p_n \in C$ .

Um isomorfismo entre duas curvas racionais  $n$ -marcadas

$$\varphi : (C, p_1, \dots, p_n) \xrightarrow{\sim} (C', p'_1, \dots, p'_n)$$

é um isomorfismo  $\varphi : C \xrightarrow{\sim} C'$  que respeita as marcas ordenadas, i.e.,

$$\varphi(p_i) = p'_i, \quad i = 1 \dots n.$$

Mais geralmente, uma *família de curvas racionais lisas  $n$ -marcadas* é uma família plana e própria (cf. [26] p.95, 253)  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  com  $n$  seções disjuntas  $\sigma_i : B \rightarrow \mathfrak{X}$  tal que cada fibra geométrica  $\mathfrak{X}_b := \pi^{-1}(b)$  é uma curva racional projetiva lisa. Note que as  $n$  seções selecionam  $n$  pontos especiais  $\sigma_i(b)$  que são as  $n$  marcas daquela fibra. Um *isomorfismo* entre duas famílias  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  e  $\pi' : \mathfrak{X}' \rightarrow B$  (com a mesma base) é um isomorfismo  $\varphi : \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}'$  que torna comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{X}' \\ \sigma_i \uparrow & \downarrow \pi & \downarrow \pi' \\ B & \xlongequal{\quad} & B \\ & & \uparrow \sigma'_i \end{array}$$

Lembrando que toda curva racional lisa é isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ , classificar curvas racionais lisas  $n$ -marcadas módulo isomorfismo é o mesmo que classificar  $n$ -uplas de pontos distintos em  $\mathbb{P}^1$ , módulo equivalência projetiva.

Seja  $\mathcal{M}_{0,n}$  o funtor da categoria de esquemas para a categoria de conjuntos que atribui a cada esquema  $B$  o conjunto de classes de isomorfismo de famílias de curvas racionais lisas  $n$ -marcadas sobre  $B$ . O primeiro índice indica gênero igual a zero. Temos o seguinte resultado básico.

**1.1.4 Proposição.** *Para  $n \geq 3$ , o funtor  $\mathcal{M}_{0,n}$  é representável.* □

Denote por  $M_{0,n}$  o esquema que representa (cf. Newstead [36]) o funtor  $\mathcal{M}_{0,n}$ . Uma formulação equivalente para a proposição é dizer que  $M_{0,n}$  é um espaço de módulos fino para o problema de classificação de curvas racionais lisas  $n$ -marcadas. Isto significa que existe uma família universal  $U_{0,n} \rightarrow M_{0,n}$  de curvas  $n$ -marcadas. Em outras palavras, toda família  $\mathfrak{X} \rightarrow B$  de curvas racionais projetivas lisas munida de  $n$  seções disjuntas é induzida (juntamente com as seções) por um e só um mapa  $B \rightarrow M_{0,n}$ .

**1.1.5 Exemplo.** Seja  $n = 3$ . Para qualquer curva racional lisa com três marcas  $(C, p_1, p_2, p_3)$ , existe um único isomorfismo a  $(\mathbb{P}^1, 0, 1, \infty)$ . Isto é, existe apenas uma classe de isomorfismo e portanto  $M_{0,3}$  é um ponto. Sua família universal é um  $\mathbb{P}^1$  com as marcas  $0, 1, \infty$ . De fato, se  $\mathfrak{X} \rightarrow B$  é uma família com

fibras geométricas isomorfas a  $\mathbb{P}^1$  que admite pelo menos uma seção, pode-se mostrar que  $\mathfrak{X} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E})$ , onde  $\mathcal{E}$  denota um fibrado vetorial de posto dois sobre  $B$  (cf. o argumento em [26], p.369). Se a família admitir pelo menos duas seções disjuntas, então o fibrado se cinde; se existirem três seções disjuntas, mostra-se que  $\mathfrak{X} \simeq B \times \mathbb{P}^1$  e que existe um único isomorfismo tal que as três seções identificam-se com as seções constantes  $B \times 0$ ,  $B \times 1$ ,  $B \times \infty$ , nesta ordem.

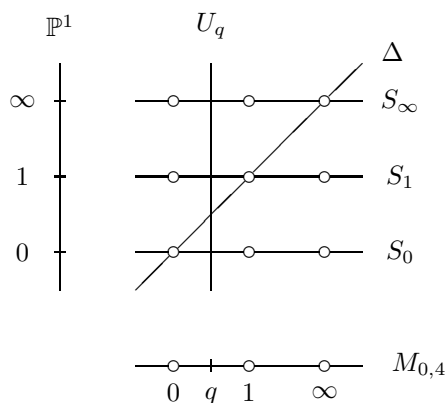
**1.1.6 Exemplo.** Suponha agora  $n = 4$ . Este é o primeiro caso não trivial de espaço de módulos de curvas racionais marcadas. Vamos descrevê-lo com detalhes, juntamente com sua compactificação  $\overline{M}_{0,4}$  (cf. 1.2.6).

Sabemos que é possível fixar as três primeiras marcas como

$$p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = \infty$$

mediante um isomorfismo único. Resta-nos apenas um ponto, o qual pode ser arbitrário, desde que distinto dos três fixados. Ou seja, toda curva munida de 4 marcas,  $(C, p_1, p_2, p_3, p_4)$ , é isomorfa a  $(\mathbb{P}^1, 0, 1, \infty, q)$  para um único  $q \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  e o isomorfismo das curvas marcadas é único. Vemos assim que  $M_{0,4} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  deve ser um espaço de módulos para curvas racionais com 4-marcas (módulo isomorfismos). Se preferir, pode pensar em  $M_{0,4}$  como o espaço das razões cruzadas. Para verificar que se trata efetivamente de um espaço de módulos fino, devemos exibir uma família universal.

Considere a família trivial  $U_{0,4} := \mathbb{P}^1 \times M_{0,4} \rightarrow M_{0,4}$  juntamente com as seguintes seções disjuntas: a seção diagonal  $\Delta$ , e mais as três seções constantes  $S_0 = 0 \times M_{0,4}$ ,  $S_1 = 1 \times M_{0,4}$ , e  $S_\infty = \infty \times M_{0,4}$ . Então a fibra sobre um ponto  $q \in M_{0,4}$  é uma reta projetiva  $U_q$  com quatro pontos distinguidos, a saber, suas interseções com as quatro seções.



**1.1.7 Descrição de  $M_{0,n}$  em geral.** Para obter  $M_{0,5}$ , tome  $M_{0,4} \times M_{0,4}$  e jogue fora a diagonal. Da mesma forma é fácil se convencer de que o espaço  $M_{0,n}$  é isomorfo ao produto cartesiano de  $n - 3$  cópias de  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  *menos* todas as grandes diagonais. (Pense como o espaço parametrizando  $n - 3$  razões cruzadas distintas.)

$$M_{0,n} = \underbrace{M_{0,4} \times \cdots \times M_{0,4}}_{n-3} \setminus \bigcup \text{ diagonais.}$$

Em particular,  $M_{0,n}$  é liso, de dimensão  $n - 3$ . Observe que a família universal é a trivial  $U_{0,n} = \mathbb{P}^1 \times M_{0,n}$  com as seguintes seções. As três primeiras são as constantes  $0, 1, \infty$  (nesta ordem) e as demais são as  $n - 3$  projeções  $M_{0,n} = M_{0,4} \times \cdots \times M_{0,4} \rightarrow M_{0,4} \subset \mathbb{P}^1$ .

## 1.2 Curvas racionais marcadas estáveis

Uma primeira idéia para compactificar  $M_{0,n}$  é simplesmente permitir que as marcas coincidam; a compactificação seria então algo como  $(\mathbb{P}^1)^{n-3}$  ou  $\mathbb{P}^{n-3}$ . Porém, propriedades geométricas básicas seriam perdidas com estas compactificações, como mostra o seguinte exemplo.

**1.2.1 Exemplo.** Considere as duas famílias de quádruplas

$$C_t = (0, 1, \infty, t), \quad D_t = (0, t^{-1}, \infty, 1).$$

Enquanto  $t \neq 0, 1, \infty$ , temos famílias de curvas racionais 4-marcadas lisas. Obviamente as duas famílias têm em comum a mesma razão cruzada  $t$ , logo são isomorfas. Mas os limites para  $t = 0$  envolvem pontos coincidentes:  $C_0$  tem  $p_1 = p_4$  (igual a zero), enquanto  $D_0$  tem  $p_2 = p_3$  (igual a infinito). Certamente essas duas configurações não são projetivamente equivalentes.

A maneira “correta” de contornar a anomalia que descrevemos foi encontrada por Knudsen e Mumford (cf. [30]). Eles mostraram que o natural é incluir configurações onde a curva “quebra”, isto é, admitir certas curvas reductíveis. As curvas que aparecem na compactificação “boa” são as curvas *estáveis* que passamos a definir.

**Definição.** Uma *árvore de retas projetivas* é uma curva conexa com as seguintes propriedades.

- (i) Cada componente irredutível é isomorfa a uma reta projetiva.
- (ii) As interseções de componentes são nós, i.e., pontos duplos ordinários.
- (iii) Não há circuitos fechados. Isto é, se remover um nó, a curva fica desconexa. Equivalentemente, se  $\delta$  é o número de nós, então há  $\delta + 1$  componentes irredutíveis.

As três propriedades equivalem a dizer que a curva tem gênero aritmético 0.

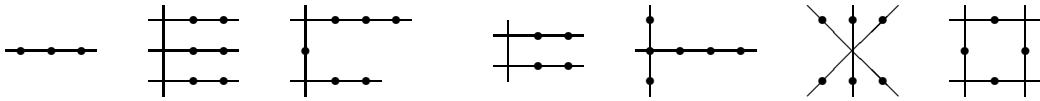
Convencionaremos também chamar de *galho* cada componente irredutível de uma árvore.

**Definição.** Seja  $n \geq 3$ . Uma curva racional  $n$ -marcada *estável* é uma árvore  $C$  de retas projetivas, com  $n$  marcas distintas que são pontos lisos de  $C$ , tal que cada galho apresenta pelo menos três pontos especiais.

Aqui, *ponto especial* significa qualquer uma das marcas ou um nó (ponto de interseção com outro galho).

Todas as curvas consideradas doravante são racionais. Por isso, diremos simplesmente *curvas  $n$ -marcada estável*, subentendendo que se trata de curva *racional  $n$ -marcada estável*.

**1.2.2 Exemplo.** Na figura seguinte, os galhos são todos isomorfos a  $\mathbb{P}^1$ . As três primeiras curvas são curvas racionais  $n$ -marcadas estáveis; as quatro últimas não o são.



A quarta curva não é estável porque o galho vertical tem apenas dois pontos especiais; a quinta não é estável porque mostra uma marca que é um ponto singular da curva. Finalmente a sexta e a sétima curva não são árvores. A sexta, porque tem um ponto triplo, a sétima porque tem um circuito fechado. (Porém, a sétima é estável enquanto curva 4-marcada de gênero 1, cf. 1.6.2.)

**1.2.3 Convenção.** Diremos que um dado objeto ou configuração *não admite automorfismos* ou *é livre de automorfismos* se a identidade for o único automorfismo possível.

**1.2.4 Observação.** Uma vez que exigimos três (ou mais) pontos especiais numa reta projetiva, não sobram mais automorfismos. Assim, a condição de cada galho ter três ou mais pontos especiais é equivalente a dizer que a curva não admite automorfismos.



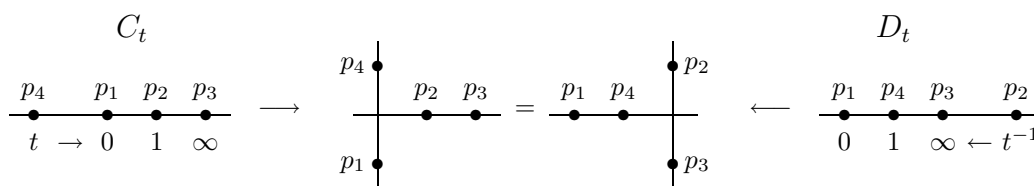
nientes da interseção com os transformados estritos  $\tilde{S}_1$  e  $\tilde{S}_\infty$ . Essas duas marcas permanecem distintas pois estão fora do centro de explosão; pelo mesmo motivo,  $\tilde{S}_1$  e  $\tilde{S}_\infty$  não encontram  $E_0$ . Em  $E_0$  existem também duas marcas, a saber, as interseções com os transformados estritos de  $S_0$  e  $\Delta$ . Elas são distintas pois esses dois divisores se cruzam transversalmente em  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

Resumindo, a fibra sobre  $q = 0$  consiste em duas retas projetivas que se cortam em um ponto, e cada uma dessas retas apresenta dois pontos marcados. Em particular, a fibra é estável: há três pontos especiais em cada um dos dois galhos.

A construção mostra que, cada vez que dois pontos marcados tentam coincidir, um novo galho brota e recebe os dois pontos. Veja a figura.



**1.2.7 Exemplo.** Mantendo a mesma notação, vejamos como o problema do exemplo 1.2.1 é resolvido. O limite  $C_0$  da família  $C_t = (0, 1, \infty, t)$  é a árvore com dois galhos tal que  $p_1 = 0$  junto com  $p_4$  fica em um galho, e  $p_2 = 1$  e  $p_3 = \infty$  no outro. Agora observe que, a menos de isomorfismo (único), só existe uma curva 4-marcada deste tipo. Com efeito, há exatamente três pontos especiais em cada galho, justamente o suficiente para a curva ser estável, e para não permitir mais liberdade de escolhas. A mesma descrição serve para o limite  $D_0$  da família  $D_t = (0, t^{-1}, \infty, 1)$ . Portanto, esses limites são iguais, como queríamos.



**1.2.8 Observação.** Vimos que  $\overline{U}_{0,4}$  é igual a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  explodido nos três pontos. Isto pode ser reinterpretado também como afirmar que  $\overline{U}_{0,4}$  é igual a  $\overline{M}_{0,4} \times_{\overline{M}_{0,3}} \overline{M}_{0,4}$  explodido nos três pontos. Esta é a idéia da generalização para o caso de mais marcas. Veja 1.4 adiante.

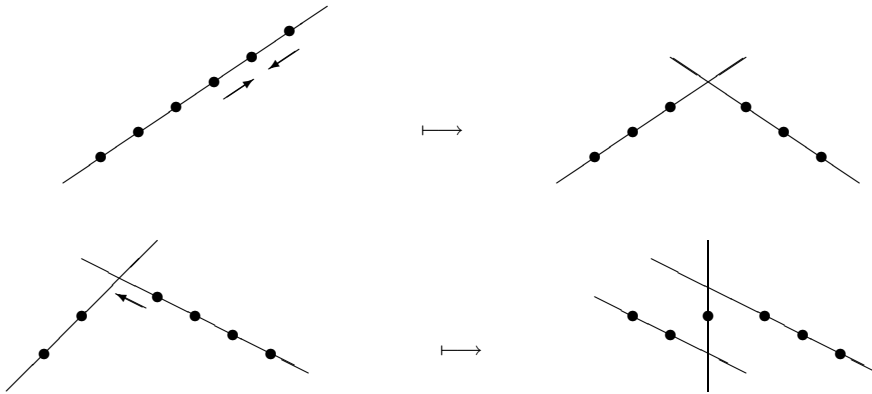
Observe que em coordenadas locais analíticas, numa vizinhança  $\mathbb{A}^1 \simeq U \subset \overline{M}_{0,4}$  de um ponto  $t = 0$  da fronteira de  $\overline{M}_{0,4}$ , o mapa é da forma

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x, y, t) &\mapsto t \end{aligned}$$

onde  $Q \subset \mathbb{A}^3$  é dada pela equação  $xy = t$ . Esta observação também se generaliza... Veja ainda 1.4.4.

**1.2.9 Observação.** Explodir  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  em três pontos é a mesma coisa que explodir  $\mathbb{P}^2$  em quatro pontos. Esta superfície pode ser realizada como a superfície de del Pezzo  $S_4 \subset \mathbb{P}^5$  que é a imagem de  $\mathbb{P}^2$  imersa pelo sistema linear das cúbicas passando pelos quatro pontos. As dez retas que  $S_4$  contém, correspondem então exatamente às seguintes curvas: as quatro seções  $0, 1, \infty, \Delta$ ; as três fibras estritas  $F_0, F_1, F_\infty$ ; e os três divisores excepcionais  $E_0, E_1, E_\infty$ . Veja o livro de Beauville [4], p.60–63.

**1.2.10 Com mais marcas.** Mais geralmente, em situações com mais marcas, a figura para degenerações continua praticamente a mesma. Sempre que numa tal curva duas marcas vêm a coincidir, nasce um novo galho (racional) para receber as duas marcas. Quando há mais marcas disponíveis, é também possível que três ou mais marcas se juntem simultaneamente; então um único galho racional aparece para acolher esses pontos. Por fim, pode acontecer que uma ou mais marcas se aproximem de um nó (interseção de dois galhos); aí novamente surge um novo galho absorvendo todos os pontos em questão, como indicado nas figuras:

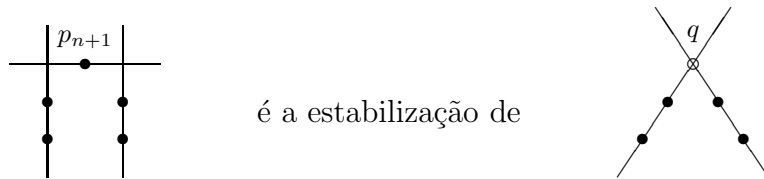


**1.2.11 Observação.** Você poderia se perguntar o que acontece quando duas marcas colidem num galho com apenas três pontos especiais. Se isso fosse possível, obteríamos um galho com apenas dois pontos especiais e a estabilidade seria perdida. Mas note que esse caso não pode ocorrer: quando um dos três pontos especiais começa a se mover, a curva permanece isomorfa à curva original, já que existe um automorfismo que envia o ponto de volta à sua posição inicial. Assim, mover pontos num galho com só três pontos especiais não traça uma curva no espaço de módulos: jamais abandonamos o mesmo ponto nesse espaço. Portanto, esse tipo de degeneração não é possível.

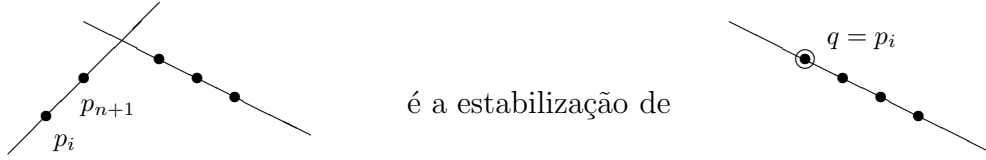
### 1.3 Estabilização, esquecimento, contração

**1.3.1 Estabilização.** Dada uma curva  $n$ -marcada estável  $(C, p_1, \dots, p_n)$  e um ponto arbitrário  $q \in C$ , vamos descrever uma maneira canônica de produzir uma curva  $(n+1)$ -marcada estável. Se  $q$  não é um ponto especial, então é só fazer  $p_{n+1} := q$  e temos uma curva  $(n+1)$ -marcada que obviamente é estável. Se  $q$  é um ponto especial de  $C$ , fazemos de início  $p_{n+1} := q$ , mas neste caso a curva  $(n+1)$ -marcada não fica estável. O que afirmamos é que existe uma maneira canônica de *estabilizar* uma curva deste tipo. Já vimos nos exemplos da seção anterior como isso deve ser feito: para haver continuidade no processo de estabilização, o limite das estabilizações deve ser a estabilização do limite. Se  $p_{n+1} = q$  corre em pontos não especiais de  $C$  e de repente coincide com um nó ou uma marca  $p_i$ , então já aprendemos quem é o limite, isto é, quem é a estabilização. Reveja nos dois casos seguintes.

Caso I. Se  $q$  é o nó de incidência de dois galhos, separe-os e forme uma nova curva acrescentando um galho unindo aqueles dois, e marcando  $p_{n+1}$  sobre o galho novo.



Caso II. Se  $q$  coincide com uma das marcas, digamos  $p_i$ , crie um galho novo nesse ponto e marque nele  $p_i, p_{n+1}$ .



Note que nos dois casos, a escolha de posição dessas marcas no novo galho é irrelevante, já que temos nele exatamente três pontos especiais.

Mais precisamente, esse processo funciona em famílias:

**1.3.2 Proposição.** (Knudsen [30].) *Dada uma família de curvas  $n$ -marcadas estáveis  $(\mathfrak{X}/B, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , seja  $\delta : B \rightarrow \mathfrak{X}$  mais uma seção qualquer. Então existem uma família  $(\mathfrak{X}'/B, \sigma'_1, \dots, \sigma'_n, \sigma'_{n+1})$  de curvas  $(n+1)$ -marcadas estáveis (sobre  $B$ ) e um  $B$ -morfismo  $\kappa : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  tal que*

- (i) *sua restrição  $\kappa^{-1}(\mathfrak{X} \setminus \delta) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X} \setminus \delta$  é um isomorfismo,*
- (ii)  *$\kappa \circ \sigma'_{n+1} = \delta$  e*
- (iii)  *$\kappa \circ \sigma'_i = \sigma_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ .*

*A menos de isomorfismo, a família é única com essas propriedades, e é chamada a estabilização de  $(\mathfrak{X}/B, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \delta)$ .*

*Vale ainda que estabilização comuta com produtos fibrados.* □

A última asserção é útil principalmente porque garante que as fibras da família estabilizada são as estabilizações das fibras. Em particular, em todas as fibras de  $\mathfrak{X}/B$  onde  $\delta$  é disjunta das outras seções  $\sigma_i$ , temos  $\mathfrak{X}'_b$  isomorfa a  $\mathfrak{X}_b$  com as  $n + 1$  seções.

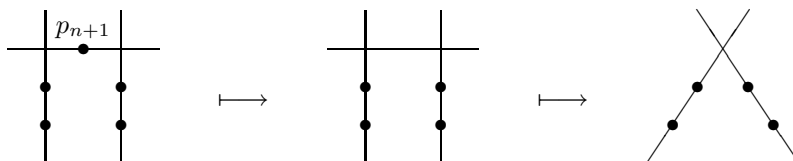
Já vimos um caso dessa estabilização de uma família, no exemplo 1.2.6 onde a seção extra foi a diagonal. A estabilização consistiu em explosão dos três pontos de interseção entre as seções. Essa observação se generaliza e Knudsen mostra como a estabilização é dada por explosões específicas.

**1.3.3 Esquecimento e contração.** Reciprocamente, dada uma curva  $(n+1)$ -marcada estável  $(C, p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$  existe uma maneira canônica de associar a ela uma curva  $n$ -marcada estável (assumindo  $n \geq 3$ ). O primeiro passo é simplesmente remover  $p_{n+1}$ . Resulta uma curva  $n$ -marcada  $(C, p_1, \dots, p_n)$ . Agora se por exemplo  $C$  é uma curva irredutível então essa curva  $n$ -marcada obviamente é estável. Mas em casos onde  $C$  é redutível, removendo  $p_{n+1}$  pode desestabilizar um galho e deixar  $(C, p_1, \dots, p_n)$  não-estável. O que afirmamos é que há uma maneira canônica de estabilizar essa curva.

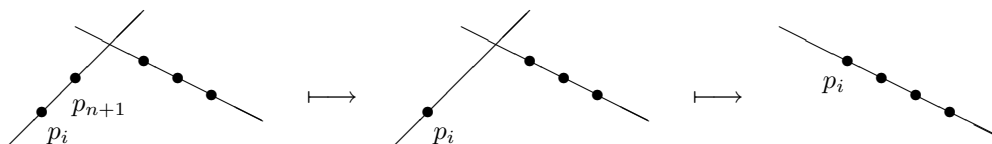
Uma vez que o termo estabilização já foi usado, o processo será chamado neste caso *contração* (seguindo a terminologia de Knudsen [30]). Trata-se simplesmente de contrair um eventual galho não-estável.

Será chamado de *esquecimento* de  $p_{n+1}$  o processo de dois passos: remover  $p_{n+1}$  e em seguida contrair um galho não-estável. Vamos desenhar figuras do que acontece quando a marca  $p_{n+1}$  é esquecida.

Caso I. Se  $p_{n+1}$  fica num galho sem outras marcas, então este galho é contraído.



Caso II. Se  $p_{n+1}$  encontra-se num galho com apenas mais uma marca  $p_i$ , então o galho é contraído, e o ponto de interseção recebe a marca  $p_i$ .



Fora esses dois casos, esquecimento não envolve contração.

Como no caso de estabilização, tudo funciona bem em famílias.

**1.3.4 Proposição.** (Knudsen [30].) *Seja  $(\mathfrak{X}'/B, \sigma'_1, \dots, \sigma'_n, \sigma'_{n+1})$  uma família de curvas  $(n+1)$ -marcadas estáveis. Então existe uma família  $(\mathfrak{X}/B, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$  de curvas  $n$ -marcadas estáveis munida de um  $B$ -morfismo  $\kappa : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  tal que*

- (i)  $\kappa \circ \sigma'_i = \sigma_i$  para  $i = 1, \dots, n$ ;
- (ii) para cada  $b \in B$ , o morfismo induzido  $\mathfrak{X}'_b \rightarrow \mathfrak{X}_b$  é um isomorfismo restrito a qualquer galho estável de  $(\mathfrak{X}'_b, \sigma'_1(b), \dots, \sigma'_n(b))$ , e contrai um eventual galho não estável.

A família  $(\mathfrak{X}/B, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$  é única a menos de isomorfismo e dizemos que é obtida de  $\mathfrak{X}'/B$  por esquecimento de  $\sigma'_{n+1}$ .

Vale ainda que esquecimento comuta com produtos fibrados.  $\square$

**1.3.5 Observação.** Já descrevemos o mapa  $\overline{M}_{0,n+1} \rightarrow \overline{M}_{0,n}$  conjuntistamente. A proposição garante que é de fato um morfismo. Com efeito, considere a família universal de curvas  $(n+1)$ -marcadas estáveis  $\overline{U}_{0,n+1} \rightarrow \overline{M}_{0,n+1}$ .

Resulta do esquecimento da última marca uma família de curvas  $n$ -marcadas estáveis, com a mesma base  $\overline{M}_{0,n+1}$ . Agora a propriedade universal de  $\overline{M}_{0,n}$  nos dá um morfismo

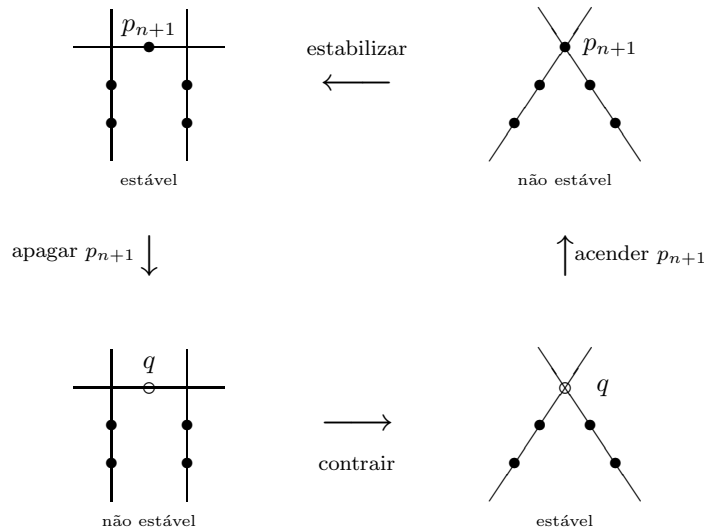
$$\varepsilon : \overline{M}_{0,n+1} \rightarrow \overline{M}_{0,n},$$

que claramente coincide com a descrição conjuntista que já tínhamos. Esse morfismo será chamado o *mapa de esquecimento*.

**1.3.6 Observação.** No caso exposto acima, esquecemos a última marca. Porém, esta escolha é ditada apenas por conveniência de notação. Poderíamos igualmente esquecer uma outra marca: afinal cada qual desempenha o mesmo papel que qualquer outra. Veja 1.5.13 onde combinamos vários esquecimentos.

**1.3.7 Comparação entre estabilização e contração/esquecimento.**

É interessante observar que a curva obtida por esquecimento da marca  $p_{n+1}$  sempre vem com um ponto distinguido (não uma marca), a saber, o ponto  $\kappa(p_{n+1})$ . No caso geral, quando o esquecimento não envolve contração, esse ponto distinguido é um ponto não-especial. Nos dois casos em que acontece contração, o ponto distinguido é um ponto especial, seja um nó (caso I), seja uma marca ( $p_i$  como no caso II). Veja o diagrama (para o caso I).



Aqui, o ponto  $q$  não é considerado uma marca. As direções das setas indicam apenas “a direção da construção”, e não quer dizer que existe um mapa. (O sentido do mapa é sempre para direita e para baixo.)

Poderíamos desenhar um diagrama análogo para o caso II (a situação onde  $q$  cai em cima de uma marca  $p_i$ ). Faça-o como exercício.

## 1.4 Esboço de construção de $\overline{M}_{0,n}$

A observação chave para a construção de  $\overline{M}_{0,n}$  como espaço de módulos fino é que existe um isomorfismo  $\overline{M}_{0,n+1} \simeq \overline{U}_{0,n}$ . Podemos assim fazê-la iterativamente. Acompanhe no diagrama seguinte, começando de baixo para cima.

$$\begin{array}{c}
 \overline{U}_{0,5} \quad \text{etc.} \\
 \downarrow \\
 \overline{U}_{0,4} \simeq \overline{M}_{0,5} \\
 \downarrow \\
 \mathbb{P}^1 \simeq \overline{U}_{0,3} \simeq \overline{M}_{0,4} \\
 \downarrow \\
 \bullet \simeq \overline{M}_{0,3}
 \end{array}$$

Vamos argumentar porque  $\overline{U}_{0,4} \simeq \overline{M}_{0,5}$ , e depois construir a família universal  $\overline{U}_{0,5} \rightarrow \overline{M}_{0,5}$ . O procedimento é análogo para  $n \geq 5$ .

**1.4.1 Construção (conjuntista) de  $\overline{M}_{0,5}$ .** O primeiro passo é mostrar que existe uma bijeção natural de conjuntos entre  $\overline{U}_{0,4}$  e  $\overline{M}_{0,5}$ . A cada ponto  $q \in \overline{U}_{0,4}$  vamos associar uma curva 5-marcada estável  $C_q$ . Denotemos por  $\pi : \overline{U}_{0,4} \rightarrow \overline{M}_{0,4}$  a família universal. Dado  $q \in \overline{U}_{0,4}$ , escreva  $F_q = \pi^{-1}\pi(q)$ , a fibra passando por  $q$ . Ou seja,  $\pi(q) \in \overline{M}_{0,4}$  representa uma curva 4-marcada estável isomorfa à fibra  $F_q$ . Agora o próprio ponto  $q$  especifica uma quinta marca e produz-se assim uma curva 5-marcada que denotamos  $(F_q, q)$ . Caso  $q$  não seja um ponto especial de  $F_q$ , esta curva já é estável e podemos chamá-la  $C_q$ , a curva 5-marcada estável desejada. Se o ponto  $q$  for um ponto especial de  $F_q$ , então tomamos como  $C_q$  a *estabilização* de  $(F_q, q)$ .

É claro que a aplicação  $\overline{U}_{0,5} \ni q \mapsto C_q \in \overline{M}_{0,5}$  é injetiva. Por outro lado, dada qualquer curva 5-marcada estável  $(C, p_1, \dots, p_5)$ , podemos esquecer  $p_5$  para obter uma curva 4-marcada estável, junto com um ponto nela (o lugar onde estava  $p_5$ , cf. 1.3.7). Isto especifica uma fibra de  $\pi$  mais um ponto na fibra. Ou seja, um ponto em  $\overline{U}_{0,4}$ . Esta é a bijeção prometida. Observe que pela

construção, o morfismo  $\pi$  se identifica com o mapa de esquecimento da marca  $p_5$  (cf. 1.3.5). Na bijeção conjuntista, a fibra do esquecimento identifica-se com a fibra de  $\pi$ .

Vamos agora esboçar o segundo ingrediente do procedimento iterativo: a construção da curva universal  $\overline{U}_{0,5}$  a partir de  $\overline{M}_{0,5}$ . Isto significa que  $\overline{M}_{0,5}$  não está apenas conjuntivamente em bijeção com as classes de isomorfismo de curvas estáveis, mas sim que realmente é um espaço de módulos fino.

**1.4.2 Construção da família universal  $\overline{U}_{0,5}$ .** Como no caso visto acima,  $\pi : \overline{U}_{0,4} \rightarrow \overline{M}_{0,4}$ , o princípio é tomar o produto fibrado sobre  $\overline{M}_{0,4}$  de duas cópias de  $\overline{M}_{0,5}$  e estabilizar.

Considere agora o diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{U}_{0,5} & & \\
 \downarrow \kappa & & \\
 \overline{U}_{0,4} \times_{\overline{M}_{0,4}} \overline{U}_{0,4} & \longrightarrow & \overline{U}_{0,4} \\
 \uparrow \delta \quad \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \sigma_i & & \downarrow \pi \quad \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \sigma_i \\
 \overline{U}_{0,4} & \longrightarrow & \overline{M}_{0,4}
 \end{array}$$

O mapa imagem recíproca de  $\pi$ , junto com as imagens recíprocas das seções  $\sigma_i$ , fornece uma família de curvas 4-marcadas parametrizada por  $\overline{U}_{0,4}$  (lado esquerdo do diagrama). Esta família admite mais uma seção natural, qual seja, a seção diagonal  $\delta$ . Esta seção desestabiliza a família, porque ela não é disjunta das outras 4 seções. Mas sabemos de 1.3.1 que existe uma estabilização. Afirmamos agora que a estabilização é a família universal e por isso vamos denotá-la por  $\overline{U}_{0,5}$ .

Vamos mostrar que a fibra  $(\overline{U}_{0,5})_q$  desta família sobre um ponto  $q \in \overline{U}_{0,4}$  é uma curva 5-marcada isomorfa a  $C_q$  (cf. 1.4.1). A fibra sobre  $q$  é a imagem recíproca da fibra sobre  $\pi(q) \in \overline{M}_{0,4}$ . Mas sabemos que a fibra sobre um ponto em  $\overline{M}_{0,4}$  é isomorfa à curva que ele representa — no caso, a curva 4-marcada  $F_q$ . Agora, por construção, temos mais uma marca nesta curva, dada pela seção diagonal  $\delta$ . Isto é, a quinta marca é o próprio  $q \in F_q$ . Portanto, a fibra sobre  $q$  de  $\overline{U}_{0,4} \times_{\overline{M}_{0,4}} \overline{U}_{0,4} \rightarrow \overline{U}_{0,4}$  é a curva 5-marcada  $(F_q, q)$  que não necessariamente

é estável. O que queríamos era a fibra correspondente da estabilização  $\overline{U}_{0,5}$ . Mas sabemos que estabilização comuta com produtos fibrados: a fibra da estabilização é a estabilização da fibra. Mas pela própria construção da bijeção, a estabilização de  $(F_q, q)$  é exatamente a curva 5-marcada estável  $C_q$ .

Isto mostra que  $\overline{M}_{0,5}$  (munido da estrutura de esquema de  $\overline{U}_{0,4}$ ) possui uma família tautológica. Para estabelecer então que é um espaço de módulos fino, falta mostrar que a família tem a propriedade universal. Omitimos aqui esta verificação.

**1.4.3 Observação.** Vale a pena ressaltar que a estabilização da família  $\overline{U}_{0,4} \times_{\overline{M}_{0,4}} \overline{U}_{0,4} \rightarrow \overline{U}_{0,4}$  não é simplesmente a explosão ao longo das interseções das seções como era o caso para  $n = 3$ . Para  $n \geq 4$ , é mais sutil porque o mapa  $\overline{U}_{0,4} \times_{\overline{M}_{0,4}} \overline{U}_{0,4} \rightarrow \overline{U}_{0,4}$  não é liso. Também  $\delta$  não é um mergulho regular, e a explosão vira uma variedade singular. Mas é possível explodir um pouco mais, e a dessingularização minimal será a estabilização procurada  $\overline{U}_{0,5}$ .

**1.4.4 Descrição local de  $\pi$ .** Em  $\mathbb{A}^3$ , com coordenadas  $(x, y, t)$ , considere a quádriga  $Q$  dada pela equação  $xy = t$ . Já vimos que o mapa  $\overline{U}_{0,4} \rightarrow \overline{M}_{0,4}$ , local-analiticamente em torno de um ponto da fronteira de  $\overline{M}_{0,4}$ , é da forma

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x, y, t) &\mapsto t \end{aligned}$$

Em particular, tem fibras geométricas reduzidas.

Da mesma forma, Knudsen mostra que o mapa  $\overline{U}_{0,n} \rightarrow \overline{M}_{0,n}$  local-analiticamente ao redor de um ponto da fronteira de  $\overline{M}_{0,n}$  é da forma

$$\begin{aligned} V \times Q &\rightarrow V \times \mathbb{A}^1 \\ (v, (x, y, t)) &\mapsto (v, t) \end{aligned}$$

onde  $V$  é uma variedade lisa. Suas fibras geométricas são reduzidas.

## 1.5 A fronteira

Cada ponto da fronteira  $\overline{M}_{0,n} \setminus M_{0,n}$  corresponde a uma curva redutível.

**1.5.1 A estratificação de  $\overline{M}_{0,n}$ .** Começemos observando que o subconjunto  $\Sigma_\delta$  de  $\overline{M}_{0,n}$  consistindo em curvas com  $\delta$  nós é de dimensão pura  $n - 3 - \delta$  (sempre que este número seja não negativo).

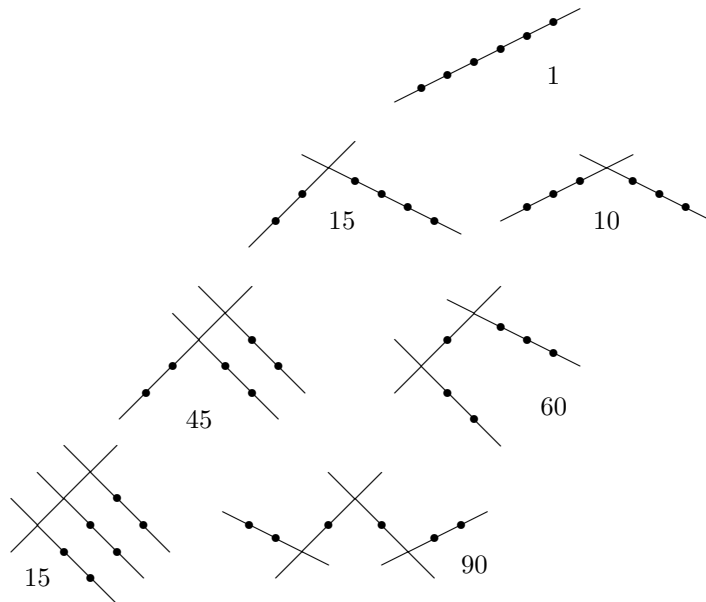
Argumentamos com uma simples contagem de parâmetros. Calculamos a dimensão somando os graus de liberdade que apresenta cada galho para mover os pontos especiais: as marcas e os nós. No total, temos  $n+2\delta$  pontos especiais porque cada nó é um ponto especial de ambos os galhos que se interceptam nele. Agora, por estabilidade, cada galho tem pelo menos três pontos especiais, e sabemos que há sempre um automorfismo que manda esses três pontos em  $0, 1, \infty$ . Isto é, em cada galho, três dos pontos especiais são gastos só para fixar automorfismos. Sendo  $C$  uma árvore, o número de galhos é  $\delta + 1$ . Logo, concluímos que

$$\dim \Sigma_\delta = n + 2\delta - 3(\delta + 1) = n - 3 - \delta$$

como afirmado.

A justificativa para contar parâmetros galho-por-galho será dada em 1.5.10, onde veremos que o lugar de  $\overline{M}_{0,n}$  que corresponde a curvas com  $\delta$  nós é localmente um produto dos espaços de módulos dos seus galhos.

**1.5.2 Exemplo.** Segue uma figura da estratificação de  $\overline{M}_{0,6}$ . Os seis pontos marcados não são rotulados, mas o número ao lado de cada configuração indica de quantas maneiras pode ser feito.





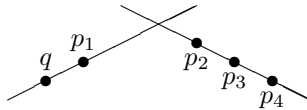
Uma moral deste exemplo é que a interseção de dois divisores de fronteira é sempre irredutível.

**1.5.7 Observação.** Sejam  $A \cup B = [n]$  e  $A' \cup B' = [n]$  duas partições tais que não exista inclusão entre dois quaisquer dos quatro conjuntos  $A, B, A', B'$ . Neste caso,

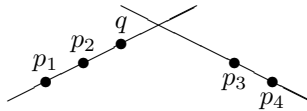
$$D(A|B) \cap D(A'|B') = \emptyset.$$

Com efeito, não há degenerações em comum.

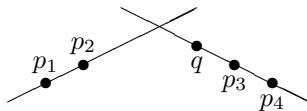
**1.5.8 Exemplo.** Já vimos que  $\overline{M}_{0,5}$  é isomorfo a  $\overline{U}_{0,4}$ . Vamos identificar os 10 divisores de fronteira (cf. 1.5.5). Um ponto  $q \in \overline{U}_{0,4}$  (veja 1.2.6) numa seção  $\sigma_i$  (digamos  $\sigma_1$ ) parametriza uma curva onde a quinta marca  $q$  “coincide” com a primeira, ou mais exatamente, essas duas marcas estão juntas num mesmo galho. Logo, o divisor  $\sigma_1 \subset \overline{U}_{0,4}$  corresponde ao divisor de fronteira de  $\overline{M}_{0,5}$  cuja curva geral é da forma



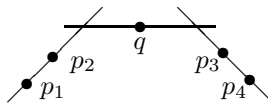
Um ponto  $q \in E_0$  mapeia para o ponto 0 da fronteira de  $\overline{M}_{0,4}$ . Digamos que  $0 \in \overline{M}_{0,4}$  corresponda à partição  $(p_1, p_2 \mid p_3, p_4)$ . Segue que o divisor  $E_0 \subset \overline{U}_{0,4}$  corresponde ao divisor de fronteira de  $\overline{M}_{0,5}$  com o aspecto da figura seguinte.



Um argumento idêntico mostra que a fibra estrita  $F_0$  é o divisor de fronteira cuja curva geral é da forma indicada na figura abaixo.



Por fim, vamos descrever o ponto  $q \in E_0 \cap F_0$ . Ele corresponde à interseção dos dois divisores, ou seja, à configuração seguinte.



Observe que os dez divisores de fronteira de  $\overline{M}_{0,5}$  se interceptam transversalmente. Este comportamento se propaga para cima pela torre de  $\overline{M}_{0,n}$ 's, como afirma o resultado seguinte

**1.5.9 Proposição.** *A fronteira de  $\overline{M}_{0,n}$  é um divisor de cruzamentos normais.*  $\square$

**1.5.10 A estrutura recursiva.** Cada ciclo de fronteira é naturalmente isomorfo a um produto de espaços de módulos de dimensão menor. Vejamos em detalhe o caso de um divisor  $D(A|B)$ .

Um ponto geral de  $D(A|B)$  corresponde a uma curva com dois galhos, com os pontos de  $A$  distribuídos sobre um galho, e os pontos de  $B$  sobre o outro. Agora tome cada galho separadamente e denote o ponto de interseção pela letra  $x$ . Isto nos dá um elemento de  $\overline{M}_{0,A \cup \{x\}}$  e outro elemento de  $\overline{M}_{0,B \cup \{x\}}$ . Reciprocamente, cada elemento de  $\overline{M}_{0,A \cup \{x\}} \times \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}$  reproduz a configuração original, identificando os dois pontos com a marca  $x$  e atando as duas curvas com um nó nesse ponto. Obtemos assim um isomorfismo canônico

$$D(A|B) \simeq \overline{M}_{0,A \cup \{x\}} \times \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}.$$



Em particular, sabendo que os espaços de módulos para menos marcas são lisos e irredutíveis, deduzimos que os divisores de fronteira também são lisos e irredutíveis. Segue também desta descrição que realmente vale o argumento para contar dimensão “galho-por-galho” indicado em 1.5.1.

**1.5.11 Imagem inversa de divisores de fronteira sob esquecimento.**

Considere o mapa de esquecimento  $\varepsilon : \overline{M}_{0,n+1} \rightarrow \overline{M}_{0,n}$ , onde a última marca  $p_{n+1}$  é a omitida. Seja  $D(A|B)$  um divisor de fronteira de  $\overline{M}_{0,n}$ . Então na imagem inversa temos duas possibilidades: ou a nova marca  $p_{n+1}$  fica no

galho de  $A$  ou no de  $B$ . Isto descreve conjuntamente a imagem inversa. Lembrando ainda que as fibras geométricas são reduzidas, concluímos que os coeficientes da imagem recíproca do divisor são iguais a 1, isto é

$$\varepsilon^*D(A|B) = D(A \cup \{p_{n+1}\} | B) + D(A | B \cup \{p_{n+1}\}).$$

**1.5.12 Exemplo.** As  $n$  seções da curva universal  $\overline{U}_{0,n} \rightarrow \overline{M}_{0,n}$  admitem uma interpretação em termos do mapa de esquecimento  $\varepsilon : \overline{M}_{0,n+1} \rightarrow \overline{M}_{0,n}$ . Lembre que a  $i$ -ésima seção é a que “repete a  $i$ -ésima marca” e estabiliza. É o caso II descrito em 1.3.1 na página 10. Com esta observação, podemos comparar a fronteira  $F_n$  de  $\overline{M}_{0,n}$  com a de  $\overline{M}_{0,n+1}$ . A fronteira  $F_{n+1}$  de  $\overline{M}_{0,n+1}$  é

$$F_{n+1} = \varepsilon^*F_n + \sum \sigma_i,$$

onde aqui, por abuso, o símbolo  $\sigma_i$  denota a imagem da seção em  $\overline{M}_{0,n+1}$ .

**1.5.13 Composições de mapas de esquecimento.** Como observado em 1.3.6, nada impede esquecer outras marcas que não a última. Suponha que  $A = [n]$  é o conjunto das marcas e seja  $B \subset A$ . Então existe um mapa  $\overline{M}_{0,A} \rightarrow \overline{M}_{0,B}$  dado pelo esquecimento de todas as marcas do complemento  $A \setminus B$ . É simplesmente a composição dos mapas de esquecimento estudados em 1.3.5. Observe que todos esses mapas comutam, i.e. não importa em que seqüência eliminamos as marcas. Com efeito, restrito ao aberto denso de curvas lisas, é clara a irrelevância da ordem em que as marcas são esquecidas.

**1.5.14 Divisores de fronteira especiais.** Particularmente importante é o mapa de esquecimento  $\overline{M}_{0,n} \rightarrow \overline{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1$ , assumindo  $n \geq 4$ . Tome um dos divisores de fronteira de  $\overline{M}_{0,4}$ , digamos  $D(ij|kl)$ : sua imagem recíproca para  $\overline{M}_{0,n}$  é uma soma de divisores  $D(A|B)$ . Combinando as fórmulas 1.5.11 para cada passo de esquecimento, vemos que resulta a soma sobre todas as partições  $A \cup B = [n]$  tais que  $i, j \in A$  e  $k, l \in B$ . A fórmula garante também que em todos os termos da soma o coeficiente vale 1.

Lembrando que os três pontos da fronteira de  $\overline{M}_{0,\{i,j,k,l\}} = \mathbb{P}^1$  são linearmente equivalentes, segue que suas imagens recíprocas em  $\overline{M}_{0,n}$  também o são. Assim obtemos as relações fundamentais

$$\sum_{\substack{i,j \in A \\ k,l \in B}} D(A|B) = \sum_{\substack{i,k \in A \\ j,l \in B}} D(A|B) = \sum_{\substack{i,l \in A \\ j,k \in B}} D(A|B) \quad \text{em } A^1(\overline{M}_{0,n}).$$

**1.5.15 O anel de Chow de  $\overline{M}_{0,n}$ .** Keel [27] demonstra que as classes dos divisores de fronteira  $D(A|B)$  geram o anel de Chow, e que as três relações do parágrafo anterior, junto com as descritas em 1.5.7, fornecem um conjunto completo de relações.

## 1.6 Generalizações e referências

As construções e os resultados deste capítulo admitem paralelos para curvas de gênero  $g > 0$ , mas a teoria é muito mais sutil. Primeiro, pelo fato de que duas curvas lisas do mesmo gênero não são mais necessariamente isomorfas, há toda uma teoria de módulos de curvas, precedendo qualquer menção a marcas.

**1.6.1 Módulos de curvas.** Para  $g = 1$ , as curvas lisas (curvas elíticas) são classificadas pelo invariante  $j$  (cf. Hartshorne [26], Ch. 4). O espaço de módulos  $\mathcal{M}_1$  é isomorfo a  $\mathbb{A}^1$ . Na compactificação  $\overline{\mathcal{M}}_1 \simeq \mathbb{P}^1$ , o ponto da fronteira corresponde à curva nodal racional (de gênero aritmético 1).  $\overline{\mathcal{M}}_1$  é um espaço de módulos grosseiro.

Para  $g \geq 2$ , existe um espaço de módulos grosseiro  $\mathcal{M}_g$  (não projetivo) que parametriza classes de isomorfismo de curvas lisas de gênero  $g$ . Sua dimensão é  $3g - 3$ . Existe uma compactificação  $\overline{\mathcal{M}}_g$  que é espaço de módulos grosseiro para classes de isomorfismo de curvas *estáveis*.  $\overline{\mathcal{M}}_g$  é liso fora do lugar das curvas que possuem automorfismos, e é localmente o quociente de uma variedade lisa por um grupo finito.

A teoria de módulos de curvas é riquíssima. Um bom guia para a literatura é o recente livro de Harris e Morrison [25]. Recomendamos ainda as notas de Gatto [22], que além de apresentar muitos exemplos e detalhes preciosos, enfatiza questões da teoria de interseção desses espaços.

**1.6.2 Espaços de Knudsen-Mumford.** Quanto a curvas com marcas, ainda é verdade que  $\overline{M}_{g,n}$  é um espaço de módulos *grosseiro* para curvas  $n$ -marcadas estáveis de gênero aritmético  $g$ . Observe que a condição de estabilidade neste caso inclui a exigência de que um galho de gênero 1 tenha pelo menos um ponto especial. Em particular, o espaço de curvas elíticas descrito acima não se encaixa nesta definição. . .

Estabilização e esquecimento funcionam igualmente em  $\overline{M}_{g,n}$  e a construção ainda é a esboçada em 1.4. A descrição da fronteira fica mais complicada porque as curvas não são mais necessariamente árvores. Quer dizer, pode haver

---

curvas de tipo não-compacto, como por exemplo a última curva desenhada em 1.2.2.

A estrutura recursiva ainda vale para divisores de fronteira. Mas agora que não dispomos de um mapa para  $\overline{M}_{0,4}$ , não temos mais a equivalência linear 1.5.14.

A referência canônica para  $\overline{M}_{g,n}$  é Knudsen [30].



# Capítulo 2

## Mapas estáveis

A definição de um mapa estável será dada na seção 2.3. Nas duas primeiras seções, vamos nos deter em uma discussão heurística dos objetos e dos problemas. Apresentamos em ordem de sofisticação vários espaços de parâmetros para mapas, culminando com o enunciado da existência e as propriedades mais importantes do espaço de módulos  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ .

### 2.1 Mapas $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$

Iniciamos agora nosso principal objeto de estudo: curvas racionais em espaços projetivos. A propriedade característica de uma curva racional irredutível é que ela pode ser parametrizada pela reta projetiva. Os mapas  $\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  merecem por isso atenção especial.

**Definição.** O *grau* de um mapa  $\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  é o grau do ciclo imagem direta  $\mu_*[\mathbb{P}^1]$ . Em particular, se o mapa é constante, seu grau é zero.

Ou seja, se  $d$  é o grau da imagem (com estrutura esquemática reduzida), e  $e$  denota o grau da extensão de corpos, então o grau do mapa é  $d \cdot e$ . Note que, exceto no caso onde a imagem é uma reta, a definição acima diverge da noção usual, dada pelo grau da extensão de corpos.

**2.1.1 O espaço de parametrizações.** Dar um mapa  $\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  de grau  $d$  é especificar, a menos de fator constante,  $r + 1$  formas binárias de grau  $d$ , que são proibidas de se anular simultaneamente. Esta condição define um

subconjunto aberto de Zariski

$$W(r, d) \subset \mathbb{P} \left( \bigoplus_{i=0}^r H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \right).$$

A dimensão de  $W(r, d)$  é  $rd + r + d$ . Com efeito, são  $(r + 1)(d + 1)$  graus de liberdade para a escolha das formas binárias;  $-1$  porque duas  $(r + 1)$ -uplas definem o mesmo mapa se diferem por um fator constante.

O espaço  $W(r, d)$  está munido de uma óbvia família de mapas,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times W(r, d) & \longrightarrow & \mathbb{P}^r \\ \downarrow & & \\ W(r, d) & & \end{array}$$

onde o mapa horizontal manda  $(x, \mu)$  em  $\mu(x)$ . De fato, essa família é universal: toda família  $\mathbb{P}^1 \times B \rightarrow \mathbb{P}^r$  de mapas de grau  $d$  é induzida por imagem recíproca por um único mapa  $B \rightarrow W(r, d)$ . Ou seja,  $W(r, d)$  é um espaço de módulos fino para mapas  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  de grau  $d$ .

**2.1.2 Exercício.** O complemento de  $W(r, d)$  em  $\mathbb{P} \left( \bigoplus_{i=0}^r H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \right)$  é de codimensão  $r$ .

**2.1.3 Lema.** O lugar  $W^\circ(r, d) \subseteq W(r, d)$  formado pelas imersões é aberto. Para  $d = 1$ ,  $W^\circ(r, 1)$  é igual a  $W(r, 1)$ ; para  $d \geq 2$ , o seu complemento é de codimensão  $r - 1$ .

*Demonstração.* Um mapa linear não tem ramificação, logo podemos assumir  $d \geq 2$ . Considere o lugar  $\Sigma := \{(x, \mu) \in \mathbb{P}^1 \times W(r, d) \mid d\mu_x = 0\}$ . Temos que  $R := W(r, d) \setminus W^\circ(r, d)$  é a imagem da projeção  $\Sigma \rightarrow W(r, d)$ . Este morfismo é finito porque dado um mapa  $\mu \in W(r, d)$  ele só possui um número finito de pontos de ramificação. Calculemos a dimensão das fibras da primeira projeção  $\Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ . É suficiente olhar para o ponto  $[1 : 0]$ . Em coordenadas afins, o mapa é dado por  $r + 1$  polinômios  $f_0, \dots, f_r$  de grau  $\leq d$ , digamos  $f_k(t) = a_{k0} + a_{k1}t + \dots + a_{kd}t^d$ . Podemos supor que  $f_0$  não se anula em  $t = 0$  (é dizer que  $a_{00} \neq 0$ ). Numa vizinhança afim temos então o mapa dado como  $t \mapsto (f_1/f_0, \dots, f_r/f_0)$ . Sua diferencial em  $t = 0$  é o vetor das derivadas de  $f_k/f_0$ , avaliadas em  $t = 0$ , o que fica

$$\frac{a_{00}a_{k1} - a_{01}a_{k0}}{a_{00}^2}.$$

Já que  $a_{00} \neq 0$ , a anulação da diferencial se traduz em  $r$  condições independentes nos  $a_{ij}$ . Ou seja, a fibra de  $\Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$  tem dimensão  $rd + d$ . Portanto  $\Sigma$ , e conseqüentemente  $R$ , tem dimensão  $rd + d + 1$ , o que é equivalente à codimensão afirmada.  $\square$

**2.1.4 Mapas birracionais e recobrimentos.** Denotamos por  $W^*(r, d)$  o lugar em  $W(r, d)$  formado pelos mapas que são birracionais sobre a imagem. Uma imersão é sempre birracional sobre sua imagem, logo temos  $W^\circ(r, d) \subset W^*(r, d) \subset W(r, d)$ . Para  $d = 1$ , temos  $W^\circ(r, 1) = W^*(r, 1) = W(r, 1)$ . Para  $d \geq 2$ , os mapas no complemento de  $W^*(r, d)$  são os *recobrimentos*, i.e. mapas  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  tais que o grau da extensão dos corpos correspondentes a domínio e imagem é pelo menos 2. Todo recobrimento fatora como  $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\rho} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^r$ , onde  $\rho$  é um recobrimento da reta, e  $\psi$  é um mapa birracional sobre a imagem. A fatoração não é única, porque sempre podemos inserir no meio um automorfismo de  $\mathbb{P}^1$  seguido por seu inverso. Ou seja, se  $\mu = \psi \circ \rho$  é uma fatoração, então para cada  $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  temos uma outra fatoração

$$\mu = (\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \rho).$$

**2.1.5 Lema.** *O lugar em  $W(r, d)$  dos recobrimentos  $d$ -uplos de retas é fechado de codimensão  $(r - 1)(d - 1)$ .*

*Demonstração.* Um tal mapa fatora  $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\rho} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^r$  onde  $\rho \in W(1, d)$  e  $\psi \in W(r, 1)$ . Temos então um mapa natural

$$\begin{aligned} W(1, d) \times W(r, 1) &\longrightarrow W(r, d) \\ (\rho, \psi) &\longmapsto \psi \circ \rho, \end{aligned}$$

cuja imagem é o lugar procurado. Este é fechado porque um recobrimento de uma reta não pode degenerar (em  $W(r, d)$ ) para outro tipo de parametrização. Com efeito, o mapa limite continua tendo como imagem uma reta. A dimensão do produto é  $(2d+1) + (2r+1)$ ; por outro lado, o espaço  $W(r, d)$  tem dimensão  $rd + r + d$ , e as fibras são todas de todas dimensão  $3 = \dim \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ . Logo a imagem fica com codimensão  $(rd+r+d)+3-(2d+1)-(2r+1) = (r-1)(d-1)$ .  $\square$

**2.1.6 Lema.** *Suponha  $d$  par. Então a aderência em  $W(r, d)$  do lugar dos recobrimentos duplos de curvas de grau  $d/2$  é de codimensão  $(r+1)d/2 - 2$ .*

*Demonstração.* Mesmo argumento como na demonstração anterior, olhando agora para o mapa

$$\begin{aligned} W(1, 2) \times W^*(r, d/2) &\longrightarrow W(r, d) \\ (\rho, \psi) &\longmapsto \psi \circ \rho. \end{aligned}$$

Desta vez a imagem é apenas construtível, pois o fator birracional  $\psi$  pode degenerar em algum recobrimento, assim pulando para outra fatoração...  $\square$

**2.1.7 Exemplo.** (*Parametrização de quárticas.*) O espaço de todas as quárticas planas parametrizadas  $W(2, 4)$  é de dimensão 14. Aqui dentro, o lugar das retas quádruplas tem dimensão 11, enquanto o lugar das cônicas duplas tem dimensão 10.

Para  $\mathbb{P}^3$  temos  $\dim W(3, 4) = 19$ , e neste espaço as retas quádruplas formam uma família de dimensão 13, número este que por coincidência é também a dimensão do lugar das cônicas duplas.

Já em  $\mathbb{P}^4$ , temos  $\dim W(4, 4) = 24$ , mas aqui a dimensão do lugar das retas quádruplas (15) é superada pela família das cônicas duplas (dimensão 16).

Os dois casos tratados nos lemas são de fato os extremos, no sentido de que qualquer outra fatoração possível de  $d$  em dois inteiros leva a codimensão maior (cf. Pandharipande [38], Lemma 2.1.1). Podemos concluir o seguinte.

**2.1.8 Proposição.** *O lugar  $W^*(r, d) \subseteq W(r, d)$  formado pelos mapas que são birracionais sobre a imagem é aberto. Se  $d \geq 2$ , então o seu complemento é de codimensão pelo menos*

$$\min \{ (r-1)(d-1), (r+1)d/2 - 2 \}.$$

*Em particular, para  $r \geq 2$ ,  $W^*(r, d)$  é denso em  $W(r, d)$ .*  $\square$

**2.1.9 Pecados de  $W(r, d)$ .** Note entretanto que, para fins de descrever famílias de curvas racionais,  $W(r, d)$  tem defeitos graves. Muito embora, por definição, toda curva racional  $X$  admita uma parametrização  $\mathbb{P}^1 \rightarrow X$ , não é verdade que toda família de curvas racionais admite uma família de parametrizações de *um mesmo*  $\mathbb{P}^1$ , cf. exemplo 2.1.10, logo abaixo.

Outro problema com  $W(r, d)$  é a redundância: reparametrizações da mesma curva racional em  $\mathbb{P}^r$  são consideradas objetos distintos. Precisamos passar ao quociente por esta equivalência.

Finalmente,  $W(r, d)$  peca por não ser compacto (completo).

**Definição.** Uma família de mapas de curvas racionais lisas é um diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{P}^r \\ \pi \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

onde  $\pi$  é uma família plana com fibras geométricas isomorfas a  $\mathbb{P}^1$ . Desta forma, para cada  $b \in B$ , o mapa  $\mu$  restrito à fibra  $\mu_b : \mathfrak{X}_b \rightarrow \mathbb{P}^r$  é um mapa de uma curva racional lisa. Muitas vezes, por conveniência tipográfica vamos indicar uma família por  $\mathfrak{X} \rightarrow B \times \mathbb{P}^r$ , entendendo tacitamente que  $B$  é a base da família.

**2.1.10 Exemplo.** Seja  $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  a projeção dada por  $[x : y : z] \mapsto [x : y]$ . O mapa é resolvido pela explosão  $\mu : \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  no ponto  $[0 : 0 : 1]$ . De fato, sabemos que  $\tilde{\mathbb{P}}^2$  é a aderência em  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  do gráfico da projeção. Seja  $\pi : \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$  o mapa resolvido. Temos então um diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{P}}^2 & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{P}^2 \\ \pi \downarrow & & \\ \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

que é uma família de mapas irredutíveis de grau 1, porque todas as fibras são isomorfas a  $\mathbb{P}^1$  e são mapeadas em retas em  $\mathbb{P}^2$ . Porém, a família não é trivial — não existe uma maneira contínua de identificar todas as fibras com um mesmo  $\mathbb{P}^1$ .

**Definição.** Um *isomorfismo* de mapas  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r$  e  $\mu' : C' \rightarrow \mathbb{P}^r$  é um isomorfismo  $\phi : C \xrightarrow{\sim} C'$  que torna comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\phi} & C' \\ \mu \searrow & & \swarrow \mu' \\ & \mathbb{P}^r & \end{array}$$

Dizemos então que  $\mu, \mu'$  são mapas *isomorfos*. Se  $\mu \circ \phi = \mu'$  dizemos que  $\phi$  é um *automorfismo* de  $\mu$ .

A noção de isomorfismo para famílias se define de maneira evidente.

**2.1.11 Classes de isomorfismos de mapas.** Como conjunto, a coleção de classes de mapas  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  de grau  $d$ , módulo isomorfismos, é algo como  $W(r, d)/\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ . Restringindo ao aberto  $W^*(r, d) \subset W(r, d)$  formado pelos mapas que são birracionais sobre sua imagem, então o quociente existe (cf. Kollár [32], p.105). Para uma interessante discussão introdutória e guia de literatura para o problema da construção de espaços quocientes em Geometria Algébrica, o leitor pode consultar Esteves [16] ou Newstead [36].

De fato, *existe um espaço de módulos grosseiro*, denotado  $M_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$ , para o referido problema da classificação de mapas  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  de grau  $d$ . Aqui o primeiro índice significa que estamos considerando curvas de gênero 0; o segundo 0 diz que (ainda) não marcamos pontos no domínio, procedimento este que será estudado na seção 2.3.

Temos um morfismo  $W(r, d) \rightarrow M_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$ , graças ao fato desta última variedade ser um espaço de módulos. A fibra genérica é  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ . Portanto, a dimensão de  $M_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$  deve ser

$$\dim W(r, d) - \dim \text{Aut}(\mathbb{P}^1) = rd + r + d - 3.$$

Não vamos embarcar aqui na construção desse espaço de módulos. Vamos nos contentar com a seguinte discussão informal.

**2.1.12 Automorfismos e espaços de módulos.** A existência de automorfismos dos objetos que se pretende parametrizar com um espaço de módulos pode, via de regra, constituir-se num obstáculo para a sua construção. Se o grupo de automorfismos é infinito, em geral não existe o espaço de módulos desejado. Se o grupo de automorfismos é finito você deve esperar um espaço de módulos grosseiro; e só quando não ocorrem automorfismos não triviais é que se obtém um espaço de módulos fino.

Para o caso específico da classificação de mapas discutido acima, o seguinte lema torna plausível a existência de um espaço de módulos grosseiro.

**2.1.13 Lema.** *Sejam  $\mu, \mu' : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  mapas não constantes. Então existe apenas um número finito de automorfismos  $\phi : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$  tal que  $\mu' = \mu \circ \phi$ .*

*Demonstração.* Seja  $K$  o corpo de funções da curva imagem  $\mu(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^r$ , e seja  $L$  o corpo de funções de  $\mathbb{P}^1$ . O resultado segue da bem conhecida finitude dos automorfismos de  $L$  compatíveis com as inclusões de corpos  $K \hookrightarrow L$  induzidas por  $\mu, \mu'$ .  $\square$

**2.1.14 Exemplo.** O recobrimento duplo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ [x : y] &\mapsto [x^2 : y^2 : 0] \end{aligned}$$

admite o único automorfismo não trivial,  $[x : y] \mapsto [-x : y]$ .

Se o mapa  $\mu$  é birracional sobre sua imagem então o grupo de automorfismos é trivial (e vice-versa). Portanto é razoável que o lugar  $M_{0,0}^*(\mathbb{P}^r, d) \subset M_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$  consistindo em mapas sem automorfismos (não triviais) seja um espaço de módulos *fino* para o problema de classificação de mapas desse tipo. Compare com 2.3.2.

Segue do lema 2.1.8 que  $M_{0,0}^*(\mathbb{P}^r, d)$  é denso em  $M_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$  para  $r \geq 2$  e  $d \geq 1$ .

**2.1.15 Exemplo.** Vejamos o caso  $d = 1$ . Cada mapa de grau um é a parametrização de uma reta. Mas passamos ainda ao quociente para identificar reparametrizações. Portanto, a classe de equivalência do mapa pode ser simplesmente identificada com sua reta imagem. Assim,  $M_{0,0}(\mathbb{P}^r, 1)$  deve ser a grassmanniana  $\text{Gr}(1, \mathbb{P}^r)$ . Para explicitar uma bijeção, note que cada mapa linear  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  é dado por uma matriz  $A$  de tamanho  $r + 1$  por 2, de posto 2. O mapa é expresso em coordenadas por

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \mapsto A \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Agora temos que descontar automorfismos. Cada reparametrização linear pode ser escrita como  $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$ . Resulta que o grupo  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  age no espaço das matrizes  $A$  por multiplicação pelo lado direito, ou seja por operações de coluna. Sabe-se que a variedade das matrizes  $r + 1$  por 2, de posto 2 módulo operações de coluna, é a grassmanniana  $\text{Gr}(1, \mathbb{P}^r)$ ...

Observe em particular que, neste caso, o espaço é compacto. Note também que todo mapa é birracional, e portanto livre de automorfismos. Ou seja, no presente caso, temos  $M_{0,0}^*(\mathbb{P}^r, 1) = M_{0,0}(\mathbb{P}^r, 1) = \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^r, 1)$ .

Para  $d \geq 2$  não é possível evitar automorfismos:  $M_{0,0}^*(\mathbb{P}^r, d) \neq M_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$ .

Uma idéia natural para suprimir automorfismos é simplesmente colocar marcas na curva-domínio e exigir a partir de agora que automorfismo de mapas respeite as marcas. Se toda curva-domínio tem três ou mais marcas, claramente não existem mais automorfismos. Além disso, o espaço de módulos fica fácil de descrever. De fato, vale o seguinte.

**2.1.16 Proposição.** *Para cada  $n \geq 3$  existe um espaço de módulos fino  $M_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  para classes de isomorfismo de mapas  $n$ -marcados  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  de grau  $d$ . Temos um isomorfismo natural*

$$M_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) \simeq M_{0,n} \times W(r, d).$$

Em particular,  $M_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  é uma variedade lisa — é um aberto no espaço “linear”  $\mathbb{A}^{n-3} \times \mathbb{P}^{rd+r+d}$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar que a seguinte família tem a propriedade universal,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times M_{0,n} \times W(r, d) & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{P}^r \\ \sigma_i \uparrow \quad \dots \uparrow & & \downarrow \\ & & M_{0,n} \times W(r, d) \end{array}$$

onde as  $n$  seções  $\sigma_i$  são as de  $M_{0,n}$  (cf. 1.1.7), com as três primeiras rigidificadas como  $0, 1, \infty$ , nesta ordem.

Seja  $\mathfrak{X} \rightarrow B \times \mathbb{P}^r$  uma família qualquer de mapas  $n$ -marcados de grau  $d$ . Devemos mostrar que existe um único morfismo  $B \rightarrow M_{0,n} \times W(r, d)$  induzindo  $\mathfrak{X}$  como imagem recíproca da família postulada universal. Ora, havendo três seções disjuntas, sabemos que  $\mathfrak{X}/B$  é isomorfa à família trivial  $\mathbb{P}^1 \times B \rightarrow B$  (cf. 1.1.5). Existe uma infinidade de tais isomorfismos, mas apenas um que identifica as três primeiras seções com  $0, 1, \infty$ , nesta ordem. As  $n$  seções fazem de  $\mathfrak{X}/B$  uma família de curvas lisas  $n$ -marcadas, e pela propriedade universal de  $M_{0,n}$ , existe um único morfismo  $B \rightarrow M_{0,n}$  que induz  $\mathfrak{X}$  da família universal  $\mathbb{P}^1 \times M_{0,n} \rightarrow M_{0,n}$ , de forma compatível com as  $n$  seções (cf. 1.1.7).

Por outro lado, a propriedade universal de  $W(r, d)$  (cf. 2.1.1) garante que a nossa família  $\mathbb{P}^1 \times B \rightarrow \mathbb{P}^r$  é induzida da família universal  $\mathbb{P}^1 \times W(r, d) \rightarrow \mathbb{P}^r$  via um morfismo único  $B \rightarrow W(r, d)$ .

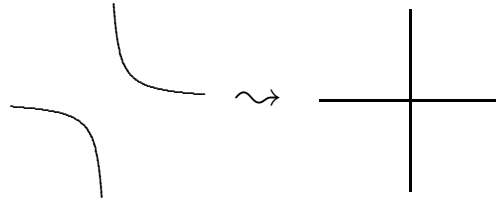
Juntando os dois morfismos, obtemos  $B \rightarrow M_{0,n} \times W(r, d)$  induzindo  $\mathfrak{X}$ , como queríamos.  $\square$

## 2.2 Famílias a 1 parâmetro

Nesta seção experimentamos com famílias a 1 parâmetro. O objetivo é ter uma idéia dos limites possíveis para uma família de mapas de  $\mathbb{P}^1$  em  $\mathbb{P}^r$ . Pretendemos convencer o leitor de que não existe um espaço compacto formado

apenas por mapas  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$ . Para compactificar, é preciso lidar com mapas com domínio redutível. A análise vai sugerir a definição da estabilidade de Kontsevich, dada na próxima seção. Porém não chega perto nem de uma demonstração da existência do espaço nem das suas propriedades fundamentais.

**2.2.1 Exemplo.** Partimos do feixe de cônicas em  $\mathbb{P}^2$  dado pela família de equações  $XY - bZ^2$ . Todos os membros da família são cônicas lisas, exceto o membro especial  $b = 0$  que é o par de retas  $XY$ .



Podemos descrever o feixe por uma família de parametrizações, exceto para o membro especial. Para isto, consideramos o mapa racional

$$\begin{aligned} B \times \mathbb{P}^1 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \\ (b, [s : t]) &\longmapsto [bs^2 : t^2 : st] \end{aligned}$$

como uma família de mapas  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  indexados pelo parâmetro  $b \in B := \mathbb{A}^1$ . Note que o mapa é dado por três seções do feixe  $\mathcal{O}(2)$  em  $B \times \mathbb{P}^1$ . Ele não está definido em  $(0, [1 : 0])$ , isto é, temos um ponto base do sistema linear correspondente. A fibra central, fora do ponto base, é mapeada numa reta. Mas sabemos da teoria das superfícies (conforme por exemplo o livro de Beauville [4]), que podemos resolver a indeterminação explodindo o ponto base. Na carta afim dada por  $s = 1$  (a única interessante aqui), o mapa fica

$$(b, t) \mapsto [b : t : t^2].$$

O ideal do lugar de base é  $\langle b, t \rangle$ . Vamos calcular a explosão. Introduza variáveis  $b_1$  e  $t_1$  e ponha  $bt_1 = tb_1$ . A carta interessante da explosão é a com  $t_1 = 1$ . Substituindo  $b = tb_1$ , obtemos o “transformado total” do mapa,

$$[tb_1 : t^2 : t].$$

Podemos dividir pelo fator correspondente ao divisor excepcional (equação  $t = 0$ ). Logo, o mapa resolvido é dado por

$$[b_1 : t : 1].$$

Estamos interessados nos valores na fibra sobre  $b = 0$ . Aqui o domínio é a união do transformado estrito  $F$  da fibra ( $b_1 = 0$ ) e o divisor excepcional  $E$  (dado por  $t = 0$ ). Para  $b_1 = 0$ , o mapa é  $t \mapsto [0 : t : 1]$ , cuja imagem é a reta de equação  $X$ . Para  $t = 0$  obtemos  $b_1 \mapsto [b_1 : 0 : 1]$  que fornece a reta  $Y$ . Ou seja, a família de mapas de grau 2 tem como limite natural a “união” de dois mapas de grau 1.

Portanto, se quisermos um espaço de módulos compacto, devemos incluir alguns mapas de tipo  $C \rightarrow \mathbb{P}^r$  onde o domínio é uma árvore de curvas racionais.

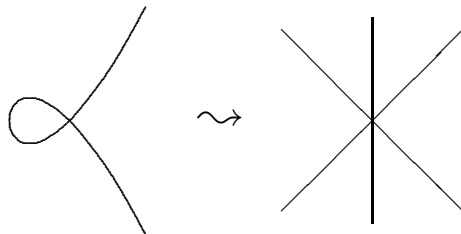
Mas esse limite não é o único possível: poderíamos por exemplo obter um outro limite, simplesmente fazendo mais uma explosão, num outro ponto da fibra central. A fibra central passaria a ser uma curva com três galhos, um dos quais seria mapeado constantemente para  $\mathbb{P}^2$ . Ou seja, o mapa limite desta vez é a “união” de três mapas, de graus 1, 1 e 0.

Seria muito ruim permitir que uma família a um parâmetro tenha vários limites possíveis: seria admitir que o espaço de módulos não fosse separado! (cf. o critério valuativo de separação, cf. [26], Ch. II, §4).

Uma idéia óbvia para evitar tais patologias, é simplesmente proibir no domínio galhos de grau 0, considerando-os artificiais. Assim, vamos convidar *provisoriamente* os seguintes mapas para formar a fronteira do espaço de mapas de grau  $d$ : mapas  $C \xrightarrow{\mu} \mathbb{P}^r$  onde  $C$  é uma árvore de curvas racionais lisas tal que a restrição de  $\mu$  a cada galho é um mapa de grau positivo e a soma dos graus é  $d$ .

Porém, ainda não convidamos mapas suficientes para obter um espaço completo, como sugere o seguinte exemplo.

**2.2.2 Exemplo.** Vamos degenerar a cúbica irreduzível nodal  $F = Y^2Z - X^2(X - Z)$  na união de três retas concorrentes dada pelo polinômio  $G = X(X - Y)(X + Y)$ . Tomamos o feixe  $bF + G$  e deixamos  $b$  se aproximar de zero.



Observe que para qualquer valor de  $b$ , a cúbica do feixe tem a origem  $[0 : 0 : 1]$  como ponto singular. Logo todos os membros da família são curvas racionais.

Para achar uma família de parametrizações descrevendo o feixe, intersecamos com o feixe  $sX + tY$ , formado pelas retas passando por  $[0 : 0 : 1]$ . Cada reta intercepta a cúbica com multiplicidade 2 na origem; o terceiro ponto de interseção descreve a cúbica parametricamente. Achamos o mapa racional

$$B \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$(b, [s : t]) \mapsto \begin{bmatrix} bt(s^2 + t^2) \\ -bs(s^2 + t^2) \\ t(s^2 - t^2 + bt^2) \end{bmatrix}.$$

Você vê que este mapa tem pontos de indefinição para  $b = 0$ , a saber  $t = 0$ ,  $t = \pm s$ . Note que o resto da fibra sobre  $b = 0$  é contraído no ponto  $[0 : 0 : 1]$ . (Tem também dois pontos-base na fibra  $b = 2$ , mas não nos interessam aqui.) Façamos  $s = 1$  e consideremos o mapa na correspondente carta afim,

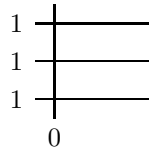
$$(b, t) \mapsto \begin{bmatrix} bt(1 + t^2) \\ -b(1 + t^2) \\ t(1 - t^2 + bt^2) \end{bmatrix}.$$

Vamos explodir a superfície em cada um dos três pontos base e verificar se resolve o mapa. Cuidaremos apenas da explosão no ponto  $(b, t) = (0, 0)$ , que é o mais simples. Fazemos  $bt_1 = tb_1$  e olhamos na carta afim  $t_1 = 1$ . Substituindo  $b = tb_1$ , encontramos

$$\begin{bmatrix} b_1 t(1 + t^2) \\ -b_1(1 + t^2) \\ 1 - t^2 + b_1 t^3 \end{bmatrix},$$

onde um fator  $t$  foi cancelado. Estamos interessados nos valores na fibra sobre  $b = 0$ . Aqui o domínio é a união do transformado estrito  $F$  da fibra ( $b_1 = 0$ ) e o divisor excepcional  $E$  (dado por  $t = 0$ ). Para  $b_1 = 0$  o mapa é  $t \mapsto [0 : 0 : 1 - t^2]$ , constante para a origem. Para  $t = 0$  obtemos  $b_1 \mapsto [0 : -b_1 : 1]$ , que dá a reta  $X$ .

Explodindo também os outros dois pontos-base,  $t = \pm 1$ , você verifica que realmente o mapa é resolvido, e a fibra nova ficou de tipo



onde o galho vertical representa a fibra estrita (mapeada na origem de  $\mathbb{P}^2$ ), e os horizontais são os três divisores excepcionais, que são mapeados nas retas  $X$ ,  $X + Y$  e  $X - Y$ , respectivamente.

Conclusão: ganhamos um mapa limite cujo domínio tem naturalmente um galho de grau 0. Porém, não é possível implodir (contrair) aquele galho: ficaríamos com uma curva-domínio com um ponto triplo, objeto cuidadosamente evitado na compactificação de Knudsen-Mumford! A moral é que devemos permitir galhos de grau zero, sob a condição que cortem os outros galhos em pelo menos três pontos (e por isso são inevitáveis).

Essas considerações nos levam ao conceito de estabilidade de Kontsevich.

## 2.3 Mapas estáveis de Kontsevich

A noção de estabilidade de Kontsevich diz respeito a *mapas  $n$ -marcados* e combina a estrutura estudada na seção anterior com a estrutura apresentada no primeiro capítulo.

Há dois motivos importantes para incorporar as marcas na definição: o primeiro é que mesmo se o nosso interesse fosse apenas mapas sem marcas, a descrição da fronteira de  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$  revela ter uma expressão natural em termos de espaços de mapas de grau menor, onde as marcas desempenham um papel central para compatibilizar colagens — veja 2.7.4.

Outro motivo é que vamos fazer geometria enumerativa, contando mapas sujeitos a condições que se expressam de forma natural em termos das imagens das marcas, cf. 2.5.2 e capítulo 3.

**Definição.** Um *mapa  $n$ -marcado* é um morfismo  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r$ , onde  $C$  denota uma árvore de retas projetivas com  $n$  marcas distintas que são pontos lisos de  $C$ . Um *isomorfismo* de mapas  $n$ -marcados  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r$  e  $\mu' : C' \rightarrow \mathbb{P}^r$  é um isomorfismo das curvas-domínio que respeita toda a estrutura, i.e.  $\phi : C \xrightarrow{\sim} C'$

tornando comutativos os dois diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\phi} & C' \\
 \sigma_i \uparrow & & \downarrow \pi' \\
 \downarrow \pi & & \uparrow \sigma'_i \\
 \bullet & \xlongequal{\quad} & \bullet
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\phi} & C' \\
 \mu \searrow & & \swarrow \mu' \\
 & \mathbb{P}^r &
 \end{array}$$

Mais geralmente, uma família de mapas  $n$ -marcados é um diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{X} & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{P}^r \\
 \sigma_i \uparrow & & \downarrow \pi \\
 & & B
 \end{array}$$

onde  $\pi$  é uma família plana de árvores de curvas racionais e os  $\sigma_i$  são  $n$  seções disjuntas que evitam as singularidades das fibras de  $\pi$ . Assim, para cada  $b \in B$ , o mapa  $\mu$  restrito à fibra  $\mu_b : \mathfrak{X}_b \rightarrow \mathbb{P}^r$  é um mapa  $n$ -marcado, com as marcas dadas por  $\sigma_1(b), \dots, \sigma_n(b)$ . Define-se a noção de isomorfismo para famílias de maneira evidente.

**Definição.** Um mapa  $n$ -marcado  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r$  é dito *estável de Kontsevich* se todo galho mapeado a um ponto é estável enquanto curva  $n$ -marcada, i.e., devem existir nele ao menos três pontos especiais. Lembre que um ponto especial é uma marca ou um ponto de interseção com outro galho.

O motivo da definição é revelado logo a seguir.

**2.3.1 Lema.** *Um mapa  $n$ -marcado é estável de Kontsevich se e só se admitir apenas um número finito de automorfismos.*

*Demonstração.* Seja  $\mu$  um mapa estável de Kontsevich. Se sua curva-domínio  $(C; p_1, \dots, p_n)$  é estável como curva racional  $n$ -marcada, então não há automorfismos. Se existe um galho, digamos  $E$ , instável enquanto curva  $n$ -marcada então, pela estabilidade de Kontsevich,  $\mu$  não mapeia  $E$  a um ponto. Seja  $\phi$  um automorfismo de  $\mu$ . Seja  $E' = \phi(E)$ . Temos  $\mu|_{E'} \circ \phi|_E = \mu|_E$ . Agora o lema 2.1.13 garante a finitude das escolhas para  $\phi|_E$ .

Reciprocamente, suponha que  $\mu$  não seja estável. Então existe um galho instável  $E$  mapeado a um ponto. Esse galho admite uma infinidade de automorfismos. Cada automorfismo de  $E$  se estende a  $C$  declarando-o a identidade nas outras componentes. Como  $\mu(E) = \text{ponto}$ , esses automorfismos comutam com  $\mu$ , que admite assim uma infinidade de automorfismos.  $\square$

Pelo exposto acima, é razoável acreditar no seguinte teorema de existência.

**2.3.2 Teorema.** (Cf. FP-NOTES.) *Existe um espaço de módulos grosseiro  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  parametrizando classes de isomorfismo de mapas  $n$ -marcados estáveis de Kontsevich de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^r$ .*  $\square$

Doravante, o único tipo de estabilidade considerada será a de Kontsevich. Assim vamos suprimir o atributo “Kontsevich” e falar simplesmente em mapas estáveis.

As propriedades fundamentais dos espaços de Kontsevich são listadas a seguir.

**2.3.3 Teorema.** (Cf. FP-NOTES.)  *$\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  é uma variedade projetiva e normal, e é localmente um quociente de uma variedade lisa por um grupo finito. Existe uma subvariedade aberta, densa e lisa  $\overline{M}_{0,n}^*(\mathbb{P}^r, d)$  que é um espaço de módulos fino para mapas sem automorfismos.*  $\square$

Especificar que  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  é uma variedade projetiva implica que ela é separada e completa. Em outras palavras, dada uma família a um parâmetro, com um membro faltando, existe exatamente uma maneira de completar a família. Assim, excluimos o incômodo imaginado no exemplo 2.2.1 das explosões sucessivas em pontos da fibra especial.

**2.3.4 A dimensão de  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  é**

$$\begin{aligned} \dim \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) &= (r+1)(d+1) - 1 - 3 + n \\ &= rd + r + d + n - 3. \end{aligned}$$

como segue da conta de parâmetros já feita em 2.1.11, junto com a observação de que cada marca adiciona um grau de liberdade.

## 2.4 Idéia da construção de $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$

**2.4.1 Idéia geral.** Os espaços de Knudsen-Mumford  $\overline{M}_{0,m}$  desempenham papel fundamental. De fato,  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  é construído pela colagem de quocientes de variedades não singulares que são fibrados sobre abertos de  $\overline{M}_{0,m}$ , onde  $m = n + d(r+1)$ . Por simplicidade vamos nos restringir ao caso  $r = 2$ .

**2.4.2 Descrição de um aberto em  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$ .** Fixemos em  $\mathbb{P}^2$  três retas  $\ell_0, \ell_1, \ell_2$ , definidas por formas lineares  $x_0, x_1, x_2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ . O aberto em  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$  que vamos descrever é formado por todos os mapas  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  que satisfazem a seguinte condição de transversalidade. *Para cada  $j = 0, 1, 2$ , a imagem inversa de  $\ell_j$  é um divisor  $D_j := \mu^*\ell_j$  que consiste em  $d$  pontos distintos e que são pontos não especiais de  $C$ .* Observe que os pontos de  $D_j$  são distribuídos nos galhos de acordo com o grau. Se, por exemplo,  $\mu$  restrito a um galho tem grau  $d_A$ , então  $D_j$  tem  $d_A$  pontos neste galho. Vamos denotar os pontos de  $D_j$  pelas letras  $q_{j1}, \dots, q_{jd}$ ,

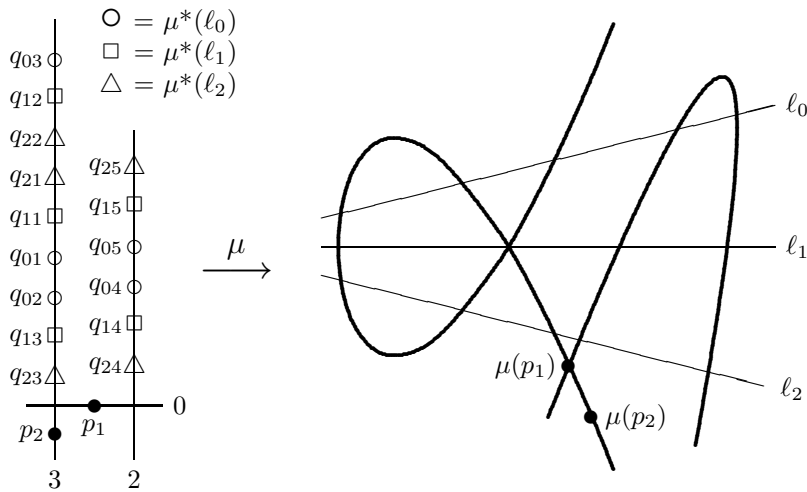
$$D_j = q_{j1} + \dots + q_{jd}.$$

Note que os três divisores são linearmente equivalentes. De fato, são dados pelas seções

$$s_0 := \mu^*x_0, \quad s_1 := \mu^*x_1, \quad s_2 := \mu^*x_2$$

do mesmo fibrado linear  $\mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ .

**2.4.3 Exemplo.** Olhe no desenho o caso de um mapa estável  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  em  $\overline{M}_{0,2}(\mathbb{P}^2, 5)$  com três galhos no domínio.



Cada um dos três divisores  $D_j = \mu^*\ell_j$  se distribui com 3 pontos no galho de grau 3, nenhum ponto no galho de grau zero, e 2 pontos no galho de grau 2. Observe que nada impede o “nó” da parte cúbica de cair em cima da reta  $\ell_1$ . O que importa é que a imagem inversa em  $C$  consiste em pontos distintos e não-especiais.

Note que tais abertos realmente cobrem  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$ , i.e., para cada mapa  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  existe uma escolha de três retas tais que  $\mu$  pertence ao aberto correspondente. A escolha é evidente se a restrição de  $\mu$  a cada galho é birracional ou constante: evite as imagens de pontos especiais e as retas tangentes; se for um recobrimento, basta evitar as imagens dos pontos de ramificação e dos pontos especiais.

**2.4.4 A curva estável  $m$ -marcada.** A cada mapa  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  satisfazendo a condição de transversalidade (2.4.2) podemos associar uma curva racional  $m$ -marcada  $\tilde{C}$ , com  $m = n + 3d$ . A curva é simplesmente  $C$ , e as marcas são as  $n$  originais, junto com mais  $3d$  obtidas pelas imagens recíprocas das três retas, e que serão denotadas  $q_{j1}, \dots, q_{jd}$ ,  $0 \leq j \leq 2$ . Agora afirmamos que *a curva construída  $\tilde{C}$  é estável como curva  $m$ -marcada se e só se  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  é estável como mapa.*

Com efeito suponha  $\mu$  estável. Num galho de grau zero, pela condição de estabilidade para o mapa, esse galho já é estável como curva marcada. Num galho de grau  $d_A > 0$  ganhamos  $3d_A \geq 3$  novas marcas em  $\tilde{C}$ , distintas dos pontos especiais, garantindo assim a estabilidade desse galho como curva marcada. Reciprocamente, se  $\mu$  não fosse estável como mapa, teria um galho de grau zero com menos que três marcas, i.e. o galho seria instável enquanto curva marcada. Tendo grau zero, esse galho não ganharia novas marcas e continuaria instável como galho em  $\tilde{C}$ .

**2.4.5 Observação.** Note que há uma ambigüidade na construção de  $\tilde{C}$ : enquanto cada divisor  $D_j$  é bem definido, a ordem dos pontos  $q_{j1}, \dots, q_{jd}$  não é dada canonicamente. Permutando os pontos (com  $j$  fixo) o divisor continua o mesmo, mas ficamos potencialmente com  $3 \cdot d!$  curvas  $m$ -marcadas  $\tilde{C}$  não-isomorfas. Voltaremos a essa questão logo mais.

**2.4.6 O aberto  $B \subset \overline{M}_{0,m}$ .** Perguntamos agora: quais são as curvas estáveis com marcas  $p_1, \dots, p_n, q_{01}, \dots, q_{0,d}, q_{11}, \dots, q_{1,d}, q_{21}, \dots, q_{2,d}$  que aparecem desta forma? A condição é que *os três divisores definidos como  $D_j := \sum q_{jk}$  sejam equivalentes.*

Com efeito, já observamos que as curvas que resultam da construção satisfazem essa exigência. Reciprocamente, dada uma curva  $\tilde{C}$  que goza dessa propriedade, escolha isomorfismos entre os três fibrados  $\mathcal{O}(D_j)$ . Os divisores provêm de três seções  $\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2$  do mesmo fibrado linear. Portanto, elas definem um mapa  $\tilde{\mu} : \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^2$  de grau  $d$ , visto que essas três seções não se anulam

simultaneamente. Composto com uma mudança de coordenadas  $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$  podemos supor que os três divisores são imagens inversas das três retas originais. Agora esqueça as marcas  $q_{jk}$  (sem estabilizar), e seja  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  o mapa com apenas as  $n$  marcas  $p_1, \dots, p_n$ . Então  $\mu$  é um mapa que induz  $\tilde{C}$ , e pela observação 2.4.4 ele é um mapa *estável*, já que  $\tilde{C}$  é estável como curva marcada.

Este subconjunto em  $\overline{M}_{0,m}$  será denotado  $B$ . Note que  $B$  contém certamente todas as curvas  $m$ -marcadas irredutíveis já que, em  $\mathbb{P}^1$ , a classe de isomorfismo de um fibrado linear é determinada por seu grau. A condição necessária e suficiente para que uma curva  $m$ -marcada  $(\tilde{C}, (p_i), (q_{jk})) \in \overline{M}_{0,m}$  esteja em  $B$  é que ela seja *balanceada* no seguinte sentido: o número de pontos do divisor  $D_j$  em cada galho de  $\tilde{C}$  não depende de  $j$ . Em outras palavras, os três divisores  $D_j$  se distribuem por igual em cada galho, com o mesmo grau. O complementar de  $B$  é uma união de divisores de fronteira  $D(A|A')$  tal que  $A$  intercepta algum  $D_j$  em menos pontos do que outro  $D_{j'}$ . Vemos assim que  $B$  é um aberto não vazio em  $\overline{M}_{0,m}$ .

**2.4.7 Observação.** Vários mapas estáveis  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  não-isomorfos podem induzir a mesma curva  $m$ -marcada  $(\tilde{C}, (p_i), (q_{jk})) \in \overline{M}_{0,m}$ . Com efeito, considere o mapa

$$C \xrightarrow{\mu} \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^2$$

onde  $\phi$  é um automorfismo de  $\mathbb{P}^2$  que deixa invariantes as três retas. Em coordenadas homogêneas temos  $\phi([x_0 : x_1 : x_2]) = [\lambda_0 x_0 : \lambda_1 x_1 : \lambda_2 x_2]$ , multiplicação por uma matriz diagonal inversível, e claramente podemos supor  $\lambda_0 = 1$ . A curva  $m$ -marcada associada à composição  $\phi \circ \mu$  é igual à curva  $\tilde{C}$  associada a  $\mu$ . Portanto, existe um  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  de mapas não-isomorfos induzindo a mesma curva  $m$ -marcada.

Do ponto de vista da curva  $\tilde{C}$ , observamos o mesmo fenômeno. Na hora de construir o mapa  $\tilde{\mu}$ , é preciso especificar isomorfismos entre os três fibrados lineares  $\mathcal{O}(D_j)$ . Em outras palavras, dadas as três seções  $s_0, s_1, s_2$  definindo um mapa por  $[s_0 : s_1 : s_2]$ , para qualquer escolha de pesos  $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ , o mapa  $[\lambda_0 s_0 : \lambda_1 s_1 : \lambda_2 s_2]$  é tão bom como qualquer outro.

As possíveis escolhas de pesos formam então um  $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$ -fibrado sobre  $B$ . Seja  $Y$  o espaço total deste fibrado.

Agora sim: cada ponto em  $Y$  define um único mapa estável  $n$ -marcado, e esse mapa pertence ao subconjunto de  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$  especificado em 2.4.2.

**2.4.8 O quociente  $Y/G$ .** Seja  $G = \mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ , produto de três cópias do grupo de permutações em  $d$  letras. Temos que  $G$  age em  $Y$  permutando  $q_{j1}, \dots, q_{jd}$  entre si (para cada  $j$  fixo). Já vimos em 2.4.5 que essas permutações não alteram a seção  $s_j$ , mas podem alterar a curva  $m$ -marcada  $\tilde{C}$ . Identificando-se  $\tilde{C}$  com  $g.\tilde{C}$  para  $g \in G$ , i.e., passando ao quociente  $Y/G$ , obtemos uma bijeção com o aberto de  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$  descrito em 2.4.2.

Confira mais uma vez a conta de dimensão:

$$\dim Y = \underbrace{2}_{\text{pela fibra } \mathbb{C}^{*2}} + \underbrace{m-3}_{\text{dimensão da base}} = \underbrace{n+3d-1}_{\text{dimensão de } \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)}$$

**2.4.9 Lissitude de  $\overline{M}_{0,n}^*(\mathbb{P}^2, d)$ .** Vamos por fim argumentar porque o espaço  $\overline{M}_{0,n}^*(\mathbb{P}^2, d)$  dos mapas sem automorfismos é liso. Sabemos que quando um grupo finito age numa variedade lisa, então em cada ponto onde a ação é livre (i.e., a cardinalidade da órbita é igual à ordem do grupo), o ponto imagem no quociente é liso. No caso da ação de  $G$  em  $Y$  descrita acima, dizer que a ação não é livre é dizer que alguma permutação das marcas  $q_{jk}$  é induzida por um automorfismo da curva  $C$  (e fixando as  $n$  marcas  $p_i$ ).

Ora, um automorfismo de  $C$  que fixe as marcas  $p_i$  e permute as marcas  $q_{jk}$  (com  $j$  fixo), é também compatível com qualquer dos mapas  $n$ -marcados  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  na correspondente fibra de  $Y$  sobre  $B$ . E vice-versa, dado um automorfismo do mapa  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$ , então em particular é um automorfismo de  $C$  que fixa as marcas  $p_i$ , e sendo compatível com o mapa  $\mu$ , seu efeito nas novas marcas  $q_{jk}$  é nada mais que permutação (com  $j$  fixo).

## 2.5 Mapas de avaliação

Para cada marca  $p_i$  temos um morfismo natural

$$\begin{aligned} \nu_i : \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) &\longrightarrow \mathbb{P}^r \\ (C; p_1, \dots, p_n; \mu) &\longmapsto \mu(p_i) \end{aligned}$$

chamado de *mapa de avaliação*.

**2.5.1 Lema.** *Os mapas de avaliação  $\nu_i : \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow \mathbb{P}^r$  são planos.*

*Demonstração.* Cada mapa de avaliação é claramente invariante pela ação natural de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^r)$ . Por planitude genérica (cf. [1]), sabendo que a ação em  $\mathbb{P}^r$  é transitiva, segue facilmente a planitude afirmada.  $\square$

**2.5.2 Observação.** Os mapas de avaliação, apesar da aparência banal, desempenham um papel decisivo porque permitem relacionar a geometria de  $\mathbb{P}^r$  com a de  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ . Por exemplo, se  $H \subset \mathbb{P}^r$  é um hiperplano, então para cada  $i$ , a imagem inversa  $\nu_i^{-1}(H)$  é um divisor em  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ , consistindo em todos os mapas cuja  $i$ -ésima marca é enviada a  $H$ .

## 2.6 Mapas de esquecimento

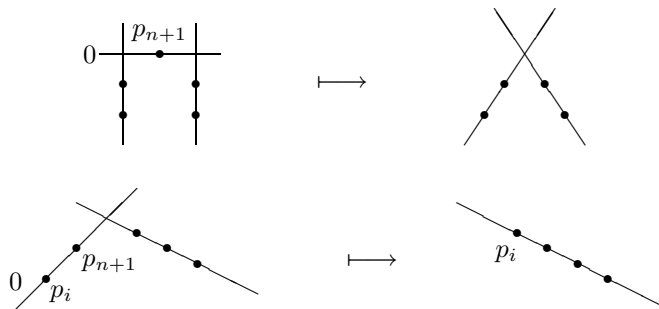
**2.6.1 Mapas de esquecimento.** De forma análoga ao caso das curvas estáveis de Knudsen-Mumford, se  $B \subset A$  são conjuntos de marcas, então temos um mapa de esquecimento  $\overline{M}_{0,A}(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow \overline{M}_{0,B}(\mathbb{P}^r, d)$  que omite as marcas do complemento  $A \setminus B$ . Cada mapa desse tipo se fatora através do esquecimento de uma só marca de cada vez

$$\varepsilon : \overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d),$$

e não tem importância em que sequência as marcas são apagadas.

A descrição do que acontece para uma curva com domínio redutível é parecida com o caso de curvas marcadas: galhos deixados instáveis pelo esquecimento devem ser contraídos. Observe que isto ocorre apenas para galhos de grau 0, porque galhos de grau positivo são sempre estáveis, independentemente das marcas. Por este motivo, não há problemas quanto à boa-definição do novo mapa  $\varepsilon(\mu)$ : já que  $\mu$  era constante no galho em questão, a imagem do mapa não muda.

Ilustrações para o esquecimento da marca  $p_{n+1}$ :



Existe uma relação íntima entre um ponto  $[\mu] \in \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  (representado por um mapa  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r$ ) e a restrição de  $\nu_{n+1}$  à fibra  $F_\mu := \varepsilon^{-1}([\mu])$ . No caso onde  $\mu$  é livre de automorfismos, veremos que a relação é uma identificação canônica. No caso onde há automorfismos, a relação é mais sutil.

**2.6.2 Família universal para  $\overline{M}_{0,n}^*(\mathbb{P}^r, d)$ .** Vejamos por simplicidade o caso sem marcas  $n = 0$ . Considere primeiro um mapa  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r$  com domínio liso e birracional sobre a imagem. Certamente todos os mapas 1-marcados que pertencem à fibra  $F_\mu$  de  $\varepsilon$  têm as mesmas duas propriedades. É claro que para cada escolha da marca  $p_1 \in C$  temos um mapa 1-marcado e que os mapas 1-marcados assim produzidos são não-isomorfos. Portanto, existe uma bijeção natural entre os pontos de  $C$  e os de  $F_\mu$ , que a cada ponto  $q \in C$  associa o mapa 1-marcado  $\mu_q : C \rightarrow \mathbb{P}^r$  obtido de  $\mu$  fazendo  $p_1 := q$ .

Temos mais: o mapa de avaliação  $\nu_1 : \overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow \mathbb{P}^r$  restrito a  $F_\mu$  se identifica então com o próprio  $\mu$ . Com efeito, seja  $q \in C$  um ponto qualquer. O ponto correspondente em  $F_\mu$  é representado pelo mapa 1-marcado  $\mu_q : C \rightarrow \mathbb{P}^r$ . Agora aplique  $\nu_1$  nele:  $\nu_1([\mu_q]) = \mu_q(p_1)$ . Mas  $\mu_q$  foi definido como sendo igual a  $\mu$ , só que seu domínio ganhou a marca  $p_1 = q$ . Logo,  $\mu_q(p_1) = \mu(q)$  como queríamos.

Vamos construir formalmente o isomorfismo  $C \simeq F_\mu$ . Para jogar  $C$  dentro de  $\overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^r, d)$  basta exibir uma família de mapas 1-marcados com base  $C$ . Tomamos simplesmente

$$\begin{array}{ccc} C \times C & \xrightarrow{\overline{\mu}} & \mathbb{P}^r \\ \delta \uparrow & & \downarrow \pi \\ & & C \end{array}$$

onde o mapa  $\pi$  é primeira projeção,  $\delta$  é a seção diagonal e  $\overline{\mu}(q, q') = \mu(q')$ . Esta é uma família de mapas 1-marcados estáveis, portanto existe um morfismo  $C \rightarrow \overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^r, d)$ , cuja imagem é justamente a fibra  $F_\mu$ . É claro que este morfismo é a bijeção já descrita conjuntistamente.

Avancemos para casos menos simples. Seja agora  $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r$  um mapa com domínio redutível, mas que ainda é birracional sobre a imagem. Então quando  $q$  é um nó, simplesmente fazendo  $p_1 := q$  não dá um mapa estável, porque marcas são pontos lisos. Porém, sabemos que existe uma única estabilização (cf. 1.3.1), de maneira que a bijeção conjuntista  $C \leftrightarrow F_\mu$  continua valendo mesmo para  $C$  singular. Note que o novo galho introduzido pela estabilização é de grau zero: ele é contraído pelo mapa  $\mu_q$ . Dito isto, é fácil ver que continua valendo também a identificação de  $\nu_1$  restrito a  $F_\mu$  com o próprio  $\mu$ . Finalmente, para conseguir o morfismo  $C \simeq F_\mu$ , procedemos como no caso liso — apenas temos que observar que a seção diagonal não evita as singularidades das fibras; algumas explosões são necessárias para conseguir a

família de mapas 1-marcados estáveis com base  $C$ .

O caso onde há marcas apresenta problemas semelhantes: a seção diagonal intersecta as seções constantes correspondentes às marcas, e é preciso explodir esses pontos de interseção. Essas considerações mostram que, restrito ao aberto  $\overline{M}_{0,n}^*(\mathbb{P}^r, d)$  dos mapas livres de automorfismos,  $\varepsilon$  faz o papel de uma família tautológica. De fato, trata-se de uma família universal, lembrando a asserção do teorema 2.3.3 de que  $\overline{M}_{0,n}^*(\mathbb{P}^r, d)$  é um espaço de módulos fino.

**2.6.3 Fibras de  $\varepsilon$  na presença de automorfismos.** Por simplicidade, tomamos nosso exemplo favorito 2.1.14 de um mapa com automorfismos:

$$\begin{aligned} C := \mathbb{P}^1 &\xrightarrow{\mu} \mathbb{P}^2 \\ [x : y] &\longmapsto [x^2 : y^2 : 0]. \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento descrito na página anterior, construímos um mapa  $\rho : C \rightarrow \overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^2, 2)$  olhando para  $C \times C$  com a seção diagonal. Porém, neste caso *o mapa  $\rho$  não é uma bijeção*. A culpa é da presença de automorfismos não triviais. Com efeito, considere o automorfismo  $\phi([x : y]) = [-x : y]$  que respeita  $\mu$ . Tome um ponto  $q \in C$  distinto dos pontos de ramificação de  $\mu$  e considere o mapa 1-marcado associado  $\mu_q$ . Compare com o mapa associado ao ponto  $\phi(q) \in C$ . São dois mapas 1-marcados distintos, *porém isomorfos*, já que o automorfismo  $\phi$  manda um no outro. Portanto  $q$  e  $\phi(q)$  têm a mesma imagem em  $\overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^2, 2)$ , ou seja, o mapa  $\rho : C \rightarrow \overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^2, 2)$  é um recobrimento  $2 : 1$ .

Vamos comparar agora  $\mu$  com o mapa de avaliação  $\nu_1$  restrito à fibra  $F_\mu$ . Eles se relacionam pela seguinte fatoração.

$$\begin{array}{ccc} \overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^2, 2) & \xrightarrow{\nu_1} & \mathbb{P}^2 \\ \rho \uparrow & \nearrow \mu & \\ C & & \end{array}$$

Com efeito, a imagem  $\rho(q)$  de um ponto  $q \in C$  é o mapa 1-marcado  $\mu_q : C \rightarrow \mathbb{P}^2$ , que é simplesmente o mapa original  $\mu$  munido da marca  $p_1 := q$ . Agora temos que fazer a avaliação deste mapa em  $p_1$ . Mas  $p_1 = q$  e portanto o resultado é  $\mu(q)$ . Note em particular que  $\nu_1$  restrito a  $F_\mu$  é bijetivo sobre a imagem. Se  $\nu_1$  pudesse ser um mapa universal (como no caso sem automorfismos), sua restrição àquela fibra deveria ser um recobrimento duplo. Mas

ele é de fato um mapa bijetivo de uma curva dupla  $(F_\mu)$  sobre a imagem. A fibra esquemática de  $\varepsilon$  sobre o ponto  $[\mu]$  é não reduzida. Em particular  $\varepsilon : \overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^2, 2) \rightarrow \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  nem é uma família de mapas estáveis. . .

Teremos ocasião de rever este fenômeno na seção 2.9.

**2.6.4 Incidências.** Em  $\overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)$ , consideramos o lugar  $\nu_{n+1}^{-1}(H^k)$  de todos os mapas  $\mu$  tais que  $\mu(p_{n+1}) \in H^k$ , onde  $H^k \subset \mathbb{P}^r$  é um subespaço linear de codimensão  $k$ . Esquecendo a marca  $p_{n+1}$  ficamos, num espaço com uma marca a menos, com o lugar dos mapas simplesmente incidentes a  $H^k$ , sem menção a marcas. Mais precisamente,

$$\text{inc}(H^k) := \varepsilon(\nu_i^{-1}(H^k))$$

é uma subvariedade em  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  de codimensão  $k - 1$  constituída por todos os mapas incidentes a  $H^k$ . Em particular,  $\text{inc}(H^2)$  é um divisor importante.

**2.6.5 Exemplo.** Uma vez que mapas de grau um não admitem automorfismos, o esquecimento  $\varepsilon : \overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^r, 1) \rightarrow \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^r, 1)$  funciona como família universal. Já vimos que a base  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^r, 1)$  se identifica com a grassmanniana  $\text{Gr}(1, \mathbb{P}^r)$ , e pela discussão,  $\overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^r, 1)$  é justamente a reta universal. Se  $H^k \subset \mathbb{P}^r$  é um subespaço linear de codimensão  $k$ , a imagem inversa  $\nu_1^{-1}(H^k) \subset \overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^r, 1)$  é o espaço total da família das retas incidentes a  $H^k$ , e  $\text{inc}(H^k) = \varepsilon(\nu_1^{-1}(H^k)) \subset \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^r, 1)$  identifica-se então com a variedade de Schubert  $\Sigma_0(H^k) \subset \text{Gr}(1, \mathbb{P}^r)$  (veja o livro de Harris [24]).

**2.6.6 Esquecimento de  $\mu$ .** Para  $n \geq 3$ , existe também um mapa de esquecimento

$$\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow \overline{M}_{0,n}$$

que consiste em esquecer o mapa. Novamente é claro que você deverá contrair galhos que se tornarem instáveis.

**2.6.7 Lema.** *Para  $n \geq 4$ , o mapa de esquecimento  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow \overline{M}_{0,4}$  é um morfismo plano.*

*Demonstração.* Planitude de uma variedade irredutível e reduzida sobre uma curva não singular como  $\overline{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1$  é fácil: basta que o mapa seja sobrejetivo (dominante é suficiente), cf. [26], p.257.  $\square$

**2.6.8 Observação.** Mais geralmente, para  $n \geq 3$ , o mapa de esquecimento  $\eta : \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow \overline{M}_{0,n}$  é um morfismo plano.

Para a verificação, lembramos de 2.4.2 que uma vizinhança aberta de  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  pode ser tomada na forma  $V = Y/G$  (cf. 2.4.8). Por construção, é claro que  $\eta|_V$  se encaixa no diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \overline{M}_{0,m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\eta|_V} & \overline{M}_{0,n} \end{array}$$

onde a seta vertical direita é um esquecimento de pontos em espaços de Knudsen-Mumford que sabemos que é plano. Assim, reduzimos ao enunciado seguinte. *Seja  $Y$  uma variedade com uma ação de um grupo finito  $G$ . Seja  $\varphi : Y/G \rightarrow Z$  um morfismo tal que a composição  $Y \rightarrow Y/G \rightarrow Z$  é um morfismo plano. Então  $\varphi$  é plano.* Com efeito, isso se traduz em homomorfismos de anéis de coordenadas,  $R \rightarrow A \rightarrow B$ , onde  $B$  é  $G$ -invariante,  $A = B^G$  é o anel de invariantes e  $B$  é plano sobre  $R$ . Lembremos do  $A$ -homomorfismo,  $\rho : B \rightarrow A$ , definido pela “média”,  $\rho(b) = \frac{1}{|G|} \sum_g gb$ . Trata-se de uma “retração” para  $A \rightarrow B$ . Segue que  $A$  se identifica a um somando direto de  $B$  (como  $A$ -módulo) e portanto é  $R$ -plano.

## 2.7 A fronteira

A fronteira de  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  é formada por mapas cujos domínios são curvas redutíveis. A descrição da fronteira é muito parecida com a já feita para a fronteira de  $\overline{M}_{0,n}$ . Reduz-se a uma questão combinatória de como distribuir marcas e graus.

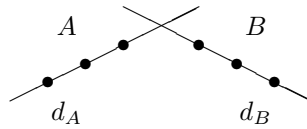
**Definição.** Uma partição  $d$ -ponderada de um conjunto  $[n] := \{p_1, \dots, p_n\}$  consiste em uma partição  $A \cup B = [n]$  juntamente com uma partição em inteiros não negativos,  $d_A + d_B = d$ .

**2.7.1 Divisores de fronteira.** Para cada partição  $d$ -ponderada

$$A \cup B = [n], d_A + d_B = d, \text{ (onde } \#A \geq 2 \text{ se } d_A = 0, \text{ e } \#B \geq 2 \text{ se } d_B = 0)$$

existe um divisor irreduzível, denotado  $D(A, B; d_A, d_B)$ , chamado um *divisor de fronteira*. Um ponto geral deste divisor representa um mapa  $\mu$  cujo domínio

é uma árvore com dois galhos,  $C = C_A \cup C_B$ , com os pontos de  $A$  em  $C_A$  e os de  $B$  em  $C_B$ , tal que a restrição de  $\mu$  a  $C_A$  é um mapa de grau  $d_A$  e a restrição de  $\mu$  a  $C_B$  é de grau  $d_B$ . Vamos sempre indicá-lo por uma figura assim:



Em analogia com 1.5.9 temos a

**2.7.2 Proposição.** *A união dos divisores de fronteira em  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  é um divisor a cruzamentos normais, módulo um quociente finito, i.e. suas componentes se cortam transversalmente (módulo um quociente finito).*  $\square$

**2.7.3 Exercício.** O número de divisores de fronteira de  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  é

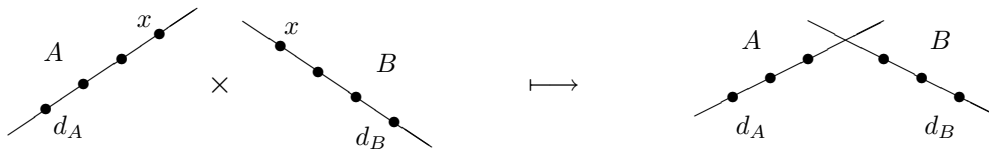
$$2^{n-1}(d + 1) - n - 1,$$

exceto no caso  $n = 0$ : o número de divisores de fronteira de  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$  é  $[d/2]$ , a parte inteira de  $d/2$ .

Por exemplo,  $\overline{M}_{0,5}(\mathbb{P}^2, 2)$  tem 42 divisores de fronteira;  $\overline{M}_{0,8}(\mathbb{P}^2, 3)$  tem 503; e  $\overline{M}_{0,11}(\mathbb{P}^2, 4)$  tem 5108.

**2.7.4 Estrutura recursiva.** Da descrição combinatória da fronteira obtemos um morfismo natural de colagem

$$\overline{M}_{0,A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_A) \times_{\mathbb{P}^r} \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_B) \longrightarrow D(A, B; d_A, d_B). \quad (2.7.4.1)$$



O produto fibrado  $/\mathbb{P}^r$  é tomado através dos mapas de avaliação da marca  $x$ ,

$$\begin{aligned} \nu_{x_A} : \overline{M}_{0,A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_A) &\longrightarrow \mathbb{P}^r \\ \nu_{x_B} : \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_B) &\longrightarrow \mathbb{P}^r. \end{aligned}$$

Trata-se apenas da expressão técnica de que o ponto indicado por  $x$  deve ter a mesma imagem em  $\mathbb{P}^r$  por ambos os mapas a fim de ser possível fazer a colagem.

O morfismo 2.7.4.1 é de fato um isomorfismo na maioria dos casos. Apenas em alguns casos especiais, simetrias podem torná-lo não injetivo. Em um caso,  $A = B = \emptyset$ ,  $d_A = d_B$ , a situação é tão simétrica que o mapa fica genericamente 2–1. Veja FP-NOTES, Lemma 12, e Kock [31], Lemma 2.2 para o enunciado exato.

O produto fibrado pode ser visto como a subvariedade do produto usual  $\overline{M}_{0,A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_A) \times \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_B)$ , dada pela imagem inversa da diagonal  $\Delta \subset \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$ :

$$\overline{M}_{0,A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_A) \times_{\mathbb{P}^r} \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_B) = (\nu_{x_A} \times \nu_{x_B})^{-1}(\Delta).$$

Desta maneira, interseções com  $D(A, B; d_A, d_B)$  podem ser calculadas nos espaços  $\overline{M}_{0,A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_A)$  e  $\overline{M}_{0,B \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_B)$ , cujas dimensões são estritamente menores. Este fato será crucial nos capítulos restantes (cf. 4.3.3).

**2.7.5 Observação.** Note que mesmo começando com um espaço sem marcas, somos forçados a considerar marcas para descrever sua fronteira.

**2.7.6 Divisores de fronteira especiais.** Para  $n \geq 4$ , considere a composição de mapas de esquecimento  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow \overline{M}_{0,n} \rightarrow \overline{M}_{0,4}$ , o qual é plano cf. 2.6.7. Seja  $D(ij|kl)$  o divisor em  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  definido como a imagem inversa do divisor  $(ij|kl)$  em  $\overline{M}_{0,4}$ . Então

$$D(ij|kl) = \sum D(A, B; d_A, d_B),$$

onde a soma é feita sobre todas as partições  $d$ -ponderadas tais que  $i, j \in A$  e  $k, l \in B$ . Por motivos similares aos indicados em 1.5.11, todos os coeficientes nessa soma são iguais a 1. Lembrando que no contradomínio  $\overline{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1$  os três divisores de fronteira são equivalentes, obtemos a *relação fundamental*

$$\sum_{\substack{A \cup B = [n] \\ i, j \in A \\ k, l \in B \\ d_A + d_B = d}} D(A, B; d_A, d_B) \equiv \sum_{\substack{A \cup B = [n] \\ i, k \in A \\ j, l \in B \\ d_A + d_B = d}} D(A, B; d_A, d_B) \equiv \sum_{\substack{A \cup B = [n] \\ i, l \in A \\ j, k \in B \\ d_A + d_B = d}} D(A, B; d_A, d_B). \quad (2.7.6.1)$$

cujas conseqüências serão exploradas no restante do texto.

## 2.8 Exemplos

Os primeiros dois lemas abaixo são meros exercícios sobre o mapa de avaliação. Em seguida estudamos os espaços mais simples,  $d = 0$  e  $d = 1$ .

**2.8.1 Lema.** *Seja  $\Gamma \subset \mathbb{P}^r$  uma subvariedade. Então sua imagem inversa  $\nu_i^{-1}\Gamma \subset \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  corta propriamente cada divisor de fronteira  $D$ . Isto é, se  $\Gamma$  é de codimensão  $k$  então a interseção  $\nu_i^{-1}\Gamma \cap D$  é de codimensão  $k + 1$  em  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ .*

*Demonstração.* Considere um divisor de fronteira  $D = D(A, B; d_A, d_B)$  onde, digamos,  $p_i \in A$ . Usando o morfismo finito de colagem

$$\overline{M}_{0,A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_A) \times_{\mathbb{P}^r} \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_B) \longrightarrow D(A, B; d_A, d_B)$$

vemos que a interseção  $D \cap \nu_i^{-1}\Gamma$  é imagem de  $\nu_{A_i}^{-1}\Gamma \times_{\mathbb{P}^r} \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_B)$ , onde  $\nu_{A_i}$  é o mapa de avaliação da marca  $p_i \in A$  do espaço  $\overline{M}_{0,A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_A)$ . Planitude deste mapa garante que  $\nu_{A_i}^{-1}\Gamma$  tem codimensão  $k$  em  $\overline{M}_{0,A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_A)$ , e segue daí que  $D \cap \nu_i^{-1}\Gamma$  tem codimensão  $k + 1$  como afirmado.  $\square$

**2.8.2 Lema.** *As fibras de  $\nu_i$  são irredutíveis.*

*Demonstração.* Reduzimos primeiro ao caso de muitas marcas. No diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d) & \xrightarrow{\hat{\nu}_i} & \mathbb{P}^r \\ \varepsilon \downarrow & \nearrow \nu_i & \\ \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) & & \end{array}$$

$\varepsilon$  é o esquecimento de  $p_{n+1}$  enquanto  $\hat{\nu}_i$  e  $\nu_i$  são os mapas de avaliação em  $p_i$  dos respectivos espaços. Claramente o diagrama comuta, e portanto  $\hat{\nu}_i^{-1}(\Gamma) = \varepsilon^{-1}\nu_i^{-1}(\Gamma)$ . Agora se  $\nu_i^{-1}(\Gamma)$  fosse redutível, então  $\varepsilon^{-1}\nu_i^{-1}(\Gamma)$  seria também. Logo, a validade do resultado para o espaço com  $n + 1$  marcas implica o resultado para o caso de  $n$  marcas.

Portanto podemos supor  $n \geq 3$ . A fibra é um subsquema em  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  de codimensão  $r$ , e sabendo do lema anterior que ele intercepta a fronteira propriamente, é suficiente mostrar que é irredutível a sua imagem inversa no

aberto  $M_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  formado pelos mapas com domínio  $\mathbb{P}^1$ . Usamos agora a descrição

$$M_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) \simeq M_{0,n} \times W(r, d).$$

feita em 2.1.16. Por conta da ação transitiva de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^r)$  em  $\mathbb{P}^r$ , é suficiente estabelecer a irreducibilidade da fibra sobre um ponto, digamos  $0 = [0, \dots, 0, 1] \in \mathbb{P}^r$ . Podemos em seguida supor que  $p_i \in \mathbb{P}^1$  é o ponto  $[0 : 1]$ . Agora a condição de  $\mu([0 : 1]) = 0$  significa que as primeiras  $r$  formas se anulam em  $[0 : 1]$ , o que certamente são  $r$  condições lineares e independentes. Logo a fibra é um subespaço linear em  $M_{0,n} \times W(r, d)$  e em particular é irredutível.  $\square$

**2.8.3 Corolário.** *Para qualquer subvariedade irredutível  $\Gamma \subset \mathbb{P}^r$ , sua imagem inversa por avaliação é irredutível.*

*Demonstração.* Como as fibras de  $\nu_i^{-1}(\Gamma) \rightarrow \Gamma$  são irredutíveis e de dimensão constante, segue a afirmação sobre a irreducibilidade de  $\nu_i^{-1}(\Gamma)$ .  $\square$

**2.8.4 Grau 0.** Embora o nosso real interesse sejam mapas  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  não constantes (que fornecem curvas honestas), é preciso entender o comportamento “degenerado” do caso  $d = 0$ . Um mapa estável de grau 0 manda toda a curva-domínio num só ponto. Como seu domínio deve ser uma curva marcada estável, temos  $n \geq 3$ . Resultam destas observações dois morfismos naturais

$$\begin{array}{ccc} & \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, 0) & \\ \eta \swarrow & & \searrow \nu_i \\ \overline{M}_{0,n} & & \mathbb{P}^r \end{array}$$

onde  $\eta$  é o esquecimento do mapa (cf. 2.6.6), enquanto  $\nu_i$  é qualquer um dos mapas de avaliação. Neste caso, o mapa  $\eta$  não envolve contração, e você verifica facilmente que de fato

$$\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, 0) \simeq \overline{M}_{0,n} \times \mathbb{P}^r.$$

Note em particular que, para  $r = 0$ , temos  $\mathbb{P}^0 = \text{Spec } \mathbb{C}$ , e assim os espaços de Kontsevich incluem todos os espaços de Knudsen-Mumford estudados no capítulo 1.

**2.8.5 Grau um, zero ou uma marca.** Vamos usar a propriedade de ser um espaço de módulos grosseiro para identificar de maneira mais formal

$\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^r, 1)$  com a variedade de Grassmann de retas no espaço projetivo  $\mathbb{P}^r$ . Considere a família universal de retas

$$\begin{array}{ccc} U \subset \text{Gr}(1, \mathbb{P}^r) \times \mathbb{P}^r & & \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \text{Gr}(1, \mathbb{P}^r) & & \mathbb{P}^r \end{array}$$

Já que cada fibra de  $\pi$  é uma reta, certamente se trata de uma família plana de curvas lisas racionais. Junto com o mapa  $U \rightarrow \mathbb{P}^r$  ficamos então com uma família de mapas estáveis de grau 1, com base  $\text{Gr}(1, \mathbb{P}^r)$ . Agora a propriedade universal de  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^r, 1)$  garante a existência de um mapa  $\text{Gr}(1, \mathbb{P}^r) \rightarrow \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^r, 1)$ , e esse mapa é obviamente bijetivo. Sendo  $\text{Gr}(1, \mathbb{P}^r)$  liso, e sendo  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^r, 1)$  normal, o teorema principal de Zariski (cf. [35] ch. III, §9) se aplica e concluímos que o mapa é um isomorfismo. Um argumento análogo identifica  $\overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^r, 1)$  com a reta universal  $U$ .

**2.8.6 Grau um, duas marcas.** *O espaço  $\overline{M}_{0,2}(\mathbb{P}^r, 1)$  é naturalmente isomorfo a  $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$  explodido ao longo da diagonal.*

Primeiro observamos que a explosão mencionada é facilmente identificada ao produto fibrado  $U \times_{\mathbb{G}} U$ , onde  $U \rightarrow \mathbb{G} = G(1, \mathbb{P}^r)$  é a reta universal do exemplo anterior. Os dois mapas de avaliação fornecem um morfismo  $\nu: \overline{M}_{0,2}(\mathbb{P}^r, 1) \rightarrow U \times_{\mathbb{G}} U$  que associa a cada  $\mu: (C, p_1, p_2) \rightarrow \mathbb{P}^r$  o par de pontos  $\mu(p_1), \mu(p_2)$  sobre a reta imagem de  $\mu$ . Note que a fronteira se aplica bijectivamente sobre a diagonal. Novamente pelo teorema principal de Zariski, o morfismo  $\nu$  é um isomorfismo.

## 2.9 Cônicas completas

Concluimos o capítulo com uma análise mais detalhada do espaço  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  com o objetivo de verificar um resultado que é folclore: esse espaço é isomorfo à variedade de cônicas completas. O exemplo é uma boa ocasião para ver aplicados na prática alguns conceitos que introduzimos. Advertimos que tecnicamente esta seção destoa do resto do texto e não será mais requisitada.

**2.9.1 Divisores de  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$ .** Há apenas um divisor de fronteira, o qual vamos denotar por  $D$ . Este divisor é constituído por mapas com domínio de dois galhos, ambos de grau 1. Claramente o elemento geral de  $D$  mapeia sobre duas retas distintas, e por isso é bijetivo sobre a imagem.

Denotamos por  $R$  o lugar dos mapas que não são bijetivos sobre a imagem. Um elemento geral  $\mu \in R$  é um recobrimento duplo.  $R$  tem codimensão 1, como segue facilmente do lema 2.1.5 (ou lema 2.1.6), pelo menos fora da fronteira. Observe que  $R$  é também caracterizado como o lugar dos mapas que admitem automorfismos.

A interseção  $\Sigma := D \cap R$  dos dois divisores descritos é o lugar formado pelos mapas de dois galhos com a mesma reta imagem.

**2.9.2**  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  é liso. Lembre de 2.4 (com a notação lá introduzida) que esta variedade é localmente o quociente de uma variedade lisa  $Y$  pela ação do grupo finito  $G = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$ . A ação não é livre exatamente nos pontos da subvariedade  $\tilde{R} \subset Y$  que recobre  $R$ . A órbita de cada ponto de  $\tilde{R}$  tem cardinalidade 4. Mais precisamente, para uma curva 6-marcada que vive sobre um ponto de  $R$ , o estabilizador é o subgrupo “diagonal”  $H \subset G$ , que tem ordem 2, i.e., o grupo que consiste na identidade, junto com a troca *simultânea* das marcas,

$$q_{01} \leftrightarrow q_{02}, \quad q_{11} \leftrightarrow q_{12}, \quad q_{21} \leftrightarrow q_{22}.$$

Podemos passar  $Y$  ao quociente pela ação de  $G$  em dois passos: primeiro pela ação de  $H \simeq \mathbb{Z}_2$  e em seguida pela ação de  $G/H$  em  $\bar{Y} := Y/H$ , que é agora livre.

Em coordenadas analíticas, a ação do gerador  $h \in H$  numa vizinhança de um ponto de  $\tilde{R}$  é algo como

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_5]] &\xrightarrow{h} \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_5]] \\ f(x_1, \dots, x_5) &\longmapsto f(-x_1, \dots, x_5). \end{aligned}$$

De fato, sabe-se que toda ação de  $\mathbb{Z}_2$  (ou mais geralmente, de um grupo finito) em  $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$  é linearizável. O anel de invariantes é  $\mathbb{C}[[x_1^2, x_2, \dots, x_5]]$ , que é regular, justificando a não singularidade afirmada para o quociente.

**2.9.3 Cônicas completas.** Lembremos rapidamente a noção de cônica completa (cf. [24], p.298). Para cada cônica não degenerada  $C \subset \mathbb{P}^2$ , sua envoltória de retas tangentes é parametrizada por outra cônica  $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^2$  no plano dual, chamada cônica dual. A coleção dos pares  $(C, \check{C})$  é uma subvariedade de  $\mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5$ ; sua aderência  $\mathbb{B} \subset \mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5$  é a variedade das cônicas completas. Mostra-se que  $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{P}^5$  é a explosão ao longo da superfície de Veronese  $V$  das

retas duplas. Em particular,  $\mathbb{B}$  é uma variedade lisa. A fibra do divisor excepcional  $E \subset \mathbb{B}$  sobre um ponto que representa uma reta dupla é um  $\mathbb{P}^2$  que parametriza o sistema linear de divisores de grau dois sobre a reta suporte. Cada divisor de grau dois representa uma escolha de *focos*: o par de retas duais dos focos se interpreta como a posição limite da envoltória de retas tangentes, imaginando a reta dupla como limite de cônicas não degeneradas numa família a um parâmetro.

**2.9.4 Proposição.** *O espaço  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  é naturalmente isomorfo ao espaço de cônicas completas.*

**2.9.5 Descrição conjuntista da bijeção.** Vamos explicitar a bijeção entre  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  e  $\mathbb{B}$ . Para cada  $\mu$  no aberto  $M_{0,0}^*(\mathbb{P}^2, 2)$  sua imagem é sempre uma cônica lisa; toda cônica não degenerada aparece assim, e uma só vez.

A outra possibilidade, ainda com domínio irredutível, é termos um recobrimento duplo de uma reta em  $\mathbb{P}^2$ . Neste caso, os dois pontos de ramificação correspondem aos focos. Segue que o aberto  $M_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  está em bijeção com o aberto de  $\mathbb{B}$  formado pelas cônicas lisas e retas duplas com focos distintos. Cobrimos desta forma todo o divisor  $E \subset \mathbb{B}$ , exceto pelos pontos com focos coincidentes.

Do único divisor de fronteira  $D \subset \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  provêm todos os pares de retas, inclusive no caso delas serem coincidentes, quando então marcamos um único foco. Atingimos assim as configurações em  $E$  omitidas antes.

**2.9.6 Idéia da demonstração formal.** Precisamos construir um morfismo  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2) \rightarrow \mathbb{B}$ , que é a bijeção já descrita. Primeiro passo: descrever um morfismo para  $\mathbb{P}^5$ . O segundo passo é a verificação de que a imagem inversa da Veronese  $V$  é exatamente o divisor de Cartier  $R$ . Decorre então que o mapa fatora pela explosão de  $\mathbb{P}^5$  ao longo de  $V$ , que é justamente  $\mathbb{B}$ . Mais uma aplicação do teorema principal de Zariski nos garante que a bijeção é um isomorfismo. Vamos aos detalhes.

**2.9.7 Construção de um mapa natural  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2) \rightarrow \mathbb{P}^5$ .** Considere os mapas de esquecimento e de avaliação na marca,

$$\begin{array}{ccc} \overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^2, 2) & \xrightarrow{\nu_1} & \mathbb{P}^2 \\ \varepsilon \downarrow & & \\ \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2) & & \end{array}$$

Obtemos assim um mapa  $\overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^2, 2) \rightarrow \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2) \times \mathbb{P}^2$ . Sua imagem é um divisor de Cartier  $\mathfrak{X} \subset \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2) \times \mathbb{P}^2$ . Conjuntistamente, é claro que a fibra de  $\mathfrak{X}$  sobre um ponto  $\mu \in \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  é a curva imagem de  $\mu$  (em geral uma cônica não degenerada). De fato,  $\mathfrak{X}$  é o espaço total de uma família *plana* sobre  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$ . Isto segue (cf. Kollár [32], 1.11) notando que a equação local de  $\mathfrak{X}$  em  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2) \times \mathbb{P}^2$  não é divisor de zero na fibra  $\mathbb{P}^2$ . Lembrando que  $\mathbb{P}^5$  parametriza a família universal de cônicas, obtemos o morfismo  $\kappa : \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2) \rightarrow \mathbb{P}^5$  que a cada  $\mu$  associa a sua imagem (seja ela uma cônica não degenerada ou par de retas).

### 2.9.8 A imagem inversa da Veronese $V$ é o divisor de Cartier $R$ .

Conjuntistamente, não há dúvida. Falta verificar que a imagem inversa esquemática não possui componentes imersas. Só há um lugar com perigo desse mau comportamento:  $\Sigma$ , a única órbita fechada da ação de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$  em  $R$ . Um truque para detectar tais singularidades é traçar um arco em  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  que passe por  $\Sigma$  e calcular os espaços tangentes, como ensinamos a seguir.

**2.9.9 Construção do arco em  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$ .** A técnica mais importante para construir um arco num espaço de módulos é via famílias a 1 parâmetro. No caso, dada uma família a 1 parâmetro  $S \rightarrow B \times \mathbb{P}^2$  de mapas estáveis (cf. 2.3) de grau 2 com base  $B$ , a propriedade de espaço de módulos grosseiro (cf. 2.3.2) garante a existência do mapa classificante  $B \rightarrow \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$ .

Partimos da família de cônicas  $bX^2 - b^2Y^2 - Z^2$  que tem como membro especial ( $b = 0$ ) uma reta dupla. Verifica-se que a família dual também tem uma reta dupla como limite.

Procurando a correspondente família de parametrizações como no exemplo 2.2.2, você descobre que é necessário fazer uma *mudança de base* da família, substituindo  $b$  por  $b^2$ . A família é então substituído por  $b^2X^2 - b^4Y^2 - Z^2$ ; as cônicas que aparecem na família são as mesma da família original, mas agora cada cônica aparece duas vezes, exceto o membro especial. Este só aparece uma vez, devido ao fato de  $b \mapsto b^2$  ser ramificado em  $b = 0$ . Em compensação, a nova família admite a seção dada por  $[b : 1 : 0]$ .

Isto nos habilita, como em 2.2.2, a achar uma família de parametrizações na forma

$$(b, t) \mapsto \begin{bmatrix} b(b^2 + t^2) \\ t^2 - b^2 \\ 2b^3t \end{bmatrix}.$$

Este mapa racional tem um ponto base  $(b, t) = (0, 0)$ , e o resto da fibra central

$F$  mapeia toda para o ponto  $[0 : 1 : 0]$ . Uma explosão resolve o mapa aqui, mas o divisor excepcional  $E_1$  adquire dois novos pontos base. ( $E_1$  mapeia toda para  $[0 : 1 : 0]$  também.) Explosão nesses dois pontos resolve, e o resultado são mais dois divisores excepcionais, sem pontos base, e esses dois divisores excepcionais mapeiam para a mesma reta ( $Z = 0$ ).

Em outras palavras, a fibra central virou uma curva com quatro galhos: os dois primeiros ( $F$  e  $E_1$ ) têm grau zero e desestabilizam a família. Falta fazer duas implosões, i.e., primeiro contrair  $F$  (que é uma  $(-1)$ -curva), e depois contrair também  $E_1$ , que virou uma  $(-2)$ -curva. Esta segunda implosão deixa o espaço total singular, mas isso não faz mal.

Temos agora uma família de mapas estáveis  $\tilde{S} \rightarrow B \times \mathbb{P}^2$ , e portanto um mapa  $B \rightarrow \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$ . Porém, como foi o caso da família das imagens  $b^2X^2 - b^4Y^2 - Z^2$ , cada mapa aparece duas vezes, ou seja  $B \rightarrow \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  é um recobrimento duplo de sua imagem, ramificado em  $b = 0$ . Mas então fatora

$$B \xrightarrow{b \rightarrow b^2} B \xrightarrow{\alpha} \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2),$$

onde  $\alpha$  é birracional sobre a imagem. O arco  $\alpha : B \rightarrow \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  será empregado para o cálculo de espaços tangentes. Composto com  $\kappa : \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2) \rightarrow \mathbb{P}^5$ , obtemos exatamente a nossa família original de cônicas,  $bX^2 - b^2Y^2 - Z^2$ .

Por que foi necessária então a mudança de base? Porque não existe uma família a 1 parâmetro de mapas estáveis cuja correspondente família de cônicas seja  $bX^2 - b^2Y^2 - Z^2$ . Porém o arco  $\alpha : B \rightarrow \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  existe e é assim testemunha do fato de que, em geral, uma subvariedade num espaço de módulos apenas grosseiro não necessariamente corresponde a uma família!

A construção feita acima é um exemplo da importante técnica de redução estável, muito bem explicada em Harris-Morrison [25], §3C.

**2.9.10 Lema.** *Seja  $Y$  uma variedade lisa e seja  $D \subset Y$  um subesquema de codimensão 1. Seja  $\eta : B \rightarrow Y$  um morfismo de uma curva não singular  $B$  tal que a imagem inversa esquemática  $\eta^{-1}D$  é um ponto reduzido  $0 \in B$ . Então  $D$  é liso no ponto  $p = \eta(0)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_{Y,p}$  o ideal do ponto  $p$  e seja  $I \subset \mathcal{O}_{Y,p}$  o ideal de  $D$ . Lembramos que o espaço tangente  $T_pY$  é dado por  $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ . O subespaço  $T_pD$  é o anulador de  $(I + \mathfrak{m}_p^2)/\mathfrak{m}_p^2$ . O espaço tangente  $T_pD$  é de codimensão  $\leq 1$  em  $T_pY$ . Se a desigualdade for estrita, então o ideal  $I$  está contido em  $\mathfrak{m}_p^2$ . Como  $\mathfrak{m}_p\mathcal{O}_{B,0} \subseteq \mathfrak{m}_0$ , segue que  $I\mathcal{O}_{B,0}$  está contido em  $\mathfrak{m}_0^2$ , contradizendo que a imagem inversa é reduzida.  $\square$

**2.9.11 Conclusão da demonstração de 2.9.4.** Vamos aplicar o lema ao arco  $\alpha$  construído acima, para mostrar que a imagem inversa da Veronese,  $\kappa^{-1}V$ , é lisa (e em particular, Cartier em  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$ ). Pelo lema, basta ver que  $\alpha^{-1}\kappa^{-1}V$  é reduzido. Como o ideal de  $V$  é gerado pelos menores 2 por 2 da matriz simétrica associada à cônica, é claro que sua imagem inversa em  $B$  é reduzida, dada pelo ideal gerado por  $b$ .  $\square$

## 2.10 Generalizações e referências

As construções e alguns dos resultados deste capítulo têm paralelos para curvas de gênero  $g > 0$ , e para variedades projetivas lisas no lugar de  $\mathbb{P}^r$ , mas a teoria é mais complicada.

**2.10.1 Variedades homogêneas.** Substituindo  $\mathbb{P}^r$  por uma variedade homogênea projetiva ou, mais geralmente por uma variedade *convexa*  $X$ , não traz muitos problemas.  $X$  é convexa se  $H^1(\mathbb{P}^1, \mu^*T_X) = 0$  para todo mapa  $\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ . A classe das variedades convexas inclui os espaços projetivos, grassmannianas, quádricas lisas, e produtos de tais variedades.

A principal diferença é que  $A_1(X)$  não mais necessariamente é gerado por um elemento só, como no caso  $\mathbb{P}^r$ , onde  $A_1(\mathbb{P}^r)$  é gerado pela classe de uma reta. Temos que considerar classes de curvas  $\beta \in A_1(X)$  em vez de apenas especificar o grau  $d$  como no caso de  $\mathbb{P}^r$ . Estudam-se então os espaços  $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$  parametrizando classes de isomorfismo de mapas  $\mu : C \rightarrow X$  tais que  $\mu_*[C] = \beta$ .

Não se sabe em geral se  $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$  é irredutível. Isto é conhecido apenas para variedades de bandeiras generalizadas, i.e. de tipo  $G/P$ , (cf. [41]).

**2.10.2 Variedades mais gerais.** Para variedades projetivas  $X$  mais gerais continua valendo que existe um espaço de módulos grosseiro  $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$ , ainda projetivo. Não precisa mais ser irredutível nem conexo, e pode ter componentes de dimensão maior que a esperada... Por exemplo, seja  $X$  o plano projetivo explodido num ponto, e seja  $\beta = [E + L]$  a classe do divisor excepcional mais uma reta. Não existem curvas irredutíveis desta classe, logo  $M_{0,n}(X, \beta)$  é vazio! Mas a “compactificação”  $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$  não é vazia, e todos os mapas nela têm domínio redutível.

**2.10.3 Gênero positivo.** As complicações nos casos de gênero positivo incluem todas as descritas no fim do capítulo anterior, já que curvas de mesmo

gênero não são necessariamente isomorfas; curvas redutíveis não necessariamente são árvores, etc. Continua valendo que existe o espaço de módulos grosseiro, ainda projetivo. Mas com  $g \geq 1$  ocorrem fenômenos parecidos com o caso  $X$  não-convexa: mesmo o espaço  $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$  não é mais irreduzível nem conexo, e pode ter componentes de dimensão maior que esperada. . .

**2.10.4 Classe fundamental virtual.** Existem hoje teorias que lidam com esses problemas, introduzindo uma classe fundamental *virtual* para usar em vez de  $[\overline{M}_{g,n}(X, \beta)]$ . Isto é, se a dimensão esperada de  $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$  é igual a  $s$ , então a classe fundamental virtual vive em  $A_s(\overline{M}_{g,n}(X, \beta))$ . A construção desta classe é muito técnica e depende de teoria de deformação e obstruções, e se expressa mais naturalmente na linguagem de pilhas. O leitor interessado é referido ao trabalho original de Behrend e Fantechi [6].

**2.10.5 Pilhas!** O conceito de *pilha* (inglês: *stack*, francês: *champ*) é uma generalização da noção de esquema, que incorpora a informação de todos os possíveis automorfismos que possui um objeto.

Esta linguagem, apesar de ser abstrata e requerer familiaridade com teoria de categorias, é conveniente para tratar de questões de módulos. Considerada como uma pilha,  $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$  é lisa, e admite uma família universal que se identifica naturalmente com  $\overline{M}_{g,n+1}(X, \beta)$ .

Muitos dos problemas e fenômenos peculiares ligados à presença de automorfismos que vivenciamos na seção 2.6 e na construção de famílias para  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$  na seção 2.9 são mais naturalmente descritos na linguagem de pilhas. Arriscamo-nos com a seguinte comparação. Estudar famílias de curvas na linguagem de variedades requer malabarismos para tratar de fibras não reduzidas. Estas possuem estrutura que não cabe na noção de variedade, mas é tratada com clareza na linguagem mais abstrata de esquemas. De certa forma, para o estudo de espaços de módulos onde aparecem objetos com automorfismos — estrutura que não é bem capturada no contexto de esquemas — a linguagem de pilhas é mais adequada.

As notas de Edidin [13] são uma boa introdução à teoria de módulos de curvas que adota a linguagem de pilhas.

**2.10.6 Leituras.** O leitor pode (deve?) estudar os detalhes da construção do espaço  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  (ou mais geralmente,  $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$ , com  $X$  convexa) nas primeiras seis seções de FP-NOTES. Porém, muita e boa geometria pode ser feita assumindo a existência e as propriedades de  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ .

Recomendamos o excelente e acessível artigo de Pandharipande [38]. Primeiro é dada uma descrição de geradores naturais para o grupo de Picard  $\text{Pic}(\overline{M}) \otimes \mathbb{Q}$ . Em geral,  $\text{Pic}(\overline{M}) \otimes \mathbb{Q}$  é gerado por todos os divisores de fronteira juntamente com os divisores  $\nu_i^*(H)$  (imagem recíproca da classe hiperplana  $H$ ). Para  $n \geq 3$ , essas imagens recíprocas podem ser substituídas pelo divisor de incidência  $\text{inc}(H^2) = \varepsilon_* \nu_{n+1}^*(H^2)$  (cf. 2.6.4).

Em seguida, famílias a 1 parâmetro são exploradas de forma sistemática para expressar a classe de vários divisores de significado geométrico em termos desses geradores. Resulta um algoritmo para calcular números característicos de curvas racionais em  $\mathbb{P}^r$  (cf. 3.4.2).

Mencionamos por fim recentes artigos de Vakil [44] e [45] que tratam dos espaços  $\overline{M}_{g,0}(\mathbb{P}^2, d)$  para  $g = 1, 2, 3$ , usando técnicas parecidas com as de [38].



# Capítulo 3

## Geometria enumerativa via mapas estáveis

Este capítulo apresenta o uso da maquinaria dos espaços de mapas estáveis para uma demonstração da fórmula de Kontsevich. Na primeira seção fazemos um resumo de abordagens clássicas.

### 3.1 Geometria enumerativa clássica

**3.1.1 O princípio da conservação do número.** Abordagens clássicas de questões enumerativas frequentemente empregavam o “princípio da conservação do número”. Grosso modo, supunha-se que o número de soluções de um problema de contagem de configurações permaneceria constante ao se especializar para posições particulares as condições “genéricas” impostas.

Um exemplo típico é a determinação do número de retas em  $\mathbb{P}^3$  incidentes a quatro retas  $l_1, \dots, l_4$  em posição geral. Especializando as retas de maneira que  $l_1, l_2$  se interceptem num ponto  $p$  e  $l_3, l_4$  se interceptem noutro ponto  $q$ , vemos que há exatamente duas soluções: a reta  $\overline{pq}$  e a reta de interseção dos dois planos  $\langle l_1, l_2 \rangle$  e  $\langle l_3, l_4 \rangle$ .

Naturalmente é preciso justificar tanto a conservação do número de soluções como a não interferência de multiplicidades. A necessidade de uma revisão crítica dos métodos e resultados da escola enumerativa clássica levaram Hilbert a incluir — como o décimo quinto problema de sua famosa lista legada no virar do século XIX — a questão dos limites de validade dos resultados de Schubert e sua escola. Veja o artigo de Kleiman [29].

**3.1.2 Teoria da interseção.** As abordagens pós-clássicas mais populares consistem na aplicação de métodos bem estabelecidos de Teoria da Interseção a espaços de parâmetros adequados para cada problema. No exemplo acima, podemos trabalhar na grassmanniana  $\text{Gr}(1, \mathbb{P}^3)$  de retas de  $\mathbb{P}^3$ . O mergulho de Plücker realiza  $\text{Gr}(1, \mathbb{P}^3)$  como uma hipersuperfície quádrlica em  $\mathbb{P}^5$ . A condição de incidência à reta  $\ell_i$  é dada pela interseção da quádrlica  $\text{Gr}(1, \mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^5$  com seu hiperplano tangente no ponto  $\ell_i$ . A interseção dos quatro hiperplanos é uma reta em  $\mathbb{P}^5$  que ou bem intersecta  $\text{Gr}(1, \mathbb{P}^3)$  em dois pontos (possivelmente coincidentes) ou fica lá inteiramente contida.

**3.1.3 Exemplo.** *Quantas cônicas em  $\mathbb{P}^2$  passam por 5 pontos em posição geral?* O método clássico para resolver essa questão nos leva ao espaço  $\mathbb{P}^5$  que parametriza a família de cônicas. Associa-se a cada cônica os coeficientes de sua equação (a menos de fator constante). A condição de passar por um ponto descreve um hiperplano em  $\mathbb{P}^5$ . É fácil se convencer de que a interseção de cinco tais hiperplanos fornece exatamente uma única solução esperada.

A mesma argumentação vale para o caso de cúbicas planas por 9 pontos ou mais geralmente, curvas planas de grau  $d$  por  $d(d+3)/2$  pontos.

**3.1.4 Exemplo.** A situação muda quando nos perguntamos quanto ao número de cúbicas planas *racionais*. Uma cúbica plana racional é necessariamente singular. As cúbicas racionais formam a hipersuperfície discriminante  $D$  em  $\mathbb{P}^9$ . A questão pertinente é sobre o número de cúbicas racionais passando por 8 pontos. Desta vez, devemos intersectar  $D$  com oito hiperplanos, cada um correspondente à condição de passar por um ponto. A resposta é 12, o grau da hipersuperfície  $D$ . O discriminante é uma caso particular da variedade dual. O grau pode ser calculado como em [18].

Uma argumentação topológica para o cálculo é em linhas gerais a seguinte. Queremos o número de pontos de interseção de  $D$  com uma reta genérica de  $\mathbb{P}^9$ . Esta é dada por um feixe de cúbicas  $\{t_1 F_1 + t_2 F_2\}_{[t_1, t_2] \in \mathbb{P}^1}$ , onde  $F_1, F_2$  são duas cúbicas gerais. Explodindo os nove pontos de interseção dessas duas cúbicas, obtemos uma superfície  $S$  e um mapa  $t : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  que estende o mapa racional  $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  definido pelo feixe.

$$\begin{array}{ccc}
 & S & \\
 \pi \swarrow & & \searrow t \\
 \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

A fibra de  $t$  sobre  $[t_1 : t_2] \in \mathbb{P}^1$  é isomorfa à curva dada por  $t_1F_1 + t_2F_2$  desde que nenhum dos nove pontos-base seja singularidade. Temos assim cúbicas em geral não singulares e um número finito de cúbicas singulares, cujo número queremos calcular. Seja  $\Sigma \subset \mathbb{P}^1$  o conjunto dos pontos com fibras singulares. A restrição de  $t$  sobre  $U = \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$  é uma fibração, com fibra uma curva elítica (um toro  $\mathbb{T}$ ). Usando propriedades da característica de Euler topológica, podemos calcular

$$\begin{aligned}\chi(S) &= \chi(\mathbb{P}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_9\}) + 9 \chi(\mathbb{P}^1) \\ &= 3 - 9 + 18 = 12 \\ &= \chi(t^{-1}U) + \chi(t^{-1}\Sigma) \\ &= \chi(\mathbb{T}) \cdot \chi(U) + \text{contribuição das fibras singulares.}\end{aligned}$$

A primeira parcela da última expressão vale zero ( $=\chi(\mathbb{T})$ ). Para um feixe genérico, cada fibra singular é uma cúbica nodal, para a qual  $\chi$  vale exatamente 1. Veja o artigo de Caporaso [8], para outras maneiras de calcular especificamente este número.

**3.1.5 Grau maior.** Aumentando o grau, a situação fica mais complicada. Lembre a fórmula do gênero de uma curva plana nodal,

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta,$$

onde  $\delta$  é o número de nós. Portanto, para ter curvas racionais devemos impor  $(d-1)(d-2)/2$  nós. É um fato que cada nó é uma condição de codimensão 1; ou seja, no espaço projetivo  $\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$  de todas as curvas de grau  $d$ , as que são racionais formam uma subvariedade  $\overline{V}_0^d$  de dimensão

$$\begin{aligned}\dim V_0^d &= d(d+3)/2 - (d-1)(d-2)/2 \\ &= 3d - 1\end{aligned}$$

Para chegar a um número finito de curvas devemos então impor a condição de passar por  $3d - 1$  pontos gerais.

**Definição.** Denote por  $N_d$  o número de curvas racionais de grau  $d$  que passam por  $3d - 1$  pontos em posição geral.

Esse número pode ser caracterizado também como o grau de  $\overline{V}_0^d$ .

**3.1.6 Exemplo.** Para quárticas racionais, no espírito do exemplo de cúbicas racionais, devemos calcular o grau da subvariedade  $\overline{V}_0^4 \subset \mathbb{P}^{14}$  que corresponde às curvas com 3 pontos singulares. Isto ainda pode ser feito com o método clássico; de fato, o número  $N_4 = 620$  foi determinado por Zeuthen [48] em 1873. Para quárticas racionais, há que se impor 6 (= gênero) pontos duplos, e o número  $N_5 = 87304$  foi determinado apenas em tempos recentes. Foi calculado explicitamente em [43]; anteriormente, Ran [39] tinha indicado uma recursão que forneceria, em princípio, o número  $N_d$  para qualquer  $d$ .

**3.1.7 Variedades de Severi.** A variedade  $\overline{V}_0^d$  é um exemplo de uma *variedade de Severi*. Mais geralmente você pode estudar a variedade  $V^{d,\delta}$  de todas as curvas irredutíveis de grau  $d$  e com  $\delta \leq (d-1)(d-2)/2$  pontos duplos. O problema da determinação do seu grau foi resolvido recentemente, veja Caporaso-Harris [9] e Ran [39].

**3.1.8 Parametrizações.** O artigo de Kontsevich e Manin [33] trouxe, de forma cristalina, a relação explícita 3.3.1, que determina todos os números  $N_d$ . A abordagem adotada por Kontsevich muda o foco: em vez de caracterizar uma curva por sua equação (um ponto de uma variedade de Severi), estuda suas parametrizações. O resultado é obtido por uma interseção adequada no espaço de módulos  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$  em vez de  $\overline{V}_0^d$  (como veremos na prova do teorema 3.3.1). Observe que  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, d)$  e  $\overline{V}_0^d$  são birracionalmente isomorfos: ambos são compactificações do aberto  $V_0^d$  das curvas racionais irredutíveis e reduzidas.

Como veremos na seção seguinte, a fórmula é uma consequência da estrutura recursiva da fronteira dos espaços  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ .

## 3.2 Contando cônicas e cúbicas racionais via mapas estáveis

Para ver como funciona a recursão, calculemos inicialmente o número de cônicas passando por cinco pontos em posição geral, e em seguida, o número de cúbicas racionais por oito pontos.

O método reduz a questão para o caso de grau menor, e o ponto de partida é simplesmente o seguinte:

**3.2.1 Fato.** Por dois pontos distintos passa uma única reta. Ou seja:  $N_1 = 1$ .

**3.2.2 Proposição.** *Existe exatamente  $N_2 = 1$  cônica passando por 5 pontos gerais no plano.*

*Demonstração.* O cálculo é feito em  $\overline{M}_{0,6}(\mathbb{P}^2, 2)$ , uma variedade de dimensão onze. Vamos usar os símbolos  $m_1, m_2, p_1, \dots, p_4$  para indicar as marcas. Escolha em  $\mathbb{P}^2$  duas retas  $L_1, L_2$  e quatro pontos  $Q_1, \dots, Q_4$ , tudo em posição geral. Daqui a pouco discutiremos essa condição.

Seja  $Y \subset \overline{M}_{0,6}(\mathbb{P}^2, 2)$  o subconjunto consistindo nos mapas

$$(C; m_1, m_2, p_1, \dots, p_4; \mu) \text{ tais que } \begin{cases} \mu(m_1) \in L_1 \\ \mu(m_2) \in L_2 \\ \mu(p_i) = Q_i, \quad i = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

$Y$  é de fato uma subvariedade, dada pela interseção de seis imagens inversas por mapas de avaliação:

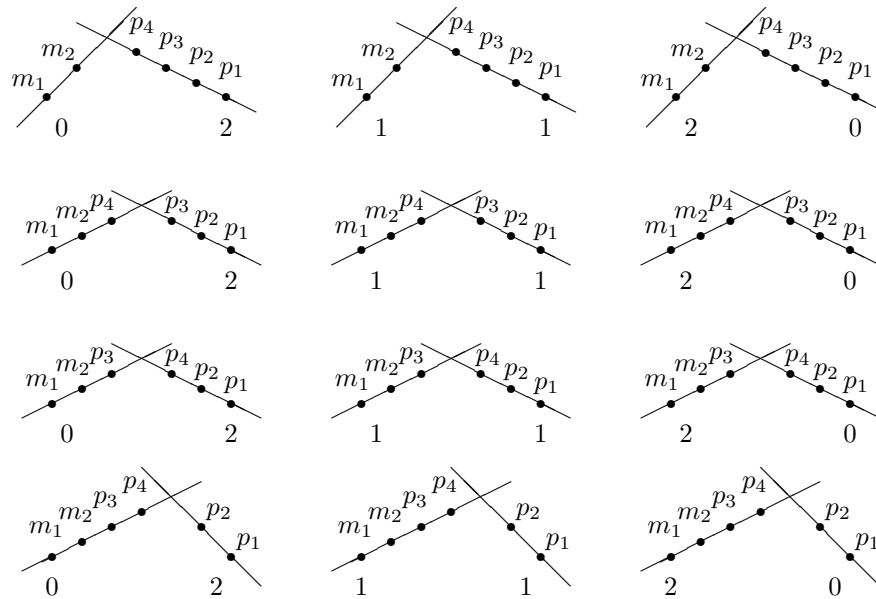
$$Y = \nu_{m_1}^{-1}(L_1) \cap \nu_{m_2}^{-1}(L_2) \cap \nu_{p_1}^{-1}(Q_1) \cap \dots \cap \nu_{p_4}^{-1}(Q_4).$$

Escolhendo as retas e pontos de forma suficientemente geral, mostra-se também que  $Y$  é uma curva. De fato, a imagem inversa de uma reta é de codimensão 1, e a imagem inversa de um ponto é de codimensão 2. Portanto, no total a interseção é de codimensão 10. Vamos calcular a interseção de  $Y$  com divisores de fronteira. Por um argumento de tipo Bertini, é possível também garantir, com a genericidade da escolha dos pontos e retas em  $\mathbb{P}^2$ , que  $Y$  intersecte os divisores de fronteira transversalmente. É necessário saber igualmente que tudo se passa na parte *livre de automorfismo*  $\overline{M}_{0,6}^*(\mathbb{P}^2, 2) \subset \overline{M}_{0,6}(\mathbb{P}^2, 2)$ .

Considere o mapa  $\overline{M}_{0,6}(\mathbb{P}^2, 2) \rightarrow \overline{M}_{0,\{m_1, m_2, p_1, p_2\}}$  que esquece o mapa  $\mu$  e também as duas marcas  $p_3, p_4$ . A equivalência fundamental 2.7.6.1 nos fornece

$$Y \cap D(m_1, m_2 | p_1, p_2) \equiv Y \cap D(m_1, p_1 | m_2, p_2). \quad (3.2.2.1)$$

Vamos olhar primeiro o divisor de fronteira especial do lado esquerdo,  $D(m_1, m_2 | p_1, p_2) = \sum D(A, B; d_A, d_B)$ . Temos 12 termos nessa soma; as 12 componentes irredutíveis do divisor correspondem aos tipos combinatórios desenhados abaixo. A curva com os  $A$ -pontos é sempre desenhada à esquerda. Os números junto às curvas são os graus parciais  $d_A$  (à esquerda) e  $d_B$  (à direita):



Vamos calcular agora a interseção de  $Y$  com cada um desses divisores de fronteira. Na primeira coluna temos  $d_A = 0$ . Isto quer dizer que a curva  $C_A$  vai toda sobre um só ponto  $z \in \mathbb{P}^2$ . Lembrando que  $m_1$  mapeia em  $L_1$  e  $m_2$  em  $L_2$ , deduzimos que  $\{z\} = L_1 \cap L_2$ . Suponha agora que existam mais marcas em  $C_A$ , (ou seja, estamos considerando um dos três últimos divisores na primeira coluna): então essas marcas também iriam para  $z$ , contradizendo assim a hipótese de posição geral das retas e pontos. Isto mostra que  $Y$  tem interseção vazia com os três últimos divisores na primeira coluna. Quanto ao primeiro caso, devemos mapear  $C_B$  em uma cônica, e uma vez fixada essa cônica, não há mais escolhas a fazer para as marcas, pois o ponto de interseção  $x \in C_A \cap C_B$  mapeia em  $z$  e os outros quatro pontos vão nos  $Q_i$ 's. O número de maneiras de traçar uma cônica pelos cinco pontos é precisamente  $N_2$ . Logo o número que estamos procurando aparece exatamente aqui na soma.

Na terceira coluna, temos  $d_B = 0$ . Isto significa que  $C_B$  mapeia a um ponto. Mas isso é impossível por conta das condições que definem  $Y$ : duas das marcas teriam que ir para o mesmo ponto em  $\mathbb{P}^2$ . Portanto não há qualquer contribuição dessa coluna.

Na segunda coluna,  $d_A = d_B = 1$ . Assim, cada curva é mapeada numa reta. Nos três primeiros casos temos três marcas em  $C_B$ . Elas teriam que ir todas na mesma reta, e os pontos imagens seriam então colineares, contradizendo o requerimento de generalidade. Logo, só o último divisor dá alguma contribuição. Aqui  $C_A$  e  $C_B$  são mapeados em retas distintas (senão apareceria

um bocado de pontos colineares...): a reta  $\mu(C_B)$  é unicamente determinada pois existe só  $N_1 = 1$  reta por  $Q_1$  e  $Q_2$ . No que toca as possíveis maneiras de mapear nesta reta, note que já foi fixado onde as duas marcas  $p_1$  e  $p_2$  vão; além disso, o ponto de interseção  $x$  deve ir no ponto de interseção  $\mu(C_A) \cap \mu(C_B)$  das imagens. Isso perfaz três pontos com destinação conhecida, donde não há mais sobra para qualquer escolha. Analogamente, existe só  $N_1 = 1$  maneira de mapear  $C_A$  em sua reta imagem. Note que as imagens dos dois pontos  $m_1$  e  $m_2$  estão bem determinadas, pois eles devem ser enviados nas interseções  $\mu(C_A) \cap L_1$  e  $\mu(C_A) \cap L_2$ , respectivamente. Portanto, no total, a interseção de  $Y$  com esse divisor é só 1 ponto.

Somando as interseções com todas as componentes de  $D(m_1, m_2 | p_1, p_2)$ , encontramos

$$Y \cap D(m_1, m_2 | p_1, p_2) = N_2 + 1.$$

Em seguida, calculamos a interseção de  $Y$  com o divisor  $D(m_1, p_1 | m_2, p_2)$ . Poderíamos novamente desenhar todas as 12 componentes desse divisor, mas é desnecessário. Como existe um  $p_j$  e um  $m_i$  em cada galho, não podemos ter qualquer grau parcial  $d_k = 0$ : isto forçaria  $Q_j \in L_i$ , contradizendo a generalidade dos  $L_j, Q_j$ . Logo nos resta apenas  $d_A = d_B = 1$ . Aqui, as duas únicas possibilidades são  $p_3$  em um galho e  $p_4$  no outro. Em cada caso achamos uma reta pelos dois pontos, seguindo

$$Y \cap D(m_1, p_1 | m_2, p_2) = 1 + 1.$$

Assim a equação 3.2.2.1 se reduz a  $N_2 + 1 = 1 + 1$ , e  $N_2 = 1$ .  $\square$

**3.2.3 Proposição.** *Existem exatamente  $N_3 = 12$  cúbicas racionais passando por 8 pontos gerais.*

*Demonstração.* A linha de argumentação é exatamente a mesma do caso de cônicas; apenas um pouco mais de cuidado é necessário para determinar os coeficientes.

Desta vez vamos nos situar em  $\overline{M}_{0,9}(\mathbb{P}^2, 3)$ , um espaço de dimensão 17. Escrevamos as marcas  $m_1, m_2, p_1, \dots, p_7$ , e tomemos o mapa de esquecimento para  $\overline{M}_{0,4}$  que despreza os pontos  $p_3, \dots, p_7$ . Fixe duas retas  $L_1, L_2$  e sete pontos  $Q_1, \dots, Q_7$  em posição geral em  $\mathbb{P}^2$ . Seja  $Y \subset \overline{M}_{0,9}(\mathbb{P}^2, 3)$  a curva definida por

$$Y = \nu_{m_1}^{-1}(L_1) \cap \nu_{m_2}^{-1}(L_2) \cap \nu_{p_1}^{-1}(Q_1) \cap \dots \cap \nu_{p_7}^{-1}(Q_7).$$

Pode-se garantir que  $Y$  corta os divisores de fronteira transversalmente e está inteiramente contida no lugar de mapas livres de automorfismos (cf. 4.1.2).

A relação  $Y \cap D(m_1, m_2 | p_1, p_2) \equiv Y \cap D(m_1, p_1 | m_2, p_2)$  vai nos revelar uma expressão de  $N_3$  em termos de  $N_2$  e  $N_1$ .

Calculemos primeiramente a interseção de  $Y$  com  $D(m_1, m_2 | p_1, p_2)$ . Este divisor tem 128 componentes irredutíveis! De fato, temos mais cinco pontos para distribuir nos dois galhos; o número de partições ordenadas  $A \cup B = [5]$  é igual a 32, que então multiplicamos pelo número 4 de partições  $d_A + d_B = 3$ . Como no caso de cônicas, vamos examinar cada um desses divisores  $D(A, B; d_A, d_B)$  segundo a partição  $d_A + d_B = 3$ .

Se  $d_B = 0$ , a curva  $C_B$  vai toda num ponto. Isto é absurdo, pois ela tem pontos mapeando para  $Q_i$ 's distintos. Logo a interseção de  $Y$  com cada divisor de fronteira onde  $d_B = 0$  é vazia. Se  $d_A = 0$ , então, como no caso de cônicas, a curva  $C_A$  vai toda ao ponto  $z \in L_1 \cap L_2$ . Percebemos que as escolhas de  $C_B$  correspondem às maneiras de traçar uma cúbica pelos 8 pontos  $z, Q_1, \dots, Q_7$ . Portanto, o termo  $N_3$  aparece nesse estágio da soma.

Vejamos os casos com  $d_A = 1$ . Somente se pusermos 2 pontos em  $C_A$  e mais 3 pontos em  $C_B$  é que não nos atrapalharemos com o requerimento de posição geral. Realmente, mais do que 2 pontos extras em  $C_A$  implicaria mais que 2 pontos colineares na reta imagem de  $C_A$ ; mais que 3 pontos extras em  $C_B$  daria mais que 5 pontos na cônica imagem  $\mu(C_B)$ , igualmente contradizendo a generalidade. Temos agora  $\binom{5}{2} = 10$  modos para distribuir os 5 pontos restantes, e assim estamos cuidando simultaneamente de 10 componentes; isso dá um coeficiente 10. Para cada uma dessas componentes, existe uma só escolha para o mapa de  $C_A$  em  $\mathbb{P}^2$ . Com efeito, ele vai a uma a reta, tem duas marcas, e também os destinos dos pontos  $m_1, m_2$  são bem determinados pois há um só ponto de interseção  $\mu(C_A) \cap L_i$ . Para  $C_B$  temos que estimar as possibilidades de mapear sobre uma cônica. A imagem do ponto de interseção  $x \in C_A \cap C_B$  pode ser tomada como um dos dois pontos em  $\mu(C_A) \cap \mu(C_B)$ . Fixado o destino de  $x$ , não sobram mais escolhas: de fato, ficamos com o problema de desenhar uma cônica por 5 pontos dados, justamente o número calculado anteriormente. Logo, a contribuição dos 10 divisores com  $d_A = 1$  é

$$10 \cdot N_1 \cdot 2 \cdot N_2 = 20.$$

Vejamos agora o caso  $d_A = 2$ . Novamente argumentando com a generalidade das escolhas das retas e pontos, deduzimos que apenas quando os cinco pontos restantes caírem em  $C_A$  ganhamos alguma contribuição. Portanto,

estamos agora na situação em que existe só uma componente irredutível a considerar. Note que há duas escolhas para onde mandar  $x$ . Cada escolha fixa tudo para  $C_B$ . Quanto a  $C_A$ , a cônica imagem é fixada por cinco pontos ( $N_2 = 1$ ). Agora para o ponto  $m_1$  há duas escolhas: cada um dos dois pontos de interseção em  $L_1 \cap \mu(C_A)$ . O mesmo se dá para  $m_2$ . Isso faz aparecer mais um fator  $2^2$ , fazendo o coeficiente total valer 8.

Resumindo, achamos

$$Y \cap D(m_1, m_2 | p_1, p_2) = N_3 + 20 + 8.$$

Cuidemos agora dos pontos de interseção de  $Y$  com o outro divisor de fronteira especial,  $D(m_1, p_1 | m_2, p_2)$ . Agora temos  $m_1, p_1 \in A$  e  $m_2, p_2 \in B$ . Existindo tanto um  $m$  como um  $p$  em cada galho, não há qualquer possibilidade com  $d_A = 0$  nem  $d_B = 0$ . Se  $d_A = 1$  então tem que ocorrer exatamente 1 ponto adicional em  $C_A$ . Há 5 maneiras de escolher esse ponto entre os pontos restantes  $p_3, \dots, p_7$ . Estamos assim considerando 5 componentes irredutíveis aqui. As duas curvas estão agora determinadas:  $C_A$  é a reta por 2 pontos,  $C_B$  é a cônica por 5 pontos. Para o ponto de interseção  $x$  há duas maneiras, e para  $m_2$  são também duas. Total:  $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$ . A situação é simétrica quando  $d_A = 2$  porque então  $d_B = 1$ . Assim temos outros 20 mapas, e totalizamos  $Y \cap D(m_1, p_1 | m_2, p_2) = 20 + 20$ .

Por fim, como os dois divisores de fronteira especiais são equivalentes, podemos escrever

$$N_3 + 20 + 8 = 20 + 20,$$

donde  $N_3 = 12$  como afirmado. □

### 3.3 A fórmula de Kontsevich para curvas planas racionais

**3.3.1 Teorema. (Kontsevich)** *Seja  $N_d$  o número de curvas planas racionais irredutíveis passando por  $3d - 1$  pontos gerais. Então vale a seguinte relação recursiva:*

$$N_d + \sum_{\substack{d_A + d_B = d \\ d_A \geq 1, d_B \geq 1}} \binom{3d-4}{3d_A-1} d_A^2 N_{d_A} \cdot N_{d_B} \cdot d_A d_B = \sum_{\substack{d_A + d_B = d \\ d_A \geq 1, d_B \geq 1}} \binom{3d-4}{3d_A-2} d_A N_{d_A} \cdot d_B N_{d_B} \cdot d_A d_B$$

Como conhecemos  $N_1 = 1$ , a fórmula calcula todos os  $N_d$ .

*Demonstração.* Ponha  $n := 3d$ , e considere  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$ , com as marcas denotadas por  $m_1, m_2, p_1, \dots, p_{n-2}$ . Sejam  $L_1$  e  $L_2$  retas em  $\mathbb{P}^2$ , e sejam  $Q_1, \dots, Q_{n-2}$  pontos em  $\mathbb{P}^2$ . Considere  $Y \subset \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$  definido como a interseção das imagens inversas dessas retas e pontos pelos mapas de avaliação. Essas escolhas podem ser feitas de modo que  $Y$  seja uma curva que intersecta os divisores de fronteira transversalmente e cai no lugar livre de automorfismos (cf. 4.1.2).

A exemplo dos casos  $d = 2, 3$  vistos acima, a equação enunciada seguirá da equivalência fundamental,

$$Y \cap D(m_1, m_2 | p_1, p_2) \equiv Y \cap D(m_1, p_1 | m_2, p_2).$$

Vamos examinar o lado esquerdo. A única contribuição com um grau parcial igual a zero provém do caso em que todos os  $3d - 4$  pontos adicionais caem no  $B$ -galho, e isso fornece exatamente o número  $N_d$ . Quando os graus parciais são não nulos, a única distribuição de pontos dando alguma contribuição é quando  $3d_A - 1$  pontos caem no  $A$ -galho. Existem  $\binom{3d-4}{3d_A-1}$  tais componentes irredutíveis em  $D(m_1, m_2 | p_1, p_2)$ , assim justificando o fator binomial na fórmula. Agora há  $N_{d_A}$  maneiras de traçar a imagem de  $C_A$  e  $N_{d_B}$  maneiras de traçar a imagem de  $C_B$ , e isso determina o destino de todos os  $p_i$ 's. Resta escolher onde vão as duas marcas  $m_1$  e  $m_2$ . A marca  $m_1$  tem que cair num ponto de interseção de  $\mu(C_A)$  e  $L_1$ , e por Bézout temos  $d_A$  à nossa disposição; mesma coisa para  $m_2$ . Isso dá conta do fator  $d_A^2$  na fórmula. Finalmente, o ponto de interseção  $x \in C_A \cap C_B$  deve ir num dos  $d_A \cdot d_B$  pontos de interseção das curvas imagens (novamente Bézout). Isso fornece o fator  $d_A d_B$  e completa o exame do lado esquerdo da equação.

No lado direito, não há contribuição se  $d_A$  ou  $d_B$  é zero: isso forçaria  $Q_1 \in L_1$  ou  $Q_2 \in L_2$ , argumentando como nos exemplos acima. Para as outras partições  $d_A + d_B = d$ , a única contribuição vem de componentes com  $3d_A - 2$  mais pontos no  $A$ -galho, e existem  $\binom{3d-4}{3d_A-2}$  tais componentes. Para qualquer uma dessas componentes, as curvas imagens  $\mu(C_A)$  e  $\mu(C_B)$  podem ser escolhidas de  $N_{d_A}$  e  $N_{d_B}$  maneiras respectivamente. O ponto  $m_1$  tem que ir em  $\mu(C_A) \cap L_1$ , dando  $d_A$  escolhas, e similarmente  $m_2$  permite  $d_B$  escolhas. Por fim,  $x$  tem que ser enviado a um dos  $d_A d_B$  pontos de  $\mu(C_A) \cap \mu(C_B)$ . Isto completa a prova.  $\square$

## 3.4 Generalizações e referências

**3.4.1 Dimensão maior.** Embora seja possível aplicar a curvas racionais em  $\mathbb{P}^3$  argumentos *ad hoc* similares aos indicados nos exemplos acima, não é aconselhável. As técnicas de cohomologia quântica descritas nos dois próximos capítulos fornecerão uma simplificação computacional (e talvez conceitual) considerável.

A fórmula de Kontsevich admite generalizações para espaços projetivos de dimensão maior, e para outras variedades homogêneas. Porém nesses casos não consiste em apenas *uma* mas *várias* relações recursivas. Tais fórmulas são estabelecidas usando a maquinaria dos invariantes de Gromov-Witten desenvolvida no capítulo seguinte.

**3.4.2 Condições de tangência e números característicos.** A condição de uma curva tangenciar uma dada reta  $L \subset \mathbb{P}^2$  é uma condição de codimensão 1, ou seja, define em  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$  (ou em  $\overline{V}_0^d$ ) um divisor. Os *números característicos* de um sistema de curvas planas são definidos como o número de curvas (racionais, por exemplo) de grau  $d$  passando por  $a$  pontos e tangenciando  $b$  retas. Se o sistema é a família das curvas racionais de grau  $d$ , devemos impor  $a + b = 3d - 1$  para a pergunta ter interesse.

Os números característicos para  $d = 2, 3, 4$  foram calculados no século passado por Chasles, Maillard e Zeuthen, respectivamente, e a verificação dos resultados tem sido um desafio para a geometria enumerativa moderna. Muitos dos números foram verificados com rigor na década de 80, usando várias compactificações engenhosas das variedades de Severi abertas.

Com o advento dos espaços de Kontsevich, uma solução mais sistemática do problema parece estar ao alcance. Pelo menos para curvas racionais, o problema foi resolvido por Pandharipande em [38]: ele calcula a classe do divisor de tangência e constrói um algoritmo que permite determinar todos os números característicos, para qualquer grau. O passo chave do algoritmo é a estrutura recursiva da fronteira.

**3.4.3 Gênero 1.** Existe uma fórmula recursiva também para os números  $E_d$  de curvas de gênero 1 e grau  $d$  que passam por um número adequado de pontos em  $\mathbb{P}^2$  (cf. por exemplo Pandharipande [37]).

Partindo desta recursão, Vakil [45] estendeu as idéias de Pandharipande [38] para determinar também os números característicos para curvas de gênero 1. Ele identifica a componente boa de  $\overline{M}_{1,0}(\mathbb{P}^2, d)$  (que é um espaço desconexo,

cf. 2.10.3), descreve sua fronteira, e dá uma receita de como reduzir questões de tangências às de incidência, cujos números  $E_d$  são conhecidos.

**3.4.4 Quárticas planas.** Mencionamos por fim que, para quárticas planas ( $g = 3$ ), Vakil [44] verificou todos os números característicos determinados por Zeuthen [48]. A análise é feita na normalização da componente boa de  $\overline{M}_{3,0}(\mathbb{P}^2, 4) \dots$

# Capítulo 4

## Invariantes de Gromov-Witten

Vamos formalizar os argumentos de transversalidade usados na demonstração da fórmula de Kontsevich e nos dois exemplos que a antecederam. Isto nos levará naturalmente à noção dos invariantes de Gromov-Witten.

Em todo este capítulo assumiremos por simplicidade que  $r \geq 2$ .

### 4.1 Significado enumerativo

**4.1.1 Notação.** Introduziremos inicialmente algumas abreviações. Escrevemos  $\overline{M} := \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ , e denotamos por  $p_1, \dots, p_n$  as marcas de um mapa  $\mu$ . Ponha  $X := \mathbb{P}^r$ . Seja  $X^n = X \times \dots \times X$  o produto de  $n$  fatores iguais a  $X$  e seja  $\tau_i : X^n \rightarrow X$  a  $i$ -ésima projeção. Dadas  $n$  subvariedades irredutíveis  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \subset X$ , denotamos por  $\underline{\Gamma}$  seu produto:

$$\underline{\Gamma} := \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n = \bigcap \tau_i^{-1}(\Gamma_i) \subseteq X^n.$$

Os  $n$  mapas de avaliação  $\nu_i : \overline{M} \rightarrow X$  induzem um mapa para  $X^n$  que vamos denotar por  $\underline{\nu} : \overline{M} \rightarrow X^n$ . Isto é, para cada  $i = 1, \dots, n$  temos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \overline{M} & \xrightarrow{\underline{\nu}} & X^n \\ & \searrow \nu_i & \swarrow \tau_i \\ & X & \end{array}$$

A imagem inversa  $\nu_i^{-1}(\Gamma_i) \subset \overline{M}$  consiste em todos os mapas  $\mu$  tais que  $\mu(p_i) \in \Gamma_i$ . Se  $k_i$  é a codimensão de  $\Gamma_i$  em  $\mathbb{P}^r$ , então  $\nu_i^{-1}(\Gamma_i)$  tem a mesma codimensão  $k_i$  em  $\overline{M}$ , por planitude (2.5.1). A interseção (como esquemas)

$$\nu_1^{-1}(\Gamma_1) \cap \cdots \cap \nu_n^{-1}(\Gamma_n) = \underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})$$

é o lugar dos mapas  $\mu$  tais que  $\mu(p_i) \in \Gamma_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Em particular, a imagem de cada um desses mapas  $\mu$  encontra  $\Gamma_i$ .

Mais interessante é a situação quando  $\sum \text{codim } \Gamma_i = \dim \overline{M}$ . Neste caso podemos esperar que a interseção das imagens inversas seja de dimensão 0, de sorte que só um número finito de mapas deve satisfazer as condições. A proposição abaixo afirma que tudo funciona tão bem quanto possível.

Recordemos inicialmente o teorema de Kleiman sobre a transversalidade do transladado genérico (cf. [28]). Seja  $G$  um grupo algébrico conexo. Seja  $X$  uma variedade irredutível com uma  $G$ -ação transitiva; sejam  $f : Y \rightarrow X$  e  $Z \rightarrow X$  morfismos de variedades irredutíveis. Para cada  $\sigma \in G$ , denote por  $Y^\sigma$  a variedade  $Y$  considerada como variedade sobre  $X$  através da composição  $\sigma \circ f$ .

**4.1.2 Teorema.** (Kleiman [28].) *Existe um subconjunto aberto denso  $U \subset G$  tal que, para todo  $\sigma \in U$ , o produto fibrado  $Y^\sigma \times_X Z$  é vazio ou*

$$\dim(Y^\sigma \times_X Z) = \dim Y + \dim Z - \dim X.$$

*Além disso, se  $Y$  e  $Z$  são lisos, então  $U$  pode ser escolhido de maneira que para todo  $\sigma \in U$ , o produto fibrado  $Y^\sigma \times_X Z$  é liso.*  $\square$

**4.1.3 Proposição.** *Para escolhas genéricas de  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \subset \mathbb{P}^r$ , com codimensões totalizando  $\dim \overline{M}$ , a interseção como esquemas*

$$\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma}) = \bigcap_{i=1}^n \nu_i^{-1}(\Gamma_i)$$

*consiste em um número finito de pontos reduzidos, com suporte contido em qualquer aberto não vazio pré-fixado e, em particular, no lugar  $M^* \subset \overline{M}$  de mapas livres de automorfismo e com domínio liso.*

*Demonstração.* Por abuso de notação, escreveremos ainda  $M^*$  para indicar um aberto não vazio qualquer pré-fixado. Seja  $\underline{G}$  o produto de  $n$  cópias do grupo de automorfismos de  $X$ . Ele age transitivamente em  $X^n$ . Uso repetido

do teorema de Kleiman implicará a proposição. Primeiro aplicamos o teorema ao complemento  $(M^*)^G$ ; trata-se de uma subvariedade fechada de codimensão pelo menos 1 em  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ . A imagem inversa em  $(M^*)^G$  de um transladado  $\underline{\Gamma}^\sigma$  é identificada como o produto fibrado  $\underline{\Gamma}^\sigma \times_{X^n} (M^*)^G$ . O teorema de Kleiman aplicado a

$$\begin{array}{ccc} & (M^*)^G & \\ & \downarrow \underline{\nu} & \\ \underline{\Gamma} \hookrightarrow & X^n & \end{array}$$

nos dá um aberto denso  $V_1 \subset \underline{G}$  tal que a imagem inversa em  $(M^*)^G$  de qualquer dos transladados  $\underline{\Gamma}^\sigma$ , com  $\sigma \in V_1$ , é vazia. Logo, em geral, a interseção é toda suportada em  $M^*$  como afirmado.

Agora aplique Kleiman a

$$\begin{array}{ccc} & M^* & \\ & \downarrow \underline{\nu} & \\ Y \hookrightarrow & X^n, & \end{array}$$

tomando inicialmente  $Y := \text{Sing } \underline{\Gamma}$ . Obtemos um aberto denso  $V_2 \subseteq \underline{G}$  tal que  $\underline{\nu}^{-1}(Y^\sigma) = \emptyset$ . Faça em seguida  $Y = \underline{\Gamma} \setminus \text{Sing } \underline{\Gamma}$ . Como as variedades que aparecem no diagrama agora são lisas, encontramos um aberto denso  $V_3 \subset \underline{G}$  tal que a imagem inversa em  $M^*$  de qualquer dos transladados correspondentes é da dimensão correta (ou é vazio), além de ser liso. Logo, consiste em um número finito de pontos reduzidos (talvez zero).

Portanto, para todos os transladados correspondentes à interseção dos três abertos,  $\sigma \in V_1 \cap V_2 \cap V_3 \subset \underline{G}$ , a imagem inversa correspondente é da dimensão correta, reduzido, e inteiramente contido em um aberto pré-fixado.  $\square$

O objetivo agora é calcular quantos pontos existem em  $\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})$ , ou seja, calcular o grau  $\int [\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})]$ . O problema é que estamos numa variedade singular, e que interseção de ciclos não é bem definida. O que funciona é o produto de classes operacionais, i.e. classes de cohomologia.

**4.1.4 Anéis de cohomologia.** Para  $X = \mathbb{P}^r$ , de fato para qualquer variedade lisa, temos o isomorfismo de dualidade de Poincaré

$$\begin{aligned} A^*(X) &\simeq A_*(X) \\ \gamma &\mapsto \gamma \cap [X]. \end{aligned}$$

Por isso, não há grandes motivos para distinguir entre classes operacionais (classes de cohomologia) e classes de ciclos (classes de homologia).

O espaço de módulos  $\overline{M}$  no entanto é uma variedade singular, onde produtos de classes de ciclos podem não estar definidos. Neste caso, as classes operacionais são mais bem comportadas: classes operacionais funcionam como classes de Chern, no sentido de que são operadores que você pode aplicar a ciclos e obter novos ciclos, e então iterar; isso faz de  $A^*(\overline{M})$  um anel (comutativo).

O símbolo usado para indicar multiplicação de operadores é  $\cup$ . A avaliação de um operador  $\alpha \in A^*$  em um ciclo  $[Z] \in A_*$  se escreve  $\alpha \cap [Z]$ . Assim, dados  $\alpha, \beta \in A^*$  então  $\alpha \cup \beta$  é definido como  $(\alpha \cup \beta) \cap [Z] = \alpha \cap (\beta \cap [Z])$  para todo  $[Z] \in A_*$ . Por abuso de linguagem diremos que uma classe  $\alpha$  é de codimensão  $k$  se  $\alpha \in A^k(\overline{M})$ , ou equivalentemente, se  $\alpha \cap [\overline{M}]$  é um ciclo de codimensão  $k$ .

Se  $f : X' \rightarrow X$  é um morfismo, existe a operação de imagem recíproca  $f^* : A^*(X) \rightarrow A^*(X')$ , cujas propriedades são análogas às propriedades das imagens recíprocas de classes de Chern, e.g. fórmula de projeção.

Seja  $\gamma_i \in A^*(X)$  a classe de cohomologia correspondente a  $[\Gamma_i] \in A_*(X)$  via dualidade de Poincaré. Então  $\underline{\gamma} := \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n = \bigcup \tau_i^*(\gamma_i) \in A^*(X^n)$  corresponde à classe  $[\underline{\Gamma}] \in A_*(X^n)$ .

Agora em vez de intersectar os ciclos  $[\nu^{-1}(\Gamma_i)]$  passamos a olhar para o produto de classes de cohomologia

$$\underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) = \underline{\nu}^*(\bigcup \tau_i^*(\gamma_i)) = \bigcup \nu_i^*(\gamma_i).$$

Podemos por fim calcular o número de pontos na intersecção em 4.1.3 em termos de tais produtos.

**4.1.5 Lema.** *Para escolhas genéricas de  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  em 4.1.3, o número de pontos na intersecção  $\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})$  é igual a*

$$\int [\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})] = \int \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cap [\overline{M}].$$

*Demonstração.* Lembre (cf. Fulton [18], 8.1) que  $\underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cap [\overline{M}]$  é definido como a imagem recíproca de Gysin  $\iota^*([\overline{M} \times \underline{\Gamma}])$ , onde  $\iota : \overline{M} \hookrightarrow \overline{M} \times X^n$  é o gráfico

de  $\underline{\nu}$  (que é um mergulho regular). Considere o diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} \underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma}) & \xrightarrow{J} & \overline{M} \times \underline{\Gamma} \\ g \downarrow & & \downarrow \\ \overline{M} & \xrightarrow{\iota} & \overline{M} \times X^n. \end{array}$$

A imagem recíproca de Gysin (cf. [18], 6.1) por sua vez é um ciclo suportado em  $\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})$ , definido como a interseção do cone normal  $C_J$  com a seção zero do fibrado normal  $g^*N_l$ . Agora sabemos que  $\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})$  tem a dimensão correta, portanto  $C_J$  e  $g^*N_l$  têm a mesma dimensão. Além disso,  $\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})$  é reduzido, e assim  $g^*N_l$  e consequentemente  $C_J$  são reduzidos. Segue que  $\iota^*([M \times \underline{\Gamma}]) = [\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})]$ , como afirmado.  $\square$

**4.1.6 Observação.** Assumindo que as classes  $\gamma_i$  são classes de Chern, então existe uma demonstração mais fácil da proposição. (Este é o caso por exemplo quando os  $\Gamma_i$  são subespaços lineares.) Suponha  $\Gamma_i = Z(s_i)$ , o esquema de zeros de uma seção regular  $s_i$  de um fibrado vetorial  $E_i$  de posto  $k_i$ , de forma que  $\gamma_i = c_{k_i}(E_i)$ . Seja  $\underline{E} := \bigoplus \tau_i E_i$  com seção  $\underline{s} := (s_1, \dots, s_n)$ . Agora

$$\bigcap \nu_i^{-1}(\Gamma_i) = \bigcap \nu_i^{-1}(Z(s_i)) = \bigcap Z(\nu_i^* s_i) = Z(\underline{\nu}^* \underline{s}).$$

Sabendo que este esquema tem a codimensão correta  $k := \sum k_i$ , e que  $\overline{M}$  é uma variedade Cohen-Macaulay, concluímos que a seção  $\underline{\nu}^* \underline{s}$  é regular, e portanto seu esquema de zeros tem classe  $c_k(\underline{\nu}^* \underline{E}) \cap [\overline{M}]$ . Agora podemos escrever

$$\begin{aligned} c_k(\underline{\nu}^* \underline{E}) &= c_k(\bigoplus \nu_i^* E_i) = \bigcup c_{k_i}(\nu_i^* E_i), \\ &= \bigcup \nu_i^* (c_{k_i}(E_i)) = \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}), \end{aligned}$$

(por naturalidade) como queríamos.

A discussão acima nos leva naturalmente à seguinte.

**Definição.** O *invariante de Gromov-Witten de grau  $d$*  associado às classes  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in A^*(\mathbb{P}^r)$ , é

$$I_d(\gamma_1 \cdots \gamma_n) := \int_{\overline{M}} \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}).$$

Este número só é não nulo quando a soma das codimensões das classes  $\gamma_i$  é igual à dimensão de  $\overline{M}$ .

Note que  $I_d(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$  é invariante por permutação das classes  $\gamma_i$ . Por isso é que escrevemos  $\gamma_1 \cdots \gamma_n$  com pontos indicando um produto, ao invés de separá-los por vírgulas. Note também que, como imagem recíproca e integração respeitam somas, os invariantes de Gromov-Witten são lineares em cada um de seus argumentos.

A próxima seção e o resto do capítulo é dedicado ao cálculo de invariantes de Gromov-Witten. A definição em combinação com as duas proposições anteriores implica o seguinte.

**4.1.7 Corolário.** *Sejam  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in A^*(X)$  tais que  $\text{codim } \gamma_i = \dim \overline{M}$ . Então para subvariedades irredutíveis  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \subset X$  gerais, com  $[\Gamma_i] = \gamma_i \cap [X]$ , o invariante de Gromov-Witten  $I_d(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$  é o número de mapas  $n$ -marcados  $\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  de grau  $d$  satisfazendo a  $\mu(p_i) \in \Gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .  $\square$*

**4.1.8 O quê  $I_d(\gamma)$  conta?** Mapas não são o tipo de objeto que pretendíamos contar. Queremos contar curvas racionais, sem menção nem a marcas nem a mapas. Agora se cada mapa-solução manda  $p_i$  para  $\Gamma_i$ , então em particular a curva imagem encontra cada  $\Gamma_i$ . Ou seja, estão aqui na coleção todas as soluções à pergunta “quantas curvas racionais encontram os  $\Gamma_i$ ?”. Falta ver se ocorre alguma repetição. Isto é, se alguma curva racional que está na solução corta algum  $\Gamma_i$  em mais que um ponto. Neste caso, essa única curva racional daria origem a dois ou mais mapas estáveis  $n$ -marcados satisfazendo as condições  $\mu(p_i) \in \Gamma_i$ , por causa das várias maneiras de colocar marcas na mesma curva.

Se algum  $\Gamma_i$  é uma hipersuperfície, esse tipo de repetição é inevitável. Com efeito, se  $\Gamma_i \subset \mathbb{P}^r$  é uma hipersuperfície de grau  $e$ , então, pelo teorema de Bézout, uma curva de grau  $d$  sempre encontra  $\Gamma_i$ . O número de pontos de interseção (se finito) é  $d \cdot e$ , contados com multiplicidades. Portanto, para cada curva racional solução à pergunta de incidências, existem  $d \cdot e$  mapas  $n$ -marcados distintos que satisfazem o requerido. Devemos excluir esse caso, ou corrigir devidamente pelo fator  $d \cdot e$ , como será feito no lema 4.2.4 abaixo.

Se  $\text{codim } \Gamma_i \geq 2$ , então o mais provável é que a curva não intersecte  $\Gamma_i$ . No entanto, já que estamos forçando o encontro, deve ocorrer apenas em um ponto. Ou seja, como estamos obrigando uma curva a fazer mais do que sua codimensão permite esperar, ela não deveria, por sua própria iniciativa, encontrar  $\Gamma_i$  em mais de um ponto. Portanto, se todas as variedades  $\Gamma_i$  são de

codimensão pelo menos 2, espera-se que todos os mapas-solução cortem cada  $\Gamma_i$  em apenas um ponto. Nesse caso, o número de soluções para o problema de contagem de mapas estáveis  $n$ -marcados é igual à solução do problema de curvas racionais sem menção a marcas.

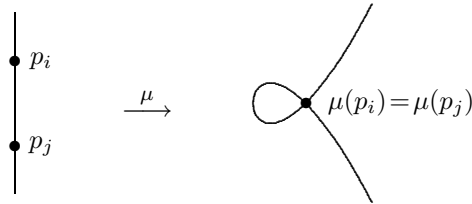
O resto desta seção é dedicado à formalização deste argumento. Há dois tipos de comportamento que queremos excluir: o primeiro é a situação onde a mesma curva passa duas vezes pelo mesmo ponto, e o segundo é a situação onde a curva passa por  $\Gamma_i$  em dois ou mais pontos distintos.

**4.1.9 Lema.** *Suponha  $n \geq 2$ . Considere o lugar*

$$Q_{ij} := \{\mu \in M_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) \mid \mu(p_i) = \mu(p_j)\}$$

*dos mapas cujas marcas  $p_i \neq p_j$  têm a mesma imagem em  $\mathbb{P}^r$ . Então a codimensão de  $Q_{ij}$  em  $M := M_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  é igual a  $r$ .*

Note que no enunciado estamos trabalhando em  $M$  e não em  $\overline{M}$ .



*Demonstração.* Podemos supor que  $n \geq 3$  por uma redução análoga à de 2.8.2. Vejamos como a condição  $\mu(p_i) = \mu(p_j)$  se traduz em  $r$  condições independentes no espaço  $W(r, d)$  das  $(r+1)$ -uplas de formas de grau  $d$  (veja 2.1.1). Seja  $a_{k0}x^d + a_{k1}x^{d-1}y + \dots + a_{kd}y^d$  a  $k$ -ésima forma. Supondo que  $p_i = [0 : 1]$  e  $p_j = [1 : 0]$ , então a condição  $\mu(p_i) = \mu(p_j)$  fica

$$[a_{00}, a_{10}, \dots, a_{r0}] = \lambda[a_{0d}, a_{1d}, \dots, a_{rd}]$$

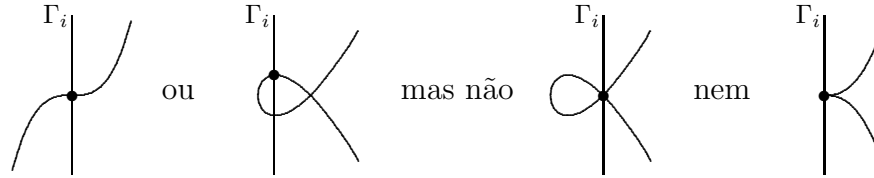
para algum  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , o que constitui  $r$  condições independentes nos  $a_{ij}$  (cf. o argumento de 2.1.3).  $\square$

**4.1.10 Lema.** *Para escolhas genéricas de  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \subset \mathbb{P}^r$ , com soma das codimensões totalizando  $\dim \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ , vale*

$$\mu^{-1}\mu(p_i) = \{p_i\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{com multiplicidade } 1)$$

*para cada mapa  $\mu$  na interseção  $\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})$ .*

Isto significa que genericamente acontece



*Demonstração.* Pelo teorema de Kleiman, para transladados gerais de  $\Gamma_i$ , a interseção  $\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})$  consiste em um número finito de pontos reduzidos, suportados no aberto denso  $M_{0,n}^\circ(\mathbb{P}^r, d)$  dos mapas que têm domínio liso e que são imersões (cf. 2.1.3). Isto já garante que  $\mu^{-1}\mu(p_i)$  é reduzido para cada  $i = 1, \dots, n$ . Agora dentro de  $M_{0,n}^\circ(\mathbb{P}^r, d)$  temos que evitar (para cada  $i$ ) o lugar  $J_i$  dos mapas  $\mu$  tais que a pré-imagem de  $\mu(p_i)$  contém pelo menos um ponto distinto de  $p_i$ . Mostrando que esse lugar tem codimensão positiva, o resultado segue claramente por mais um argumento de Kleiman.

Considere o mapa de esquecimento  $\varepsilon : M_{0,n+1}^\circ(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow M_{0,n}^\circ(\mathbb{P}^r, d)$ . Afirmamos que a imagem de  $Q_{i,n+1}$  é exatamente  $J_i \subset M_{0,n}^\circ(\mathbb{P}^r, d)$ . Com efeito, é claro que a imagem está contida em  $J_i$ . Por outro lado  $\varepsilon$  é sobrejetivo. De fato, para cada mapa  $\mu \in J_i$  sabemos que existe um ponto, além de  $p_i$ , com mesma imagem. Então colocando a marca extra neste ponto, ganhamos um mapa  $(n+1)$ -marcado que pertence a  $Q_{i,n+1}$  e cuja imagem é  $\mu$ .

Finalmente, tendo  $Q_{i,n+1}$  codimensão  $r$ , concluímos que  $J_i$  tem codimensão pelo menos  $r - 1 \geq 1$ , como queríamos.  $\square$

**4.1.11 Corolário.** (Cf. também proposição 4.1.13 adiante.) Se  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{3d-1}$  são pontos gerais em  $\mathbb{P}^2$ , então

$$I_d(\underbrace{h^2 \cdots h^2}_{3d-1 \text{ fatores}}) = N_d,$$

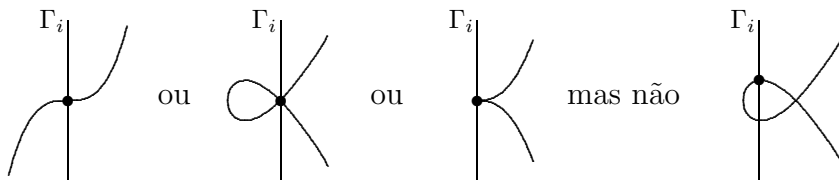
o número de curvas racionais de grau  $d$  que passam pelos pontos.

*Demonstração.* Já sabemos do lema 4.1.7 que o invariante  $I_d(h^2 \cdots h^2)$  é o número de mapas  $(3d-1)$ -marcados  $\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  de grau  $d$  tais que  $\mu(p_i) = \Gamma_i$ . Pelo lema 4.1.10, cada mapa-solução passa apenas uma vez por cada ponto, portanto o número é também o número de curvas racionais passando pelos pontos, sem menção a marcas.  $\square$

Agora vamos tratar da possibilidade de um mapa passar várias vezes pelo mesmo  $\Gamma_i$ , mas em pontos distintos.

**4.1.12 Lema.** *Sejam  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \subset \mathbb{P}^r$  subvariedades gerais de codimensão pelo menos 2, e com soma das codimensões igual a  $\dim \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ . Então vale que, para qualquer  $\mu \in \underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})$ , a curva imagem  $\mu(C)$  intercepta cada  $\Gamma_i$  em um único ponto ( $\mu(p_i)$ ).*

Isto é dizer que, genericamente, quando a codimensão de  $\Gamma_i$  é pelo menos dois, o lema permite, em princípio,



e junto com o lema 4.1.10, segue que só o caso da primeira figura acima persiste.

*Demonstração.* Trabalhamos com a primeira marca, para depois repetir o argumento com as demais. A idéia é subir para o espaço  $\overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)$  com uma marca extra  $p_0$ , e considerar aqui o aberto  $M^\#$  definido por  $\mu(p_1) \neq \mu(p_0)$ . Mostraremos que para escolhas genéricas dos  $\Gamma_i$ , a interseção  $\nu_0^{-1}(\Gamma_1) \cap \underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma}) \cap M^\#$  é vazia.

Mantemos a notação  $X := \mathbb{P}^r$ ,  $\underline{G} := \text{Aut}(X)^n$ . Consideremos a ação de  $\underline{G}$  em  $X^{n+1}$  (e não mais em  $X^n$  como na prova de 4.1.3) definida por

$$(g_i) \cdot (x_0, x_1, \dots, x_n) = (g_0 \cdot x_0, g_1 \cdot x_1, g_2 \cdot x_2, \dots, g_n \cdot x_n),$$

onde  $g_i \in \text{Aut}(X)$ ,  $x_i \in X$  e tomamos no primeiro fator  $g_0 = g_1$ . Restringindo ao complemento  $U_{01}$  da diagonal  $x_0 = x_1$ , resulta uma ação transitiva. Ponha  $\Gamma_0 := \Gamma_1$ , e denote por  $\Gamma_i^\circ := \Gamma_i \cap U_{01}$  as interseções com  $U_{01}$ .

Temos agora os  $n + 1$  mapas de avaliação  $\nu_i : M^\# \rightarrow U_{01}$ ; considere a interseção

$$\nu_0^{-1} \Gamma_0^\circ \cap \underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma}^\circ)$$

em  $M^\#$ . Note que  $\Gamma_0 \times \underline{\Gamma}$  tem codimensão em  $X \times X^n$  igual a  $\text{codim } \Gamma_1 + \dim \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) > \dim M^\#$  por hipótese. Argumentando como na demonstração do lema 4.1.3 concluímos por Kleiman que aquela interseção em  $M^\#$  é vazia para escolhas genéricas dos  $\Gamma_i^\circ$ . Mais precisamente, existe um aberto denso de  $\underline{G}$  formado por  $(g_i)$ 's tal que

$$\nu_0^{-1}(g_0 \cdot \Gamma_0^\circ) \cap \underline{\nu}^{-1}(g \cdot \underline{\Gamma}^\circ) \cap M^\# = \emptyset.$$

Já que a pré-imagem da diagonal  $x_0 = x_1$  cai fora de  $M^\#$  é óbvio que também  $\nu_0^{-1}(g_0.\Gamma_0) \cap \underline{\nu}^{-1}(g.\underline{\Gamma}) \cap M^\#$  é vazio.

Agora voltemos ao espaço original para completar o argumento. Considere em  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  a interseção  $\underline{\nu}^{-1}(g.\underline{\Gamma})$  (para um valor de  $g$  como acima) e suponha que existe nela um mapa  $\mu$  que intercepte  $\Gamma_1$  em outro ponto  $q$ , além de  $\mu(p_1)$ . Então colocando uma marca extra  $p_0$  na pré-imagem  $\mu^{-1}(q)$  (e estabilizando se necessário) teríamos também um elemento em  $\overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)$  na interseção  $\nu_0^{-1}(g_0.\Gamma_1) \cap \underline{\nu}^{-1}(g.\underline{\Gamma}) \cap M^\#$ , contradição.

Repetindo o argumento para as marcas  $p_2, \dots, p_n$ , obtemos em  $\underline{G}$  o aberto não vazio procurado.  $\square$

**4.1.13 Proposição.** *Sejam  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in A^*(\mathbb{P}^r)$  classes de codimensão pelo menos 2 com soma das codimensões igual à dimensão de  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ . Sejam  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \subset \mathbb{P}^r$  subvariedades gerais tais que  $[\Gamma_i] = \gamma_i$ . Então o número  $I_d(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$  é o número de curvas racionais incidentes a todos os  $\Gamma_i$ 's.*

*Demonstração.* Pela discussão precedente,  $I_d(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$  é o número de mapas estáveis  $n$ -marcados  $\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  de grau  $d$  tais que  $\mu(p_i) \in \Gamma_i$ . Em particular, todas as curvas racionais incidentes a  $\Gamma_i$ 's estão nessa coleção. Agora pelo lema 4.1.12 cada mapa-solução  $\mu$  intercepta  $\Gamma_i$  em apenas um ponto  $\mu(p_i)$ . Pelo lema 4.1.10 a imagem inversa deste ponto é apenas  $p_i$ . Portanto não sobram escolhas para colocação das marcas. Ou seja, o número de mapas com  $\mu(p_i) \in \Gamma_i$  é igual ao número de curvas racionais incidentes aos  $\Gamma_i$ , sem menção a marcas.  $\square$

**4.1.14 Exemplo.** Para  $\mathbb{P}^3$ , o número

$$I_3(\underbrace{h^2 \cdots h^2}_6 \cdot \underbrace{h^3 \cdots h^3}_3)$$

é o número de cúbicas racionais reversas encontrando 6 retas e passando por 3 pontos. Ele é calculado no espaço  $\overline{M}_{0,9}(\mathbb{P}^3, 3)$ . Note que esse espaço tem dimensão 21, e que esta é também a soma das codimensões das classes. Por sinal, esse número é 190, como você pode calcular usando o algoritmo do teorema 4.4.1 abaixo.

## 4.2 Propriedades dos invariantes de Gromov-Witten

**4.2.1 Lema.** *Os únicos invariantes de Gromov-Witten não nulos com  $d = 0$  são os de 3 marcas, com  $\sum \text{codim } \gamma_i = r$ . Neste caso, vale*

$$I_0(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3) = \int (\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3) \cap [\mathbb{P}^r].$$

*Demonstração.* Lembre a identificação  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, 0) \simeq \overline{M}_{0,n} \times \mathbb{P}^r$  cf. 2.8.4, e observe que para  $n < 3$  tal espaço é vazio! Com efeito, um mapa constante  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$  é instável a não ser que tenha três marcas ou mais. Na identificação, cada um dos mapas de avaliação coincide com  $\text{pr}_2 : \overline{M}_{0,n} \times \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{P}^r$ , a segunda projeção. Agora, pela definição, e pela fórmula de projeção temos

$$\begin{aligned} I_0(\gamma_1 \cdots \gamma_n) &= \int_{[\overline{M}]} \nu_1^*(\gamma_1) \cup \cdots \cup \nu_n^*(\gamma_n) \\ &= \int_{[\overline{M}_{0,n} \times \mathbb{P}^r]} \text{pr}_2^*(\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n) \\ &= \int \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n \cap \text{pr}_{2*}[\overline{M}_{0,n} \times \mathbb{P}^r] \end{aligned}$$

A projeção  $\text{pr}_2$  tem dimensão relativa positiva e conseqüentemente a imagem direta é zero, a não ser que  $n = 3$  de forma que  $\dim \overline{M}_{0,n} = 0$ . Neste caso a última integral acima se reduz a  $\int \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cap [\mathbb{P}^r]$ .  $\square$

**4.2.2 Observação.** *O único invariante de Gromov-Witten não nulo com menos que três marcas é*

$$I_1(h^r \cdot h^r) = 1,$$

*significando que há uma única reta passando por dois pontos distintos.*

Com efeito, podemos supor  $d > 0$ . Então  $\dim \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) = rd + r + d + n - 3 \geq 2r + n - 2$ . Lembrando agora a hipótese  $r \geq 2$ , é claro que para  $n < 2$  a soma das codimensões das classes  $\gamma_i$  não pode alcançar  $2r + n - 2$ . Para  $n = 2$ , o único jeito é efetivamente com  $d = 1$ .  $\square$

Para os dois lemas seguintes, observe que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d) & \xrightarrow{\hat{\nu}_i} & \mathbb{P}^r \\ \varepsilon \downarrow & \nearrow \nu_i & \\ \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) & & \end{array}$$

comuta, onde  $\nu_i$  e  $\hat{\nu}_i$  são os mapas de avaliação dos respectivos espaços — o chapéu é só para distingui-los. Em particular vale em  $A^*(\overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d))$ ,

$$\hat{\nu}_i^*(\gamma_i) = \varepsilon^* \nu_i^*(\gamma_i).$$

**4.2.3 Lema.** *Suponha que uma das classes é a classe fundamental, digamos  $\gamma_{n+1} = h^0 = [\mathbb{P}^r] = 1 \in A^0(\mathbb{P}^r)$ . Então os únicos invariantes de Gromov-Witten não nulos são os com 3 marcas e de grau zero, com  $\sum \text{codim } \gamma_i = r$ . Neste caso, temos novamente*

$$I_0(1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3) = \int (1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3) \cap [\mathbb{P}^r].$$

*Demonstração.* Primeiro observe que  $\hat{\nu}_{n+1}^*(1) = 1 \in A^* \overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)$ . Calculando agora a integral aplicando  $\varepsilon$  obtemos, graças à fórmula de projeção,

$$\int \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cup \hat{\nu}_{n+1}^*(1) \cap [\overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)] = \int \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cap \varepsilon_* [\overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)].$$

Mas  $\varepsilon_* [\overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)]$  é zero por razões de dimensão. □

**4.2.4 Lema.** *Suponha  $d > 0$  e que uma das classes é a classe hiperplana, digamos  $\gamma_{n+1} = h$ . Então*

$$I_d(\gamma_1 \cdots \gamma_n \cdot h) = I_d(\gamma_1 \cdots \gamma_n) \cdot d.$$

*Demonstração.* A classe  $\hat{\nu}_{n+1}^*(h) \cap [\overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)]$  é igual à classe de  $\hat{\nu}_{n+1}^{-1}(H)$  para algum hiperplano  $H$ . É o conjunto de mapas cuja marca  $p_{n+1}$  cai em  $H$ . O mapa de esquecimento restrito a  $\hat{\nu}_{n+1}^{-1}(H)$

$$\varepsilon| : \hat{\nu}_{n+1}^{-1}(H) \rightarrow \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$$

é genericamente finito, de grau  $d$ . Com efeito, para um mapa geral  $\mu \in \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ , sua imagem intercepta  $H$  em  $d$  pontos, a imagem inversa de cada um dos quais poderia carregar a marca  $p_{n+1}$ . Agora o resultado segue mais uma vez usando a fórmula de projeção:

$$\begin{aligned} \int \hat{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cup \hat{\nu}_{n+1}^*(h) \cap [\overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)] &= \int \hat{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cap [\hat{\nu}_{n+1}^{-1}(H)] \\ &= \int \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cap \varepsilon_*[\nu_{n+1}^{-1}(H)] \\ &= \int \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cap d [\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)]. \end{aligned}$$

□

**4.2.5 Exemplo.** Tendo em conta as propriedades acima, quando considerarmos invariantes de Gromov-Witten, não precisaremos nos preocupar com aqueles onde ocorra  $h^0$  (classe de  $\mathbb{P}^r$ ) ou  $h^1$  (classe hiperplana). Assim, para  $\mathbb{P}^2$  é fácil exibi-los todos: a única classe a considerar é  $h^2$ , e para ter codimensão total igual a  $\dim \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$  é preciso ter  $n = 3d - 1$ . Em outras palavras, para calcular todos os invariantes de Gromov-Witten de  $\mathbb{P}^2$ , basta conhecer

$$I_d(\underbrace{h^2 \cdots h^2}_{3d-1 \text{ fatores}}),$$

que são justamente os números  $N_d$ , cf. corolário 4.1.11. É dizer que o conhecimento de todos os invariantes de Gromov-Witten de  $\mathbb{P}^2$  equivale à informação fornecida pela fórmula de Kontsevich (junto com os lemas desta seção).

## 4.3 Recursão

Lembre que (quando  $A \neq \emptyset$  e  $B \neq \emptyset$ ) temos o isomorfismo de colagem 2.7.4.1

$$D(A, B; d_A, d_B) \simeq \overline{M}_{0, A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_A) \times_{\mathbb{P}^r} \overline{M}_{0, B \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_B).$$

Vamos explorar esse isomorfismo para reduzir o cálculo de classes no divisor  $D(A, B; d_A, d_B)$ , ao cálculo de classes no produto.

Simplifiquemos um pouco a notação. O divisor  $D(A, B; d_A, d_B)$  será denotado por  $D$ . Ponhamos  $\overline{M}_A := \overline{M}_{0, A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_A)$  e escrevamos  $\nu_{x_A}$  para o mapa de avaliação da marca  $x \in A \cup \{x\}$ . Analogamente, escrevamos  $\overline{M}_B := \overline{M}_{0, B \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_B)$  com mapa de avaliação  $\nu_{x_B}$ .

Podemos agora expressar  $D$  como a imagem recíproca da diagonal  $\Delta \subset \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$ :

$$D = (\nu_{x_A} \times \nu_{x_B})^{-1}(\Delta) \subset \overline{M}_A \times \overline{M}_B.$$

Outra maneira de dizer, é que temos um diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\iota} & \overline{M}_A \times \overline{M}_B \\ \downarrow & & \downarrow \nu_{x_A} \times \nu_{x_B} \\ \mathbb{P}^r & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r \end{array} \quad (4.3.0.1)$$

onde  $\delta$  é o mergulho diagonal.

É um fato fundamental que podemos exprimir a diagonal em termos de classes hiperplanas. Trata-se da chamada

**4.3.1 Decomposição de Künneth da diagonal.** No produto  $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$ , com projeções  $\pi_A$  e  $\pi_B$ , a classe da diagonal é dada por

$$[\Delta] = \sum_{e=0}^r (\pi_A^* h^e \cup \pi_B^* h^{r-e}) = \sum_{e=0}^r (h^e \times h^{r-e}).$$

Isso decorre do seguinte.

**4.3.2 Lema.** *A diagonal é o esquema de zeros de uma seção regular do fibrado  $\pi_A^* T_{\mathbb{P}^r}(-1) \otimes \pi_B^* \mathcal{O}(1)$ .*

*Demonstração.* A afirmação é bem conhecida, veja e.g. [42]. Decorre do diagrama de imagem recíproca da seqüência de Euler.  $\square$

Agora o lado direito da expressão de  $[\Delta]$  acima é apenas a expansão da  $r$ -ésima classe de Chern do fibrado de posto  $r$  descrito no lema.

Isso nos permite escrever a classe de  $D$  na forma seguinte,

$$\begin{aligned} [D] &= (\nu_{x_A} \times \nu_{x_B})^* [\Delta] \\ &= (\nu_{x_A} \times \nu_{x_B})^* \left( \sum_{e=0}^r (h^e \times h^{r-e}) \right) \\ &= \sum_{e=0}^r \nu_{x_A}^* h^e \times \nu_{x_B}^* h^{r-e}. \end{aligned}$$

Podemos por fim enunciar o lema-chave, também chamado de lema de *recursão*.

**4.3.3 Lema.** *Seja  $\alpha : D \hookrightarrow \overline{M}$  a inclusão natural, e seja  $\iota : D \hookrightarrow \overline{M}_A \times \overline{M}_B$  a inclusão acima descrita. Então para quaisquer classes  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in A^*(\mathbb{P}^r)$  vale a identidade seguinte em  $A^*(\overline{M}_A \times \overline{M}_B)$ :*

$$\iota_* \alpha^* \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) = \sum_{e=0}^r \left( \prod_{a \in A} \nu_a^*(\gamma_a) \cdot \nu_{x_A}^*(h^e) \right) \times \left( \prod_{b \in B} \nu_b^*(\gamma_b) \cdot \nu_{x_B}^*(h^{r-e}) \right).$$

*Demonstração.* Continuamos com a notação utilizada nos resultados anteriores:  $X := \mathbb{P}^r$  e  $\underline{X} = X \times \dots \times X$  ( $n$  cópias). Denote por  $\underline{X}_A$  o sub-produto dos fatores indexados por  $A$ , e analogamente para  $\underline{X}_B$ . Assim,  $\underline{X} = \underline{X}_A \times \underline{X}_B$ . Seja  $\underline{\nu} : \overline{M} \rightarrow \underline{X}$  o produto dos  $n$  mapas de avaliação  $\overline{M} \rightarrow X$ . Seja  $\underline{\nu}_A : \overline{M}_A \rightarrow \underline{X}_A$  o produto dos mapas de avaliação para marcas em  $A$  e defina analogamente  $\underline{\nu}_B : \overline{M}_B \rightarrow \underline{X}_B$ . Note que não incluímos o mapa de avaliação do ponto  $x$  de colagem. Temos portanto  $\underline{\nu} = (\underline{\nu}_A, \underline{\nu}_B)$ . Por fim, seja  $\underline{\gamma}$  a classe  $\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n$  em  $A^*(\underline{X})$ , e sejam  $\underline{\gamma}_A \in A^*(\underline{X}_A)$  e  $\underline{\gamma}_B \in A^*(\underline{X}_B)$  definidas da maneira óbvia. (A filosofia da notação deveria ser clara agora.) Note que  $\underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) = \nu_1^*(\gamma_1) \cup \dots \cup \nu_n^*(\gamma_n)$ . Posto isto, podemos escrever o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{M} & \xleftarrow{\alpha} & D & \xhookrightarrow{\iota} & \overline{M}_A \times \overline{M}_B \\ \underline{\nu} \downarrow & & \eta \downarrow & & \downarrow (\underline{\nu}_A, \nu_{x_A}) \times (\nu_{x_B}, \underline{\nu}_B) \\ \underline{X} & \xleftarrow{\pi} & \underline{X}_A \times X \times \underline{X}_B & \xhookrightarrow{\delta} & \underline{X}_A \times X \times X \times \underline{X}_B \end{array}$$

Algumas palavras de explicação para os mapas:  $\alpha$  e  $\iota$  são as inclusões do enunciado. O mapa  $\delta$  é a identidade nos fatores  $\underline{X}_A$  e  $\underline{X}_B$  e é o mergulho diagonal no fator central (correspondente a  $x$ ). Logo, o quadrado à direita é precisamente o quadrado em 4.3.0.1 expandido com mais alguns mapas de avaliação, não afetando o fato dele ser cartesiano. Assim o mapa vertical do meio,  $\eta$ , é o produto  $(\underline{\nu}_A, \nu_x, \underline{\nu}_B)$ . (O significado exato de  $\nu_x$  não é tão importante aqui, mas é um tipo de mapa de avaliação dos pontos singulares dos mapas parametrizados por  $D$ .) O mapa  $\pi$  é apenas projeção (descartando aquele fator central misterioso); daí claramente o quadrado da esquerda comuta.

Agora o resto da demonstração é meramente acompanhar no diagrama o que se passa com uma classe em volta dos dois quadrados e usar a decomposição

de Künneth:

$$\begin{aligned}
\iota_* \alpha^* \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) &= \iota_* \eta^* \pi^*(\underline{\gamma}) \\
&= \iota_* \eta^*(\underline{\gamma}_A \times [X] \times \underline{\gamma}_B) \\
&= ((\underline{\nu}_A, \nu_{x_A}) \times (\nu_{x_B}, \underline{\nu}_B))^* \delta_* (\underline{\gamma}_A \times [X] \times \underline{\gamma}_B) \\
&= ((\underline{\nu}_A, \nu_{x_A}) \times (\nu_{x_B}, \underline{\nu}_B))^* (\underline{\gamma}_A \times [\Delta] \times \underline{\gamma}_B) \\
&= \sum_{e=0}^r ((\underline{\nu}_A, \nu_{x_A}) \times (\nu_{x_B}, \underline{\nu}_B))^* (\underline{\gamma}_A \times h^e \times h^{r-e} \times \underline{\gamma}_B) \\
&= \sum_{e=0}^r ((\underline{\nu}_A, \nu_{x_A})^* (\underline{\gamma}_A \times h^e)) \times ((\nu_{x_B}, \underline{\nu}_B)^* (h^{r-e} \times \underline{\gamma}_B)) \\
&= \sum_{e=0}^r \left( \prod_{a \in A} \nu_a^*(\gamma_a) \cdot \nu_{x_A}^*(h^e) \right) \times \left( \prod_{b \in B} \nu_b^*(\gamma_b) \cdot \nu_{x_B}^*(h^{r-e}) \right).
\end{aligned}$$

Comentemos as passagens: a primeira linha é a comutatividade do quadrado da esquerda; a segunda é a definição de  $\pi^*$ ; na terceira linha podemos ir pelo caminho oposto no quadrado da direita pois se trata de um diagrama cartesiano e  $\delta$  é um mergulho fechado. A quarta linha é a definição de  $\delta$ ; a quinta vem da fórmula de Künneth para o fator central; e finalmente as duas últimas linhas são meros rearranjos de termos.  $\square$

Integrando, obtemos o corolário seguinte, especialmente útil quando a imagem recíproca em  $\overline{M}$  é de dimensão 1.

#### 4.3.4 Corolário.

$$\int_D \nu_1^*(\gamma_1) \cup \cdots \cup \nu_n^*(\gamma_n) = \sum_{e=0}^r I_{d_A} \left( \prod_{a \in A} \gamma_a \cdot h^e \right) \cdot I_{d_B} \left( \prod_{b \in B} \gamma_b \cdot h^{r-e} \right).$$

## 4.4 O teorema da reconstrução

Vamos mostrar que é possível reduzir o cálculo de qualquer dos  $I_d$  a apenas  $I_1(h^r \cdot h^r) = 1$ .

Vejamos como funciona no exemplo 3.2.2 que já consideramos. Em  $\mathbb{P}^2$ , calculemos  $N_2 = I_2(2, 2, 2, 2, 2) = 1$ , o número de cônicas por 5 pontos gerais. Novamente nos colocamos no espaço  $\overline{M}_{0,6}(\mathbb{P}^2, 2)$ . Denotemos as seis classes por  $\lambda_1 = \lambda_2 = h$  e  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = h^2$ . Tome os mapas de avaliação de

maneira que  $\lambda_1$  corresponda ao ponto denotado por  $m_1$ ,  $\lambda_2$  a  $m_2$ , e  $\gamma_i$  a  $p_i$ . Note que esta é exatamente a maneira como procedemos em 3.2.2. Devemos considerar a classe em  $A^{10}(\overline{M}_{0,6}(\mathbb{P}^2, 2))$ ,

$$\underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) = \nu_{m_1}^*(\lambda_1) \cup \nu_{m_2}^*(\lambda_2) \cup \nu_{p_1}^*(\gamma_1) \cup \nu_{p_2}^*(\gamma_2) \cup \nu_{p_3}^*(\gamma_3) \cup \nu_{p_4}^*(\gamma_4).$$

Fazendo  $\underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cap [\overline{M}]$ , obtemos precisamente a classe da curva  $Y$  construída na página 65). Vamos agora intersectá-la com os dois divisores de fronteira especiais equivalentes,

$$\int \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cap D(m_1, m_2 | p_1, p_2) = \int \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cap D(m_1, p_1 | m_2, p_2).$$

Como fizemos anteriormente na demonstração da proposição 3.2.2, calculamos a contribuição de cada componente dos divisores. O lado esquerdo é

$$\sum \left( \int \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cap D(A, B; d_A, d_B) \right)$$

onde a soma é feita sobre todas as partições  $A \cup B = \{m_1, m_2, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ , com  $m_1, m_2 \in A$  e  $p_1, p_2 \in B$  e com pesos  $d_A + d_B = 2$ .

Agora entra aqui o lema de recursão. Ele permite escrever a última integral na forma

$$\sum \left( \sum_{e=0}^2 I_{d_A}(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \prod \gamma_a \cdot h^e) I_{d_B}(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \prod \gamma_b \cdot h^{2-e}) \right)$$

onde a soma externa é sobre os mesmos dados como acima, e os produtos provêm das várias maneiras de distribuir os dois pontos extras em  $A$  e  $B$ . Os invariantes de Gromov-Witten são calculados sobre os conjuntos de marcas  $A \cup \{x\}$  e  $B \cup \{x\}$  respectivamente.

Novamente, analisemos quais escolhas de pesos são passíveis de contribuição. Suponha  $d_A = 0$ . Então pela observação acima, há apenas três marcas em  $A \cup \{x\}$ , quais sejam,  $m_1, m_2$  e  $x$ . Para que as três classes correspondentes sejam da codimensão correta, devemos ter  $e = 0$ . Então  $I_0(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot h^0) = 1$ , e o segundo fator é  $I_2(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_4 \cdot h^2) = N_2$ , justamente o número procurado. Será que pode ocorrer  $d_B = 0$ ? Não, porque nos invariantes de Gromov-Witten correspondentes a  $B$  a codimensão já é grande demais por conta de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

Por fim, devemos explicitar as contribuições em que  $d_A = d_B = 1$ . Elas são dadas por

$$\sum \left( \sum_{e=0}^2 I_1(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots h^e) I_1(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots h^{2-e}) \right)$$

onde  $\dots$  representa as várias maneiras possíveis de distribuir os pontos extras. Verifiquemos as possibilidades uma por uma: se não há pontos extras em  $A$ , então o número de marcas em  $A \cup \{x\}$  é 3, e  $\dim \overline{M}_{0,A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^2, 1) = 5$ . Agora a codimensão total das classes é só  $2 + e$ . Logo, nenhuma contribuição vem daqui. Suponha que exista um ponto extra em  $A$  e outro em  $B$ . Mais uma vez, confrontamos as dimensões dos espaços em que estamos trabalhando, com as codimensões das classes. Vemos assim que os invariantes de Gromov-Witten em jogo são nulos. Finalmente, pondo ambas as marcas extras em  $A$ , para  $e = 1$  achamos uma contribuição dada por

$$I_1(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_4 \cdot h^1) I_1(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot h^1).$$

Para calcular esses invariantes de Gromov-Witten, lembre que os  $h$ 's puros podem ser jogados fora (substituindo-o pelo grau, mas aqui  $d = 1$ ). Assim, a expressão acima fica igual a

$$I_1(\gamma_3 \cdot \gamma_4) I_1(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = 1 \cdot 1.$$

Em ambos os casos esse valor 1 é interpretado como o número de retas por dois pontos.

Analogamente, podemos achar uma expressão para o lado direito. Aqui o importante é que nem  $d_A = 0$  nem  $d_B = 0$  dá contribuição. Isto é fácil de perceber, pois nesses casos só poderíamos ter três marcas nesse galho, e então a codimensão já ficaria grande demais por conta das classes  $\lambda$  e  $\gamma$ .

**4.4.1 Teorema.** *(Reconstrução para  $\mathbb{P}^r$ .) Para  $\mathbb{P}^r$ , todos os invariantes de Gromov-Witten podem ser calculados recursivamente, e o único valor inicial necessário é  $I_1(h^r \cdot h^r) = 1$ , o número de retas por dois pontos.*

*Demonstração. (Esboço)* A recursão para  $\mathbb{P}^r$  não é tão direta como a que vimos no caso de  $\mathbb{P}^2$ . Ela é dada por uma coleção muito grande de equações, altamente redundante. Vamos esboçar o algoritmo. Lembre que o único invariante para 2 marcas é  $I_1(h^r \cdot h^r) = 1$ . Portanto, para provar que a recursão termina, precisamos expressar cada invariante de Gromov-Witten em termos de invariantes de grau menor ou invariantes com o mesmo grau mas com menos marcas.

Se ocorrer uma classe de codimensão 0, use o lema 4.2.3 para resolver o problema.

Se houver uma classe de codimensão 1, use o lema 4.2.4 para se livrar dela, em troca de um grau. Logo, podemos supor que todas as classes têm

codimensão pelo menos 2. Vamos rearranjar as classes de modo que as de maior codimensão aparecem primeiro e as de menor codimensão por último. Escreva a última classe como  $\gamma_n = \lambda_1 \cup \lambda_2$  onde cada uma dessas novas classes é de codimensão estritamente menor que a de  $\gamma_n$ .

Agora o cálculo é feito no espaço  $\overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)$ . Denotemos as marcas por  $m_1, m_2, p_1, \dots, p_{n-1}$ . Considere a classe

$$\nu_{m_1}^*(\lambda_1) \cup \nu_{m_2}^*(\lambda_2) \cup \nu_{p_1}^*(\gamma_1) \cup \dots \cup \nu_{p_{n-1}}^*(\gamma_{n-1})$$

que fornece a classe de uma curva. (Note como é exatamente o que foi feito para cônicas.) Integre esta classe sobre os dois divisores equivalentes de fronteira,  $D(m_1, m_2 | p_1, p_2)$  e  $D(m_1, p_1 | m_2, p_2)$ , ou seja: intersekte a curva com esses divisores. Aplicando o lema de recursão, obtemos uma equação envolvendo vários invariantes de Gromov-Witten, todos do tipo

$$I_{d_A} \left( \prod_{a \in A} \gamma_a \cdot h^e \right) I_{d_B} \left( \prod_{b \in B} \gamma_b \cdot h^{r-e} \right).$$

Aqui os produtos são sobre todas as classes indexadas por marcas na respectiva parte  $A$  ou  $B$ . As classes  $h^e$  e  $h^{r-e}$  correspondem ao ponto de interseção  $x$ . Agora se tanto  $d_A$  como  $d_B$  são estritamente positivos, os invariantes de Gromov-Witten à vista são já conhecidos pela hipótese de indução, pois o grau caiu.

Para ver que o algoritmo termina, temos que examinar a contribuição para  $d_A = 0$  e  $d_B = 0$ . Sabemos (cf. 4.2.1) que os invariantes de Gromov-Witten de grau zero são os relativos a 3 marcas. Logo, só aparecem os quatro termos seguintes,

$$\begin{aligned} & I_0(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot h^{r-c_1-c_2}) I_d(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdots \gamma_{n-1} \cdot h^{c_1+c_2}), \\ & I_0(\lambda_1 \cdot \gamma_1 \cdot h^{r-c_1-b_1}) I_d(h^{b_1+c_1} \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdots \gamma_{n-1} \cdot \lambda_2), \\ & I_0(\lambda_2 \cdot \gamma_2 \cdot h^{r-c_2-b_2}) I_d(\gamma_1 \cdot h^{c_2+b_2} \cdot \gamma_3 \cdots \gamma_{n-1} \cdot \lambda_1), \\ & I_0(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot h^{r-b_1-b_2}) I_d(h^{b_1+b_2} \cdot \lambda_2 \cdot \gamma_3 \cdots \gamma_{n-1} \cdot \lambda_1), \end{aligned}$$

onde  $c_i = \text{codim } \lambda_i$  e  $b_i = \text{codim } \gamma_i$ .

O primeiro termo é exatamente o invariante  $I_d(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$  que estávamos procurando. Os outros três termos todos apresentam um  $\lambda_i$  no fim como sua classe de menor codimensão. Portanto, podemos despachá-los para a recursão: ao fim e cabo o último termo vai ser de codimensão 1, quando poderemos então removê-lo como em 4.2.4. Aí chegamos a termos com menos marcas.

Continuando, chega-se por fim à situação de apenas duas marcas; aqui o único invariante não nulo é  $I_1(h^r \cdot h^r) = 1$ .  $\square$

**4.4.2 Observação.** O algoritmo descrito acima foi implementado em MAPLE e pode ser solicitado por correio eletrônico.

## 4.5 Generalizações e referências

**4.5.1 Invariantes de Gromov-Witten para variedades convexas.** São definidos de forma análoga. Em FP-NOTES é feito o cálculo para  $\mathbb{P}^3$  e para a quádrlica lisa de dimensão 3. No artigo piloto de Di Francesco e Itzykson [17] há mais exemplos, como  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  e  $\text{Gr}(1, \mathbb{P}^3)$  (embora a noção de invariante de Gromov-Witten não esteja explicitada). Outro exemplo interessante é fornecido por Ernström e Kennedy [14]. Eles definem um espaço de *levantamentos estáveis* de  $\mathbb{P}^2$  que é uma subvariedade do espaço de mapas estáveis na variedade de incidência  $I$  de pontos e retas em  $\mathbb{P}^2$ . Este espaço codifica informações de tangências.

Para tais variedades, um problema extra é que o valor inicial para a recursão rodar, não é mais tão simples como o caso de “uma reta passando por dois pontos” em  $\mathbb{P}^r$ . Também não é comum como no caso de  $\mathbb{P}^r$  só ter uma relação recursiva. Por exemplo, no caso da variedade de incidência  $I$  de (Ernström e Kennedy [14]), precisamos de 4 equações recursivas e de 6 números iniciais.

A maneira mais inteligente de organizar as informações que codificam os invariantes de Gromov-Witten é a cohomologia quântica. Veja o próximo capítulo.

**4.5.2 Variedades não-convexas.** A definição e o cálculo de invariantes de Gromov-Witten para variedades projetivas não convexas requer o uso da classe fundamental virtual (veja 2.10.4). Nesse caso, em geral, os invariantes de Gromov-Witten não têm mais interpretação enumerativa. Exemplos relativamente simples são fornecidos pelos artigos de Göttsche e Pandharipande [23] e Gathmann [21] que estudam invariantes de Gromov-Witten para espaços projetivos (notavelmente  $\mathbb{P}^2$ ) explodidos em pontos. É mostrado que os invariantes de Gromov-Witten são enumerativos para  $\mathbb{P}^2$  explodido em até 8 pontos, para  $\mathbb{P}^3$  explodido em até 4 pontos, e em geral para  $\mathbb{P}^r$  explodido em 1 ponto. A interpretação enumerativa nesse caso são números de curvas racionais em  $\mathbb{P}^r$  com pontos múltiplos especificados.

**4.5.3 Reconstrução em geral.** Dada uma variedade  $X$ , a condição para valer reconstrução é que  $A^*(X)$  seja gerado por divisores, e os dados iniciais são então todos os invariantes com  $n \leq 2$ . Vimos que para  $\mathbb{P}^r$  o único invariante com  $n \leq 2$  é  $I_1(h^r \cdot h^r)$ . Mas em casos como por exemplo superfícies K3 ou a hipersuperfície quártica em  $\mathbb{P}^4$ , para cada  $d$ , as curvas racionais já são finitas em número mesmo sem condições impostas; ou seja, os invariantes iniciais necessários para a recursão são todos os  $I_d()$ . Isto quer dizer que reconstrução não produz qualquer informação. (No caso da quártica genérica de  $\mathbb{P}^4$  a finitude para  $d \gg 0$  ainda é conjectural.)

**4.5.4 Descendentes gravitacionais.** Outra generalização importante é o de *descendentes gravitacionais*. Enquanto nos invariantes de Gromov-Witten intervêm apenas imagens recíprocas de classes em  $\mathbb{P}^r$ , os descendentes envolvem também as seguintes classes. Tome o mapa de esquecimento  $\varepsilon : \overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  e seja  $\sigma_i$  a seção que repete a  $i$ -ésima marca (cf. 1.5.12). O feixe dualizante relativo  $\omega_\varepsilon$  é inversível, e sua imagem recíproca ao longo da seção  $\sigma_i$  se chama uma *reta cotangente*. A fibra de  $\sigma_i^* \omega_\varepsilon$  num ponto de módulos  $[\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r]$  é nada mais que o espaço cotangente  $(T_{p_i} C)^*$ , onde  $p_i$  é a marca especificada por  $\sigma_i$ . A *classe de psi* é sua primeira classe de Chern:

$$\psi_i := c_1(\sigma_i^* \omega_\varepsilon).$$

Um descendente gravitacional é, por definição, uma integral envolvendo imagens recíprocas de classes por mapas de avaliação e classes de psi. Sendo  $\psi_i$  uma classe *tautológica*, espera-se que se comporte bem e tenha um papel importante. De fato, em gênero positivo, as únicas recursões conhecidas entre os invariantes de Gromov-Witten envolvem também as classes de psi, ou seja, os descendentes gravitacionais.

As classes de psi também têm um papel importante para tratar condições de tangências (veja Kock [31]), bem como outros comportamentos de natureza infinitesimal.

**4.5.5 Tree-level systems e estruturas de CohFT.** Indicamos aqui a noção de uma estrutura de *cohomological field theory* (CohFT). É uma generalização das construções que fizemos com invariantes de Gromov-Witten, e é bastante usado na literatura, especialmente na parte que origina na teoria das cordas.

Em vez de olhar apenas para as interseções de dimensão máxima como no caso dos invariantes de Gromov-Witten, você pode olhar para qualquer interseção. Ou seja, comece por qualquer coleção de classes de cohomologia

de  $X$ ; faça a imagem recíproca para  $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$  via mapas de avaliação; e agora, em vez de integrar aqui, tome imagem direta para  $\overline{M}_{0,n}$  pelo mapa de esquecimento  $\eta : \overline{M}_{0,n}(X, \beta) \rightarrow \overline{M}_{0,n}$  (cf. 2.6.6). Resulta daí, para cada  $n \geq 3$ , um mapa

$$\begin{aligned} I_{n,d}^X : A^*(X)^{\otimes n} &\longrightarrow A^*(\overline{M}_{0,n}) \\ \gamma &\longmapsto \eta_* (\underline{\nu}^*(\gamma)). \end{aligned}$$

Esta coleção de mapas é chamada de *tree-level system*, conforme Kontsevich-Manin [33]. Da mesma forma que interseção com divisores fornece o lema de recursão 4.3.3 no caso dos invariantes de Gromov-Witten, interseção com um divisor  $D = D(A|B) \subset \overline{M}_{0,n}$  leva a uma relação recursiva parecida que compara  $I_{n,d}^X$  com os  $I_{n_A+1,d_A}^X, I_{n_B+1,d_B}^X$  dos galhos.

Em geral, qualquer coleção de mapas multilineares e invariantes sob permutação  $A^*(X)^{\otimes n} \rightarrow A^*(\overline{M}_{0,n})$  satisfazendo a recursão acima referida é chamado de uma estrutura de *cohomological field theory* (CohFT). Veja as notas de Manin [34]. Não precisa ser definido apenas por imagens recíprocas de classes, pode incluir também outras classes, por exemplo classes de psi.

# Capítulo 5

## Cohomologia quântica

Os invariantes de Gromov-Witten podem ser utilizados para definir um *produto quântico* em  $A^*(\mathbb{P}^r)$ . A *associatividade* deste produto fornece relações entre os invariantes de Gromov-Witten. Como um caso particular, vamos recuperar a fórmula de Kontsevich.

### 5.1 O produto quântico

O ponto de partida é o anel de Chow  $A^*(\mathbb{P}^r)$  e seu produto “clássico”  $\cup$ . Trabalhamos sempre com a base de geradores

$$h^0, h^1, \dots, h^{r-1}, h^r,$$

onde  $h^0$  é a classe fundamental,  $h^1$  a classe de um hiperplano, e  $h^r$  a classe de um ponto. É imediato que valem as relações

$$\int_{\mathbb{P}^r} h^i \cup h^j = \begin{cases} 0 & \text{quando } i + j \neq r \\ 1 & \text{quando } i + j = r. \end{cases}$$

Observemos que o produto clássico pode ser escrito em termos de invariantes de Gromov-Witten:

$$h^i \cup h^j = \sum_{e=0}^r I_0(h^i \cdot h^j \cdot h^e) h^{r-e}.$$

Com efeito, devido ao lema 4.2.1 temos  $I_0(h^i \cdot h^j \cdot h^e) = \int_{\mathbb{P}^r} h^i \cup h^j \cup h^e$ . Logo, na soma a única contribuição ocorre para  $e = r - i - j$ , e tudo que sobra é  $h^{i+j}$ , como afirmado.

Vamos agora introduzir um novo produto, o *produto quântico*. Ao invés de usar apenas  $I_0(h^i \cdot h^j \cdot h^k)$ , usaremos *todos* os invariantes de Gromov-Witten, para assim codificar toda informação sobre contagem de incidências.

Fixe uma classe arbitrária  $\gamma \in A^*(\mathbb{P}^r)$  ( $\gamma$  é chamada a *classe deformante* do produto), e seja  $T$  um variável formal. Para cada  $i, j, k = 0, \dots, r$ , ponha

$$\Phi_{ijk} := \Phi_{ijk}(\gamma) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \sum_{d \geq 0} I_d(\gamma^{\bullet n} \cdot h^i \cdot h^j \cdot h^k).$$

Aqui,  $\gamma^{\bullet n}$  denota  $\gamma \cdots \gamma$  ( $n$  vezes) (e não  $\gamma \cup \cdots \cup \gamma$  em  $A^*(\mathbb{P}^r)$ ).

**5.1.1 Observação.** Note que a soma interna  $\sum_{d \geq 0} I_d(\gamma^{\bullet n} \cdot h^i \cdot h^j \cdot h^k)$  é finita: para cada  $n$  fixo, existe apenas um número finito de valores para  $d$  dando uma contribuição. Com efeito, podemos supor que  $\gamma$  é homogênea de codimensão  $c$ . Então a codimensão total é  $nc + i + j + k$  enquanto  $\dim \bar{M} = rd + r + d + n$ , pois há  $n + 3$  marcas. Igualando esses dois números vemos que apenas

$$d = \frac{n(c-1) + i + j + k - r}{r+1}$$

dá alguma contribuição. Portanto  $\Phi_{ijk}(\gamma)$  é uma série de potências formal.

**Definição.** O *produto quântico*  $*$  é definido por

$$h^i * h^j := \sum_{e=0}^r \Phi_{ije} h^{r-e}.$$

O segundo membro é um elemento em  $A^*(\mathbb{P}^r) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[[T]]$ . Estendendo por  $\mathbb{Q}[[T]]$ -linearidade, o produto fica definido em todo  $A^*(\mathbb{P}^r) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[[T]]$ , o *anel de cohomologia quântica*.

Visto que obviamente  $\Phi_{ijk}$  é simétrico nos índices, o produto quântico é comutativo.

**5.1.2 Observação.** Na verdade temos definida toda uma família de produtos quânticos: um para cada classe deformante  $\gamma \in A^*(\mathbb{P}^r)$ , homogênea ou não. No que concerne as propriedades formais do produto, não importa qual é  $\gamma$ . Na página 101 vamos escolher para  $\mathbb{P}^2$  a classe  $\gamma = h^2$ , por simplicidade. Em 5.4.2 veremos o caso de  $\gamma = h$ .

**5.1.3 Observação.** Se um dos três índices de  $\Phi$  é 0, digamos  $i = 0$ , então

$$\begin{aligned}\Phi_{0jk} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{d \geq 0} I_d(\gamma^{\bullet n} \cdot h^0 \cdot h^j \cdot h^k) \\ &= I_0(h^0 \cdot h^j \cdot h^k) \\ &= \int_{\mathbb{P}^r} h^j \cup h^k,\end{aligned}$$

pois os únicos invariantes de Gromov-Witten incluindo a classe fundamental são os de grau zero e com 3 marcas (conforme 4.2.1).

**5.1.4 Lema.** *A classe fundamental  $h^0$  é a identidade para  $*$ .*

*Demonstração.* Usando a observação anterior, podemos escrever

$$h^0 * h^i = \sum_{e=0}^r (\int h^i \cup h^e) h^{r-e} = h^i$$

□

## 5.2 Associatividade

Este é o resultado central. Evidentemente, basta estabelecer a identidade para os geradores.

**5.2.1 Teorema.** *O produto quântico é associativo, ou seja:*

$$(h^i * h^j) * h^k = h^i * (h^j * h^k).$$

*Demonstração.* O resultado não é muito mais do que uma conseqüência formal da equivalência fundamental entre os divisores de fronteira,  $D(p_1 p_2 | p_3 p_4) \equiv D(p_2 p_3 | p_1 p_4)$ , juntamente com o lema de recursão 4.3.3. A única dificuldade da prova é a notação que tende a ser bastante carregada.

Vamos inicialmente expandir os dois lados da relação de associatividade para ver o que ela de fato significa. No lado esquerdo achamos

$$(h^i * h^j) * h^k = \left( \sum_{e=0}^r \Phi_{ije} h^{r-e} \right) * h^k = \sum_{e=0}^r \sum_{l=0}^r \Phi_{ije} \Phi_{fkl} h^{r-l},$$

onde estamos usando provisoriamente a notação  $f := r - e$ . Expandindo da mesma forma o lado direito vemos que a associatividade é dada por

$$\sum_{e=0}^r \sum_{l=0}^r \Phi_{ije} \Phi_{fkl} h^{r-l} = \sum_{e=0}^r \sum_{l=0}^r \Phi_{jke} \Phi_{fil} h^{r-l}.$$

Esta identidade é equivalente a valer

$$\sum_{e=0}^r \Phi_{ije} \Phi_{fkl} = \sum_{e=0}^r \Phi_{jke} \Phi_{fil} \quad \text{para cada } l = 0, \dots, r.$$

Se expandirmos, obteremos a seguinte identidade de séries de potências,

$$\begin{aligned} & \sum_{e=0}^r \left( \sum_{n_A, d_A} \frac{T^{n_A}}{n_A!} I_{d_A}(\gamma^{\bullet n_A} \cdot h^i \cdot h^j \cdot h^e) \right) \left( \sum_{n_B, d_B} \frac{T^{n_B}}{n_B!} I_{d_B}(\gamma^{\bullet n_B} \cdot h^k \cdot h^l \cdot h^{r-e}) \right) \\ = & \sum_{e=0}^r \left( \sum_{n_A, d_A} \frac{T^{n_A}}{n_A!} I_{d_A}(\gamma^{\bullet n_A} \cdot h^j \cdot h^k \cdot h^e) \right) \left( \sum_{n_B, d_B} \frac{T^{n_B}}{n_B!} I_{d_B}(\gamma^{\bullet n_B} \cdot h^i \cdot h^l \cdot h^{r-e}) \right). \end{aligned}$$

Aqui, os sub-índices  $A$  e  $B$  são apenas para distinguir os índices das somas. Comparando os  $n$ -ésimos coeficientes das séries, vemos que a relação acima é equivalente à seguinte igualdade de números racionais, para cada  $n$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{d_A, d_B \\ n_A + n_B = n}} \sum_{e=0}^r \left( \frac{1}{n_A!} I_{d_A}(\gamma^{\bullet n_A} \cdot h^i \cdot h^j \cdot h^e) \frac{1}{n_B!} I_{d_B}(\gamma^{\bullet n_B} \cdot h^k \cdot h^l \cdot h^{r-e}) \right) \\ = & \sum_{\substack{d_A, d_B \\ n_A + n_B = n}} \sum_{e=0}^r \left( \frac{1}{n_A!} I_{d_A}(\gamma^{\bullet n_A} \cdot h^j \cdot h^k \cdot h^e) \frac{1}{n_B!} I_{d_B}(\gamma^{\bullet n_B} \cdot h^i \cdot h^l \cdot h^{r-e}) \right). \end{aligned}$$

Esta última identidade será obtida agora partindo da equivalência linear 2.7.6.1.

Fixe  $d$  e  $n$  arbitrários e considere o espaço  $\overline{M}_{0, n+4}(\mathbb{P}^r, d)$  com quatro marcas importantes  $p_1, p_2, p_3, p_4$  e mais  $n$  marcas que não teremos necessidade de distinguir. Consideremos a relação fundamental de fronteira

$$D(p_1 p_2 | p_3 p_4) \equiv D(p_2 p_3 | p_1 p_4).$$

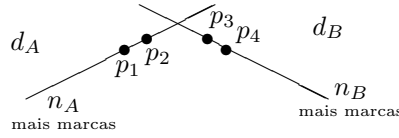
Tomamos agora as quatro classes  $h^i, h^j, h^k, h^l$  e fazemos imagem recíproca pelos mapas de avaliação correspondentes às quatro marcas importantes. Consideremos ainda as imagens recíprocas de  $n$  cópias de  $\gamma$  através dos mapas de

avaliação correspondentes às  $n$  marcas restantes. Como no capítulo anterior, usamos a notação  $\underline{\nu}^*(\gamma)$  para denotar o produto-cup destas  $n$  classes.

Integramos o referido produto sobre os dois divisores equivalentes, obtendo a identidade

$$\begin{aligned} \int_{D(p_1 p_2 | p_3 p_4)} \underline{\nu}^*(\gamma) \cup \nu_1^*(h^i) \cup \nu_2^*(h^j) \cup \nu_3^*(h^k) \cup \nu_4^*(h^l) \\ = \int_{D(p_2 p_3 | p_1 p_4)} \underline{\nu}^*(\gamma) \cup \nu_1^*(h^i) \cup \nu_2^*(h^j) \cup \nu_3^*(h^k) \cup \nu_4^*(h^l). \end{aligned}$$

Façamos a expansão do lado esquerdo. O divisor  $D(p_1 p_2 | p_3 p_4)$  é constituído de várias componentes, correspondentes a todas as possíveis maneiras de distribuir as  $n$  marcas não especificadas e os graus sobre os dois galhos. Ou seja, é a união dos  $\frac{n!}{n_A! n_B!}$  divisores do tipo indicado na figura abaixo.



Note que como as  $n$  marcas desempenham papéis simétricos, todas essas componentes dão a mesma contribuição. A cada uma delas aplicamos o lema de recursão (na verdade seu corolário 4.3.4) para obter a seguinte expressão do lado esquerdo da equivalência:

$$\sum_{\substack{d_A + d_B = d \\ n_A + n_B = n}} \frac{n!}{n_A! n_B!} \left( \sum_{e=0}^r I_{d_A}(\gamma^{\bullet n_A} \cdot h^i \cdot h^j \cdot h^e) I_{d_B}(\gamma^{\bullet n_B} \cdot h^k \cdot h^l \cdot h^{r-e}) \right).$$

Fazemos o mesmo para o lado direito. Cancelando o fator  $n!$  nos dois lados, e somando sobre todos os valores de  $d$  (lembre que só um número finito de valores para  $d$  contribui) chegamos a

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{d_A, d_B \\ n_A + n_B = n}} \left( \sum_{e=0}^r \frac{1}{n_A! n_B!} I_{d_A}(\gamma^{\bullet n_A} \cdot h^i \cdot h^j \cdot h^e) I_{d_B}(\gamma^{\bullet n_B} \cdot h^k \cdot h^l \cdot h^{r-e}) \right) \\ = & \sum_{\substack{d_A, d_B \\ n_A + n_B = n}} \left( \sum_{e=0}^r \frac{1}{n_A! n_B!} I_{d_A}(\gamma^{\bullet n_A} \cdot h^j \cdot h^k \cdot h^e) I_{d_B}(\gamma^{\bullet n_B} \cdot h^i \cdot h^l \cdot h^{r-e}) \right), \end{aligned}$$

que é exatamente a identidade dos  $n$ -ésimos coeficientes das séries que queríamos provar iguais. A associatividade está estabelecida.  $\square$

### 5.3 A fórmula de Kontsevich via cohomologia quântica

Para extrair informação enumerativa da associatividade, é conveniente separar de  $\Phi_{ijk}$  a parte  $\Gamma_{ijk}$  de grau  $d > 0$ . Esta é a informação que concerne a curvas honestas. Escrevemos assim

$$\Gamma_{ijk} := \sum_{\substack{d \geq 1 \\ n \geq 0}} \frac{T^n}{n!} I_d(\gamma^{\bullet n} \cdot h^i \cdot h^j \cdot h^k).$$

Como os únicos invariantes de Gromov-Witten de grau zero são aqueles com 3 marcas, podemos escrever

$$\Phi_{ijk} = I_0(h^i \cdot h^j \cdot h^k) + \Gamma_{ijk}.$$

Similarmente, podemos identificar no produto quântico a parte clássica e a parte quântica:

$$\begin{aligned} h^i * h^j &= \sum_{e=0}^r (I_0(h^i \cdot h^j \cdot h^k) + \Gamma_{ijk}) h^{r-e} \\ &= (h^i \cup h^j) + \sum_{e=0}^r \Gamma_{ije} h^{r-e}. \end{aligned}$$

Concentramo-nos agora em  $\mathbb{P}^2$ . Temos apenas três classes a tratar:  $h^0$ ,  $h^1$  e  $h^2$ ; vamos explicitar a tabela para o produto quântico. Escrevendo o produto em parte clássica mais parte quântica, e lembrando que  $\Gamma_{ije} = 0$  sempre que um dos três índices  $i, j, e$  se anula, a tabela fica

$$\begin{aligned} h^1 * h^1 &= h^2 + \Gamma_{111} h^1 + \Gamma_{112} h^0 \\ h^1 * h^2 &= \Gamma_{121} h^1 + \Gamma_{122} h^0 \\ h^2 * h^2 &= \Gamma_{221} h^1 + \Gamma_{222} h^0. \end{aligned}$$

Vamos escrever agora o que nos diz a relação de associatividade. O único caso não trivial é  $(h^1 * h^1) * h^2 = h^1 * (h^1 * h^2)$ . Por um lado,

$$(h^1 * h^1) * h^2 = \Gamma_{221} h^1 + \Gamma_{222} h^0 + \Gamma_{111}(\Gamma_{121} h^1 + \Gamma_{122} h^0) + \Gamma_{112} h^2,$$

enquanto que por outro,

$$h^1 * (h^1 * h^2) = \Gamma_{121}(h^2 + \Gamma_{111}h^1 + \Gamma_{112}h^0) + \Gamma_{122}h^1.$$

Igualando os  $h^0$ -termos, achamos a relação

$$\boxed{\Gamma_{222} + \Gamma_{111}\Gamma_{122} = (\Gamma_{112})^2} \quad (5.3.0.1)$$

Calculemos cada um dos  $\Gamma_{ijk}$  que aparecem na relação. Para facilitar a conta, fixe uma vez por todas a classe

$$\gamma := h^2,$$

que é a classe de um ponto.

Na soma dupla da definição de  $\Gamma_{ijk}$ , só poucos valores de  $d$  e  $n$  dão contribuição. Temos  $n + 3$  marcas, portanto o nosso espaço é  $\overline{M}_{0,n+3}(\mathbb{P}^2, d)$ , cuja dimensão é  $3d + 2 + n$ . Já a soma das codimensões das classes é  $\sum \text{codim} = 2n + i + j + k$ . Igualando esses dois números, achamos que apenas no caso

$$n = 3d + 2 - i - j - k$$

ganhamos qualquer contribuição.

Vejamos agora por exemplo  $\Gamma_{122}$ . As únicas contribuições na soma aparecem para  $n = 3d + 2 - 1 - 2 - 2 = 3d - 3$ . Logo, usando as propriedades dos invariantes de Gromov-Witten, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{122} &= \sum_{\substack{d \geq 1 \\ n \geq 0}} \frac{T^n}{n!} I_d(\gamma^{\bullet n} \cdot h^1 \cdot h^2 \cdot h^2) \\ &= \sum_{d \geq 1} \frac{T^{3d-3}}{(3d-3)!} I_d(\underbrace{h^2 \cdots h^2}_{3d-3} \cdot h^1 \cdot h^2 \cdot h^2) \\ &= \sum_{d \geq 1} \frac{T^{3d-3}}{(3d-3)!} d \cdot I_d(\underbrace{h^2 \cdots h^2}_{3d-1}) \\ &= \sum_{d \geq 1} \frac{T^{3d-3}}{(3d-3)!} d \cdot N_d \end{aligned}$$

Analogamente se calculam  $\Gamma_{111}$ ,  $\Gamma_{112}$  e  $\Gamma_{222}$ . Resumindo:

$$\begin{aligned}\Gamma_{111} &= \sum_{d \geq 1} \frac{d^3 N_d}{(3d-1)!} T^{3d-1}, & \Gamma_{112} &= \sum_{d \geq 1} \frac{d^2 N_d}{(3d-2)!} T^{3d-2}, \\ \Gamma_{122} &= \sum_{d \geq 1} \frac{d N_d}{(3d-3)!} T^{3d-3}, & \Gamma_{222} &= \sum_{d \geq 2} \frac{N_d}{(3d-4)!} T^{3d-4}.\end{aligned}$$

Note que, na última soma, começamos só com  $d = 2$ , pois para  $d = 1$ , não há contribuição porque a soma das codimensões é grande demais.

Podemos agora explicitar os produtos que precisamos,

$$\begin{aligned}\Gamma_{111}\Gamma_{122} &= \sum_{d \geq 2} \sum_{d_A+d_B=d} \frac{d_A^3 N_{d_A}}{(3d_A-1)!} \frac{d_B N_{d_B}}{(3d_B-3)!} T^{3d-4} \\ (\Gamma_{112})^2 &= \sum_{d \geq 2} \sum_{d_A+d_B=d} \frac{d_A^2 N_{d_A}}{(3d_A-2)!} \frac{d_B^2 N_{d_B}}{(3d_B-2)!} T^{3d-4},\end{aligned}$$

onde  $d_A$  e  $d_B$  são estritamente positivos.

Inserindo essas expressões na equação (5.3.0.1) ficamos com

$$\begin{aligned}\sum_{d \geq 2} \frac{N_d}{(3d-4)!} T^{3d-4} + \sum_{d \geq 2} \sum_{d_A+d_B=d} \frac{d_A^3 N_{d_A}}{(3d_A-1)!} \frac{d_B N_{d_B}}{(3d_B-3)!} T^{3d-4} \\ = \sum_{d \geq 2} \sum_{d_A+d_B=d} \frac{d_A^2 N_{d_A}}{(3d_A-2)!} \frac{d_B^2 N_{d_B}}{(3d_B-2)!} T^{3d-4}.\end{aligned}$$

Agora iguale os coeficientes de  $T^{3d-4}$  nos dois lados da equação, multiplique-os por  $(3d-4)!$  e observe que  $\frac{(3d-4)!}{(3d_A-1)!(3d_B-3)!} = \binom{3d-4}{3d_A-1}$ . Segue a igualdade

$$N_d + \sum_{d_A+d_B=d} \binom{3d-4}{3d_A-1} d_A^3 d_B N_{d_A} N_{d_B} = \sum_{d_A+d_B=d} \binom{3d-4}{3d_A-2} d_A^2 d_B^2 N_{d_A} N_{d_B},$$

recuperando assim a fórmula de Kontsevich.

## 5.4 Generalizações e referências

**5.4.1 Sem coordenadas.** Uma definição elegante do produto quântico é dada em Ernström-Kennedy [15]. Sem menção a bases ou coordenadas eles

põem como produto de duas classes  $\alpha, \beta \in A^*(\mathbb{P}^r)$  (e classe de deformação  $\gamma$ )

$$\alpha * \beta := \sum_n \frac{T^n}{n!} \sum_{d \geq 0} \nu_{3*}(\underline{\nu}^*(\gamma) \cup \nu_1^* \alpha \cup \nu_2^* \beta \cap [\overline{M}_{0,n+3}(\mathbb{P}^r, d)]).$$

Aqui, estamos com três marcas importantes  $p_1, p_2, p_3$ , e mais  $n$  marcas sem perfil, e como sempre,  $\underline{\nu}^*(\gamma)$  denote o produto-cup das  $n$  classes  $\nu_i^*(\gamma)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Essa abordagem abstrata foi usada ([15]), no caso do espaço de módulos dos levantamentos estáveis, para definir um *produto de contato* para  $\mathbb{P}^2$ . É um produto mais geral que o produto quântico, que codifica também informações de primeira ordem, como por exemplo condições de tangência.

**5.4.2 Anel de cohomologia quântica pequeno.** Uma variação do anel de cohomologia quântica que traz simplificações substanciais é a noção de anel de cohomologia quântica *pequeno*. Em vez de permitir qualquer classe deformante, são permitidas apenas as classes dos divisores (conforme FP-NOTES, Section 10).

Vejam, no caso de  $\mathbb{P}^r$ , como isto simplifica tudo. Temos

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_{ijk} := \Phi_{ijk}(h) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \sum_{d \geq 0} I_d(h^{\bullet n} \cdot h^i \cdot h^j \cdot h^k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \sum_{d \geq 0} d^n \cdot I_d(h^i \cdot h^j \cdot h^k) \end{aligned}$$

via lemma 4.2.4. Ou seja, estão envolvidos apenas invariantes com três marcas. Observe ainda que para que haja contribuição de  $I_d(h^i \cdot h^j \cdot h^k)$  precisamos de  $rd + r + d = i + j + k$ , o que é possível apenas para  $d = 0$  (a parte clássica) e para  $d = 1$  (que é então a parte quântica). Pondo  $q := \exp(T)$  obtemos

$$\overline{\Phi}_{ijk} = I_0(h^i \cdot h^j \cdot h^k) + q \cdot I_1(h^i \cdot h^j \cdot h^k).$$

Expandindo a definição do produto quântico chegamos agora à seguinte descrição do produto pequeno:

$$h^i * h^j = \begin{cases} h^{i+j} & \text{para } i + j \leq r, \\ q h^{i+j-r-1} & \text{para } r < i + j \leq 2r. \end{cases}$$

Segue daí que, enquanto o anel clássico é  $A^*(\mathbb{P}^r) \simeq \mathbb{Z}[h]/(h^{r+1})$ , o anel quântico pequeno é isomorfo a

$$\mathbb{Z}[h, q]/(h^{r+1} - q).$$

A conclusão é que para  $\mathbb{P}^r$  ficou tudo tão simples que a associatividade é trivial: neste caso o produto quântico pequeno não codifica informação enumerativa interessante. Porém para variedades um pouco menos simples, mesmo os invariantes de Gromov-Witten com três marcas são não-triviais. Veja por exemplo Crauder e Miranda [11] para superfícies racionais; Beauville [5] para certas interseções completas. Vale registrar que existe toda uma teoria para grassmannianas e variedades de bandeiras — veja para começar as exposições de Pandharipande, Fulton, e Ciocan-Fontanine na coleção de Mittag-Leffler [2].

**5.4.3 Variedades projetivas homogêneas mais gerais.** Neste capítulo, algumas simplificações foram introduzidas por considerarmos apenas o caso de  $\mathbb{P}^r$ . Mais geralmente, para uma variedade homogênea projetiva  $X$ , com base  $T_0, \dots, T_r$  para  $A^*(X)$ , entra em jogo a matriz  $(g_{ij})$  de acoplamento de interseção, definida como

$$g_{ij} = \int_X T_i \cup T_j.$$

Como a forma bilinear definida pelo produto de interseção é não degenerada, a matriz  $(g_{ij})$  é inversível. Seja  $(g^{ij})$  a matriz inversa de  $(g_{ij})$ . Para  $\mathbb{P}^2$  temos

$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a definição do produto quântico fica  $T_i * T_j = \sum_{e,f} \Phi_{ije} g^{ef} T_f$ .

Em FP-NOTES juntam-se todos os produtos quânticos num só, pagando o preço de se ter mais variáveis formais em jogo. O seu anel de cohomologia quântica fica então  $A^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[[y_0, \dots, y_r]]$  onde  $y_0, \dots, y_r$  é base dual de  $T_0, \dots, T_r$ .

As “funções”  $\Phi_{ijk}$  têm agora a seguinte importante interpretação: são as derivadas parciais  $\Phi_{ijk} = \partial_i \partial_j \partial_k \Phi$  de uma série formal

$$\Phi \in A^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[[y_0, \dots, y_r]].$$

Esta série (referida na literatura como o *potencial*) é dada por

$$\Phi(y_0, \dots, y_r) = \sum_{n \geq 3} \sum_{d \geq 0} \frac{y_0^{n_0} \cdots y_r^{n_r}}{n_0! \cdots n_r!} I_d(T_0^{n_0} \cdots T_r^{n_r}).$$

**5.4.4 Variedades de Frobenius.** Só para dar a idéia de como a cohomologia quântica se situa num contexto mais amplo, concluímos a exposição com um exercício de geometria riemanniana(!) (veja do Carmo [10] para definições).

Seja  $X$  uma variedade homogênea projetiva (digamos uma grassmanniana), e considere o espaço vetorial  $V = H^*(X, \mathbb{C})$  como uma variedade diferenciável. Seja  $T_0, \dots, T_r$  uma base (digamos constituída pelos ciclos de Schubert, se  $X$  é uma grassmanniana), e sejam  $\partial_0, \dots, \partial_r$  os correspondentes *campos de vetores*. A matriz  $(g_{ij})$  define uma *métrica* em  $V$  por  $\langle \partial_i | \partial_j \rangle := g_{ij}$ , chamada a métrica de Poincaré. Defina uma *conexão* (formal)  $\nabla$  pelos símbolos de Christoffel  $A_{ij}^f := \sum_e \Phi_{ije} g^{ef}$ , ou seja

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_f A_{ij}^f \partial_f = \sum_{e,f} \Phi_{ije} g^{ef} \partial_f.$$

Lembre que a *curvatura* de uma conexão  $A_{ij}^f$  é dada em coordenadas por

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \sum_m R_{ijk}^m \partial_m,$$

onde (cf. [10], p. 93)

$$R_{ijk}^m = \sum_f A_{ik}^f A_{fj}^m - \sum_f A_{jk}^f A_{fi}^m + \partial_j A_{ik}^m - \partial_i A_{jk}^m.$$

Uma conexão é dita *plana* se sua curvatura é identicamente nula.

Agora afirmamos: *A conexão  $\nabla$  acima construída é plana se e somente se o produto quântico é associativo.*

Senão vejamos: na expressão de  $R_{ijk}^m$  os dois últimos termos se anulam mutuamente graças à observação que  $\Phi_{ijk} = \partial_i \partial_j \partial_k \Phi$ , e que não importa a ordem das derivadas parciais. Portanto,  $\partial_j A_{ik}^m = \sum_l \partial_j \Phi_{ikl} g^{lm} = \sum_l \partial_i \Phi_{jkl} g^{lm} = \partial_i A_{jk}^m$ . Vamos agora expandir os dois primeiros termos de  $R_{ijk}^m$ :

$$\sum_f A_{ik}^f A_{fj}^m - \sum_f A_{jk}^f A_{fi}^m = \sum_{e,f,l} \Phi_{ike} g^{ef} \Phi_{fjl} g^{lm} - \sum_{e,f,l} \Phi_{jke} g^{ef} \Phi_{fil} g^{lm}.$$

Sendo  $(g^{lm})$  inversível, essa expressão ser igual a zero é equivalente a ter para todo  $l$  a identidade

$$\sum_{e,f} \Phi_{ike} g^{ef} \Phi_{fjl} - \sum_{e,f} \Phi_{jke} g^{ef} \Phi_{fil} = 0,$$

que é nada mais que a relação de associatividade.

Este formalismo é devido a Dubrovin [12] e é explorado desde o artigo original de Kontsevich e Manin [33]. Uma introdução elementar a este aspecto de cohomologia quântica é fornecida pelas notas de Wotzlaw [47]. Mais geralmente temos a seguinte definição que, pela discussão acima, abrange  $H^*(X, \mathbb{C})$ .

*Definição.* Uma *variedade de Frobenius* (formal) é uma variedade riemanniana  $(V, g)$  com uma conexão (formal) plana  $A_{ij}^f$ , que satisfaz a seguinte condição de integrabilidade: existe um “potencial”  $\Phi$  tal que  $A_{ij}^f = \sum \Phi_{ije} g^{ef}$ .

**5.4.5 CohFT e variedades de Frobenius.** Vimos neste capítulo como a associatividade (cf. 5.2.1) é uma consequência do lema de recursão 4.3.3. Existe uma generalização deste princípio que mencionamos por fim. Enquanto associatividade (junto com existência do potencial) se generaliza no conceito de variedade de Frobenius, o lema de recursão tem como generalização as estruturas de CohFT (cf. 4.5.5). Pois bem, vale o seguinte teorema (cf. as notas de Manin [34]): *Ter uma estrutura de CohFT para  $X$  é equivalente a ter uma estrutura de variedade de Frobenius sobre  $H^*(X, \mathbb{C})$*  (no sentido de que você pode construir uma estrutura a partir da outra sem perder informação).

# Bibliografia

FP-NOTES refere sempre a *Notes on Stable Maps and Quantum Cohomology* de W. Fulton e R. Pandharipande [20].

- [1] A. B. ALTMAN and S. L. KLEIMAN, *Introduction to Grothendieck duality theory*, LNM 146, Springer-Verlag, 1970.
- [2] P. ALUFFI (ed.), *Quantum cohomology at the Mittag-Leffler Institute*, Mittag-Leffler report No. 10, 1997.  
<http://www.math.fsu.edu/~aluffi/eprint.archive.html>
- [3] M. ATIYAH, *Response to: "Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics"*, by A. Jaffe and F. Quinn, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **30** (1994), 178–179
- [4] A. BEAUVILLE, *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque 54, 1978.
- [5] A. BEAUVILLE, *Quantum cohomology of complete intersections*, Preprint, alg-geom/9501008.
- [6] K. BEHREND and B. FANTECHI, *The intrinsic normal cone*, Invent. Math. **128** (1997), 45–88. (alg-geom/9601010)
- [7] K. BEHREND and YU. I. MANIN, *Stacks of stable maps and Gromov-Witten invariants*, Duke. J. Math. **85** (1996), 1–60. (alg-geom/9506023)
- [8] L. CAPORASO, *Counting curves on surfaces: A guide to new techniques and results*, Preprint, alg-geom/9611029.
- [9] L. CAPORASO and J. HARRIS, *Counting plane curves of any genus*, Invent. Math. **131** (1998), 345–392. (alg-geom/9608025)

- 
- [10] M. P. DO CARMO, *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1988.
- [11] B. CRAUDER and R. MIRANDA, *Quantum cohomology of rational surfaces*, In: The moduli space of curves (van der Geer, Dijkgraaf, Faber, eds.), Progress in Mathematics, vol. 129, Birkhäuser, Boston, MA, 1995, pp. 34–80.
- [12] B. DUBROVIN, *Geometry of 2D topological field theories*, In: Integrable systems and quantum groups, LNM 1620, Springer-Verlag, 1996, pp. 120–348.
- [13] D. EDIDIN, *Notes on the construction of the moduli space of curves*, Preprint, math.AG/9805101.
- [14] L. ERNSTRÖM and G. KENNEDY, *Recursive formulas for the characteristic numbers of rational plane curves*, J. Alg. Geo. **7** (1998), 141–181. (alg-geom/9604019)
- [15] L. ERNSTRÖM and G. KENNEDY, *Contact cohomology of the projective plane*, Preprint, alg-geom/9703013.
- [16] E. ESTEVES, *Construção de espaços de moduli*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1997.
- [17] P. DI FRANCESCO and C. ITZYKSON, *Quantum intersection rings*, In: The moduli space of curves (van der Geer, Dijkgraaf, Faber, eds.), Progress in Mathematics, vol. 129, Birkhäuser, Boston, MA, 1995, pp. 81–148.
- [18] W. FULTON, *Intersection theory*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [19] W. FULTON, *Introduction to intersection theory in algebraic geometry*, CBMS Reg. Conf. Series in Math., **54**, AMS, Providence, R.I., 1984.
- [20] W. FULTON and R. PANDHARIPANDE, *Notes on stable maps and quantum cohomology*, Algebraic Geometry, Santa Cruz 1995 (J. Kollár, R. Lazarsfeld and D. Morrison, eds.), Proc. Symp. Pure. Math., vol. 62, II, pp. 45–96. (alg-geom/9608011)
- [21] A. GATHMANN, *Gromov-Witten invariants of blow-ups*, Preprint, math.AG/9804043.

- [22] L. GATTO, *The Recife notes on intersection theory over moduli spaces of curves*, Recife Lecture Notes 1998, Preliminary version, 190pp., <http://www.dmat.ufpe.br/~jojo/Mat/RLN/letterio.ps>
- [23] L. GÖTTSCHE and R. PANDHARIPANDE, *The quantum cohomology of blow-ups of  $\mathbb{P}^2$  and enumerative geometry*, J. Diff. Geom. **48** (1998), 61–90. (alg-geom/9611012)
- [24] J. HARRIS, *Algebraic geometry: A first course*, GTM 133, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [25] J. HARRIS and I. MORRISON, *Moduli of curves*, GTM 187, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [26] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, GTM 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [27] S. KEEL, *Intersection theory of moduli spaces of stable  $n$ -pointed curves of genus zero*, Trans. AMS **330** (1992), 545–574.
- [28] S. L. KLEIMAN, *The transversality of a general translate*, Comp. Math. **28** (1974), 287–297.
- [29] S. L. KLEIMAN with A. THORUP, *Intersection theory and enumerative geometry: A decade in review*, In: Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, Proc. Symp. Pure Math. **46** (1987), pp. 321–370.
- [30] F. KNUDSEN, *Projectivity of the moduli space of stable curves, II*, Math. Scand. **52** (1983), 1225–1265.
- [31] J. KOCK, *Recursion for twisted descendants and characteristic numbers of rational curves*, Preprint, math.AG/9902021.
- [32] J. KOLLÁR, *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [33] M. KONTSEVICH and YU. I. MANIN, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Commun. Math. Phys. **164** (1994), 525–562. (hep-th/9402147)
- [34] YU. I. MANIN, *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces (Chapters I, II, III)*, MPI Preprint, 1996 no. 113, <http://www.mpim-bonn.mpg.de/html/preprints/preprints.html>

- 
- [35] D. MUMFORD, *The red book of varieties and schemes*, LNM 1358, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [36] P. E. NEWSTEAD, *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute Lecture Notes, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [37] R. PANDHARIPANDE, *A geometric construction of Getzler's relation*, Preprint, alg-geom/9705016.
- [38] R. PANDHARIPANDE, *Intersections of  $\mathbb{Q}$ -divisors on Kontsevich's moduli space  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$  and enumerative geometry*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 1481–1505. (Versão preprint alg-geom/9504004.)
- [39] Z. RAN, *Enumerative geometry of singular plane curves*, Invent. Math. **97** (1989), 447–469.
- [40] Y. RUAN and G. TIAN, *A mathematical theory of quantum cohomology*, J. Diff. Geom. **42** (1995), 259–367.
- [41] J. F. THOMSEN, *Irreducibility of  $\overline{M}_{0,n}(G/P, \beta)$* , Int. J. Math. **9** (1998), 367–376.
- [42] I. VAINSENER, *Classes características em geometria algébrica*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1985.
- [43] I. VAINSENER, *Enumeration of  $n$ -fold tangent hyperplanes to a surface*, J. Alg. Geom. **4** (1995), 503–526.
- [44] R. VAKIL, *The characteristic numbers of quartic plane curves*, Preprint, math.AG/9812018.
- [45] R. VAKIL, *Recursions for characteristic numbers of genus one plane curves*, Preprint, 1998.
- [46] E. WITTEN, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in Diff. Geom. **1** (1991), 243–310.
- [47] L. WOTZLAW, *Quantum cohomology*, Preprint, 1999, <http://www-irm.mathematik.hu-berlin.de/~wotzlaw/>
- [48] H. G. ZEUTHEN, *Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver*, Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, naturvidenskabelig og matematisk Afd., no. 10 B. IV, København, 1873.

# Índice

- algoritmo (de reconstrução), 90
- anel de cohomologia, 75
  - quântica, **96**, 104
  - pequeno, 103
- árvore, **5**, 36
- associatividade, **97**, 106
- automorfismo, 6, 30, 45
  - de  $\mathbb{P}^1$ , 1
  - de um mapa, 29
  - de um mapa estável, **37**
  - de uma curva marcada, 42
- balanceado, 41
- bla bla bla, v
- circuito fechado, 6
- classe de psi, 93
- classe deformante, 96
- cohomologia, 75
  - quântica, 95
- cônicas, 33, 53–57, 65, 88
  - completas, 53–57
- contração, 11, 13
- cúbicas, 62
  - racionais, 34, 62, 67
  - reversas, 82
- curva  $n$ -marcada, 2
  - estável, 6
- curva elítica, 63
- $D(A | B)$ , 18
- $D(A, B; d_A, d_B)$ , 47
- decomposição de Künneth, 86
- degenerações, 9, 18
- descendentes gravitacionais, 93
- diagonal, 4, 15, 49, 52, 82, 86
- dimensão de  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ , 38
- divisor de fronteira, 18, 20, **47**
  - especial, 21, **49**, 65, 69, 89
- divisor de incidência, 46
- equivalência fundamental, 21, **49**, 65, 70, 97
- equivalência projetiva, 2
- espaço de módulos
  - de mapas estáveis, 38
  - fino, 3, 4, 7, 30–32, 38
  - grosseiro, 30, 38, 55
- esquecimento, 11, 13, 43, 46
- estabilização, **10**, 13–15, 44
- estável, 6
- estável de Kontsevich, 37
- estratificação, 16, 17
- estrutura recursiva, 20, **48**
- família, 7
  - a 1 parâmetro, 32–36, 44, 45, 55
  - de curvas  $n$ -marcadas, 3
    - estáveis, 11, 12
  - de cônicas, 55
  - de mapas, 32
  - de quádruplas, 5
  - trivial, 4, 32
  - universal, 3, 7, 15, 32, 44
- feixe

- de cônicas, 33
- de cúbicas, 62
  - racionais, 34
- fibras reduzidas, 16
- fórmula de Kontsevich, 69
  - via cohomologia quântica, 100
- fronteira
  - ciclo de, 18
  - de  $\overline{M}_{0,n}$ , 16, 18
  - de  $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ , 47–49
  - divisor de, 18, **47**
- galho, 6
- grau, 25
- $I_d(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$ , 77
- identidade para  $*$ , 97
- imersão, **26**, 80
- interseção de divisores de fronteira, 19
- invariantes de Gromov-Witten, **77**
  - (com  $d = 0$ ), 83
  - (com  $n = 3$ ), 103
  - (com  $n \leq 2$ ), 83
  - propriedades, 83
  - reconstrução, 90
  - significado enumerativo, 78, 82
- Kontsevich, fórmula de, 69
- lema de recursão, **87**, 97, 99, 106
- limite, 5, 8, 10, 34, 55
- livre de automorfismos, 6
- $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$ , 52–57
- $\overline{M}_{0,4}$ , 7
- $\overline{M}_{0,5}$ , **14**, 19
- $M_{0,n}$ , 5
- $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ , 38
- mapa
  - $n$ -marcado, 36
  - estável, 37
  - birracional (sobre imagem), 27, 31, 44, 56
  - mapa de avaliação, **42**, 65, 73, 81, 84
  - mapa de esquecimento, **13**, 20, 21, **43**, 54, 80, 84
    - para  $\overline{M}_{0,4}$ , 21, 46, 49
  - marca, **2**, 31
  - $N_d$ , **63**, 80
  - números característicos, 71
  - parte clássica, 100
  - parte quântica, 100
  - partição, 18
  - partição ( $d$ -ponderada), 47
  - pequeno, anel de coh. quântica, 103
  - permutação, 42
  - ponto de colagem, 87
  - ponto especial, **6**, 13
  - potencial, **104**, 106
  - produto clássico, 95
  - produto quântico, 96
  - quociente, 42
  - quárticas racionais, 64
    - não reduzidas, 28
  - razão cruzada, 2
  - recobrimento, 27–31, 45, 53, 56
  - reconstrução, 90
  - recursão, *veja* recursão
  - Severi, variedades de, 64
  - seção diagonal, 4, 15, 44, 45
  - superfície de del Pezzo, 9
  - tangência, 71, 92, 93, 103
  - transversalidade, 74
  - variedade, xiii
    - de Frobenius, 105
    - de Severi, 64
  - $W(r, d)$ , 79