1. INTRODUCCIÓ

Nosaltres som dos alumnes que hem decidit fer el Treball de Recerca junts, i sobre els Sòlids Platònics.

El motiu de formar aquesta parell a l'hora de realitzar aquest treball va ser perquè vam tenir la sort de poder formar part del Programa Argó 2009, gràcies al qual vam gaudir d'una estada didàctica a la Universitat Autònoma de Barcelona durant 3 setmanes. Aquesta estada repartia els estudiants en diferents tallers. Nosaltres vam formar part d'un taller anomenat "Els Sòlids Platònics" portat a terme per un professor matemàtic, Agustí Reventós, i un professor geòleg, Joan Francesc Piniella, els quals agraïm la seva col·laboració.

L'estada ens va agradar molt, i com que no teníem clar encara de què faríem el Treball de Recerca vam decidir fer-lo junts i sobre els Sòlids Platònics.

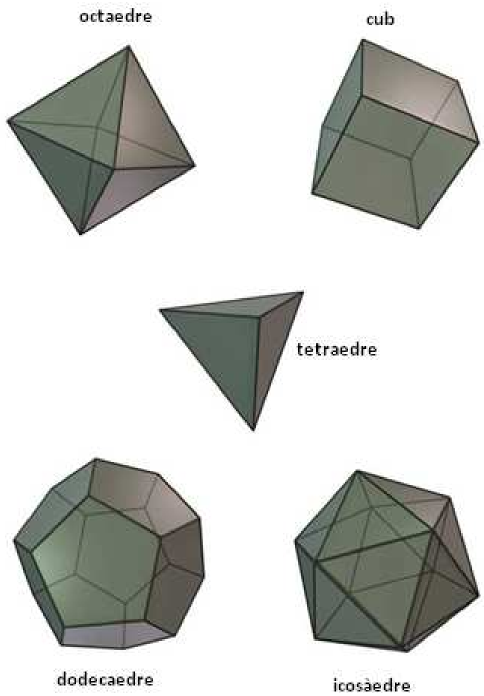
Els sòlids platònics són políedres regulars. Aquests políedres tenen unes característiques i unes propietats molt especials que no presenten cap més tipus de cos geomètric. Aquests preciosos cossos han estat molt valorats i estudiats, sobretot en l'antiguitat, i se'ls ha atribuït tota mena de significats.

Aquests políedres regulars, és a dir, políedres formats per cares iguals (polígons idèntics) i en els vèrtexs dels quals hi concorren el mateix nombre de vèrtexs, tot i que pugui semblar quasi impossible, es poden trobar com a fruit de la naturalesa. Hi ha roques, minerals, molècules, virus i altres éssers vius que presenten l'estructura i la forma d'aquests políedres.

Nosaltres hem volgut enfocar el treball sobre aquests cossos regulars, en el seu paper al llarg de la història, ja que han influït en diversos camps com les matemàtiques, mitologia, religió, etc. Amb la història hem adjuntat algunes biografies de personatges històrics que han sigut influents ens els cossos regulars. En segon lloc hem volgut introduir els sòlids primerament explicant breument els políedres. Després es pot dir que ja parlem únicament dels nostres sòlids platònics. Demostrem perquè només n'hi ha 5 i descrivim la majoria de la seves propietats (curvatura, simetria, dualitat...). També hem calculat àrees i volums de cada sòlids. Finalment ens centrem en la presència d'aquests sòlids en la naturalesa i en la tecnologia i l'art.

Aquestes són les bases del nostre treball que hem redactat amb esforç i entusiasme i que hi ha a continuació.

2. HISTÒRIA DELS SÒLIDS PLATÒNICS



Dins de les infinites formes polièdriques que existeixen n'hi ha unes que, per les seves simetries, han exercit sempre una gran atracció sobre els homes. Es tracta dels políedres regulars, les cares dels quals són polígons regulars iguals entre sí i en els vèrtexs dels quals concorren el mateix nombre de cares.

No se sap exactament a quina època es van arribar a conèixer els cinc poliedres regulars. Es té constància de que l'objecte més antic fet per l'home amb forma de dodecaedre és atribuït a temps prepitagòrics i hi ha una tradició que assigna el coneixement dels 5 sòlids regulars als pitagòrics. Altres investigadors indiquen que el cub, el tetraedre i el dodecaedre (els poliedres més simples, que s'obtenen unint 3 polígons en cada vèrtex) pertanyen als pitagòrics mentre que l'octaedre i d'icosàedre pertanyen a Teetet. Se suposa que en èpoques anteriors als pitagòrics aquests poliedres ja es coneixien de manera aïllada com a objectes físics, que els pitagòrics coneixien aquests poliedres i només la construcció de tres d'ells (el cub, el tetraedre i el dodecaedre) i que va ser Teetet el primer que va formular una teoria general tal com es presenta al llibre XIII dels *Elements*, donant la construcció geomètrica dels cinc cossos i demostrant que no en poden existir d'altres. En el llibre XIII *Els elements d'Euclides* es troba la relació entre l'aresta del poliedre, el diàmetre de la esfera circumscrita i entre les arestes de tots els poliedres. Es creu que el llibre XIII no es deu a Euclides sino que porta també el seu nom perquè Euclides li va deixar un lloc en els seus *Elements*. I no és del tot impossible que provingui completament de la ensenyança de Teetet.

2.1 POLÍEDRES EN EL NEOLÍTIC

Però comencem des del principi. Com ja sabem els poliedres regulars són sòlids limitats pe idèntics polígons regulars, en els quals arriben a cada vèrtex el mateix nombre de cares.

El significat simbòlic, místic i còsmic dels poliedres regulars es remunta als primers estadis de la Civilització. Critchlow (1979) dóna una proba que demostra que ja eren coneguts pels pobles neolítics i per les primeres cultures històriques europees.

Sòlids regulars neolítics d'Escòcia

1. Esfera tetraèdrica neolítica (Keith Critchlow: Time Stands Still).
2. Dodecaedre etrusc (500 aC. Landes-Museum. Mainz, Alemanya).
3. Icosàedre romà (Rheinisches Landes-Museum. Bonn).

Segons Lawlor (1993), Gordon Plummer a la seva obra *The Mathematics of the Cosmic Mind*, afirma que la mística hindú associa l'icosàedre amb *Purusha*, la llavor-imatge de Brahma, el creador suprem, la imatge de l'home còsmic, equivalent a l'antropocosmos de la tradició esotèrica occidental, mentre que el dodecaedre és associat a Prakiti, el poder femení de la creació, la Mare Universal, la quinta essència de l'univers natural. En la mitologia hindú, Purusha i Prakiti són la representació mística de la dualitat geomètrica entre l'icosàedre i el dodecaedre. Diversos historiadors de las Matemàtiques (Eves, 1983; Kline, 1992) admeten que las antigues civilitzacions egípcies i babilòniques tenien coneixement del cub, tetraedre i octaedre i que aquest saber es transmetria a Grècia a través dels viatges de Tales i Pitàgores.

2.2 PITÀGORES I ELS POLÍEDRES REGULARS

Els pitagòrics estaven fascinats pels sòlids regulars, sobretot pel dodecaedre (degut a la presencia de l'emblemàtic pentàgon en les seves cares) que el relacionaven de forma mística amb el Cosmos i guardaven amb recel el secret de la seva Construcción, fins el punt de crear la llegenda sobre la terrible fi de qui gosés divulgar els seus misteris relatada entre altres autors per Jàmblic (1991): «*De Hipàs diuen que va ser un dels pitagòrics que per haver divulgat per escrit per primera vegada l'esfera de dotze pentàgons (la construcció del dodecaedre inscrit en una esfera) va aparèixer en el mar per traïdor*». Aquest text recorda la descripció apocalíptica de molts escriptors, com Colerus (1972) sobre la maledicció que va caure sobre Hipàs de Metapont per haver revelat l'aparició de l'irracional. La analogia entre les dues llegendes avalaria la tesi de que l'adveniment de la incomparabilitat hauria tingut lloc a través del pentàgon de les cares del dodecaedre, generador al traçar les diagonals de l'estrella pentagonal, anomenada *Pentagrama* místic, que era el símbol d'identificació dels membres de la secta pitagòrica.

2.3 PLATÓ I ELS POLÍEDRES REGULARS

El seu nom alternatiu, *sòlids platònics* es deu a que Plató (427-347 a.C.) els cita en el Timeu. Per ell, els elements últims de la matèria són els poliedres regulars. D'aquests cossos elementals, Plató considera només els límits, les *superfícies*. No fa cap al·lusió a la seva substància, fins el punt de que s'ha pogut suscitar la pregunta de si aquesta substància era qualitativament diferent per cadascun d'ells, o la mateixa per tots. Fos quina fos la seva interpretació, el que queda clar és que Plató dóna molta més importància a la forma que a la matèria. A més de veure els poliedres regulars com les superfícies, considera que aquestes alhora es descomponen en triangles elementals (per exemple, la descripció que Plató dóna en el Timeu per d'icosàedre és:«La tercera espècie està formada per l'agrupament de 120 triangles elementals, és a dir, per 12 angles sòlids, on cadascun està comprès entre 5 triangles plans equilàters, i té 20 bases que són 20 triangles equilàters»). Aquests triangles elementals són triangles de dues classes: isòsceles i escalens, i representen els elements últims de l'univers. Per Plató el triangle equilàter està format per 6 triangles rectangles escalens, que tenen un catet igual a la meitat de la hipotenusa: el quadrat està format per quatre triangles rectangles isòsceles. Així, els triangles elementals del tetraedre, octaedre i icosàedre són triangles de la segona classe, i m'hi ha 6 per cada cara, i els del cub són triangles rectangles de la primera classe, i n'hi ha 4 per cada cara.

Plató, com ja ho feien els pitagòrics, considera que les figures dels elements del foc, terra, aigua i aire són els quatre poliedres regulars: tetraedre, cub, icosàedre i octaedre respectivament. La terra corresponia al cub, la forma més sòlida i menys mòbil. El foc al tetraedre, per ser la forma més aguda i més mòbil. L'aire i l'aigua corresponien a l'octaedre i l'icosàedre respectivament. Plató exposa: «A la *terra* l'hi atribuïm la forma cúbica. Perquè la terra és la més difícil de moure de les 4 espècies i és de tots els cossos la més tenaç. O, entre els triangles que hem suposat a l'origen, la base formada per dos costats iguals és naturalment més estable que la que està formada per dos costats desiguals. I la superfície equilàtera quadrangular composta de dos equilàters és necessariament més estable, sigui en les seves parts, sigui en la seva totalitat, que una superfície triangular. Com a conseqüència, atribuint aquesta superfície a la terra ens conformem en la versemblança. De la mateixa manera, atribuirem a l'*aigua* la figura menys mòbil de les que queda, al *foc* la més mòbil i la figura intermèdia a l'*aire*. I el cos més petit al foc, el més gran a l'aigua i l'intermedi a l'aire. I el més agut al foc, el segon per aquest caràcter a l'aire i el tercer a l'aigua. Així, entre totes aquestes figures, la que té les bases més petites, ha de tenir forçosament la naturalesa més mòbil: aquesta és sempre la més afilada, la més aguda de totes i a també la més lleugera, ja que està composta del més petit nombre de les mateixes parts. I la segona ha de tenir el segon rang en el que toca a aquestes mateixes propietats, i la tercera, al tercer rang. En conseqüència, segons la recta lògica, i segons la versemblança, la figura sòlida de la piràmide és l'element i el gèrmen del foc: la segona, segons l'ordre del naixement, diguem que és l'element de l'aire i la tercera, el de l'aigua».

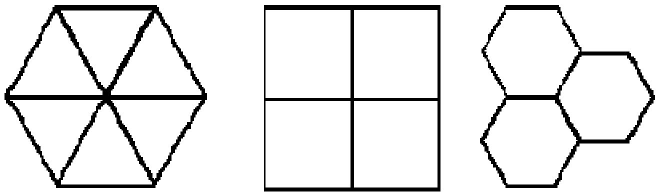
2.4 EUCLIDES I EL LLIBRE XIII DE *ELS ELEMENTS*

Ja que Euclides es va formar en un ambient platònic de *La* Acadèmia d'Atenes, deuria patir la fascinació i el deliri dels seus membres pels cinc poliedres regulars, per incloure'ls com a clímax final en el *Els Elements*. De fet Procle, en el seu comentari senyala:

«*Euclides era platònic, (…), va millorar els treballs de Teetet, (…), es va proposar com a objectiu final del conjunt dels seus Elements la construcció dels cinc poliedres regulars*».

El tractament d'Euclides sobre els poliedres regulars és especialment important per la Història de la Matemàtica perquè conté el primer exemple d'un teorema fonamental de classificació. A Euclides no es troba (com a Plató) una definició genèrica de poliedre regular, sinó que els introdueix un per un amb la seva definició.

La construcció pitagòrica dels poliedres regulars va poder ser una generalització evident a l'espai dels mosaics del pla ja que sembla que els pitagòrics van descobrir que els únics polígons regulars que podien recobrir un pla (en forma de mosaic) són el triangle, el quadrat i l'hexàgon d'aquesta manera:

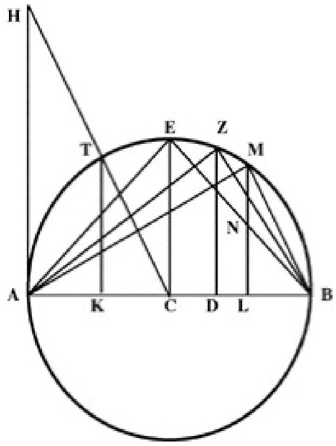


En efecte: si m polígons regulars de n costats coincideixen en un punt, ja que els angles interiors d'un polígon de n costats sumen [(n-2)180°] (resultat atribuït a Pitàgores) es verifica: m(n-2)180°=360°, d'on resulta l'equació: m(n-2)=2n, les solucions de la qual són: m=6, n=3 (triangles), m=4, n=4 (quadrats), m=3, n=6 (hexàgons)

Aquest estudi aplicat als mosaics pot aplicar-se als poliedres amb la necessària modificació de que la concurrència de m polígons regulars de n costats en un vèrtex dóna un angle sòlid, de manera que la suma dels angles dels polígons concurrents no ha de ser més gran de 360º, és a dir: mn-2180°n<360°

Els objectius dels Teoremes del Llibre XIII d'Euclides és el de inscriure cadascun dels poliedres regulars en una esfera, construccions que Euclides, amb una extraordinària habilitat geomètrica, va obtenint successivament a les Proposicions XIII,13 – XIII,17, trobant la raó de l'aresta del sòlid al radi R de la esfera circumscrita, obtenint els següents resultats:

POLÍEDRE	**PROPOSICIÓ**	**ARESTA**
Tetraedre	XIII.13	$\frac{2}{3}R\sqrt{6}$
Cub	XIII.14	$R\sqrt{2}$
Octaedre	XIII.15	$\frac{2}{3}R\sqrt{3}$
Dodecaedre	XIII.16	$\frac{R}{3}(\sqrt{15}-\sqrt{3})$
Icosàedre	XIII.17	$\frac{R}{5}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$



El llibre XIII de *Els Elements* i amb ell tota l'obra d'Euclides arriba al seu estudi final a la última proposició, la XIII,18:

«*Construir els cinc poliedres regulars inscrits en la mateixa esfera i comprar les arestes de les cinc figures*»:

Euclides traça la figura següent, prenent:

AB diàmetre de la esfera
AC = CB, AD = 2DB,
AH = AB, CL = KC.

I demostra, pas a pas, utilitzant nombroses proposicions anteriors (en particular de la *secció Àurea*) que:

- AZ és l'aresta t del tetraedre
- BZ és l'aresta c del cub
- BE és l'aresta o de l'octaedre
- MB és l'aresta i de l'icosàedre
- NB és l'aresta d del dodecaedre

Sent la relació entre elles:

- $t^2 = (4/3)\ o^2 = 2c^2$.
- $o^2 = (3/2)\ c^2$.
- L'aresta i de l'icosàedre és major que l'aresta d del dodecaedre.

La última proposició d'Euclides acaba, també, amb el teorema de classificació dels poliedres.

La demostració és similar a la dels mosaics pitagòrics, però alhora s'ha de resoldre una inequació amb nombres enters: la que resulta de la Proposició XI,21:

$\frac{\boldsymbol{m(n-2)180°}}{\boldsymbol{n}} < 360°$, si la concurrència en un vèrtex és de m polígons regulars de n costats.

Aquesta inequació é equivalent a (m–2)·(n–2)<4 que dóna com a solucions geomètriques:

- per a m=3
    - · n=3 (tetraedre)
    - · n=4 (cub)
    - · n=5 (dodecaedre)
- per a m=4, n=3 (octaedre)
- per a m=5, n=3 (icosàedre).

2.5 ELS POLÍEDRES EN EL RENAIXEMENT

Els artistes matemàtics del Renaixement van mostrar un gran interès pels poliedres, per un banda pels estudis platònics suggerits per la reaparició d'alguns manuscrits en les obres de Plató, i per una altra, degut a que aquests sòlids servien d'excel·lents models en els estudis sobre Perspectiva (Pedoe, 1979).

L'estudi mes complert el va fer Piero della Frnacesca a la seva obra *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus*. A part dels tòpics d'Euclides sobre poliedres, en aquesta obra es redescobreixen gradualment els anomenats sòlids arquimedians o poliedres semirregulars. Són tretze cossos que també es poden inscriure en una esfera amb polígons de dos o tres tipus.

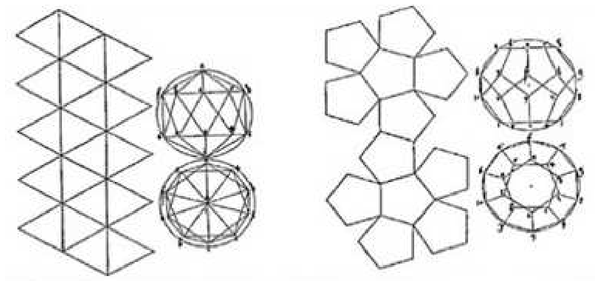
Piero della Francesca va ser un expert en relacionar els diferents poliedres; en va obtenir uns a partir dels altres i els va inscriure successivament. D'aquesta manera, a més del possible nombre de polígons regulars en el pla (infinits) i de políedres regulars en l'espai (només cinc) apareix una altra diferència significativa entre els dos tipus de cossos: mentre que en el pla, el triangle, el quadrat i el pentàgon, són geomètrica i algebraicament independents els uns dels altres, els cinc sòlids regulars guarden entre sí íntimes relacions estructurals. D'aquestes la més elemental és l'anomenada *dualitat* o *reciprocitat* polièdrica segons la qual "*el sòlid els vèrtex del qual són els centres de les cares d'un platònics també és platònic* " i també "*el sòlid determinats pels plans tangents en els vèrtexs a la esfera circumscrita a un sòlid platònic també és platònic* ". Un poliedre i el seu dual tenen el mateix nombre de costats o el nombre de cares d'un és igual al nombre de vèrtex de l'altre.

Piero della Francesca va molt més enllà al realitzar un estudi molt complex de formes de passar directa o indirectament d'uns sòlids a uns altres, vincualant de múltiples maneres els diferents poliedres, algunes de les quals són estudiades per Ghyca (1983) i per Lawor (1993). També a "Guillén" (1997) es pot trobar un estudi bastant detallat de la interrelació de sòlids platònics, a base de buscar de forma sistemàtica les possibls inscripcions entre poliedres regulars disposats de tal forma que les simetries comunes coincideixin (per exemple, com que el cub i l'octaedre tenen les mateixes simetries, es podran inscriure em els mateixos poliedres i també es podran inscriure en ells els mateixos poliedres). Particularment, al considerar els parell de poliedres que tenen exactament la mateixa simetria, resulten ser parells de sòlids en que els vèrtex del poliedre inscrit es troben al centre de les cares de l'altre poliedre, per tant, són anomenats poliedres duals.

Pacioli estudia la proporció mútua de totes les superfícies polièdriques regulars i la inclusió progressiva de cadascun dels poliedres en el següent, fins el punt de que el dodecaedre els conté a tots.

Els treballs de Piero della Francesca i Luca Pacioli sobre poliedres van tenir una gran incidència en la posterior Literatura matemàtica vinculada a l'Art, sobre tot la desenvolupada per Dürer a la seva obra de 1525 *Underweysung der messung. Es tracta d'una mena d'enciclopèdia geomètrica, redactada per un gran metre artista-geòmetra* *format en l'encreuament de les tradicions pràctiques, artesanes, sabies, artístiques i humanistes, que pretenia donar a la creació artística una base científico-geomètrica.*

Bona part del Llibre IV de l'obra de Dürer està dedicada als poliedres regulars i semirregulars. Per Dürer els poliedres regulars són sòlids «*que són iguals en tot, cares, angles i costats, als que Euclides anomena "corpora regularia". Ell en descriu cinc, no poden ser altres que els que s'inscriuen totalment a una esfera*». A continuació, Dürer descriu, un per un, els cinc políedres regulars, indica el nombre de cares, arestes i vèrtex, i representa cadascun dels cossos pel seu desenvolupament en un pla i per dues projeccions ortogonals sobre els plans horitzontal i vertical, el que, d'alguna manera, és un antecedent de la Geometria Descriptiva de Monge.



Il·lustracions de Dürer sobre dels desenvolupaments plans i i les projeccions horitzontal i vertical de l'icosàedre i el dodecaedre. (Primer apareix el pla totalment obert, i després tancat en planta i alçada)

El desenvolupament de Dürer permet reconstruir l'objecte polièdric en tres dimensions: es retalla en el paper la xarxa formada per les cares i es plega al llarg de les arestes de les cares contigües. És el mateix procediment utilitzat a l'escola per construir els poliedres regulars. El llibre IV del *Underweysung de Dürer continua amb l'estudi dels poliedres arquimedians. Dürer presenta uns sòlids* «*que són tangents amb tots els seus vèrtex a una esfera buida, encara que tenen cares desiguals*», es conforma amb donar els desenvolupament plans dels sòlids, després de descriure els seus elements geomètrics (cares, arestes i vèrtex). El que interessava a Dürer era la seva senzilla construcció inspirat en els models de diverses col·leccions de poliedres construïdes per Pacioli, que van circular per Itàlia coincidint amb l'estància de Dürer en aquest país.

Quadre de J. de Barbari (1495) que representa a Luca Pacioli

Dürer acaba l'estudi dels poliedres amb el següent text (Dürero, Akal, 2000, p.304):

> «*Si als cossos que s'acaben de fer se'ls treuen els seus vèrtex amb uns talls nets i posteriorment es tornen a treure els vèrtex restants, es poden realitzar diversos tipus de cossos*».

En relació amb aquestes paraules, Dürer va ser fascinat, a més, per una idea que desenvolupa Pacioli en el capítol LV de *La divina Proporció*(Pacioli, Akal, p.102):

> *«No em sembla convenient [...] estendre'm més sobre aquests cossos [poliedres] doncs el seu desenvolupament tendeix fins a l'infinit pel continu i successiu tall de l'angle sòlid, segons el qual es multipliquen les seves diverses formes».*

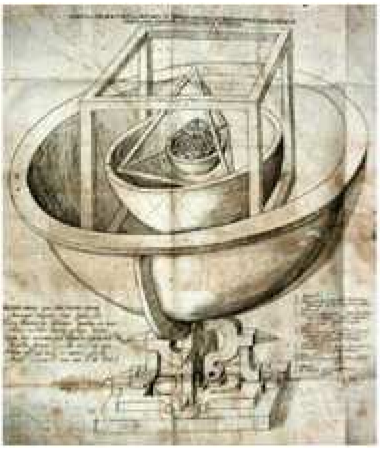
El Neoplatonisme renaixentista vigent, sota l'impuls de Marsili Ficino, beneficiaria la idea d'origen platònic, segons la qual no són només cossis materials, sinó també tota criatura, per designi diví, estarien formats per combinacions polièdriques. A partit d'aquesta idea es pot comprendre el gran interès que els artistes i teòrics renaixentistes presentaven per l'estudi dels poliedres.

De fet, Dürer intentarà, un cop rere altre, representar el cos humà i les seves posicions en moviment, tancant els seus membres en cossos regulars o derivats d'ells; per això estudia la forma de posar-los en perspectiva i de construir la seva ombra. A això se li aplica el final del *Underweysung*, on es mostra com construir el dibuix en perspectiva d'un cub amb la seva ombra, il·luminat i situat sobre un pla horitzontal.

A més, en diversos manuscrits de Dürer s'han trobat intents de representació en perspectiva dels poliedres, el que tindrà una gran influència en Perspectiva de l'Art del Renaixement. A partir del Renaixement abunda la Literatura polièdrica i bona mostra d'això són les il·lustracions següents on apareix el simbolisme polièdric, sobretot amb models similars als de Leonardo:

Mosaics de Fray Giovanni de Verona (1520)

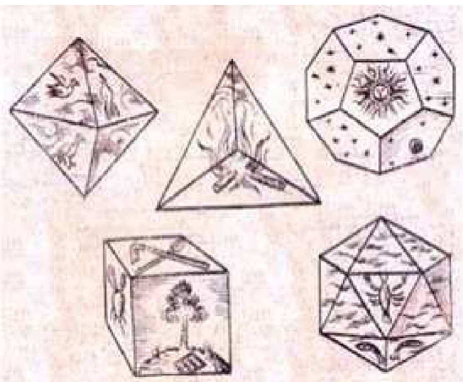
2.6 COSMOGONIA POLIÈDRICA DE KEPLER

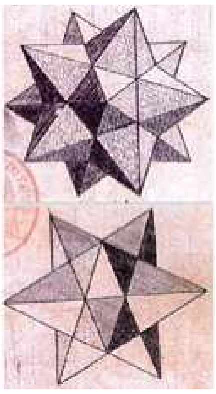


La primera imatge és el model cosmològic de Kepler basat en els sòlids platònics i inspirat en els models de Leonardo.

La segona imatge és un gravat de la obra de Kepler *Mysterium Cosmographicum (1596).*

Després de quasi 2000 anys des de Plató, Kepler (1571-1630) va construir una cosmologia basada essencialment en els 5 sòlids regulars. Molt abans de que descobrís les tres lleis que portaven el seu nom, en el seu *Mysterium cosmographicum* publicat el 1595, va determinar les distàncies entre sí de les òrbites del sistema planetari i va intentar reduir-les als cossos regulars alternativament inscrits i circumscrits en esferes. A més a més va traçar paral·lelismes entre les propietats dels planetes i les dels corresponents cossos regulars. En l'època de Kepler només es coneixien sis planetes: Mercuri, Venus, la Terra, Júpiter i Saturn. Mentre que hi ha infinits polígons regulars només existeixen cinc poliedres regulars. No podia ser una casualitat, la mà del *Déu geòmetre* no improvisa. Segons Koestler (1985), Kepler va pensar que els dos nombre estaven vinculats: «*hi ha només sis planetes perquè només hi ha cinc poliedres regulars*» i dóna una visió del sistema solar que consisteix en sòlids platònics inscrits o encaixats uns dins dels altres, relacionant els radis de les esferes concèntriques circumscrites que intervenen en les òrbites dels planetes. Al creure que havia reconegut l'esquelet invisible de l'Univers en aquestes estructures perfectes que sostenien les esferes dels sis planetes, va anomenar la seva revelació *El Misteri* Còsmic. Dins de la òrbita o esfera de Saturn Kepler va inscriure un cub; i dins d'aquest la esfera de Júpiter circumscrita a un tetraedre. Inscrita en aquest va situar la esfera de Mart. Entre les esferes de Mart i de la Terra hi havia el dodecaedre; entre la Terra i Venus l'icosàedre; entre Venus i Mercuri l'octaedre. I en el centre de tot els sistema l'Astre Rei, el Sol. La Geometria pitagòrica va permetre a Kepler albirar una imatge de la perfecció del Cosmos fruit del Creador a través de la Sagrada Geometria (Lawor, 1993). Les minucioses mediacions astronòmiques del seu amic Tycho Brahe va fer evolucionar el pensament de Kepler, després de molts esforços intel·lectuals, fins al descobriment de les famoses lleis planetàries.





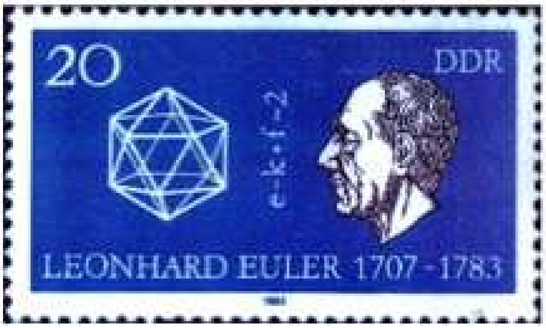
Imatge 1. Representació polièdrica visual de la cosmogonia pitagòrico-platònica

Imatge 2. Políedre estrellat de Kepler

2.7 POLÍEDRES EN TEMPS MODERNS

A finals del s. XIX l'estudi dels poliedres va rebre un nou impuls amb l'aplicació de la *Teoria de Grups* en el camp de les matemàtiques i la cristal·lografia, sobretot per part de F. Klein, que a la seva obra *L'Icosàedre i la Solució de les Equiacions de Cinquè* Grau, estudia els grups de simetries dels poliedres regulars. Amb els resultats obtinguts es permet explicar la dualitat entre l'octaedre i el cub això com entre l'icosàedre i el dodecaedre i en general situar la Teoria dels Sòlids Platònics ens una perspectiva totalment nova.

Actualment l'estudi dels poliedres regulars, així com la seva bellesa i el seu misteri continua enlluernant a moltes persones, i no només en el camp de les matemàtiques, la cristal·lografia o la topologia, sinó també en l'art. Per exemple, molts artistes reconeguts com George Hart, Dalí, Escher o Gaudí han creat veritables universos polièdrics en les seves obres.



1. Segell de l'antiga Alemanya Oriental elusiu a la *Fórmula d'Euler* dels políedres, emès en el segon centenari de la mort del gran matemàtic

2. Imatge de l'últim segell emès que representa a Euler (Suïssa, 2007). Conté també la famosa *Fórmula d'Euler* dels políedres.

2.8 *A continuació adjuntem unes breus biografies de Plató, Pitàgores, Kepler, Euler i Euclides, que són els personatges que més han estat relacionats amb els sòlids platònics.*

2.8.1 PITÀGORES

Pitàgores de Samos (582 aC - 496 aC,) va ser un filòsof i matemàtic grec, molt conegut pel Teorema de Pitàgores, pel que és conegut com el "pare dels nombres".

Va néixer en l'illa de Samos. De molt jove ja va començar a viatjar, i molt probablement a l'Índia, on va rebre els seus estudis bàsics i va fundar la seva primera escola. Durant aquests viatges va assimilar coneixements matemàtics, astronòmics i religiosos

Per problemes polítics es va mudar a Crotona, al sud d'Itàlia, on va fundar la seva segona escola. Va fundar una societat secreta amb bases matemàtiques i filosòfiques, regida per una doctrina amb regles molt estrictes de conducta. En la seva escola la conducta discriminatòria estava prohibida. El seu lema era "tot és nombre"

Eren vegetarians perquè creien en la transmigració de les ànimes i, per tant, no s'havia que sacrificar cap animal perquè podia ser la nova morada d'un amic mort. Pitàgores impartia dos tipus diferents d'ensenyança: un per als membres de l'escola i l'altre per la resta de comunitat ciutadana.

La purificació de l'ànima dels pitagòrics s'aconseguia d'una banda amb un estricte règim físic i d'altra banda amb ritus que recorden als dels adoradors d'Orfeu i de Dionís, però les harmonies i misteris de la filosofia i de la matemàtica també eren parts essencials d'aquest ritual.

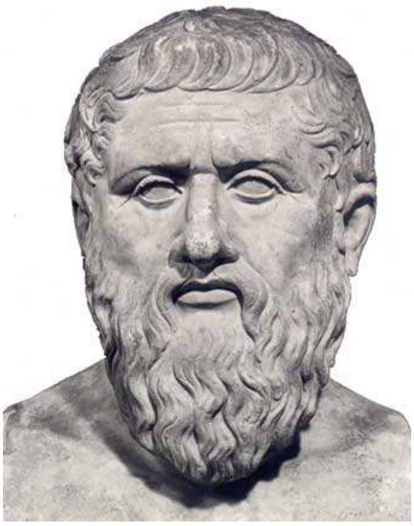
Pitàgores pot ser considerat la persona més influent de la història universal, passa per ser l'introductor de pesos i mesures, descobridor de la teoria musical, inventor de la geometria i l'aritmètica teòrica; el primer a sostenir la forma esfèrica de la terra, a parlar de "teoria" i de "filòsofs", a postular el buit, a canalitzar el fervor religiós en fervor intel·lectual, a usar el racionament i la definició, a considerar que l'univers era una obra només desxifrable per mitjans matemàtics.

A Pitàgores de Samos i a Tales de Milet se'ls atribueix el començament de la sistematització de la Matemàtica, iniciant els estudis de caire teòric, és a dir, les demostracions basades en lemes i axiomes.

2.8.2 PLATÓ

Els primer anys

Plató va néixer a Atenes (o a Egina, segons altres), probablement l'any 428 o 427 aC. La seva família pertanyia a l'aristocràcia atenenca, que es reclamava descendent de Soló per línia directa. El seu vertader nom era Aristocles, encara que va ser anomenat Plató per l'amplada de la seva esquena, segons explica Diògenes Laerci en la seva "Vida dels filòsofs il·lustres". Els pares de Plató van ser Aristó i Perictione, que van tenir dos fills més, Adimant i Glaucó y una filla, Potone.



A la mort del seu pare, sent Plató un nen, la seva mare es va tornar a casa amb Pirilamp, amic de Pericles, seguint l'educació de Plató, pel que suposo que aquest hauria pogut haver rebut una ensenyança pròpia de les tradicions democràtiques del règim de Pericles.

Plató va rebre l'educació pròpia d'un jove atenenc ben situat, necessària per dedicar-se de ple a la vida política, com corresponia a algú de la seva posició. Segons Diògenes Laerco va arribar a escriure poemes i tragèdies, encara que no es pot assegurar. També va ser deixeble de Cratil, tot i que tampoc es pot confirmar. La vocació política de Plató està constatada per les seves pròpies declaracions, en la coneguda carta VII; però la seva realització es va veure frustrada per la participació de dos parents seus, Càrmides i Críties, en la tirania imposada per Esparta després de la guerra del Peloponès, que va exercir una repressió violenta contra els líders de la democràcia. Tot i això l'interès polític no l'abandonarà mai, i es veurà reflectit en una de les seves millors obres, la República.

La influència de Sòcrates

A l'any 407, a l'edat de vint anys, coneix a Sòcrates, i queda admirat per la seva personalitat i el seu discurs, admiració que l'acompanyarà tota la vida i que marcarà el camí filosòfic de Plató. No és gaire probable que Plató mantingués una relació molt intensa amb el que va considerar el seu mestre, si entenem el terme relació en el seu sentit més personal; sí que és veritat que en el seu sentit més teòric si que hi ha ser aquesta relació entre mestre i deixeble, i d'una intensitat que s'acosta a la dependència. Però també sobre la seva relació amb Sòcrates hi ha posicions contradictòries. El que no fos present en la mort de Sòcrates fa pensar que no pertanyia al cercle d'amic íntims de Sòcrates; tot i això, sembla que sí que es va oferir com a aval de la multa que l'Assemblea imposaria a Sòcrates, abans de que cambiés la seva decisió per la condemna a mort.

Primers viatges

A l'any 399, després de la mort de Sòcrates, Plató marxa d'Atenes i s'instal·la a Megara, on residia el filòsof Euclides que havia fundat una escola socràtica en aquesta ciutat.

Posteriorment sembla que va realitzar viatjes per Egipte i va esta a Cirene, anant després a Itàlia on trobaria a Arquites de Tarento, qui dirigiria una societat pitagòrica, i amb qui va contraure amistat.

Convidat a la cort de Dionisi I, a Siracusa, es va fer amic de Dió, que era cunyat de Dionisi, i amb qui va concebre la idea de posar en marxa certes idees polítiques sobre el bon govern que requerien la col·laboració de Dionisi. Sembla que les condicions de la cort no eren les millor per emprendre aquests projectes, exercint Dionisi com a tirà de Siracusa; irritat per la franquesa de Plató, sembla que el va empresonar o el va fer vendre com a esclau a Egina, fins que va ser rescatat per un ciutadà que el va retornar a Atenes.

L'Acadèmia

Un cop a Atenes, a l'any 388-387, va fundar la Acadèmia. Nom que va rebre per trobar-se prop del santuari dedicat a l'heroi Academos. Era una espècie de Universitat en la que s'estudiava tot tipus de creences, com les matemàtiques, la astronomia, o la física, a més d'altres sabers filosòfics. Sembla que tenia una organització semblant al de les escoles pitagòriques, el que va podia comportar un cert caràcter secret o misteriós de les doctrines que s'ensenyaven allà. La Acadèmia continuarà ininterrompudament la seva activitat al llarg dels segles, passant per diferent fases ideològiques, gins que Justinià la tanca el 529 dC.

Obra

La obra de Plató està escrita en forma de diàlegs i es divideix en quatre etapes:

1. <u>Primers diàlegs o diàlegs socràtics o de joventut</u>. Es caracteritzen per les seves preocupacions ètiques. Estan totalment influïts per Sòcrates.

2. <u>Època de transició.</u> Aquesta fase es caracteritza també per qüestions polítiques, a més, apareix un primer esbós de la Teoria de la Reminiscència i tracta sobre la filosofia del llenguatge. Destaquen: Gorgies, Menó, Eutidem, Hipies Menor, Cràtil, Hipies Major i Menexè.

3. <u>Època de maduresa o diàlegs crítics.</u> Plató introdueix explícitament la Teoria de les Idees i desenvolupa més detalladament la reminiscència. Igualment es tracta de diferents mites. Destaquen: El banquet, Fedó. República i Fedre.

4. <u>Diàleg de vellesa o diàlegs crítics.</u> En aquesta fase revisa les idees anteriors i introdueix temes sobre la naturalesa i la medicina. Destaquen: Teetet, Parmènides, Sofista, Polític, Fileb, Timeu (on estudia els sòlids platònics), Crities, Lleis i Epínomis.

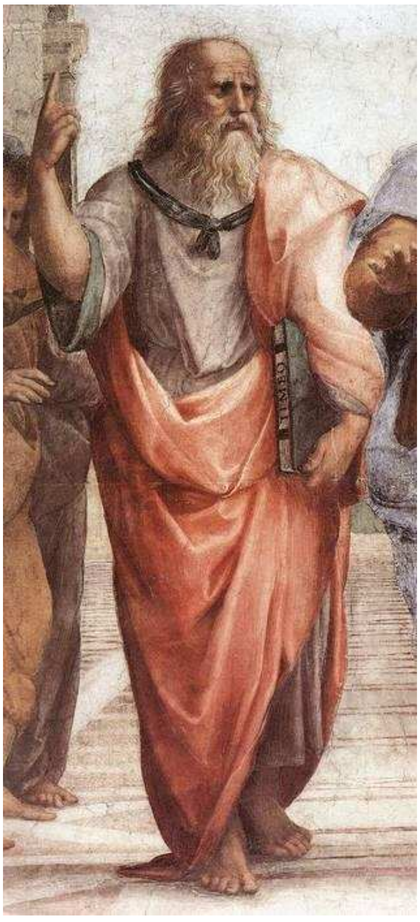
La teoria més coneguda de Plató és la Teoria de les Idees, on es relacionen la Teoria del coneixement, la de l'amor, la política i l'educació. Segons Plató el món en què vivim (món sensible) és una còpia del món de les idees (món intel·ligible), que és la realitat vertadera.

Plató deia que la realitat només es pot assolir amb la intel·ligència no sensible, intel·lectual. Cada idea és única i immutable, al contrari, les coses són múltiples i canviants. La contraposició entre la realitat i el coneixement és descrita per Plató en el Mite de la Caverna, segons el qual són dos els nivells de realitat:

1. El món de les coses, de les aparences, de les ombres, que es perceben amb els sentits. Aquest és el món de la matèria, compost d'objectes imperfectes i subjectes en contínua mutació o canvi, creat per Demiürg a partir de la perfecció de les idees.
2. El món de les idees, de la llum, totalment immaterial, al qual s'arriba a través del camí del coneixement. És el món de les formes ideals, perfectes i universals.

Últims viatges

A l'any 369 emprèn un viatge a Siracusa, convidat per Dió, aquest cop a la cort de Dionisi II, fill de Dionisi I, amb l'objectiu de fer-se càrrec de la seva educació; però els resultats no van ser millor que amb el seu pare; després d'algunes dificultats (sembla que estava en una situació de semi-presó) aconsegueix abandonar Siracusa i tornar a Atenes. Dió també va haber de refugiar-se a Atenes per la enemistat que va sorgir amb Dionisi I, on continuarà l'amistat amb Plató. Uns anys després, el 361, i a petició de Dionisi II, torna a fer un tercer viatge a Siracusa, fracassant igual que en les ocasions anteriors, i tornant a Atenes a l'any 360 on va continuar les seves activitats a la Acadèmia, sent abatut progressivament per la decepció i el pessimisme, el que es reflexa en les se



2.8.3 EUCLIDES

Euclides d'Alexandria (c. 365 – 275 aC) va ser un matemàtic grec, conegut actualment com "el pare de la geometria". Va néixer a Alexandria (Egipte) i va estudiar també a l'escola d'Alexandria. Va ser el fundador de l'escola de matemàtiques de la ciutat.

El seu treball més famós va ser els *Elements*, considerat molts cops el llibre de text de més èxit de la Història. S'hi dedueixen les propietats dels objectes geomètrics i dels nombres naturals a partir d'un petit conjunt d'axiomes. També va escriure sobre perspectiva, seccions còniques, geometria esfèrica i teoria de nombres.

Hi ha 3 hipòtesis diferents sobre aquest matemàtic:

1. Euclides va ser el personatge històric que va escriure *Els Elements* i la resta d'obres atribuïdes a ell.

2. Euclides era líder d'un equip de matemàtics que treballaven a Alexandria. Tots ells van contribuir a escriure les obres d'Euclides, firmant llibres amb el nom d'Euclides en data anterior a la mort d'aquest.

3. Les obres completes d'Euclides en realitat van ser escrites per un equip de matemàtics d'Alexandria que van prendre el nom d'Euclides del filòsof Euclides de Megara, que havia viscut uns cent anys abans.

Procle, que fou el darrer gran representant de la filosofia grega, va escriure cap a mitjans del segle V dC -vuit segles després- un seguit de comentaris sobre el llibre I dels Elements. Aquests comentaris han acabat resultant una font d'informació molt valuosa sobre la història de les matemàtiques a l'antiga Grècia. Dels seus comentaris, per exemple, sabem que Euclides va incorporar les aportacions d'Eudoxe en relació a la teoria de la proporció, i de Teetet sobre els políedres regulars.

2.8.4 EULER

Leonhard Euler va néixer el 15 d'abril de 1707 a Basilea (suïssa) i va morir el 1783 a Sant Petersburg (Rússia). És un dels matemàtics més influents de tota la historia. Euler va treballar pràcticament en totes les àrees de les matemàtiques: geometria, càlcul, trigonometria, àlgebra, teoria de números, a més de física continua, teoria lunar altres

branques de la física. Es diu que és el matemàtic amb més publicacions, només comparable amb Gauss. El treball de recopilar i publicar les seves obres va començar al 1911 i s'han publicat 76 volums. El projecte inicial era publicar-ne 72, i encara en queden per publicar. En el seu casa té moltes obres de gran importància .

De ben petit el seu pare, que era un pastor calvinista, ja li va transmetre molts dels coneixements matemàtics que havia estudiat, entre altres temes, però principalment coneixements matemàtics. Desde petit va estudiar a l'escola de Basilea on, precisament no és on va adquirir la devoció per les matemàtiques, la va adquirir pel seu pare , i metre anava a escola, llegia textos matemàtics pel seu compte i prenia classes particulars. El seu pare el va enviar a la universitat de Basilea al 1720 a l'edat de 14 anys per prepara-l'ho pel ministeri. I ben aviat tindrà professos de prestigi com Johann Bernoulli. Euler va estudiar filosofia i teologia, que era el que volia el seu pare, que fos pastor com ell, però no va trobar l'entusiasme en teologia, grec i hebreu que hi trobava per les matemàtiques, el seu pare va acceptar que estudiés matemàtiques influenciat pel professor del seu fill, Johann Bernoulli, que havia estudiat amb ell, a més a més de ser amics.

Va acabar els estudis amb gran èxit fent publicacions comparatives amb altres filòsofs, i guanyant premis varis.

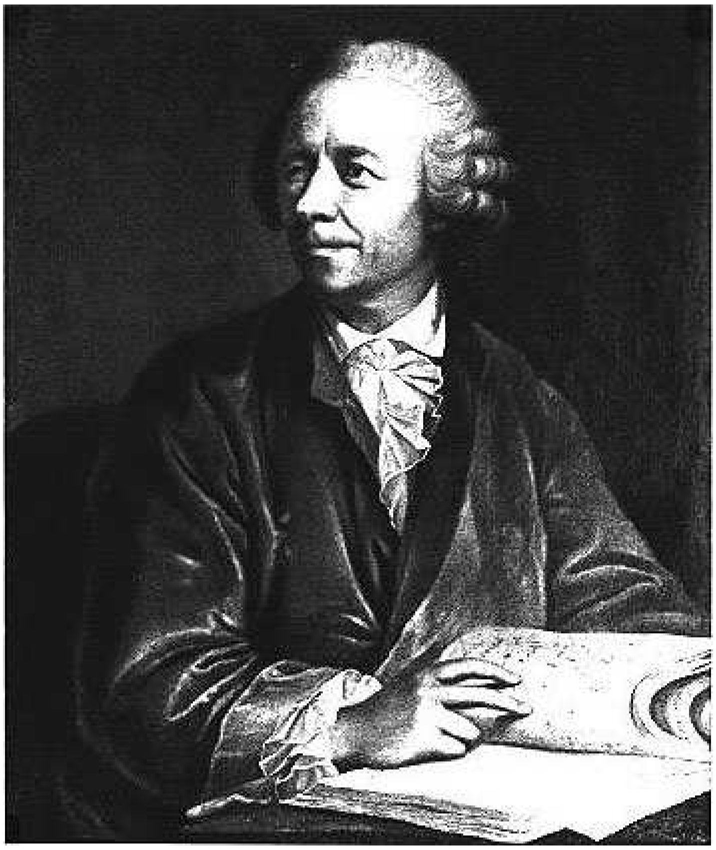
Euler va aconseguir entrar a la universitat de Sant Petersburg, i poc a poc va anant ascendint fins

Arribar a director del departament de matemàtiques. Al 1734 es va casar amb la Katharina Gsell, amb la qual va tenir tretze fills, dels quals només cinc va arribar a l'edat adulta.

Al 1741 va acceptar un càrrec a l'Acadèmia de Berlín degut als problemes polítics que hi havia a Sant Petersburg, va residir vint-i-cinc anys a Berlin on va escriure més de 380 articles i on va publicar dos obres importants. També va escriure unes 200 cartes que enviava a un princesa alemanya explicant-li molts dels seus coneixements, d'aquestes cartes es va fer un llibre que va tenir molt èxit perquè Euler explicava les teories d'una manera molt entenedora. Però les coses es van complicar per Euler quan filòsofs més propers al rei que ell, anaven a la seva contra i molts cops Euler es veia obligat a abandonar les discussions que tenia amb Voltaire, per la seva incapacitat en retòrica i metafísica. Finalment Euler va ser obligat a deixar l'Acadèmia Berlín per ser una persona poc sofisticada.

Al 1735 va patir una febre casi letal, i al 1738 es va quedar sec de l'ull dret i més tard de l'esquerra per cataractes, però això no va significar impediment perquè tenia una gran memòria i podia dir de boca moltes formules, com recitar el llibre la Eneida de Virgili sense dubtar ni un moment.

La situació a Rússia havia millorat amb l'ascens de Catalina la Gran, per tant el 1766 Euler va acceptar una invitació per tornar a la Acadèmia de San Petersburg per passar allà la resta de la seva vida. La segona etapa a Rússia, va estar marcada per la tragèdia: un incendi a San Petersburg al 1771 el va fer perdre la casa i casi la vida, i al 1773 va morir la seva dona. Euler es va tornar a casar tres anys més tard .Al 1783 mort a causa d'un ictus.



2.8.5 KEPLER

Kepler (1517-1630 Alemanya),va ser un astrònom i matemàtic molt important, sobretot per la seva cosmologia

Kepler estava tant seduït per la cosmogonia pitagòrico-platònica, que va pensar en una cosmologia basada en els cinc poliedre regulars. En aquella època només es coneixien sis planetes, Mercuri, Venus, la Terra, Mart, Júpiter i Saturn, per tant va relacionar-los ràpidament, ell com a bon geòmetra no creia en la casualitat i pensava que el Deu geòmetra no improvisa. Per tant pensava que "hi ha sis planetes perquè hi ha cinc poliedres regulars" i dona una visió al sistema solar que consisteix en sòlids platònics inscrits, encaixats un dins l'altre, relacionant els radis de les esferes concèntrica circumscrites, les quals intervenen amb les òrbites dels planetes. Va intentar demostrar aquesta teoria amb càlculs matemàtica però no ho va aconseguir. Per això va buscar una altre explicació, i va fer les tres lleis de Kepler:

1- Els planetes giren descrivint el·lipses, on el sol ocupa un dels seus centres.

2- Els planetes en el seu recorregut, escombra àrees iguals en temps iguals.

3- El quadrat del període del moviment al voltant del sol de qualsevol planeta, és directament proporcional al cub de la distancia mitjana al sol.

$$\boldsymbol{T^2 = K \cdot R^3}$$

T = període d'un planeta

R = distància mitjana al Sol

També va relacionar els sòlids amb els elements naturals primaris d'Empèdocles. Va deduir que el tetraedre és el sòlid amb menys volum, i l'icosàedre el major. Essent les relacions superfície-volum qualitats de sequedat i humitat, com que el foc és el més sec i l'aigua el més humit, el tetràedre representa el foc i l'icosàedre l'aigua. El cub, al ser el més estable es associat amb la terra. L'octaedre com que al agafar-lo per els dos vèrtex oposats es pot fer girar fàcilment, considera que te la inestabilitat de l'aire. Finalment el dodecaedre es associat amb l'univers perquè té dotze cares com dotze signes del zodíac.

Ell va ser el primer que va incloure els poliedres estrellats en la actualitat, tant en la ciència com en l'art.

3. ELS POLÍEDRES

3.1 DEFINICIÓ I PARTS

La paraula políedre deriva del grec *πολύεδρον* (πολύς, polys: "molts" i δρον, édron:"cara"), és a dir, “moltes cares”.

En matemàtiques no hi ha una definició única de políedre, però la que hem cregut més general i encertada és la següent:

“Un políedre és la unió d'un nombre finit de polígons en l'espai, que es troben per parelles en els seus costats”, en altres paraules, cadascun dels costat de cadascun d'aquests polígons coincideix exactament amb un costat d'un altre polígon. Els polígons formen una superfície que delimita una zona sòlida de l'espai: en aquest cas per políedre s'entén aquest sòlid i no només els polígons que delimiten la seva superfície.

En altres llibres la definició de “políedre” va acompanyada d'altres hipòtesis tècniques afegides per excloure alguns casos considerats erronis. Així, per exemple, es defineix “superfície polièdrica”com un nombre finit de polígons a l'espai de tal manera que:

1. la intersecció de les dues cares és buida o és una aresta o un vèrtex,
2. cada aresta pertany precisament a dues cares
3. dues cares adjacents no són coplanàries,
4. fixat un vèrtex *v* i dues cares *f*,*g* incidents a *v*, existeix una cadena de cares C1,...,C2 que conté *v* tal que $f = C_1$, $g = C_n$ i C_i és adjacent a C_{i+1} per a cada *i*.

Respectivament, aquests supòsits estan dissenyats per impedir que:

1. dues cares s'intersequin a l'interior (cosa que en canvi s'ha d'acceptar si es volen considerar políedres alguns com els políedres de Kepler-Poinsot),
2. una aresta pertanyi a 4, 6 o més cares, com en la unió de dos políedres que s'intersequen en una aresta,
3. dues cares se superposin, o que existeixin arestes "falses" amb angle diedre de 180°,
4. un vèrtex *v* que pertanyi localment a 2 o més objectes diferents, com en la unió de dos políedres que s'intersequen en un únic vèrtex.

El políedre, com hem dit, està format per polígons. Podem parlar de 3 elements fonamentals que formen el políedre:

<u>CARES</u>

Les cares cadascun dels polígons que formen el políedre. Cada cara o cada poligon pot tenir formes molt diverses, o bé ser congruents (és a dir iguals tret de translacions, rotacions i simetries), també poden tenir sempre el mateix nombre de costats, sense ser congruents, o poden tenir un nombre de costats variable.2

<u>ARESTES</u>

Els costats de les cares són les arestes del políedre, per definició, una aresta pertany, alhora, a dues cares. Un políedre pot tenir arestes de longitud constant (és a dir, iguals) o variable.1

VÈRTEXS

Els vèrtexs de les cares (és a dir, els extrems dels polígons) són els vèrtexs del políedre. Cada vèrtex pertany almenys a 3 cares diferents. El nombre *n* de cares a les quals pertany també és igual al nombre d'arestes que toca.0

Els *vèrtex adjacents* d'un políedre fan referència als dos vèrtex que són extrems comuns d'una aresta; les *arestes adjacents* del políedre són les que tenen un vèrtex en comú; les cares adjacents del políedre són les que tenen una aresta en comú. Cadascuna de les tres relacions d'adjacència entre els vèrtex, les arestes i les cares d'un políedre és una *relació simètrica*.

També hi ha tres *relacions d'incidència*, s'anomenen *incidents*

- un vèrtex i la aresta de la qual el vèrtex n'és extrem
- un vèrtex i una cara de la qual el vèrtex en forma part
- una aresta i una cara de la qual l'aresta n'és un costat

Les dues cares que toquen una aresta formen un *angle díedre* que pot variar d'aresta a aresta, o bé pot tenir un valor constant en alguns políedres.

Els *angles polièdrics* estan formats per tres o més cares del políedre o tenen un vèrtex comú.

Les *diagonals* d'un políedre són les arestes que uneixen dos vèrtex no pertinents a la mateixa cara.

Els políedres es poden classificar de moltes maneres diferents com per exemple:

- **políedres regulars**
- **deltaedres**
- **políedres arquimedians**
- **prismes**
- **antiprismes**
- **piràmides**
- **(etc.)**

3.2 CARACTERÍSTICA D'EULER

La característica d'Euler és bàsicament una fórmula matemàtica. És una invariant topològica que ens diu que qualsevol poliedre homeomorf a una esfera (un tor o derivats no) compleix una norma que generalment es denota per χ:

$$\chi = C + V - A$$

On: -χ = característica d'Euler.

-C= nombre de cares que té el poliedre.

-V= nombre de vèrtex que té el poliedre.

-A= nombre de arestes que té el poliedre.

Comprovem-ho:

	cares	+	vèrtex	-	arestes	=	2
Tetraedre	4	+	4	-	6	=	2
Cub	6	+	8	-	12	=	2
Octaedre	8	+	6	-	12	=	2
Dodecaedre	12	+	20	-	30	=	2
Icosàedre	20	+	12	-	30	=	2

3.3 GRAFS

Els grafs son, bàsicament, eines matemàtiques que permeten expressar d'una forma visualment molt senzilla i efectiva les relacions que es donen entre elements de molt diversa índole. Són una representació d'objectes on alguns parells dels objectes estan connectats per enllaços.

Més concretament, un graf és un parell G=(V,A), on V és un conjunt finit no buit (als elements del qual anomenem vèrtexs o també nodes o punts) y A és una família finita de parells no ordenats de vèrtexs de V (als elements del qual anomenem arestes, arcs o línies).

Si $\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ és una aresta de G escriurem només $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{uv}$, i direm que "$\boldsymbol{a}$" uneix els vèrtexs "$\boldsymbol{u}$" i "$\boldsymbol{v}$" o que "$\boldsymbol{u}$" i "$\boldsymbol{v}$" són extrems de "$\boldsymbol{a}$". Una aresta a=uu s'anomena *loop*. Una aresta que apareix repetida a A es diu aresta múltiple.

En molts llibres i textos anomenen graf al que aquí es denomina graf simple, permetent la presència d'arestes múltiples en els multígrafs i de *loops* ens els pseudògrafs.

Un graf complet és un graf simple en qual tot parell de vèrtexs està unit per una aresta.

Un graf G=(V,A) s'anomena bipartit si existeix una partició de V, V= X∪Y, tal que cada aresta de G uneix un vèrtex de X amb un altre de Y.

Dos grafs G=(V,A) i G'=(V',A') són isomorfs si existeix una bijecció f:V→V' que conserva la adjacència. (És a dir, ∀ u,v∈V, "u" i "v" són adjacents en G ⇔ f(u) i f(v) són adjacents en G')

Un subgraf de G=(V,A) és un altre graf H=(V',A') tal que V'⊆V i A'⊆A. Si V'=V es diu que H és un subgraf generador.

Els grafs tenen moltíssimes propietats, algunes de les quals són les següents:

- Adjacència: dues arestes son adjacents si tenen un vèrtex en comú, i dos vèrtexs son adjacents si una aresta els uneix.

- Incidència: una aresta és incident a un vèrtex si aquesta l'uneix a un altre.

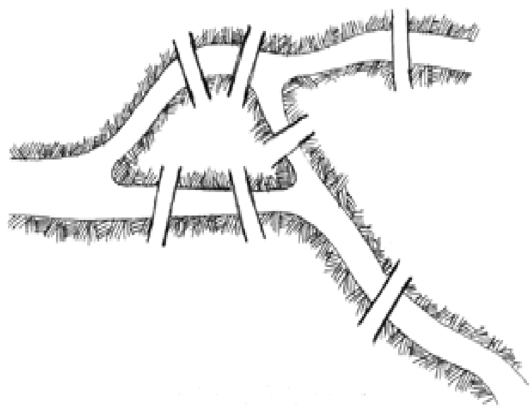
- Graf trivial: el grafs amb només un vèrtex i cap aresta. Un graf amb només vèrtexs i cap aresta es coneix com a graf degenerat. El graf amb cap vèrtex i cap aresta s'anomena graf nul o graf buit.

- Ponderació: correspon a una funció que a cada aresta li associa un valor (cost, pes, longitud…), per augmentar l'expressivitat del model. Això s'utilitza molt en problemes d'optimització, com el del camí més curt.

- Etiquetat: distinció que es fa als vèrtexs i/o arestes mitjançant una marca que els fa unívocament diferenciables de la resta.

Tot i que un graf sembla una estructura molt elemental, hi ha moltíssimes propietats dels grafs l'estudi dels quals ha donat lloc a una completa teoria matemàtica: la teoria dels grafs.
Va ser Leonhard Euler qui va idear els grafs com una manera molt potent i elegant de resoldre el problema dels ponts de Königsberg.

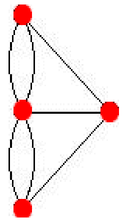
La ciutat de Königsberg, avui Kaliningrad, es troba a la llera del Mar Bàltic, en territori Rus i a uns 50 km de la frontera amb Polònia. En aquesta ciutat s'uneixen dos rius, formant una illa en la seva confluència. Set ponts unien les diferents parts de la ciutat. Al segle XVIII es va fer popular el passatemps de descobrir si era possible creuar els set ponts de la ciutat passant només un sol cop per cadascun d'ells.
Aquest problema es pot resoldre mitjançant un estudi de tots els possibles itineraris, però les matemàtiques s'interessen en buscar una solució senzilla i vàlida per tots els possibles mapes de ciutats, i inclús d'objectes més generals.



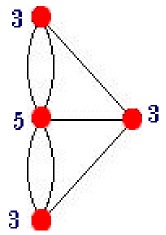
Els ponts de Königsberg

El 1736, el matemàtic suís Leonhard Euler va publicar "Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis", un article en el que es resolia el problema en el cas general. Aquest estudi és considerat com el naixement de la Teoria de Grafs, utilitzada actualment en múltiples aplicacions, i també una de les primeres aparicions d'una "nova geometria" en la que tenen més importància les propietats estructurals d'un objecte que les seves mesures.
La idea d'Euler va ser considerar quatre punts, que es volia comunicar, i els famosos

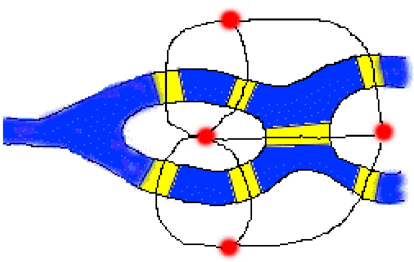
ponts com a trajectòries entre aquests punts. Com a resultat d'això, el mapa de Königsberg pot ser reduït al següent gràfic:



Un gràfic, és una figura les línies o corbes (marges) del qual connecten punts o vèrtexs. En conseqüència, la trajectòria dels ponts de Königsberg pot ser reformulada com un gràfic en el qual els marges són remuntats un sol cop.

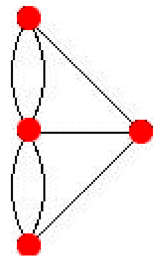


Per cadascun dels vèrtexs del gràfic, l'ordre dels nombres de cadascun d'ells correspon al marge que el correspon. La figura de sota mostra el gràfic del problema dels ponts de Königsberg, amb l'ordre dels nombres dels vèrtexs. Euler va intentar resoldre el problema de la trajectòria dels ponts substituint les àrees terrestres per vèrtexs i i els ponts per arcs (marges). En la figura de sota, els punts vermells representen les àrees terrestres de Königsberg i les corbes negres els ponts.



En funció de la ubicació de cada vèrtex i dels marges que els connecten, Euler no va poder trobar una solució al problema. Només es podria solucionar si els vèrtexs poguessin ser connectats amb marges parells, ja que això implicaria entrar i sortir a través dels mateixos vèrtexs pels quals s'arriba. Alternativament, dos vèrtexs poden estar connectats per un nombre imparell de marges que serien l'inici i el final de la trajectòria.

Podem observar que el problema es pot reformular. El gràfic de la dreta té 4 vèrtexs i 7 marges. El vèrtexs representen les quatre parts en que els rius separen la ciutat, i els set marges representen els ponts. És possible recórrer el gràfic sense passar dos cops pel mateix marge? O dit d'una forma més familiar: es possible dibuixar el gràfic sense aixecar el llapis del paper i sense passar dos cops pel mateix marge?



La resposta d'Euler es molt simple. Suposem que és possible realitzar el dibuix sense aixecar el llapis del paper. Quan el dibuixem, en cada vèrtex intermig que atravessem entrarem per un marge i sortirem per un altre diferent. El nombre de marges que convergeixen amb cada vèrtex de gràfic, exceptuant els vèrtexs inicial i final del dibuix, ha de ser parell. Si anomenem *valència* de cada vèrtex al nombre de marges que convergeixen amb ell, és a dir l'ordre del vèrtex, el que s'ha dit anteriorment significa que per què el problema es pugui solucionar és necessari que en el gràfic hi hagi com a molt dos vèrtexs de valència o ordre imparell. En el cas del gràfic de Königsberg els quatre vèrtexs tenen valència imparella, així que el problema no té solució.

Demostrar que aquesta condició és no només necessària, sinó també suficient, no és fàcil. Si a això hi afegim el fet de que en tot gràfic el nombre de marges amb valència imparella és parell s'arriba ala conclusió dels gràfics que es poden dibuixar sense aixecar el llapis del paper i sense passar dos cops pel mateix marge:

. Si un gràfic no té vèrtexs de valència imparella, llavors es pot dibuixar. A més, es pot dibuixar començant des de qualsevol vèrtex i el dibuix serà "tancat" en el sentit de que acaba en el mateix vèrtex pel que s'ha començat. A aquests gràfics se'ls anomena eulerians.

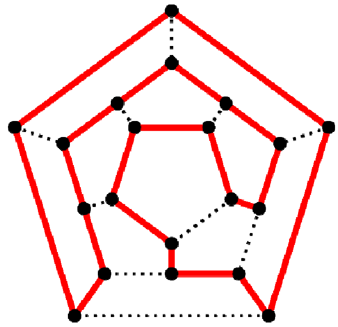
. Si un gràfic té exactament dos vèrtexs de valència imparella, llavors es pot dibuixar, però sempre serà necessari començar en un d'ells i acabar en l'altre.

. Si un gràfic té tres o més vèrtexs de valència imparella no es podrà dibuixar.

També en el camp matemàtic de la teoria dels grafs, podem parlar dels camins de Hamilton. Si en el problema d'Euler només es podia passar un sol cop per cada aresta o marge, en els camins de Hamilton passa una cosa similar però amb els vèrtexs. Un camí hamiltonià en un graf, és un camí (successió d'arestes adjacents) que passa per tots les vèrtexs del graf un sol cop. Si a més a més l'últim vèrtex visitat és adjacent al primer, aquest camí s'anomena cicle hamiltonià. Un gaf que conté un cicle hamiltonià s'anomena graf hamiltonià.
Va sorgir el nom de camins i cicles hamiltonians després que William Rowan Hamilton, inventor del *joc de Hamilton*, llancés una joguina que consistia en trobar un cicle hamiltonià en les arestes d'un graf d'un dodecaedre.
No hi ha cap teoria que regeixi unes normes per a l'existència o inexistència de camins hamiltonians en un graf, però sí que podem saber en alguns casos quan no n'hi podem trobar, a base d'haver observat aquests circuits:

. Si un graf (G) té un vèrtex de valència 1, lògicament sabem que no pot ser hamiltonià.

. Si un graf conté un nombre imparell de vèrtexs amb valència parella, també sabem que aquell graf no serà hamiltonià.



CIcle Hamiltonià

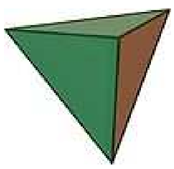
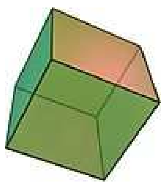
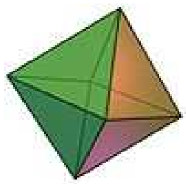
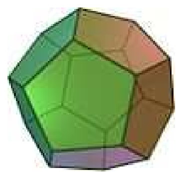
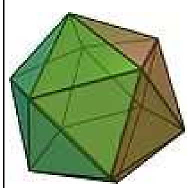
4. ELS SÒLIDS PLATÒNICS

4.1 DEFINICIÓ DE SÒLID PLATÒNIC

Ja hem parlat dels sòlids, però encara no hem donat una definició precisa d'aquests cossos. Veiem certes característiques comunes, com que cadascun dels sòlids només té un tipus de polígon com a cara. Així doncs, d'entre tots els políedres que ens podem imaginar, es diu per definició que un sòlid platònic és un políedre regular. Per entendre de manera exacte què és la *regularitat* a l'espai recordem la definició en el pla. En dues dimensions els polígons són regulars si tots els seus angles són iguals entre sí i tots els costats són també iguals entre sí. L'equivalent a aquesta segona condició en l'espai seria que totes les cares del políedre regular siguin iguals entre sí. A més, en el pla tots els polígons regulars són convexos, propietat que hem d'imposar en tres dimensions.
Necessitem una condició una mica més forta, imposem que els polígons a més d'iguals entre sí, siguin regulars. Un poliedre regular es tot aquell políedre convex en el que:

- Totes les cares són polígons regulars iguals.
- En tots els vèrtexs concorren el mateix nombre de cares i d' arestes.
- Totes les arestes tenen la mateixa longitud.
- Tots els angles díedres que formen las cares entre sí son iguales.
- Tots els seus vèrtexs son convexos a los del icosàedre.

De sòlids platònics n'hi ha cinc, i són els següents:

	tetraedre	**cub**	**octaedre**	**dodecaedre**	**icosàedre**
Sòlids platònics					

4.2 DEMOSTRACIÓ

Per demostrar que només existeixen cinc sòlids platònics, ens ajudarem de la característica d'Euler, el que ens deia la característica d'Euler era:

$$C + V - A = 2$$

On:

$C = nombre\ de\ cares\ que\ té\ el\ poliedre$

$V = nombre\ de\ vèrtex\ que\ té\ el\ poliedre$

$A = nombre\ d'arestesque\ te\ el\ poliedre$

Si sabem que un poliedre regular té tots els vèrtex iguals, es a dir, que a cada vèrtex hi arriben el mateix nombre de cares i arestes, podem deduir que:

$$Vm = 2A$$

Aïllem la V i ens queda:

$$V = \frac{2A}{m}$$

I també:

$$Cn = 2A$$

Aïllem la C i ens queda:

$$C = \frac{2A}{n}$$

On:

$m = nombre\ d'arestesque\ arriben\ a\ cada\ vertex$

$n = nombre\ de\ costats\ de\ la\ cara\ que\ formen\ el\ pliedre$

Ara apliquem les equacions que em trobat a la característica d'Euler:

$$C + V - A = 2$$

$$\frac{2A}{n} + \frac{2A}{m} - A = 2$$

$$2A\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)=2$$

$$A\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)=2$$

Ara es pot observar que perquè aquesta equació sigui possible es s'ha de complir:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-\frac{1}{2}>0$$

Per tant:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}>\frac{1}{2}$$

Ara el que hem de fer és substituir n, i així també trobarem m:

Comencem per $n=3$.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{m}>\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{m}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{m}>\frac{1}{6}$$

Ara el que podem fer és provar per quins valors de m es compleix aquesta igualtat:

- $m=3$

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{6}$$

Correcte

- $m=4$

$$\frac{1}{4}>\frac{1}{6}$$

Correcte

- $m = 5$

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$$

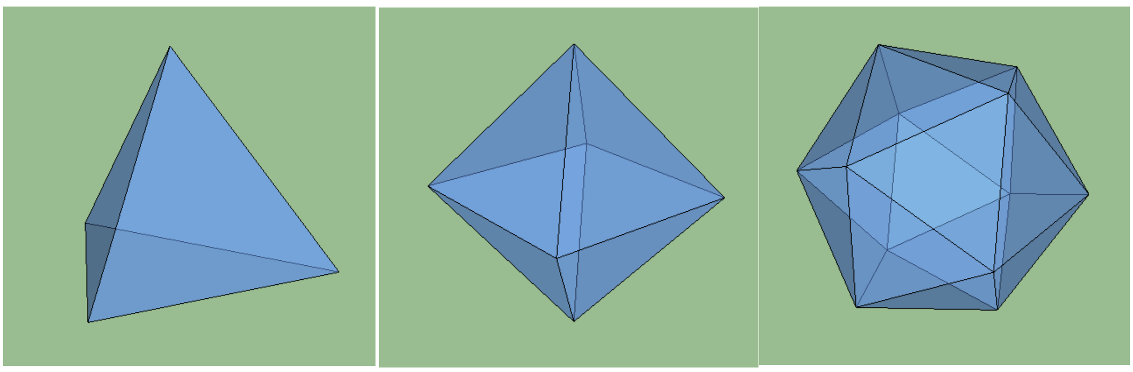
Correcte

- $m = 6$

$$\frac{1}{6} > \frac{1}{6}$$

No es compleix la igualtat

Compleixen els requisits per $n = 3$; $m = 3$, $m = 4$, $m = 5$, que són el tetraedre, l'octaedre i l'icosàedre.



Ara $n = 4$:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{4}$$

Ara el que podem fer és provar per quins valors de m es compleix aquesta igualtat:

- $m = 3$

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

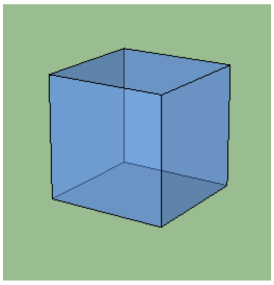
Correcte

- $m = 4$

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{4}$$

No es compleix la igualtat

Compleixen els requisits per $n = 4$; $m = 3$, que és el cub.



Ara $n = 5$:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{m} > \frac{3}{10}$$

Ara el que podem fer és provar per quins valors de m es compleix aquesta igualtat:

- $m = 3$

$$\frac{1}{3} > \frac{3}{10}$$

Correcte

- $m = 4$

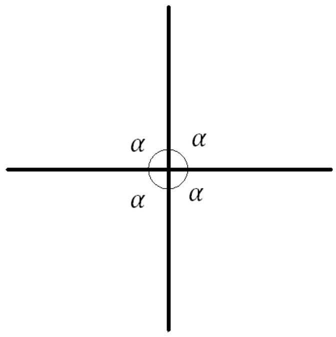
$$\frac{1}{4} > \frac{3}{10}$$

No es compleix la igualtat

Compleixen els requisits per $n = 5$; $m = 3$, que és el dodecaedre.

4.3 CURBATURA

$$\sigma = suma\ dels\ angles\ en\ el\ vertex$$



$$\sigma = 4\alpha$$

Per tant la curvatura en aquest vèrtex és $2\pi - \sigma$.

Ara ho aplicarem als poliedres regulars. Nosaltres coneixem que:

$$V(2\pi - \sigma) = 4\pi$$

$$V = nombre\ de\ vèrtx\ del\ poliedre$$

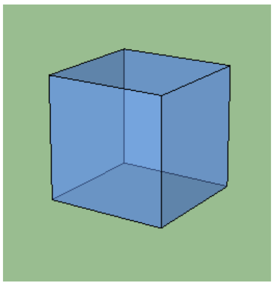
Comprovem-ho:

Cub

$$V = 8$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma = 3\frac{\pi}{2}$$



$$V(2\pi - \sigma) = 4\pi$$

$$8\left(2\pi - 3\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi$$

$$16\pi - 12\pi = 4\pi$$

$$4\pi = 4\pi$$

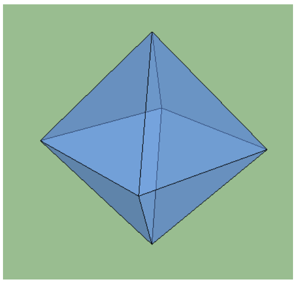
Octaedre

$$V = 6$$

$$\sigma = 4.60°$$

$$\sigma = 240°$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{3}$$



$$V(2\pi - \sigma) = 4\pi$$

$$6\left(2\pi - \frac{4\pi}{3}\right) = 4\pi$$

$$12\pi - 8\pi = 4\pi$$

$$4\pi = 4\pi$$

Per tant podem dir que la curvatura dels sòlids platònics és 4π.

Demostració

Ara demostrarem que l'afirmació que hem donat per sabuda és veraç.

Nosaltres tenim:

$$V(2\pi - \sigma) = 4\pi$$

I com hem vist en la característica d'Euler $C + V - A = 2(C = nombre\ de\ cares, V = nombre\ de\ vèrtex, A = nombre\ d'arestes)$, per tant.

$$V(2\pi - \sigma) = 2\pi(C + V - A)$$

Ara podem simplificar i trobar $V\sigma$, perquè si, $V = nombre\ de\ vèrtx\ del\ poliedre$, i $\sigma = suma\ dels\ angles\ en\ el\ vertex$, per tan, $V\sigma$ és la suma de tots els angles del poliedre.

$$2V\pi - V\sigma = 2C\pi + 2V\pi - 2A\pi$$

$$-V\sigma = 2C\pi - 2A\pi$$

$$-V\sigma = 2\pi(C - A)$$

$$V\sigma = 2\pi(A - C)$$

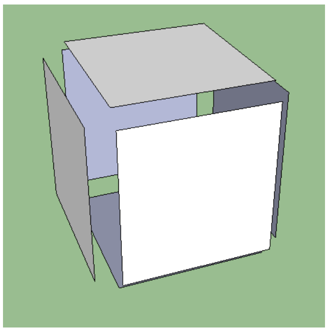
Ara demostrarem que $2\pi(A - C)$, és igual a $V\sigma$.

$$2\pi(A - C)$$

$$2A\pi - 2C\pi$$

Ara podem substituir $2A$, per, Cn.
($n = nombre\ de\ costats\ del\ poligon\ que\ forma\ el\ poliedre$)

Aquest dibuix ens pot ajudar a entendre aquesta igualtat:



$$2A = Cn$$

En el cas del cub:

$$A = 12$$

$$2A = 24$$

$$C = 6$$

$$n = 4$$

$$Cn = 6.4$$

$$Cn = 24$$

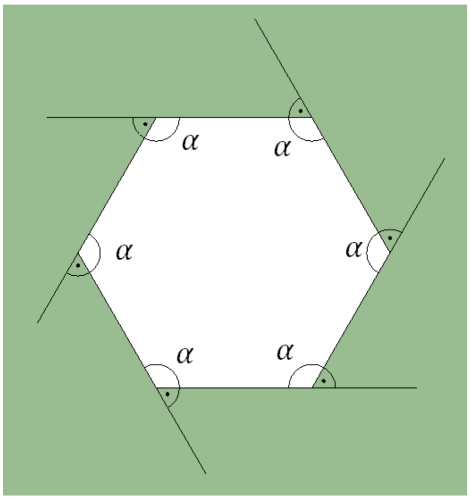
Ara que ja ho em comprovat ja podem substituir:

$$Cn\pi - 2C\pi$$

$$C(n-2)\pi$$

Si coneixem que $(n-2)\pi$, és igual a la suma dels angles de un polígon, i ho multipliquem pel nombre de cares, ja ho tenim.

Ara demostrarem que $(n-2)\pi$ és igual a la suma dels angles de un poligon:



Amb aquesta imatge, el que podem veure és que, si restem l'angle dels vèrtex del polígon a un angle pla, ens queden uns angles, que sumats, creen un gir complet, es a dir un gir de 2π. Per escriure l'equació, farem servir n, en comptes de sumatori.

$$n(\pi - \alpha) = 2\pi$$

Ara desenvoluparem:

$$n\pi - n\alpha = 2\pi$$

Al desenvolupar l'equació hem trobat, $n\alpha$, que ja és el que busquem, perquè si $n = nombre\ de\ costats\ del\ poligon\ que\ forma\ el\ poliedre$, n també és el nombre de vèrtex del polígon, que multiplicat per l'angle és igual a la suma dels angles de un polígon. Ara només hem d'aïllar $n\alpha$:

$$-n\alpha = 2\pi - n\pi$$

$$-n\alpha = \pi(2-n)$$

$$n\alpha = \pi(n-2)$$

Ara ja podem dir que un polígon de n costats, la suma dels angles del polígon és $\pi(n-2)$.

Ara si que podem dir amb seguretat que la curvatura és 4π .

4.4 PLANS DE SIMETRIA

Weyl (1952) indica els dos significats amb els que es fa servir el terme *simetria* en el llenguatge quotidià; en un sentit en el que simètric significa alguna cosa semblant a "ben proporcionat, ben equilibrat", i en el que la simetria denota aquesta espècie de concordança entre varies parts, per la qual aquestes s'integren en un tot; i un altre significat que ve de la imatge de l'equilibri: *simetria bilateral*, simetria de la dreta i l'esquerra, tant patent en la estructura dels animals superior i del cos humà en especial. «Aquesta simetria bilateral, en contrast amb la noció vaga de simetria en el significat del primer cas, és un concepte estrictament geomètric i absolutament precís. Un cos, una configuració espacial és simètric respecte a un pla donat E si es transforma en ell mateix per reflexió a E. (...) Una figura té simetria rotacional al voltant d'un eix *l* si es transforma en ella mateixa per totes les rotacions al voltant de *l*. (...) La simetria bilateral apareix així com el primer cas d'un concepte geomètric de simetria que es refereix a operacions com reflexions i rotacions» (Weyl (1952) pp.15-16 de la trad. Castellana).

En el nostre cas utilitzarem el terme de simetria en el sentit que Weyl precisa com a configuració espacial simètrica respecte a un pla o al voltant d'un eix.

Un *pla de simetria* és un mirall. Un pla de simetria d'un poliedre és un mirall que un tros del poliedre el reflexa exactament en l'altre tros. Un poliedre és simètric respecte a un pla donat E si es transforma en ell mateix per reflexió de E.

Un *eix de rotació* d'un poliedre és una recta que si es fa girar el poliedre al voltant d'aquesta, abans de donar una volta completa el poliedre presenta el mateix aspecte que a la posició inicial.

<u>El cub</u>

Si observem un cub i imaginem que el tallem per un pla paral·lel a un parell de cares oposades que passa pels punts mitjans d'arestes, es pot veure que una de les parts que s'obté és la imatge que tornaria el mirall de l'altra.

Clarament hi haurà 3 d'aquests plans. Si es canvia del cub als plans i es fa servir la idea de simetria, es podria raonar: els plans passaran per dues cares del cub, com que el cub té 6 cares, llavors hi haurà 3 d'aquests plans.

Aquests 3 plans permeten descriure el cub; les seves cares, vèrtexs i arestes estan disposats de manera que, si es repenja sobre qualsevol de les seves cares, el que hi ha a dalt està a baix, disposat de la mateixa manera; el que hi ha al davant està al darrera; el que hi ha a l'esquerra està a la dreta. Tots els vèrtexs del cub poden generar-se a partir d'un d'ells; el vèrtex escollit es reflexa en els tres plans de simetria, plans perpendiculars dos a dos; també es reflecteixen les imatges que es van obtenint; es generen així tots els vèrtexs del cub a partir d'un d'ells.

La figura 3.1(b) mostra aquests tres plans de simetria del cub. Quan els prolonguem fins que intersequen amb l'esfera circumscrita al cub, obtenim el que anomenem *cercles màxims*. A la figura 3.1(c) es mostra la disposició en l'espai del cercles màxims corresponents a aquests 3 plans de simetria del cub.

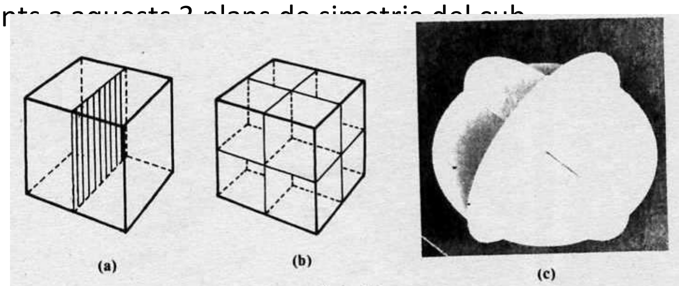


Figura 3.1

El cub té altres plans de simetria. Si ens fixem en una cara, per exemple en la cara que queda a sobre un cop col·locat el cub, l'herència del pla condueix a uns altres dos plans de simetria, un per cada diagonal del quadrat. Aquests plans passen per diagonals de cares oposades. De les cares que queden davant i darrere (un cop col·locat el cub repenjat sobre una cara) apareixen uns altres dos plans, i de les cares que queden a l'esquera i a la dreta uns altres dos.

Aquests plans es poden descriure a partir de les diagonals de les cares poliedre, de les arestes, etc; i a partir d'aquí es pot determinar el nombre de plans:

- Els plans passen per diagonals de cares oposades. Donat que el cub té 3 parells de cares oposades i que per cada parell de cares tenim 2 parells de diagonals, en total es tenen 6 parells de diagonals, i per tant 6 plans de simetria d'aquest tipus.
- Els plans passen per un parell d'arestes oposades (dues arestes són oposades quan el pla que formen passa pel centre del poliedre). Com que el cub té 6 parells d'arestes, tindrem 6 d'aquests plans.

En la figura 3.2(b) es mostra la disposició en l'espai dels cercles màxims corresponents a aquests 6 plans de simetria.

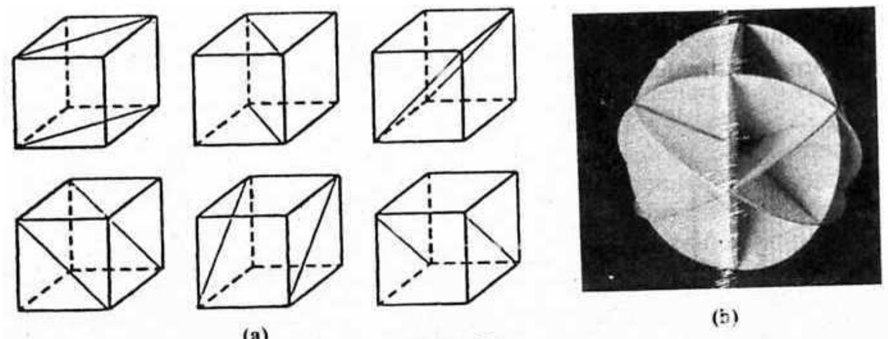


Figura 3.2

Els 9 plans de simetria del cub es podrien haver separat de la següent manera:

Quan es passa del pla a l'espai desplaçant un polígon per obtenir un prisma recte (el cub és un cas especial de prisma) els eixos de simetria del polígon es converteixen en plans de simetria del prima corresponent. Així, es tenen 4 plans de simetria del cub, que es mostren en la figura 3.3(a), els corresponents als eixos de simetria del quadrat.

Quan es passa del polígon al prima recte apareix un nou pla de simetria,m paral·lel a les dues bases del prima obtingut. [figura 3.3(b)]

A més al passar del quadrat al cub apareixen 4 nous plans, que es mostren en la figura 3.3(c), un per cada costat del quadrat. És més difícil imaginar aquests plans de simetria que els ja descrits perquè el tall es fa a l'espai i no son talls vertical o horitzontals (se suposa que el cub esta repenjat en una de les seves cares), el que dificulta imaginar si un tros del cub es reflecteix o no exactament a l'altre tros.

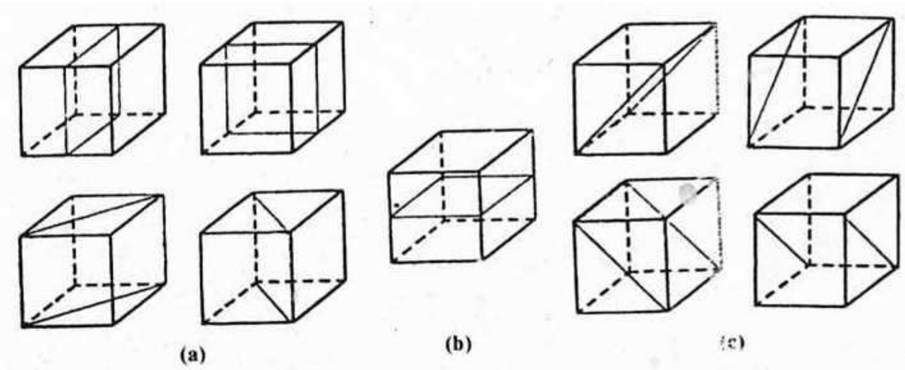


Figura 3.3

L'octaedre

Per l'octaedre també hi haurà dos tipus de plans de simetria:

- Plans paral·lels a parells de cares oposades
- Plans que passen per parells d'arestes oposades

Quan es tracta ed verificar si és cert o no el que s'ha suposat, una manera de descobrir-ho és buscar alguns plans de simetria de l'octaedre i mirar a veure si poden identificar-se d'aquesta manera.

En la figura 3.4(a) es mostren alguns dels plans de simetria de l'octaedre.

Els plans de simetria de l'octaedre també es poden classificar de diferents formes. Una d'elles és la següent:

- Hi ha plans perpendiculars al segment que uneix parells de vèrtexs oposats (dos vèrtexs són oposats si la recta que els uneix passa pel centre del poliedre). Si l'octaedre es considera com una doble piràmide, aquests plans separes les dues piràmides. Es tenen 3 d'aquests plans, ja que l'octaedre té 3 parells de vèrtexs oposats. També es poden descriure a partir de les arestes; aquests plans passen per quatre arestes de l'octaedre.

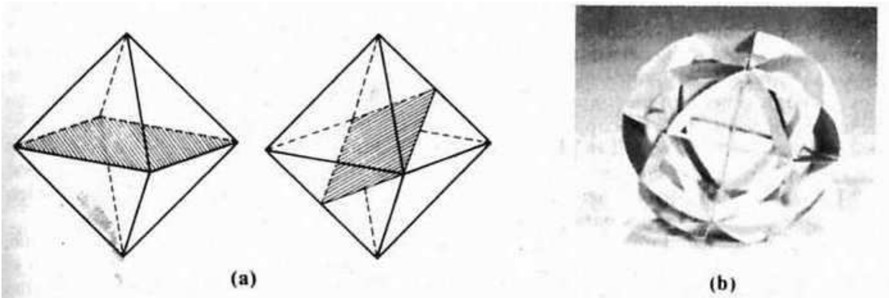


Figura 3.4

Com que en el cub, aquests plans permeten descriure el poliedre; les cares, vèrtexs i arestes de l'octaedre estan disposats de manera que si es recolza sobre qualsevol dels seus vèrtexs com en la figura 3.4(a), el que hi ha a sobre està a sota, disposat de la mateixa manera; el que hi ha al davant està al darrera, i el que hi ha a l'esquerra està a la dreta.

- Hi ha plans de simetria que passen per punts mitjans de parells d'arestes oposades. Aquests plans, a més, passen per vèrtexs oposats. Té 6 plans de simetria d'aquesta classe, ja que té 6 parells d'arestes oposades.

La figura 3.4(b) mostra l'armadura del model de les simetries de l'octaedre.

<u>El cub i l'octaedre. Els plans de simetria. Les seves relacions i esferes</u>

Els plans de simetria del cub o l'octaedre descomponen la superfícies de l'esfera circumscrita en una xarxa de 48 triangles esfèrics iguals. Ambdós poliedres tenen el mateix nombre de plans i, el que és més interessant, la disposició d'aquests plans en l'espai és exactament la mateixa en els dos casos.

El cub i l'octaedre poden inscriure's en una esfera, i inclús es pot inscriure l'octaedre en el cub i a l'inrevés: els vèrtex de l'un es trobaran en els centres de les cares de l'altre i les arestes es creuaran perpendicularment en el punt mitjà. (Un cop observat que el cub i l'octaedre es poden inscriure d'aquesta manera, si a més comparem la forma d'identificar els plans de simetria en cada poliedre mentre que en el cub s'identifiquen els plans per les cares, en l'octaedre s'identifiquen pels vèrtexs; mentre que en cub s'identifiquen per arestes en l'octaedre es consideren punts mitjans d'arestes podríem predir també, sense necessitat de construir el model, que la posició relativa en l'espai dels plans de simetria dels dos poliedre és exactament la mateixa).

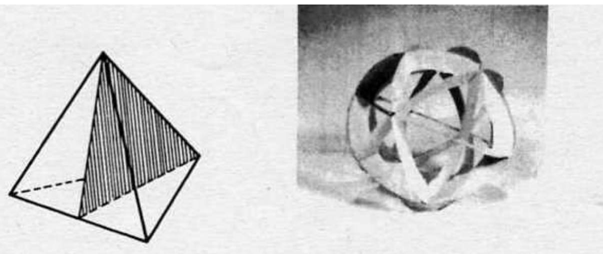
Ara bé, el cub es pot inscriure en l'octaedre de la manera indicada, i es pot circumscriure una esfera al cub, que està inscrita en l'octaedre. A més a més es pot circumscriure una esfera a l'octaedre. Llavors podem deduir que es pot circumscriure i inscriure una esfera a l'octaedre. Raonant de la mateixa manera, però inscrivint l'octaedre en el cub, s'arriba a que també es pot inscriure i circumscriure una esfera al cub.

El tetraedre, cub i octaedre, els seus plans de simetria i esferes.

Per determinar els plans de simetria del tetraedre, poques coses es mantenen dels casos anterior. El tetraedre no té cares oposades ni vèrtexs oposats.

Un dels seus plans de simetria conté una de les seves arestes i passa pel punt mitjà de l'altre, com es mostra a la figura 3.5(a). A més, els 6 plans de simetria del tetraedre son d'aquesta classe.

La figura 3.5(b) mostra l'armadura del model de les simetries d'aquest políedre.



(a) (b)

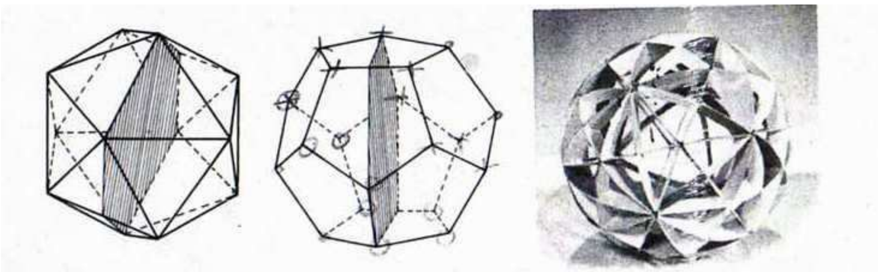
Figura 3.5

Si es construeix el model de la figura 3.5(b) es pot deduir que també es podrà circumscriure una esfera al tetraedre i que es podrà inscriure un tetraedre en una altre tetraedre: els vèrtexs d'un es trobaran ens els centres de les cares de l'altre. D'aquestes dues observacions, i raonant de la mateixa manera que en el cub i l'octaedre, es podrà deduir que es pot inscriure i circumscriure una esfera al tetraedre. Si ara es compara aquest model □de les simetries del tetraedre□ amb el corresponent per el cub o l'octaedre hem de destacar que els 6 plans de simetria del cub o l'octaedre; els que s'han separat com d'una classe.

El dodecaedre i l'icosàedre. Plans de simetria i esferes

El dodecaedre i l'icosàedre, igual que el cub i l'octaedre, verifiquen que el nombre de cares i de vèrtexs estan intercanviats i el seu nombre d'arestes coincideix. Cal pensar, doncs, que tindran el mateix nombre de plans de simetria i, el que és més important, que la posició relativa d'aquests plans en l'espai serà exactament la mateixa.

Efectivament, el dodecaedre i l'icosàedre tenen plans de simetria que passen per un parell d'arestes oposades i tallen pel punt mitjà a un altre parell d'arestes oposades. Per suposat tenen 15 plans de simetria, un per cada parell d'arestes oposades (figura 3.6(a). La posició relativa d¡aquests plans en l'espai es mostra en la figura 3.6(b).



(a) (b)

Figura 3.6

Si es construeix el model de la figura 3.6(b), les observacions i conclusions relatives a inscripcions que poden establir-se són anàlogues a les trobades pel cub i l'octaedre:

- En cada vèrtex del dodecaedre hi arriben 3 plans i en cada vèrtexs de l'icosàedre hi arriben 5 d'aquests plans. El model suggereix que aquests dos poliedres poden inscriure's en una esfera i que es podrà inscriure el dodecaedre en l'icosàedre i a l'inrevés. D'aquests resultats es pot deduir que es podrà inscriure i circumscriure una esfera a aquests poliedres. A l'icosàedre se li pot circumscriure una esfera. Si, per una altra part, partim del dodecaedre, s'obtenen els mateixos resultats que per l'icosàedre.

- El model té 3 plans de simetria que són perpendiculars dos a dos, com passava en el model de les simetries del cub i l'octaedre.

<table>
<tr><th colspan="7">PLANS DE SIMETRIA DELS SÒLIDS PLATÒNICS</th></tr>
<tr><td colspan="7">Posició relativa en l’espai</td></tr>
<tr><th colspan="3">Tetraedre</th><th colspan="2">Cub i octaedre</th><th colspan="2">Dodecaedre i icosàedre</th></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="7">Descripció dels plans de simetria en funció del
políedre i nombre de plans</td></tr>
<tr><th>Políedre</th><th>que passen per una aresta i el punt mitjà d’una altra</th><th>que són paral·lels a parells de cares</th><th>que són perpendicu-lars al segment que uneix parells de vèrtexs</th><th>que passen per parells d’arestes oposades</th><th>que passen per punts mitjans de parells d’arestes oposades</th><th>Que passen per parells d’arestes oposades i tallen pel punt mitjà a un altre parell d’arestes</th></tr>
<tr><th>Tetraedre</th><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th>Cub</th><td></td><td>3</td><td></td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><th>Octaedre</th><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><th>Dodecaedre</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><th>Icosàedre</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
</table>

4.5 EIXOS DE ROTACIÓ I ORDE D'AQUESTS EIXOS

El cub i l'octaedre. Eixos de rotació i plans de simetria. Orde de rotació dels eixos

Un eix de rotació del cub és el que passa pels centres de cares oposades. L'orde d'aquest eix és 4: hi ha un gir de 90°, que si es fa 4 cops s'arriba a la posició inicial. També es podria dir de la següent manera: el cub presenta 4 vegades el mateix aspecte quan es fa girar una volta completa al voltant d'aquest eix. L'orde d'aquests eixos en aquest poliedre coincideix amb el nombre de costats del polígon de les cares del cub. Hi ha 3 eixos d'aquest tipus, un per cada parell de cares oposades del cub. Cadascun és perpendicular a un pla de simetria paral·lel a parells de cares oposades. [figura 3.7]

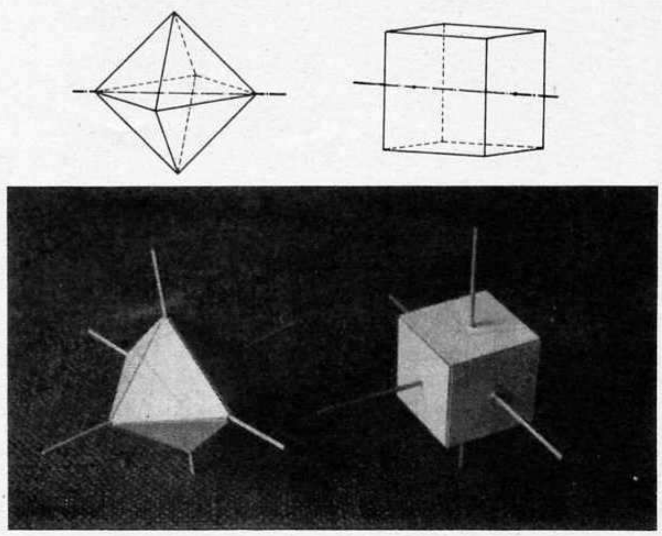


Figura 3.7

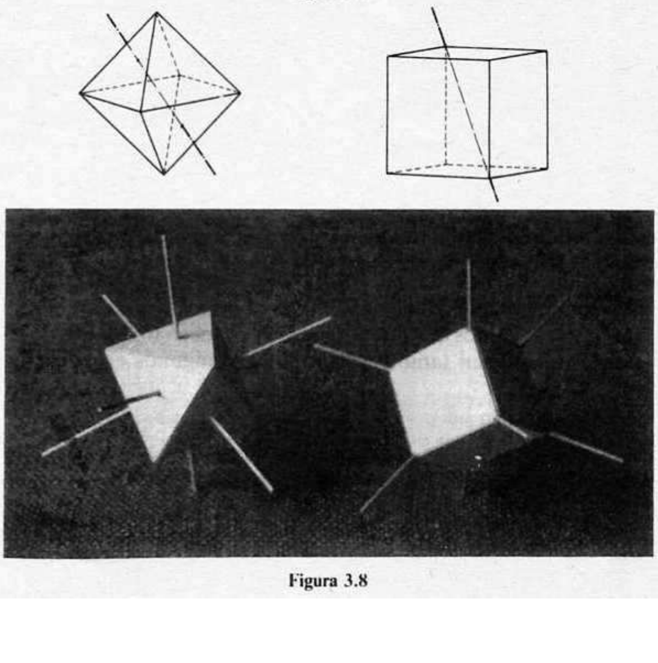


Figura 3.8

Com que les cares del cub es corresponen amb els vèrtexs de l'octaedre, es pot pensar que aquests eixos es correspondran en l'octaedre amb els eixos que passen per vèrtexs oposats. Efectivament, l'octaedre té 3 eixos d'orde 4, un per cada parell de vèrtexs oposats. Cadascun és perpendicular a un pla de simetria de l'octaedre. [figura 3.7]. En aquests girs l'orde de rotació coincideix amb l'orde dels vèrtexs del sòlid.

Hi ha un altre tipus d'eixos de rotació, que passen per vèrtexs oposats del cub. El corresponent a l'octaedre passa per centres de cares. En els dos casos hi ha 4 d'aquests eixos i son d'orde 3. [figura 3.8]

De nou, l'orde de rotació coincideix amb el nombre de costats del polígon de les cares, si l'eix passa pels centres de les cares, o amb l'orde dels vèrtexs, si l'eix passa per vèrtexs oposats.

Aquests eixos de rotació no són perpendiculars a cap pla de simetria. Tot i això, els plans perpendiculars als eixos de rotació d'orde 3 del cub i l'octaedre tallen a aquests sòlids en seccions que són hexàgons regulars. [figura 3.9]. Així, donat que en el cub o l'octaedre es tenen 4 d'aquests eixos, en cadascun d'aquests poliedres es tindran 4 possibles seccions hexagonals regulars.

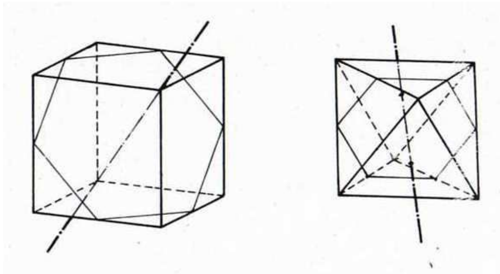
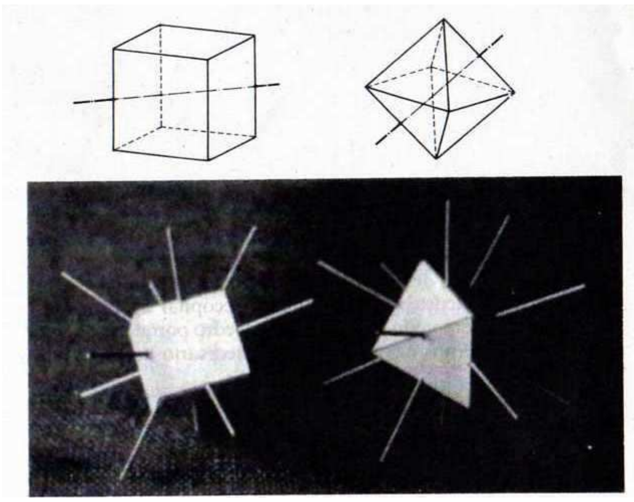


Figura 3.9

Hi ha un tercer tipus d'eixos de rotació que passen per punts mitjans d'arestes oposades. Aquests eixos de rotació són d'orde 2. Cadascun d'ells també és perpendicular a un pla de simetria, que en el cub passa per parells d'arestes oposades, i en l'octaedre per punts mitjans de parells d'arestes oposades.

Fins ara hem descrit els eixos de rotació a partir del políedre corresponent i es hem fixat en si la secció perpendicular a l'eix era o no pla de simetria del políedre. Ara tractarem de relacionar plans i eixos d'una manera que reflecteixi millor la posició relativa dels eixos respecte els plans. Quan es coneixen els plans de simetria d'un políedre es tenen també determinats alguns eixos de rotació i el seu orde.



Si en el model dels cercles màxims dels plans de simetria d'aquests poliedres s'afegeixen tots els eixos de rotació, és possible establir que:

- Els eixos de rotació passen sempre pels vèrtexs dels triangles en que s'ha descompost el políedre esfèric o l'esfera circumscrita.

- En les rectes on es tallen plans de simetria hi ha un eix de rotació. Tots els eixos de rotació es troben al menys en dos plans de simetria.

- L'orde de rotació d'aquests eixos coincideix amb en nombre de plans de simetria que es tallen en aquest eix, nombre que coincideix amb el de plans que passen pel vèrtex del triangle esfèric per el que passa l'eix.

El dodecaedre i l'icosàedre. Eixos de rotació i plans de simetria. Orde de rotació dels eixos

Si ara tenim en compte les conclusions establides pel cub i l'octaedre, tindrem determinats pels altres poliedres platònics els eixos de rotació que provenen de la intersecció de plans de simetria i, a més a més, la seva posició relativa en l'espai; on es tallen els plans de simetria hi ha un eix de rotació. Aquests eixos passen també pels vèrtexs dels triangles en què s¡ha descompost el políedre esfèric. L'orde de rotació d'aquests eixos coincideix amb el nombre de plans de simetria que es tallen en aquest eix. Només faltarà veure si aquests políedre poden tenir altres eixos de rotació.

Si el que volem és descriure els eixos de rotació del dodecaedre i l'icosàedre a partir del políedre convé recopilar les observacions i resultats que s'han obtingut en el cub o l'octaedre perquè, probablement, pels políedre que estem estudiant ara, només serà necessari fer alguna modificació.

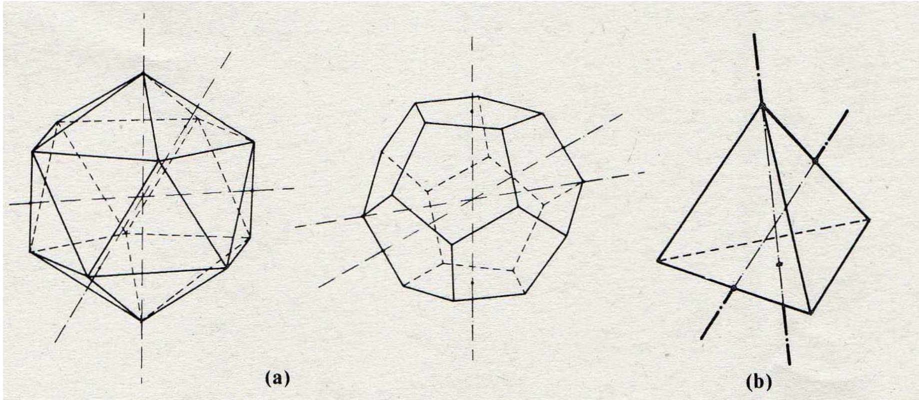
I de fet, el dodecaedre i l'icosàedre tenen els tres tipus d'eixos de rotació determinats en el cub i l'octaedre:

- Eixos de rotació d'orde 5, que passen pels centres de les cares del dodecaedre o per vèrtexs oposats de l'icosàedre. [figura 3.11(a)]. En cadascun d'aquests políedre hi ha 6 eixos d'aquests. El pla perpendicular a cadascun d'ells talla al dodecaedre o a l'icosàedre en una secció decàgon regular que no és pla de simetria del políedre corresponent.

- Eixos de rotació d'orde 3, que passen pels centres de les cares de l'icosàedre i per vèrtexs oposats del dodecaedre. [figura 3.11(a)]. El pla perpendicular a cadascun d'aquests 10 eixos talla el dodecaedre en hexàgons regulars, igual que els plans corresponents tallaven al cub i a l'octaedre. Tot i això, al considerar l'icosàedre, aquests plans el tallen en un dodecàgon no regular; encara que els seus costats tenen la mateixa longitud, els angles són diferents.

- 15 eixos de rotació d'orde 2 □figura 3.11(a)□, que passen per punts mitjans d'arestes oposades i són perpendiculars a plans de simetria del políedre.

Com pot observar-se hi ha alguna variant respecte als resultats obtinguts en el cub i l'octaedre, relatius a la secció perpendicular als eixos de rotació.



Si en el que ens fixem és en com es tallen els eixos de rotació d'aquests políedre i comparem aquest model amb el dels eixos de rotació del cub i l'octaedre, es pot observar:

- Els 4 eixos de rotació d'orde 3 de cub i l'octaedre estan disposats exactament de la mateixa manera que 4 eixos de rotació d'orde 3 del dodecàedre i l'icosàedre.
- Els 3 eixos de rotació d'orde 4 del cub i l'octaedre estan disposats exactament de la mateixa manera que 3 eixos de rotació d'orde 2 del dodecaedre i l'icosàedre.

<u>El tetraedre. Eixos de rotació i plans de simetria. Orde de rotació d'aquests eixos</u>

Per descriure els eixos de rotació del tetraedre a partir de políedre, com que aquest no té cares oposades ni vèrtexs oposats, no es podran aplicar directament tots els resultats obtinguts en els políedres anteriors.

El tetraedre també té eixos de rotació d'orde 2 que passen per punts mitjans d'arestes; 3 en total. Les seccions perpendiculars a aquests 3 eixos són quadrats que no corresponen a plans de simetria del tetraedre, però que el divideixen en dues parts iguals. Figura 3.11(b). Té també eixos d'orde 3. Aquests eixos passen per un vèrtex del tetraedre i el centre de la cara oposada. Figura 3.11(b). Les seccions perpendiculars són triangles equilàters, que tampoc són plans de simetria del políedre.

Quan es compara la posició en l'espai dels eixos de rotació del tetraedre amb la dels del cub, poden notar-se que els 7 eixos de rotació del tetraedre es tallen exactament de la mateixa manera que els 7 eixos de rotació del cub. El resultat es podia haver previst ja que s’ha vist que això passava també pels plans de simetria i se sap que els eixos de rotació dels sòlids platònics provenen de la intersecció de plans de simetria.

EIXOS DE ROTACIÓ I ORDE DELS EIXOS				
En les rectes on es tallen dos plans de simetria hi ha un eix de rotació. L’orde de rotació d’aquests eixos és igual al nombre de plans que es tallen en aquest eix.				
Poliedre	**Eixos d’orde 2**	**Eixos d’orde 3**	**Eixos d’orde 4**	**Eixos d’orde 5**
Tetraedre	3 perpendiculars a seccions quadrades	4 perpendiculars a seccions triangles equilàters		
Cub	6 ↓ Perpendiculars a P. de Simetria ↑	4 ↓ Perpendiculars a seccions hexagonals ↑	3 ↓ Perpendiculars a P. de Simetria ↑	
Octaedre	6	4	3	
Dodecaedre	15 ↓ Perpendiculars a P. de Simetria ↑	10 ↓ Perpendiculars seccions hexagonals regular o dodecàgon ↑		6 ↓ Perpendiculars a seccions dodecàgon no regular ↑
Icosàedre	15	10	□	6

4.6 RELACIONS ENTRE POLÍEDRES

4.6.1Dualitat

Hi ha parells de políedres regulars que comparteixen totes les simetries i per tant els podem col·locar de manera que el model resultant també les conservi. Si els observem veiem que es compleix:

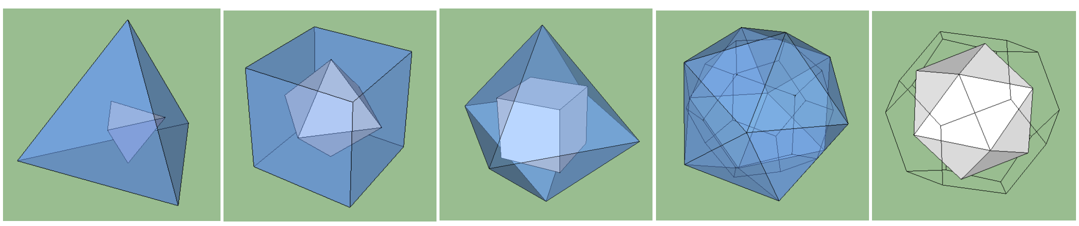
- Per cada vèrtex del políedre inscrit apareix una cara del políedre circumscrit (políedre que queda a l'exterior), perpendicular a l'eix de rotació que passa per aquell vèrtex.
- Cada vèrtex del políedre circumscrit es correspon amb una cara del políedre inicial, perpendicular a l'eix de rotació que passa per aquell vèrtex.
- Per cada aresta del políedre inscrit apareix una aresta en el sòlid circumscrit. Aquestes es creuen perpendicularment i l'eix de rotació que passa pels punts mitjans de les arestes del políedre inscrit ho é també del circumscrit, i alhora passa pels punts mitjans de les arestes d'aquest.
- El nombre de costats de les cars d'un sòlid coincideix amb l'orde dels vèrtexs de l'altre sòlid.

Els políedre que estan interrelacionats d'aquesta manera se'ls anomena *duals* o *recíprocs*.

D'aquesta idea de políedres duals es dedueix que ens aquests polígons s'intercanviarà el nombre de cares i de vèrtexs i el nombre d'arestes coincidirà. A més a més els vèrtexs es correspondran amb els centres de les cares i el seu orde serà igual al nombre de costats del polígon de les cares.

Els sòlids platònics es poden agrupar de la manera següent: el cub i l'octaedre són duals, el dodecaedre i l'icosàedre són duals.

El tetraedre és el dual d'ell mateix. El tetraedres també es poden col·locar de manera que es mantinguin les seves simetries; que cada vèrtexs es correspongui amb una cara perpendicular a l'eix de rotació que passa per aquest vèrtex; que les arestes es creuin perpendicularment. En el tetraedre el nombre de cares i de vèrtexs s'intercanvia i l'orde dels seus vèrtexs coincideix amb el nombre de costats del polígon de les seves cares.



4.6.2 El model dels 5 políedres regulars convexos

Donat que els políedres regulars s'inscriuen de varies formes, ens podem plantejar el problema d'inscriure els 5 políedres regulars els uns en els altres de manera que es mantinguin algunes simetries.

Es pot començar construint un cub. En ell, per donar-li rigidesa, se li introdueix un tetraedre. El model resultant té les simetries del tetraedre. En aquest tetraedre se li introdueix un octaedre, resultant al final un model de les mateixes simetries que l'anterior.

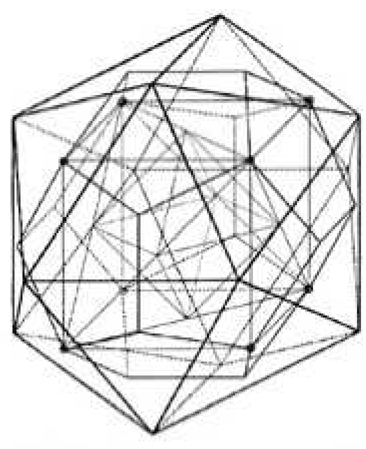
El cub, amb els sòlids inscrits en ell, s'introdueix en un dodecaedre. El model resultant te 4 eixos de rotació d'orde 3 i 3 d'orde 2. I finalment es pot introduir el dodecaedre en un icosàedre.

Aquest model de gran rigidesa, amb els 5 políedres regulars inscrits els uns en els altres.

Si es vol construir aquest model, un cop escollides les mides de l'aresta «$\boldsymbol{a}$» per construir el cub, s'han de determinar les dimensions de les arestes dels altres políedres.

Aquestes mesures es poden obtenir per la relació que hi ha entre les arestes dels políedres corresponents. L'aresta del tetraedre és la diagonal del quadrat de les cares del cub, la de l'octaedre és la meitat que la del tetraedre, la del cub és la diagonal del pentàgon de les cares del dodecaedre i la longitud de l'aresta del dodecaedre coincideix amb la distància entre els centres de 2 cares veïnes de l'icosàedre.

	cub	tetraedre	octaedre	dodecaedre	icosàedre
Longitud aresta	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a\sqrt{2}}$	$\boldsymbol{a\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}}$	$\boldsymbol{1.14a}$



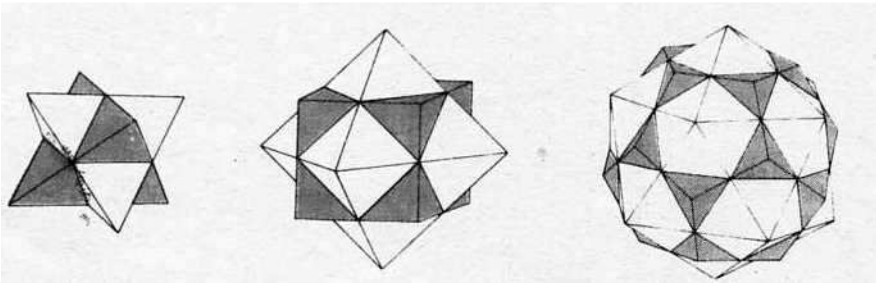
Els 5 sòlids platònics inscrits de forma successiva cadascun dins d'un altre

4.6.3 Un altre model dels políedres platònics duals: formes compostes

Un altre model dels políedres platònics duals: formes compostes

Si en el model d'un políedre inscrit en el seu duals es va augmentant la mida del políedre inscrit, les arestes d'aquest es converteixen en arestes paral·leles que es van apropant a les arestes del políedre circumscrit. Arribarà un moment en que les arestes es tallaran.

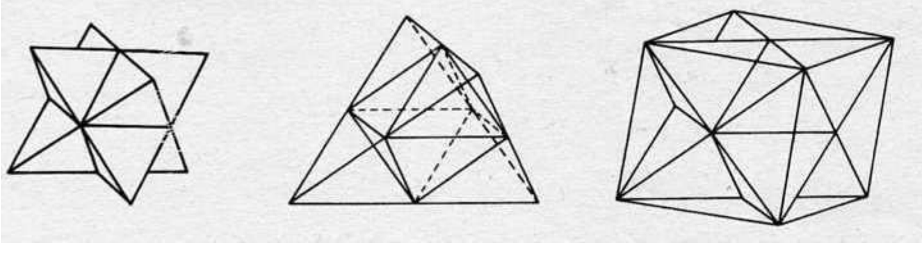
La figura 5.10 mostra col·locats d'aquesta forma l'octaedre i el cub, el dodecaedre i l'icosàedre i els dos tetraedres.



Aquesta és una col·locació dels políedres duals molt interessant. Les arestes dels políedres es tallen perpendicularment en el punt mitjà, les arestes que bisequen a les d'una cara es tallen en un vèrtex del políedre dual, i les que bisequen a les que concorren en un vèrtex formen una cara del dual. A més, en els políedres platònics l'estudi del sòlid intersecció i el sòlid que els conté proporciona gran activitat matemàtica: els sòlids implicats estan molt interrelacionats.

Estrella octangular

Quan dos tetraedres es col·loquen com en la imatge de sota, les arestes dels dos tetraedre es tallen en el punt mitjà, i s'obté l'estrella octangular, la forma composta més senzilla.



A partir de la figura es pot deduir que la forma del sòlid intersecció dels dos tetraedres és l'octaedre i que el sòlid que conté l'estrella octangular (el sòlid embolcall) és el cub. Una forma de raonar que el cub ocupa aquesta funció pot ser:

- Les dues diagonals de cada cara del sòlid embolcall son les arestes dels tetraedre. Aquestes són iguals, es tallen en el punt mitjà i son perpendiculars.

Com que els polígons que tenen diagonals que compleixen aquestes propietats són els quadrats, les cares del sòlid embolcall són quadrats.

- Cada dues diagonals formen una cara i tenim 12 diagonals (les arestes dels tetraedres), i llavors el sòlid embolcall té 6 cares.

- Com que cada cara del sòlid embolcall té 4 arestes i cada aresta es conta dos cops perquè pertany a dues cares, el nombre d'arestes del políedre embolcall és 12.

- Els vèrtexs i l'orde dels vèrtexs coincideixen amb els dels sòlids que formen el compost. Així doncs, el sòlid embolcall té 8 vèrtexs d'orde 3

Una forma de raonar que el sòlid intersecció és l'octaedre és la següent:

- Les cantonades de cadascun dels tetraedres intersecccionen amb les cares de l'altre en un triangle equilàter. Així el nombre de cares del sòlid intersecció és la suma dels vèrtexs dels dos tetraedres.

- Per cada vèrtexs dels tetraedre apareixen 3 arestes, però cada aresta es conta dos cops. Per tant, el sòlid intersecció té 12 arestes.

- Per cada vèrtexs dels tetraedres apareixen 3 vèrtexs, però cada vèrtexs es conta 4 cops. Així, el sòlid intersecció té 6 vèrtexs d'orde quatre.

El cub i l'octaedre. El dodecaedre i l'icosàedre

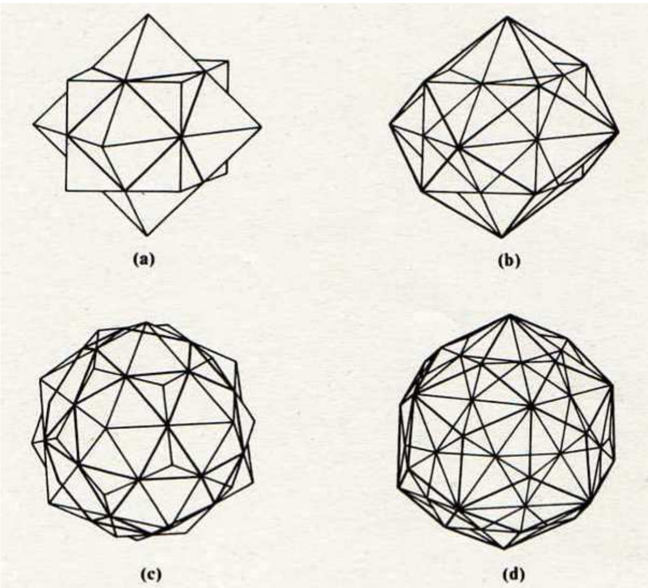


Figura 5.13

El sòlid embolcall del cub i l'octaedre, o del dodecaedre i l'icosàedre, és el *rombedodecaedre* o el *triacontraedre ròmbic* respectivament. [figura 5.13].

Ara raonarem que les característiques dels sòlids embolcall d'aquestes formes compostes coincideixen amb les del rombedodecaedre o triacontraedre ròmbic.

- Les arestes del cub i l'octaedre, i del dodecaedre i l'icosàedre, són les diagonals de les cares del sòlid embolcall. Així doncs, les diagonals es tallen en el punt mitjà perpendicularment, però no són iguals. Donat que el quadrilàter amb aquestes propietats és un rombe, les cares del sòlid embolcall en tots dos casos són rombes.

- Cada dues diagonals formen una cara, com que en la primera forma hi ha 24 diagonals (les arestes del cub i de l'octaedre) i en el segona 60 (les arestes de dodecaedre i l'icosàedre), els sòlids embolcall tenen 12 i 30 cares respectivament.

- L'orde dels vèrtexs coincideix amb l'orde dels vèrtexs dels sòlids que formen el compost.

La figura 5.14 mostra els sòlids embolcall: el rombedodecaedre i el triacontraedre ròmbic.

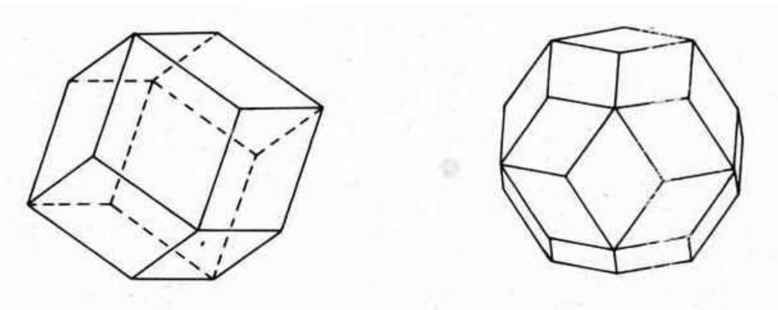


Figura 5.14

El cuboctaedre i l'icosidodecaedre

Al sòlid intersecció del cub i l'octaedre de l'anomena *cuboctaedre* i al sòlid intersecció del dodecaedre i l'icosàedre, *icosidodecaedre*. Aquests sòlids es mostren en la figura 5.15 respectivament.

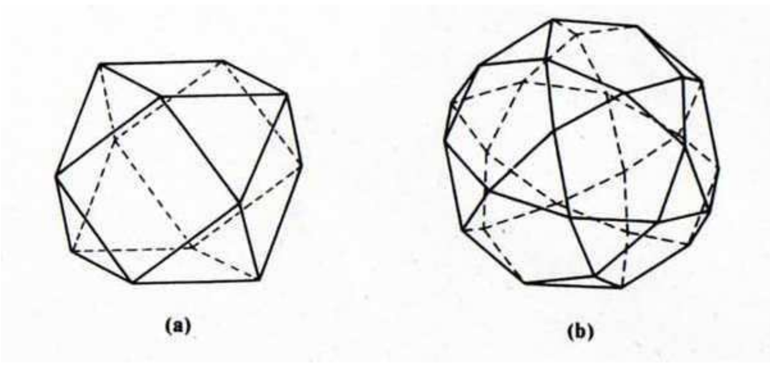


Figura 5.15

a) cuboctaedre b) icosidodecaedre

De manera anàloga a com s'han determinat les característiques del políedre intersecció de l'estrella octangular, a partir dels políedre que formen el sòlid compost, es poden determinar les característiques d'aquests políedres.

- Les cantonades del cub interseccionen amb les cares de l'octaedre en un triangle equilàter, i les cantonades del dodecaedre interseccionen amb les cares del cub en un quadrat. Així, el sòlid intersecció té 8 cares triangulars i 6 cares quadrades. De la mateixa manera s'obté que el sòlid intersecció del dodecaedre i l'icosàedre té 20 cares que són triangles equilàters i 12 que són pentàgons regulars.

- Per cada vèrtexs del cub apareixen 3 arestes, i per cada vèrtexs de l'octaedre 4, però cada aresta es conta dues vegades. Per tant, el sòlid intersecció de la forma composta del cub i l'octaedre té 24 arestes i el dodecaedre i l'icosàedre en té 60.

- Per cada vèrtexs del cub apareixen 3 vèrtexs, i per cada vèrtexs de l'octaedre n'apareixen 4, però cada vèrtexs es conta 4 cops. Així, el sòlid intersecció de la forma composta del dodecaedre i l'icosàedre té 30 vèrtexs d'orde 4.

Els políedres intersecció i els embolcall

El sòlid intersecció i el sòlid embolcall són duals. Les cares del sòlid intersecció es corresponen amb els vèrtexs de l'embolcall i a l'inrevés; per cada aresta d'un d'aquests sòlids hi ha una aresta de l'altre, i ambdues es creuen perpendicularment; l'orde dels vèrtexs d'un sòlid coincideix amb el nombre de costats de les cares corresponents de l'altre sòlid.

Els políedres intersecció i el sòlid compost

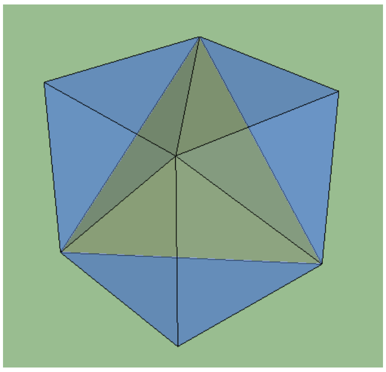
Els sòlids compostos anteriors es poden obtenir afegint piràmides a totes les cares del políedre intersecció. Per l'octaedre, aquestes piràmides són tetraedres iguals; per el cuboctaedre i l'icosidodecaedre són de dues classes, que corresponen a les piràmides que s'afegeixen a cadascun dels políedres platònics que componen cada forma composta.

També es poden obtenir prolongant els plans de les cares de l'octaedre, cuboctaedre i de l'icosidodecaedre respectivament.

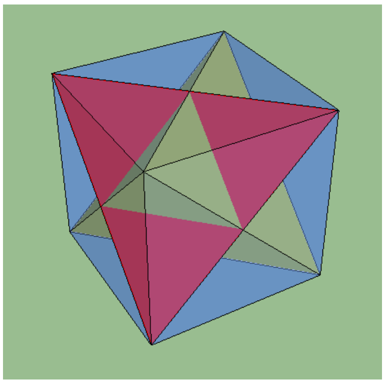
4.6.4 Relacions entre el tetraedre, el cub i l'octaedre

Podem incloure el tetraedre dins d'un cub, els quatre vèrtex són comuns a quatre dels vuit vèrtex del cub, i les sis arestes són sis de les dotze diagonals.

Queda de les següent manera:

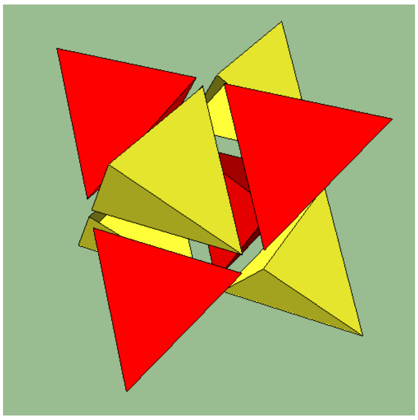


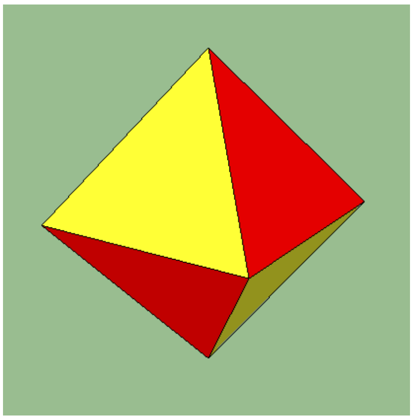
Com hem pogut veure només hem utilitzat la meitat dels vèrtex i les diagonals, per tant encara hi podem incloure un altre tetraedre, i queda de la següent manera:



Aquesta estrella de vuit puntes formada per dos tetraedres s'anomena estrella octangular

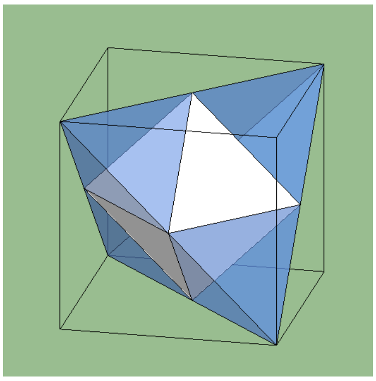
Al traçar les totes les diagonals, trobem el centre de les cares, per tant, com hem vist abans, el cub era dual amb l'octaedre, per tant , la part comuna dels tetraedres forma un octaedre com el següent, per veureu amb més claredat, podem veure el següent dibuix en que els tetraedres estan dibuixats amb quatre tetraedres separats:



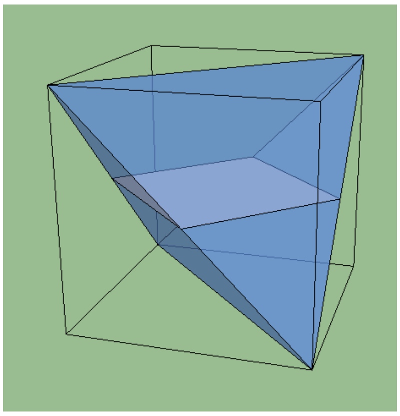
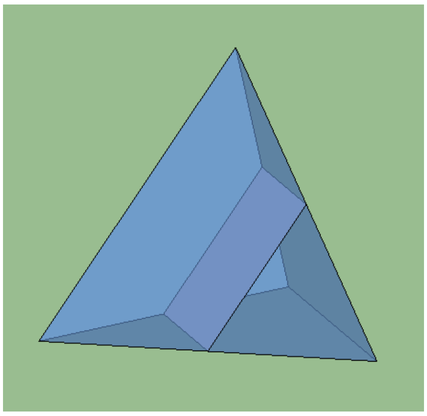


Com hem vist, a partir de dos tetraedres podem obtenir un octaedre, i si sabem que l'octaedre conté seccions quadrades, podem deduir que el tetraedre també.

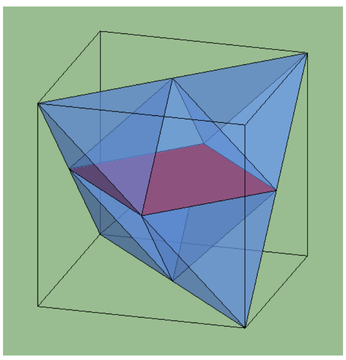
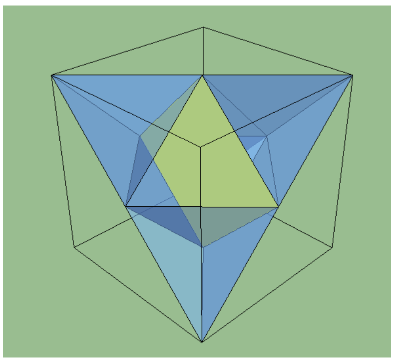
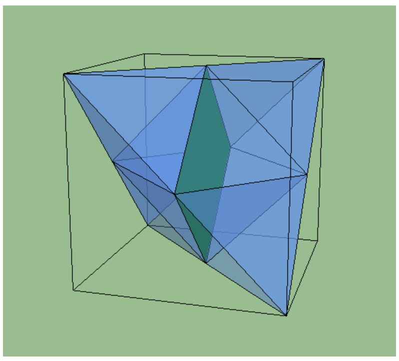
Per començar introduim el tetraedre i l'octaedre dins del cub:



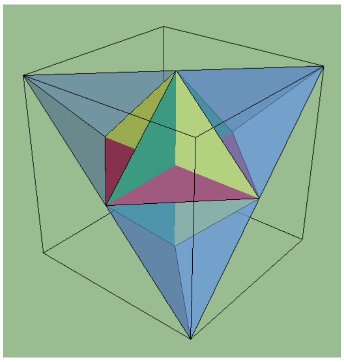
Com podem veure l'octaedre té els seus vertex al punt mitg de les arestes del tetraedre, per tant ja hem trobat la secció quadrada del tetraedre. En el segünts dibuixos es mostra un tetraedre amb una projecció similar a la anterior amb una de les seves tres seccions quadrades, i un altre també amb una de les seves tres seccions quadrades, però amb una projecció a la que estem avituats, amb un dels seus triangles pla a terra :

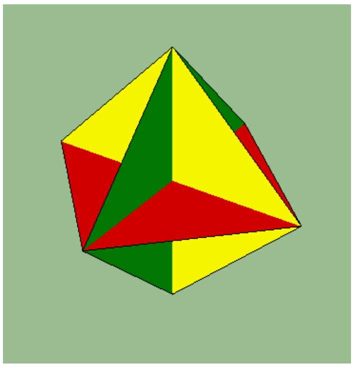
Per veureu més clar, fixemnos en els dubuixos seguents, en la que es mostren tetraedres vistos per una perspectiva similar, i cada un d'ells amb una secció quadrada diferent:

Ara tots junts:

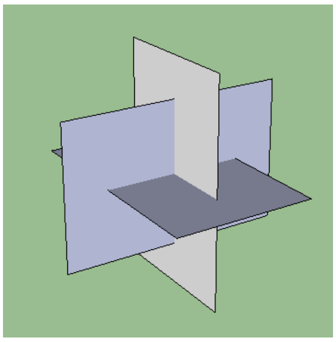


Aquest dibuix ens ajuda a veure que podem crear un octaedre a partir de tres quadrats.



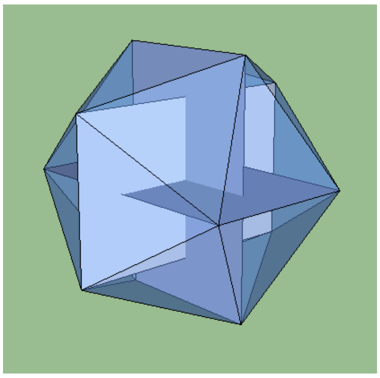
4.6.5 Els tres triangles auris

Si agafem tres triangles auris i els distribuim de la segent manera:



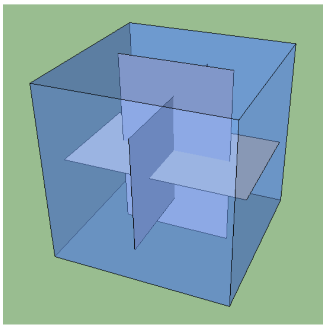
Podem trobar-hi tots els sòlids platònics.

Si tracem totes les línies que van de vèrtex a vèrtex, trobem l'icosàedre:

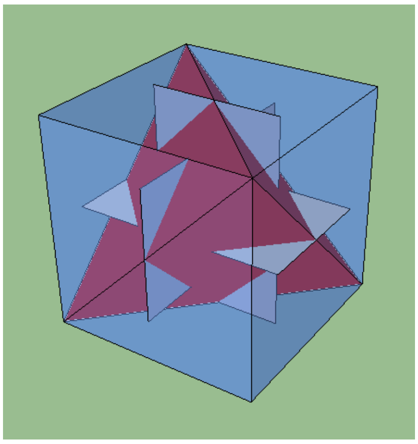
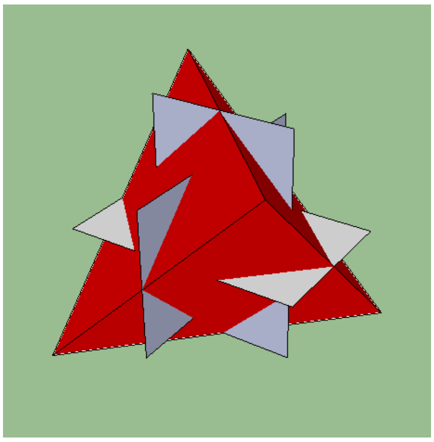
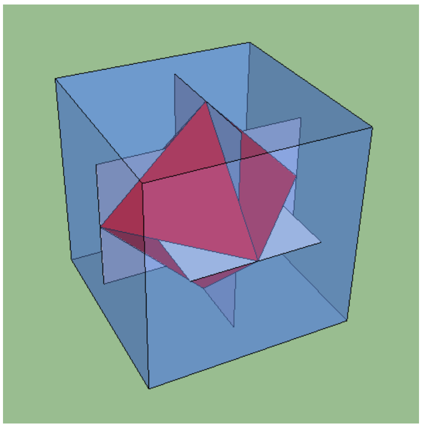
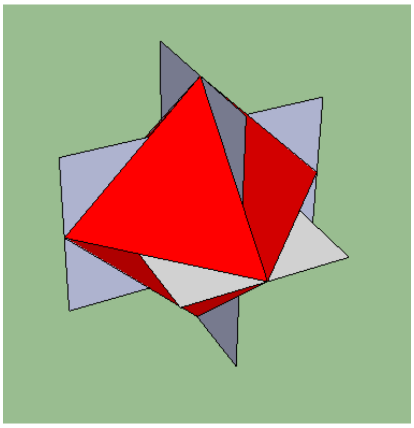


I ara a partir de l'icosàedre, podem trobar el dodecaedre, perquè com hem vist, eren duals.

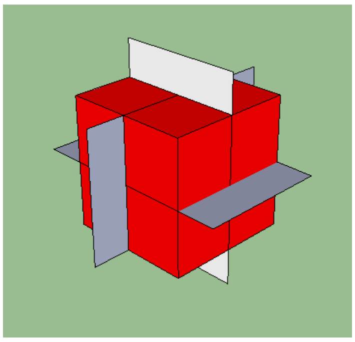
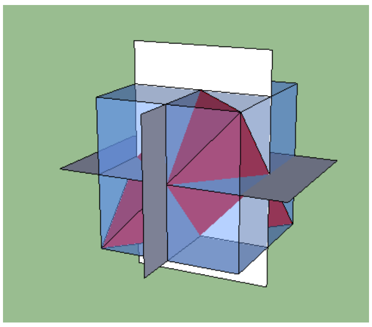
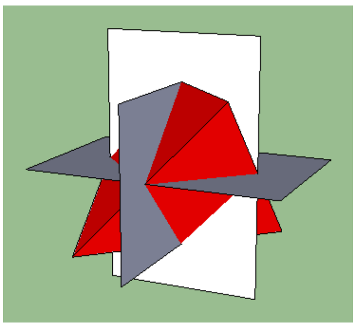
També hi podem trobar el cub, introduint els tres rectangles auris a dins el cub.

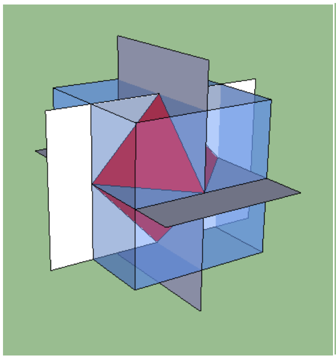
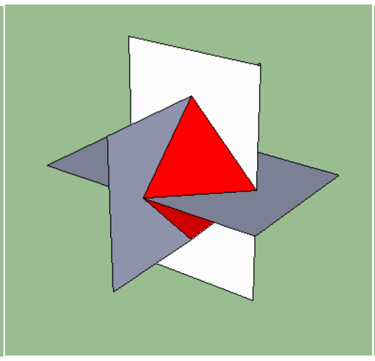
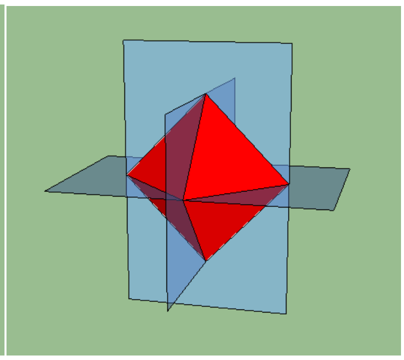


Per tant si i tenim el cub, per les relacions que hem vist abans també i podem trobar el tetraedre i l'octaedre.

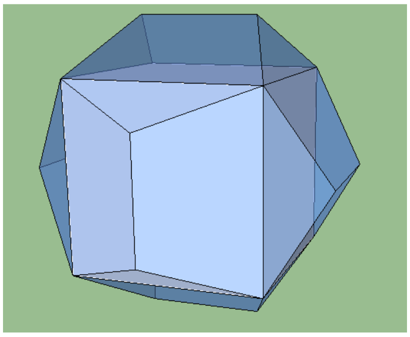
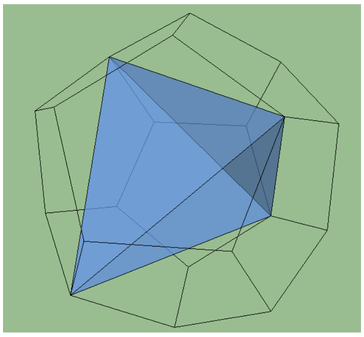
Però no només hi ha aquesta manera:

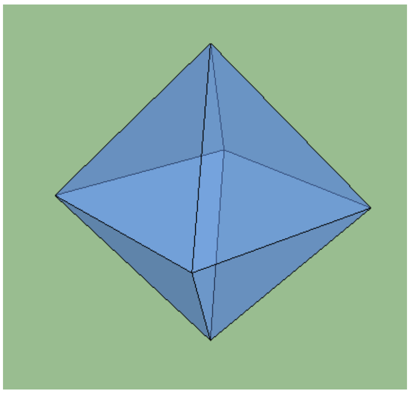
Relacions entre el dodecaedre el cub i el tetraedre

Com es pot veure en el dibuix podem trobar el cub a dins el dodecaedre, i també el tetraedre dins del dodecaedre.

4.7 ELS GRAFS EN ELS SÒLIDS PLATÒNICS

Només hi ha un políedre regular el qual es puguin resseguir totes les seves arestes passant només un sol cop per cadascuna d'elles, l'octaedre. Com que en cada vèrtex i concorren 4 arestes, el políedre es pot dibuixar començant per qualsevol dels vèrtex a l'atzar.



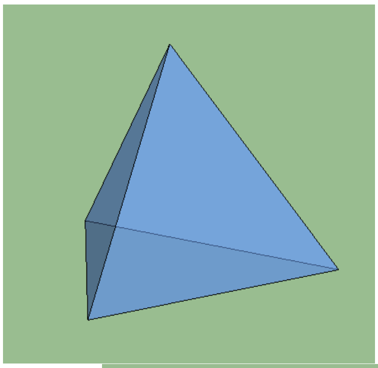
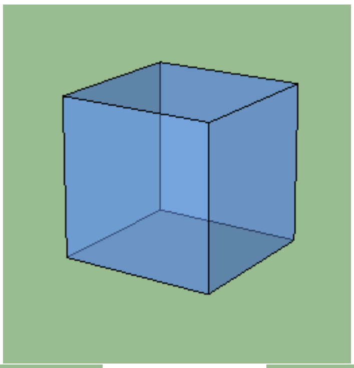
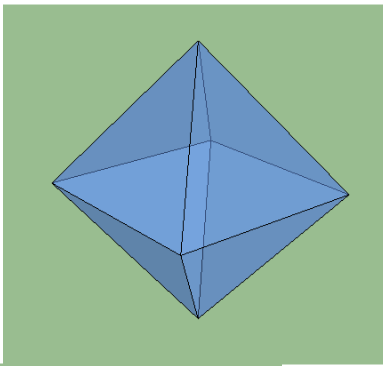
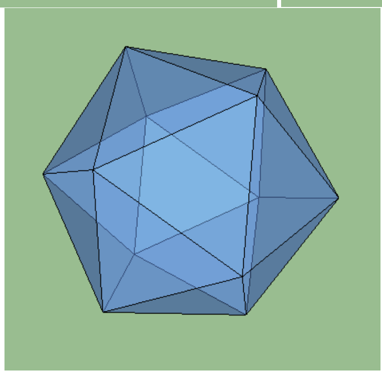
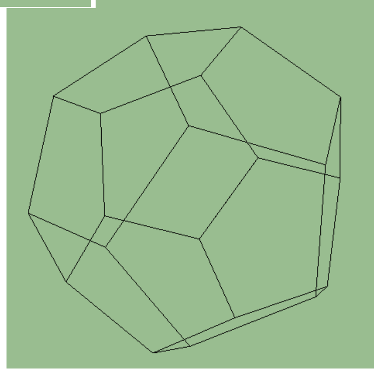
Lògicament, es pot resseguir l'estructura de cada sòlid platònic passant un sol cop per cada vèrtex.

4.8 ELS SÒLIDS PLATÒNICS NO NOMÉS SÓN SÒLIDS PLATÒNICS

Els poliedres es poden classificar de moltes maneres, ara en direm algunes i veurem on més podem trobar els sòlids platònics:

4.8.1 Poliedres regulars

Els poliedres regulars són aquells que tenen tots els polígons són iguals, i en el vèrtex hi concorren el mateix nombre de cares. Tant si són convexes com còncaus. De convexes n'hi ha cinc que són; tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre. De còncaus n'hi ha quatre, els va definir Kepler,també s'anomenen sòlids Kepler-Pointsot.

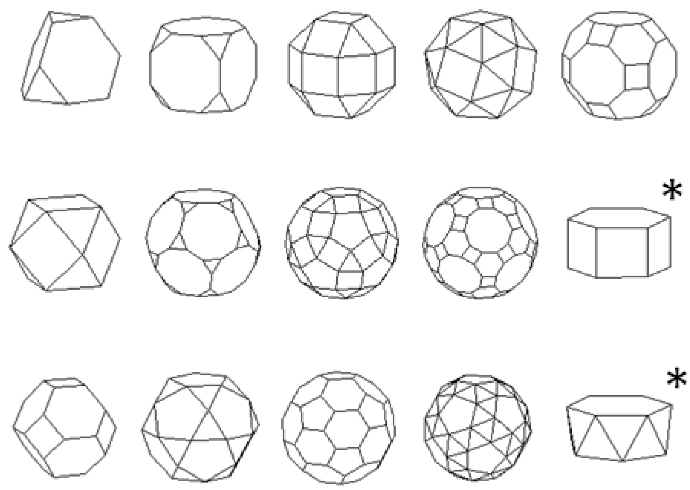






Els poliedres regulars convexes són tots els sòlids platònics.

4.8.2 Poliedres semiregulars

Els poliedres semiregulars són aquells que tenen tots els polígons regulars, però no necessariament el mateix, i en el vèrtex hi concorren el mateix nombre de cares. Els va anomenar Arquímedes i els va classificar en 13 sòlids, 11 es poden obtenir truncant els poliedres regulars convexes, i els altres dos són els prismes i antiprismes, que són dos grups infinits.

Aquí els tenim.



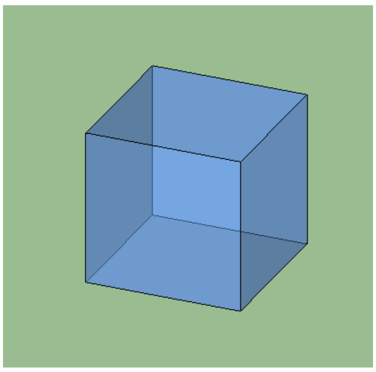
Els dos poliedres marcats amb un asterisc són el prisma i antiprismE.

En aquet cas no hi trobarem cap sòlid platònic perquè són sòlids truncats dels platònics(en els prismes i antiprismes si, ara ho veiem).

4.8.2.1 Prismes

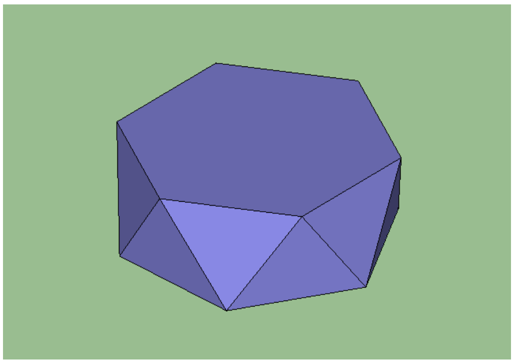
Els prismes són poliedres amb dos polígons paral·lels anomenats directrius, que donen nom al poliedre, units per tants paral·lelograms com costats té el polígon directriu. Els va definir Kepler, però ell uneix els polígons directrius amb quadrats. Podem trobar infinits prismes.

En aquest cas l'únic sòlid platònic que compleix aquestes condicions és el cub.



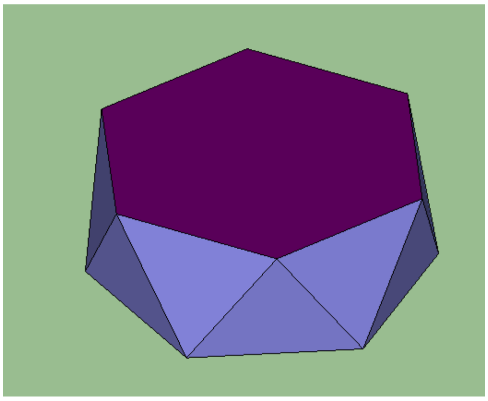
4.8.2.2 Antiprismes

Els antiprismes són poliedres amb dos polígons regulars iguals, paral·lels entre si, anomenats cúpules, units per triangles equilàters, de forma que cada triangle conté una aresta de una cúspide i un vèrtex de l'altre,hi ha el doble de triangles que costats té la cúpula.

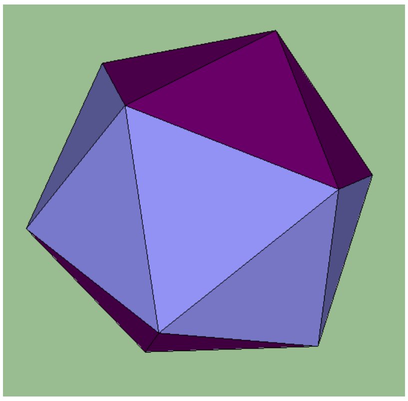


Antiprisme hexagonal

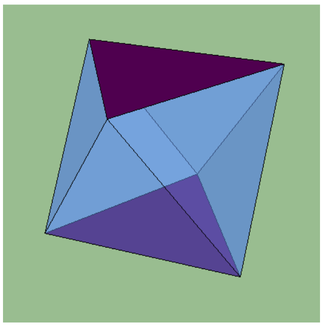
En aquest grup hi trobem un sòlid platònic, que és l'octaedre. Però l'icosàedre també es pot considerar antiprisma, si ens hi fixem podem veure que es distingeixen dos cúspides, però que no són polígons regulars, sinó que són cúpules formades per cinc triangles equilàters.



Antiprisma pentagonal



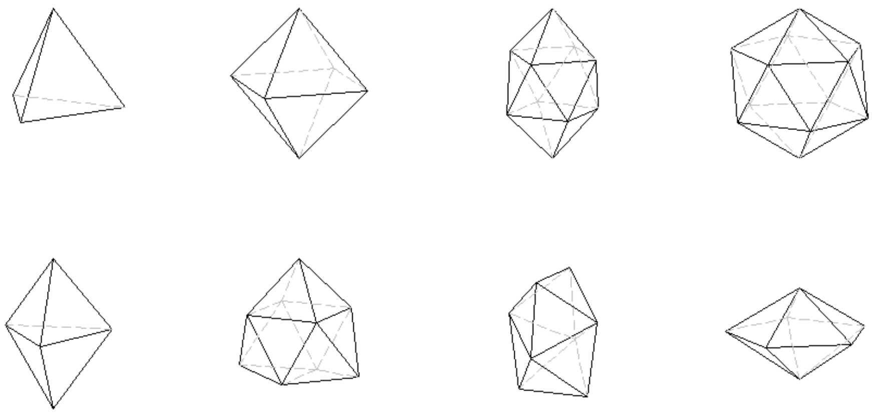
Icosàedre



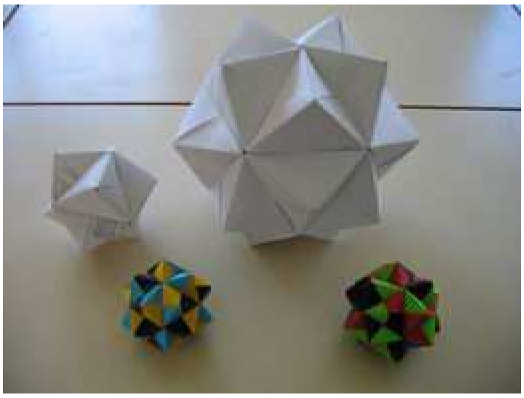
Octaedre

4.8.3 Deltaedres

Els deltaedres són poliedres formats únicament per triangles equilàters, sense la necessitat de que tingui tots els vèrtex iguals. De convexes n'hi trobem vuit, en canvi de còncaus infinits. El nom de deltaedres els hi be de la lletra de l'abecedari grec, Δ (delta), perquè és un triangle.

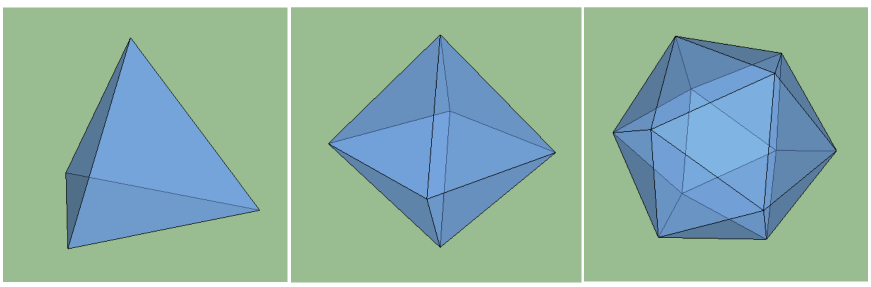


Deltaedres convexes



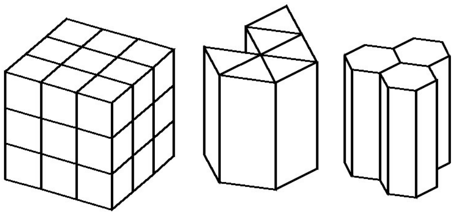
Deltaedres concaus

A els deltaedres hi troben tres sòlids platònics, el tetraedre , l'octaedre i l'icosàedre.



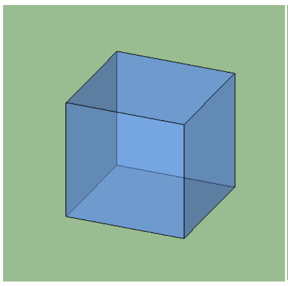
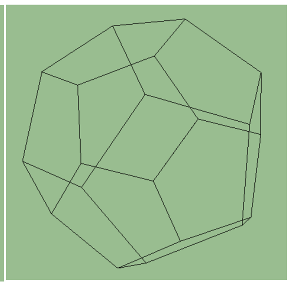
4.8.4 Tassel·lacions en l'espai

Un conjunt de figures iguals que es repeteixen periòdicament, es a dir, seguint un patró, que cobreix l'espai completament sense forats ni superposicions.



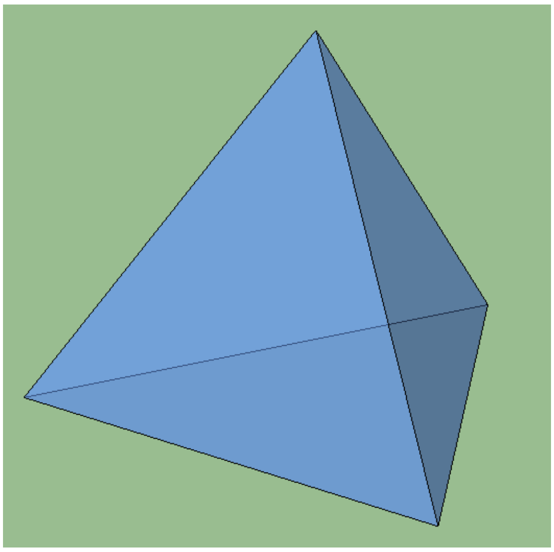
Els paral·lelepípedes són un bon exemple.

En aquest cas hi trobem el cub i el dodecaedre,

3.9 CÀLCULS EN ELS SÒLIDS PLATÒNICS

TETRAEDRE

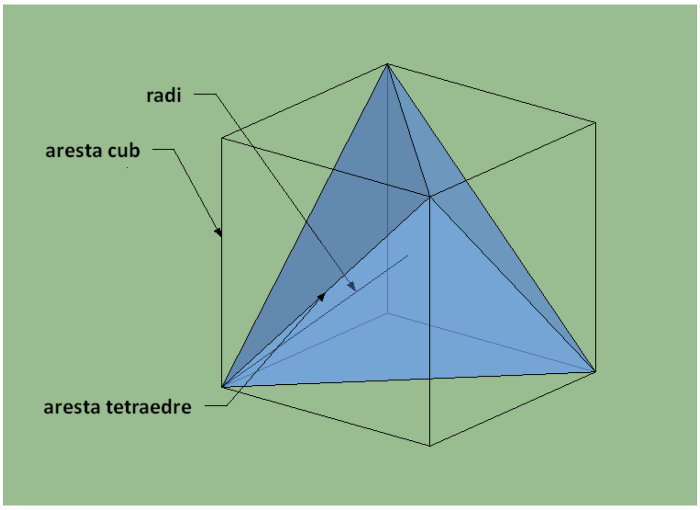


Definició

Polígons que el formen	Triangles
Nombre de cares	4
Nombre d'arestes	6
Nombre de vèrtex	4
Nombre d'arestes que concorren al vèrtex i nombre de cares que concorren al vèrtex	3
Dualitat	Autodual

Aresta segons radi

Si ens donen el radi del cercle circumscrit en el tetraedre, el que farem per trobar els radi serà introduir-lo a dins un cub, i veiem que l'aresta del tetraedre és una diagonal del cub, per tant primer calcularem l'aresta del cub i a partir d'aquí calcularem l'aresta del tetraedre.



Per trobar-ho podem aplicar Pitàgores en 3 dimensions:

$$\mathrm{h}^2 = \mathrm{c}^2 + \mathrm{c}^2 + \mathrm{c}^2 \qquad 2R^2 = {a_c}^2 + {a_c}^2 + {a_c}^2 \qquad 2R = \sqrt{3{a_c}^2} \qquad 2R = a_c\sqrt{3}$$

$$a_c = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Ara hem trobat l'aresta del cub i per tant ara ja només hem de trobar la del tetraedre, que com hem vist, era la diagonal del cub, per fer-ho podem aplicar Pitàgores:

$$\mathrm{h}^2 = \mathrm{c}^2 + \mathrm{c}^2$$

$${a_{tetraedre}}^2 = {a_{cub}}^2 + {a_{cub}}^2$$

$$a_t = \sqrt{2\,{a_c}^2} \quad a_t = a_c\sqrt{2}$$

Ara podem substituir:

$$\mathrm{a_t} = \mathrm{a_c}\sqrt{2} \quad \mathrm{a_t} = \frac{2\mathrm{R}}{\sqrt{3}}\sqrt{2} \quad \mathrm{a_t} = \frac{2\mathrm{R}\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

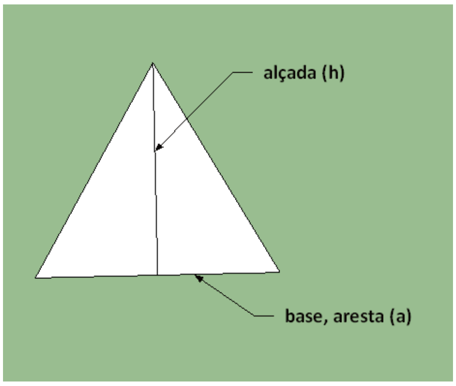
Àrea segons l'aresta

El que farem per trobar la l'àrea total serà trobar l'àrea de un triangle i multiplicar-ho pel nombre de cares del tetraedre, que en són quatre:

L'àrea d'un triangle és:

$$A = \frac{base.alçada}{2}$$

La base la coneixem, només em de trobar l'alçada, per trobar-la podem dividir el triangle equilàter en dos triangles rectangles i per trigonometria ho podrem trobar.
Si coneixem:



$$sin = \frac{catet\ oposat}{hipotenusa}$$

Podem trobar:

$$catet\ oposat = hipotenusa. sin$$

Ara substituïm:

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h = a.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

I ara substituïm a la formula de l'àrea:

$$A = \frac{base.alçada}{2} \qquad A = \frac{a\left(a.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} \qquad A = \frac{a^2.\sqrt{3}}{2} \div \frac{2}{1} \qquad A = \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$$

Ara hem de multiplicar-ho pel nombre de cares que té el tetraedre que són quatre:

$$àrea\ total = 4. àrea\ del\ tiangle$$

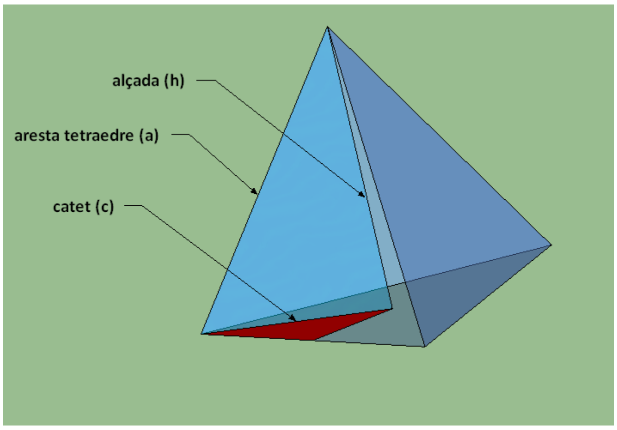
$$A_t = 4\left(\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$A_t = a^2.\sqrt{3}$$

Volum segons l'aresta

Per trobar el volum del tetraedre podem aplicar la formula de una piràmide perquè el tetraedre és una piràmide de base triangular. Si sabem que la formula de una piràmide és:

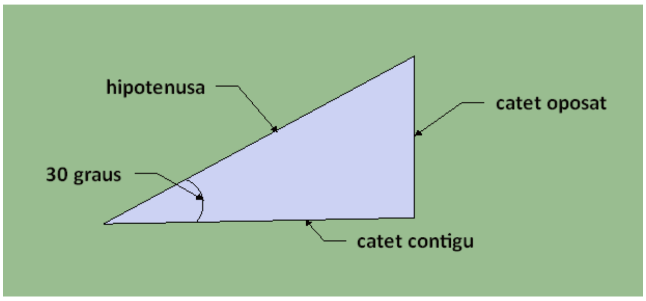
$$V_p = \frac{1}{3}.\,alçada.\,àrea\ base$$



L'àrea de la base ja la tenim l'únic que ens falta és l'alçada:

Per trobar-la hem de utilitzar el triangle marcat en blau clar al tetraedre i aplicar Pitàgores per trobar l'alçada (h), però en el triangle hi ha dues incògnites, l'alçada (h), i l'altre catet.

Per trobar el catet farem servir trigonometria en el triangle marcat en vermell al tetraedre, que és com el següent(ara, a la incògnita que li anomenaven catet , per calcular-la l'anomenarem hipotenusa, perquè n'és la del triangle) :



$$cosinus = \frac{catet\ contigu}{hipotenusa}$$

$$cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a/2}{hipotenusa} \quad hipotenusa = \frac{a}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \quad hipotenusa = \frac{2a}{2\sqrt{3}} \quad hipotenusa = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ara ja podem aplicar Pitàgores:

$$c^2 + c^2 = h^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 \qquad a^2 = h^2 + (.\frac{a}{\sqrt{3}})^2 \qquad h = \sqrt{a^2 - (.\frac{a}{\sqrt{3}})^2} \qquad h = \sqrt{\frac{3a}{3} - \frac{a^2}{3}}$$

$$h = \sqrt{\frac{2a^2}{3}}$$

Ara ja podem aplicar la formula de la piràmide:

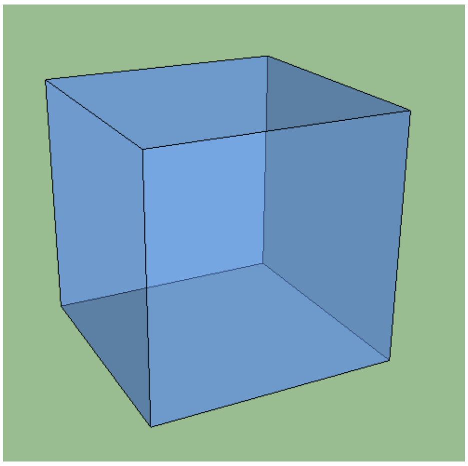
$$V_p = \frac{1}{3}.\,alçada.\,àrea\ base$$

$$V_t = \frac{1}{3}.\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}.\sqrt{\frac{2a^2}{3}} \qquad V_t = \frac{4}{12}.\frac{3a^2.\sqrt{3}}{12}.\sqrt{\frac{2a^2}{3}} \qquad V_t = \frac{12(a^2\sqrt{3})}{144}\sqrt{\frac{2a^2}{3}}$$

$$V_t = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\sqrt{\frac{2a^2}{3}} \qquad V_{t=}\frac{a^2\sqrt{3}\,a\sqrt{\frac{2}{3}}}{12} \qquad V_t = \frac{a^3\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}{12}$$

$$V_t = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

CUB

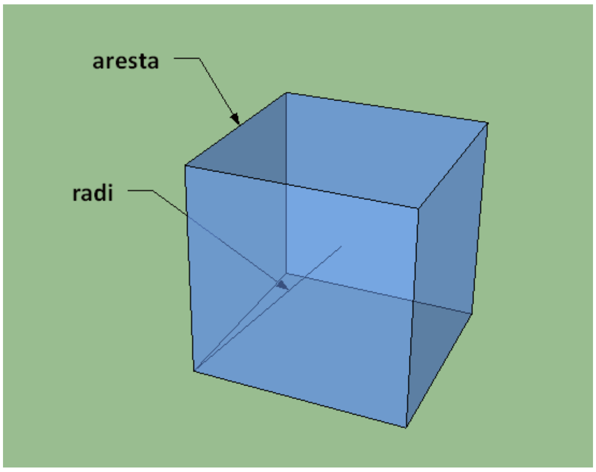


Definició

Polígons que el formen	Quadrats
Nombre de cares	6
Nombre d'arestes	8
Nombre de vèrtex	8
Nombre de cares que concorren al vèrtex i nombre d'arestes que concorren al vèrtex	3
Dualitat	Dualitat amb l'ortoedre

<u>Aresta segons radi</u>

Si ens donen el radi del cercle circumscrit en el tetraedre podem aplicar Pitàgores en 3D:



$$h^2 = c^2 + c^2 + c^2$$

$$2R^2 = a^2 + a^2 + a^2 \qquad 2R = \sqrt{3a^2} \qquad 2R = a\sqrt{3}$$

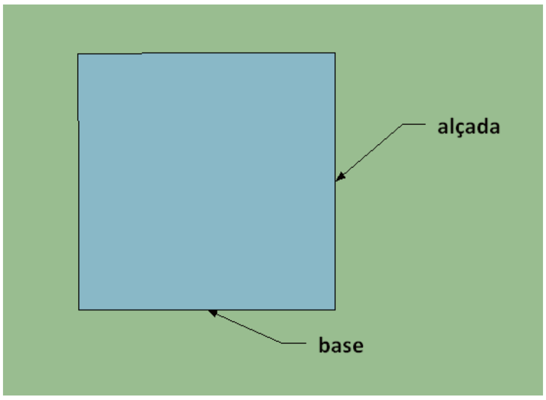
$$a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

<u>Àrea segons l'aresta</u>

El que farem per trobar la l'àrea total serà trobar l'àrea de un quadrat i multiplicar-ho pel nombre de cares del cub, que en són sis:

L'àrea d'un quadrat és:

$$A = base.alçada$$



Com que ho tenim tot només hem d'aplicar la formula.

$$A = aresta.aresta$$

$$A = a^2$$

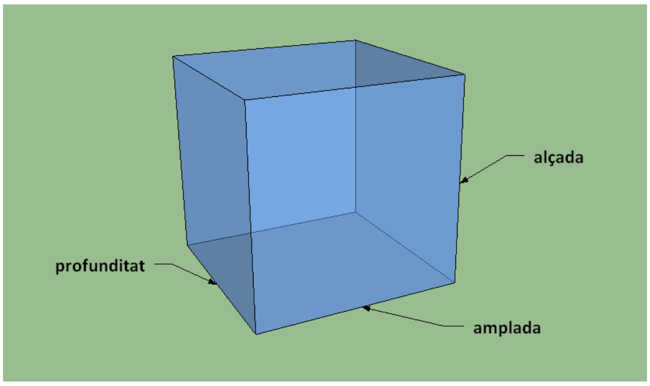
Ara hem de multiplicar-ho pel nombre de cares que té el cub que són sis:

$$àrea\ total = 6.àrea\ del\ quadrat$$

$$A_t = 6a^2$$

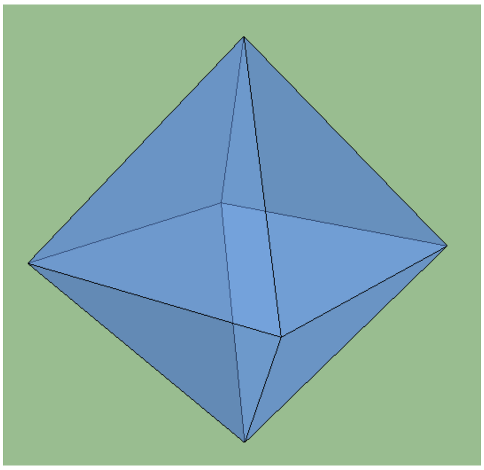
Volum segons l'aresta

Per trobar el volum del només hem d'aplicar la formula del cub, que és:



$$V_c = amplada.alçada.profonditat$$
$$V_c = aresta^3$$

OCTAEDRE

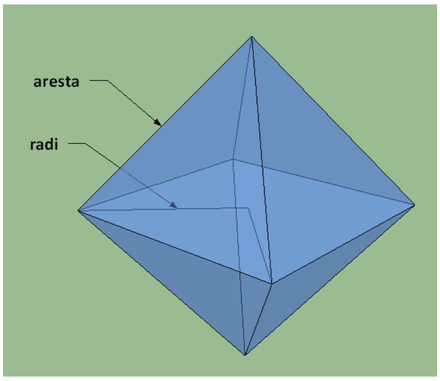


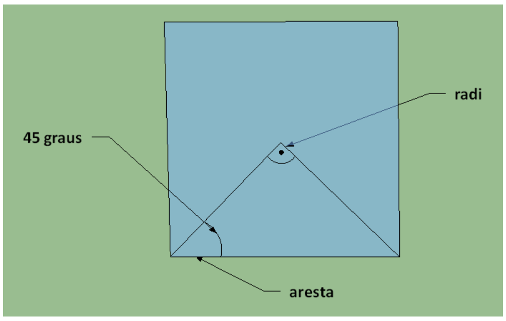
Definició

Polígons que el formen	Triangles
Nombre de cares	8
Nombre d'arestes	12
Nombre de vèrtex	6
Nombre de cares que concorren al vèrtex i nombre d'arestes que concorren al vèrtex	4
Dualitat	Amb el cub

<u>Aresta segons radi</u>

Si agafem una secció, qualsevol, que contingui els quatre vèrtex podem veure que es forma un quadrat con el dibuixat. I ara podem aplicar el teorema del sinus en el triangle que es forma amb els radis.





Si coneixem que :

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

$$\sin 90° = 1$$

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ara substituïm:

$$\frac{a}{1} = \frac{R}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad a = \frac{R}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$a = \frac{2R}{\sqrt{2}}$$

<u>Àrea segons l'aresta</u>

Per trobar l'àrea només hem de multiplicar l'àrea d'un triangle per el nombre de cares de l'octaedre. Com que l'àrea del triangle ja l'hem trobat quan fèiem el tetraedre, només l'hem de multiplicar per 8.

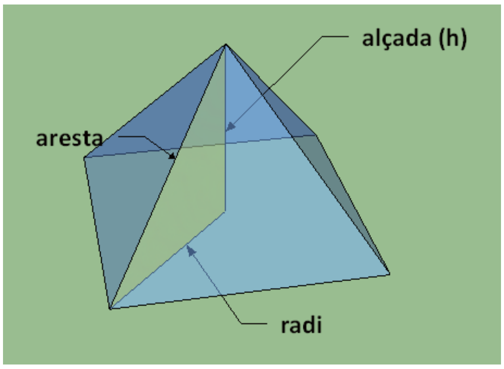
$$A_{triangle} = \frac{a^2\ \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{octaedre} = 8\left(\frac{a^2\ \sqrt{3}}{4}\right)$$

$$A_{octaedre} = 2a^2\sqrt{3}$$

Volum segons l’aresta

Per trobar el volum dividirem l’octaedre en dos piràmides de base quadrada i en trobarem el volum mitjançant la formula del volum d’una piràmide, que és:



$$V_p = \frac{1}{3} \, . h \, . base$$

Per trobar l’àrea de la base, com que és quadrada només hem d’aplicar la fórmula:

$$A = base. alçada$$

$$A = a^2$$

Per trobar l’alçada podem aplicar Pitàgores, perquè coneixem aresta i el radi segons l’aresta el podem trobar aïllant-lo de la formula trobada a l’apartat aresta segons radi.

La fórmula era:

$$a = \frac{2R}{\sqrt{2}}$$

$$a\sqrt{2} = 2R$$

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Ara apliquem Pitàgores:

$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$a^2 = \left(\frac{a\ \sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2 \qquad h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\ \sqrt{2}}{2}\right)^2} \qquad h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2\ .\ 2}{4}\right)}$$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}}$$

$$h = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$$

Ara ja podem substituir a la formula de la piràmide:

$$V_p = \frac{1}{3} . h \, . base$$

$$V_p = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2}{2}}\,a^2 \quad V_p = \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{1}{2}}\,a^2 \quad V_p = \frac{1}{3}a^3\sqrt{\frac{1}{2}}$$

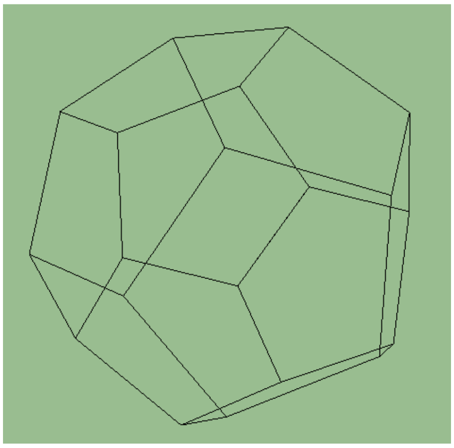
Com que hem dividit l'octaedre en dos piràmides de base quadrada iguals, hem de multiplicar el volum que hem trobat per dos.

$$V_o = 2V_p$$

$$V_o = 2\left(\frac{1}{3}a^3\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$V_o = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$$

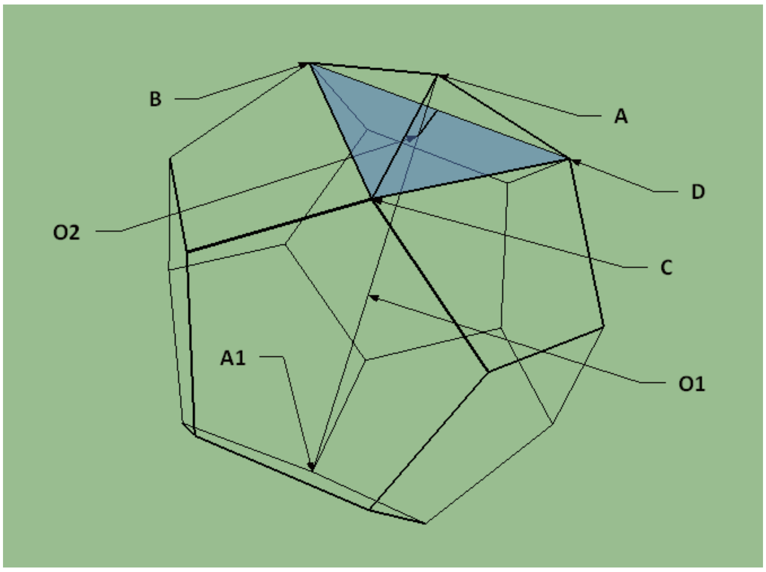
DODECAEDRE



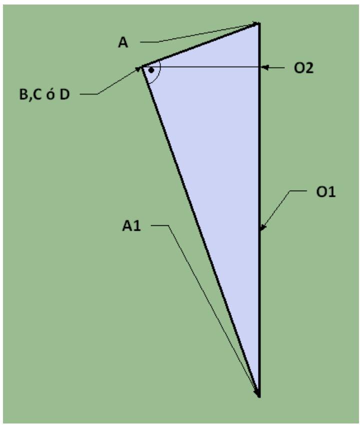
Polígons que el formen	pentàgons
Nombre de cares	12
Nombre d'arestes	30
Nombre de vèrtex	20
Nombre de cares que concorren al vèrtex i nombre d'arestes que concorren al vèrtex	3
Dualitat	icosàedre

<u>Aresta segons radi</u>

Per trobar l'aresta el que utilitzarem serà l'esquelet d'un vèrtex, el vèrtex A.



L'esquelet de A són els tres vèrtex B, C i D, que formen un pla perpendicular amb el radi de la circumferència circumscrita, AO, que en determina el centre O_2.
Ara si fem que A_1 sigui el punt diametralment oposat a A sobre l'esfera circumscrita, se'ns forma el següent triangle:



I aquest triangle el podem resoldre amb el teorema del catet.
Aquest teorema ens diu que:

$$\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{AO_2}} = \frac{\boldsymbol{AA_1}}{\boldsymbol{AB}}$$

$$AB^2 = AA_1 \cdot AO_2$$

Si coneixem que

$$AB = aresta = a$$

$$AA_1 = 2radi = 2R$$

Ja podem substituir:

$$a^2 = 2R.AO_2$$

Ara hem de trobar AO_2:
Per trobar-ho aplicarem Pitàgores:

$$AB^2 = {BO_2}^2 + {AO_2}^2$$

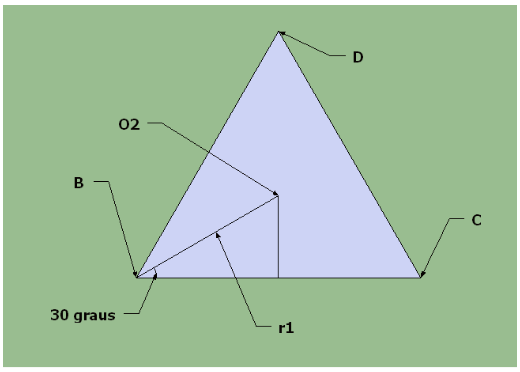
A BO_2, l'anomenarem r_2

$AO_2 = \sqrt{AB^2 - {r_2}^2}$

Primer trobarem el radi segons l'aresta i després ja aïllarem l'aresta:

$$a^2 = 2R.\sqrt{AB^2 - {r_2}^2}$$

Ara hem de trobar r_2, i per fer-ho ens fixarem en el pla que formaven BCD



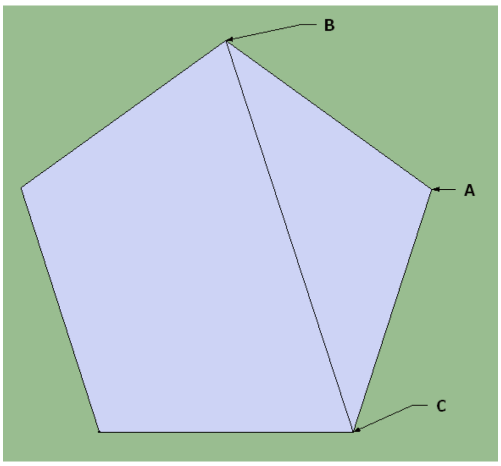
Com que és un triangle equilàter, sabem que els seus angles són de 60º

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \propto = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC/2}{r_2} \qquad r_2 = \frac{BC}{\sqrt{3}}$$

I ara, tenim que BC és la diagonal d'un pentàgon, i les diagonals del pentàgon dividides per un dels seus costats és igual al nombre d'or:



$$\frac{BC}{CA} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Per tant,

$$\frac{BC}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$BC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$$

Ara substituïm a r_2

$$r_2 = \frac{BC}{\sqrt{3}} \qquad BC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot a \qquad r_2 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \cdot a$$

Ara ja podem substituir la fórmula del radi

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - r_1{}^2}} \qquad R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - (\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \cdot a)}}$$

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2(1-(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}}} \qquad R = \frac{a^2}{2a\sqrt{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}})}} \qquad R = \frac{a}{2\sqrt{1-(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{12}}}$$

$$R = \frac{a}{2\sqrt{\frac{12-1-2\sqrt{5}-5}{12}}} \qquad R = \frac{a}{2\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{12}}} \qquad R = \frac{a}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}} \qquad R = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{3-\sqrt{5}}} \cdot \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{3+\sqrt{5}}} \qquad R = \frac{2a\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{4\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}} \qquad R = \frac{2a\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{4\sqrt{9-5}}$$

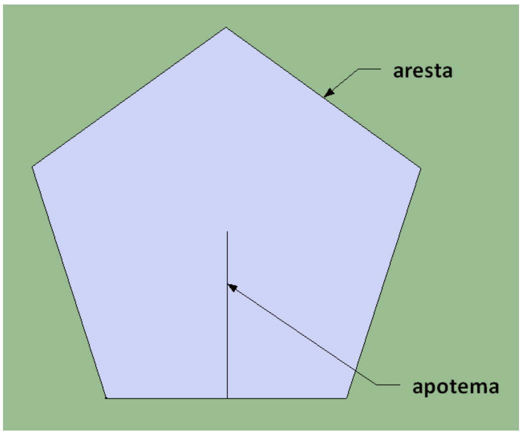
$$R = \frac{2a\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{4\sqrt{4}} \qquad R = \frac{2a\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{8} \qquad R = \frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$$

Ara podem trobar l'aresta:

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}} \qquad a = \frac{R4}{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}$$

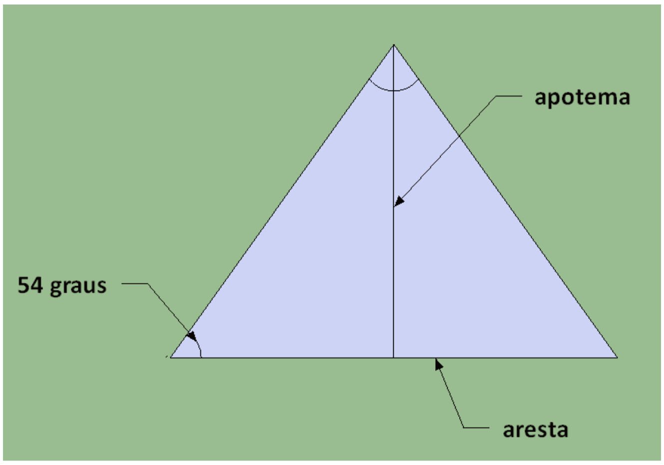
Àrea segons aresta:

Si sabem que la fórmula per trobar l'àrea d'un pentàgon és



$$A = \frac{\text{perímetre} \cdot \text{apotema}}{2} \qquad A = \frac{5\text{a} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Només ens falta l'apotema, i per trobar-la dividirem el pentàgon en 5 triangles iguals, com aquest:



$$\frac{360°}{2} = 72° \qquad \frac{180°-72°}{2} = 54° \qquad tg \propto = \frac{Catet\ oposat}{Catet\ contigu}$$

$$tg54° = \frac{apotema}{a/2}$$

$$apotema = tg54° \cdot \frac{a}{2}$$

Ara ja podem substituir:

$$A = \frac{5\text{a} \cdot \text{tg}54° \cdot \frac{\text{a}}{2}}{2} = \frac{5\text{a}^2}{4} \cdot \text{tg}54°$$

Ara ho multiplicarem pels costats que té el dodecaedre, que en són 20:

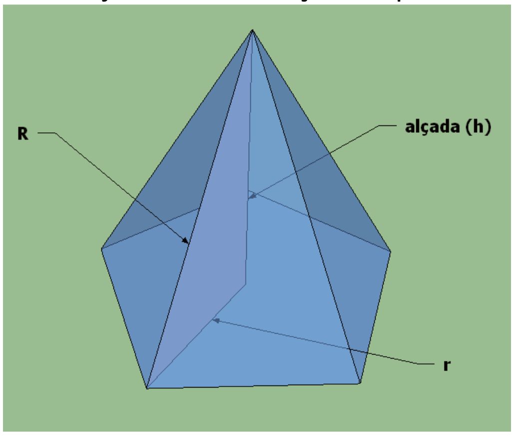
$$A_t = 20\left(\frac{5\text{a}^2}{4} \cdot \text{tg}54°\right)$$

$$A_t = 25a^2\ \text{tg}54°$$

Volum segons aresta

Per trobar el volum farem que el dodecaedre estigui format per 12 piràmides, i la fórmula del volum d'una piràmide és: $\mathrm{V} = \frac{1}{3} \cdot \text{alçada} \cdot \text{base}$

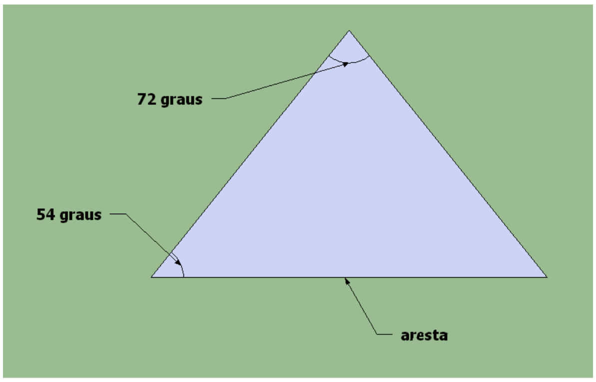
La base ja la tenim i l'alçada la podem trobar si ens fixem en el dibuix següent:



$\mathrm{R}^2 = \mathrm{r}^2 + \mathrm{h}^2$

$\mathrm{h} = \sqrt{\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2}$

Només hem de trobar r perquè el radi ja l'hem trobat al calcular l'aresta segons el radi. Per fer-ho dividirem el pentàgon en cinc triangles iguals, i trobarem el radi del pentàgon pel teorema del sinus:



$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

$$\frac{\mathrm{a}}{\sin 72°} = \frac{\mathrm{r}}{\sin 54°} \qquad \mathrm{r} = \frac{\mathrm{a} \cdot \sin 54°}{\sin 72°}$$

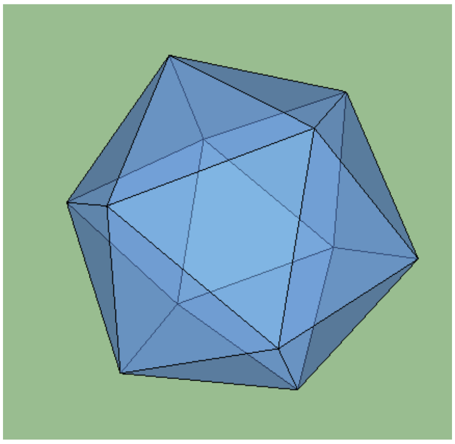
Per tant: $h = \sqrt{\frac{a}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}} - \frac{a \cdot sin54°}{sin72°}}$

Ara ja podem substituir a la formula de la piràmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{alçada} \cdot \text{base}$$

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}} - \frac{a \cdot sin54°}{sin72°}}\,\frac{5a^2}{4} \cdot \text{tg}54°$$

ICOSÀEDRE

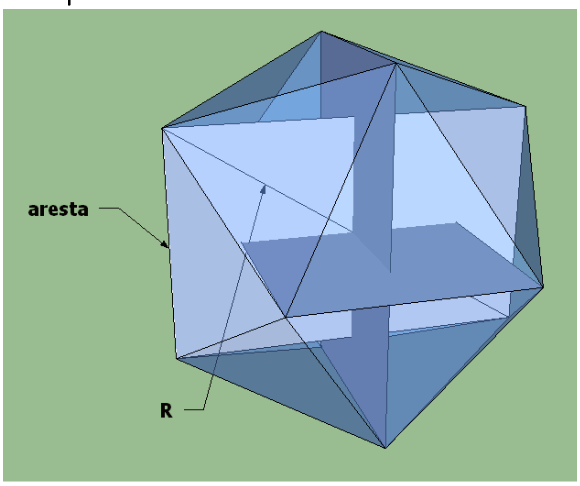


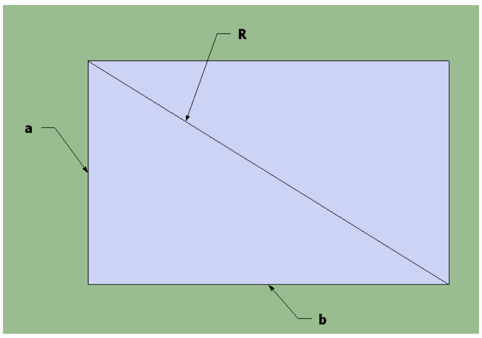
Polígons que el formen	triangles
Nombre de cares	20
Nombre d'arestes	30
Nombre de vèrtex	12
Nombre de cares que concorren al vèrtex i nombre d'arestes que concorren al vèrtex	5
Dualitat	dodecaedre

<u>Aresta segons radi</u>

Per trobar l'aresta farem servir l'esquelet de l'icosàedre, que són tres rectangles auris

Com podem veure el radi és la meitat de la diagonal, per tant:





$\varphi = \frac{b}{a}$ $\qquad$ $b = \varphi \cdot a$

Per tant, aplicant Pitàgores ho podem trobar:

$$h^2 \ = c^2 \ + c^2$$

$$2R^2 = a^2 \cdot (\varphi \cdot a)^2$$

$$2R^2 = a^2 \cdot \varphi^2 \cdot a^2$$

$$\frac{2R^2}{\varphi^2} = a^4$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{2R^2}{\varphi}} \qquad a = \frac{\sqrt[4]{2R^2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \qquad a = \sqrt[4]{\frac{R^2}{1+\sqrt{5}}}$$

Àrea segons aresta

Per trobar l'àrea només hem de multiplicar l'àrea d'un triangle per el nombre de cares de l'icosàedre. Com que l'àrea del triangle ja l'hem trobat quan fèiem el tetraedre, només l'hem de multiplicar per 20, que són el nombre de cares que té l'icosàedre.

$$A_{triangle} = \frac{a^2 \ \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{icosaedre} = 20\left(\frac{a^2 \ \sqrt{3}}{4}\right)$$

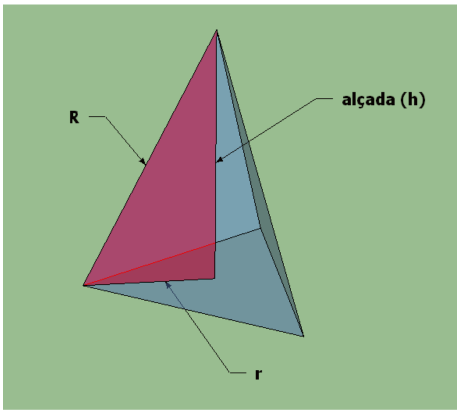
$$A_{icosaedre} = 5a^2\sqrt{3}$$

Volum segons aresta:

Per trobar el volum dividirem d'icosàedre en 12 piràmides iguals i aplicar la formula de la piràmide:

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \cdot \text{alçada} \cdot \text{base}$$

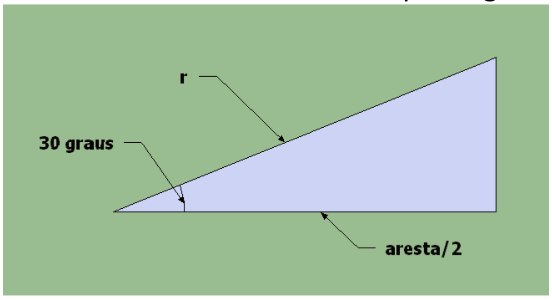
Ara per trobar l'alçada en hem de fixar en el triangle vermell i aplicar Pitàgores:



$$h^2 \; = c^2 \; + c^2$$

$$R^2 = h^2 + r^2$$
$$h = \sqrt{R^2 + r^2}$$

Ara hem de trobar r i ho farem per trigonometria:



$$cos \propto = \frac{CC}{h} \qquad cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a/2}{r}$$

$$r = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad r = \frac{2a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Per trobar el R podem utilitzar la mateixa fórmula que hem utilitzat per trobar l'aresta segons el radi.

$$2R^2 = a^2 \cdot (\varphi \cdot a)^2$$

$$R = \sqrt{\frac{a^4 \cdot \varphi^2}{2}}$$

Ara ja podem substituir:

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} \qquad h = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a^4 \cdot \varphi^2}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{a^4 \cdot \varphi^2}{2} - \frac{a^2}{3}} \quad h = \sqrt{\frac{3a^4 \cdot 3\varphi^2}{6} - \frac{2a^2}{6}} \quad h = \sqrt{\frac{a^4 \cdot 3\varphi^2}{6}}$$

Ara ja podem substituir a la formula de la piràmide:

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \cdot \text{alçada} \cdot \text{base}$$

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{a^4 \cdot 3\varphi^2}{6}} \cdot \frac{a^2\ \sqrt{3}}{4}$$

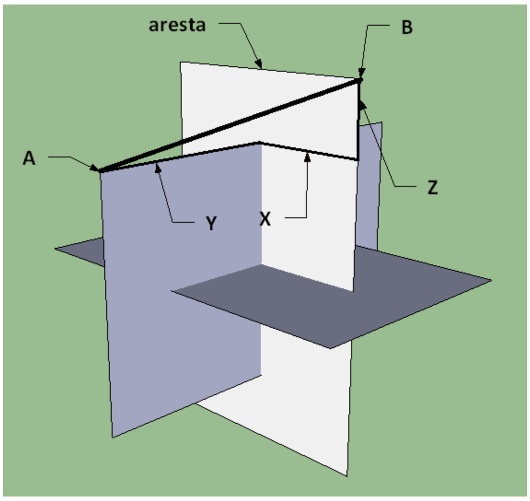
Ara ho multipliquem per 20:

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{a^4 \cdot 3\varphi^2}{6}} \cdot \frac{a^2\ \sqrt{3}}{4}$$

$$V_{icosaedre} = 20\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{a^4 \cdot 3\varphi^2}{6}} \cdot \frac{a^2\ \sqrt{3}}{4}\right)$$

<u>Demostració de l'esquelet de l'icosàedre</u>

Hem vist que per fer els càlculs a l'icosàedre hem utilitzat un esquelet format per tres rectangles les auris, ara demostrarem que es cert que amb aquesta formació de tres rectangles auris, podem obtenir l'icosàedre. Per fer-ho ens ajudarem d'aquest dibuix:



El que hem de fer és calcular X,Y i Z per després poder calcular que la recta AB, és igual a l'aresta:

Per calcular X, Y i Z ens basarem en les proporcions àuries, com a costats $1 = aresta$, per tant l'altre costat ha de ser $\varphi \cong 1{,}61809$.

$$Y = \frac{\varphi}{2}$$

$$X = \frac{1}{2}$$

$$Z = \frac{\varphi - 1}{2}$$

Ara que hem trobat X, Y i Z podem aplicar Pitàgores en 3D, per demostrar que la recta AB és igual a l'aresta, es a dir 1.

$h^2 = c^2 + c^2 + c^2$

$$AB = \sqrt{Y^2 + X^2 + Z^2}$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi - 1}{2}\right)^2}$$

$$\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \cong 0{,}6545$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$$

$$\left(\frac{\varphi - 1}{2}\right)^2 \cong 0{,}09549$$

$$AB = \sqrt{0{,}6545 + 0{,}25 + 0{,}09549}$$

$$AB = 1$$

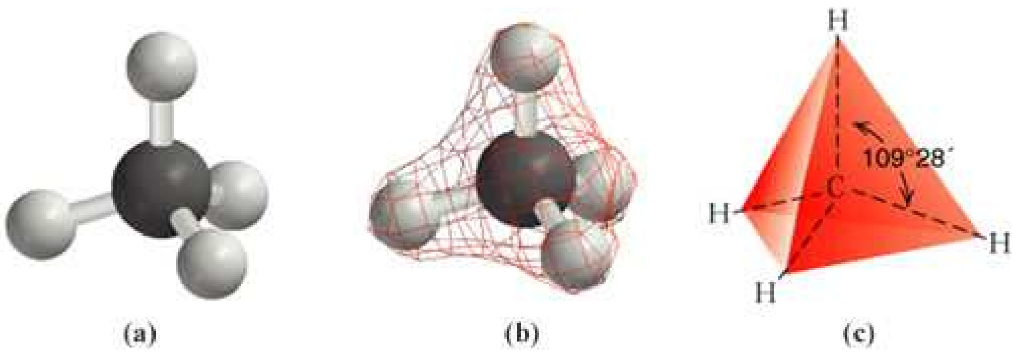
3.4 ELS SÒLIDS PLATÒNICS EN LA NATURA

No sembla que unes figures tan particulars. Especials i úniques com són els sòlids platònics puguin ser alguna cosa massa comuna a la naturalesa, tot i això, la natura sembla tenir una especial predilecció per adoptar formes que ens resulten boniques, o aquest és el cas dels sòlids platònics.

Tetraedre

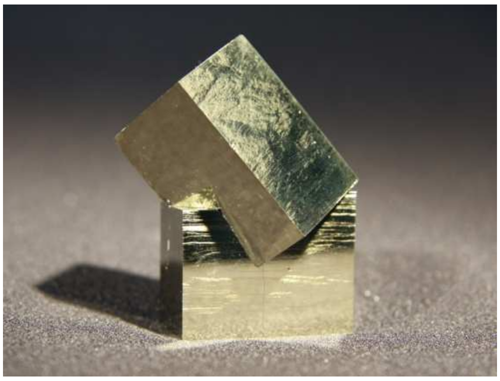
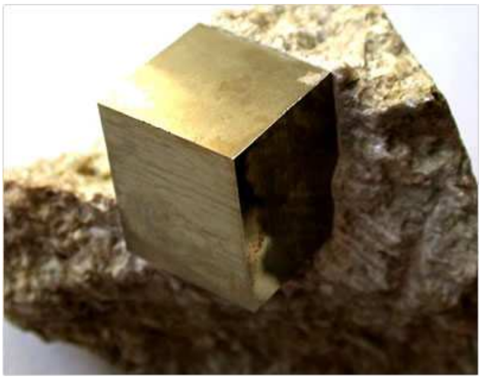
El mineral rep el nom de tetraedrita perquè apareix en la natura formant tetraedres més o menys regulars.

El tetraedre apareix a la natura a algunes molècules d’enllaç covalent, la més comú és la del metà



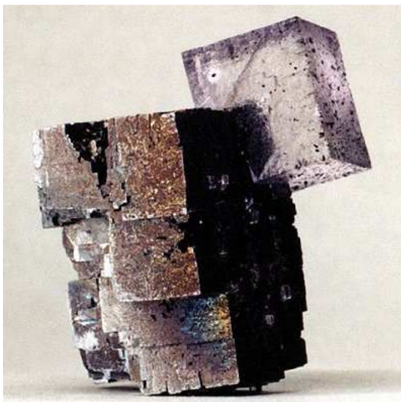
cub i octaedre

pirita:

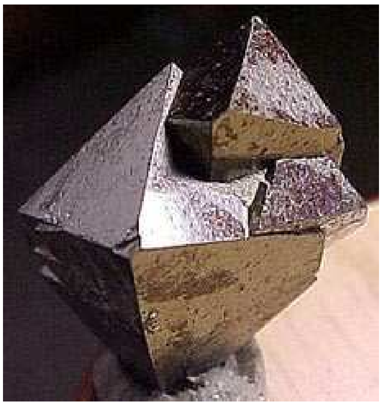
La pirita és una roca metamòrfica que cristal·litza en forma de cubs. Per tant el seu aspecte és el d'una roca cúbica, amb cares sovint estriades. A vegades també es troba en forma d'octaedres o piritoedres.

fluorita:

Es sol presentar amb forma de cristalls d'hàbit cúbic molt ben formats, freqüentment massives compenetracions de cubs. Las altres formes en que podem trobar la fluorita són rares, encara que poden es poden obtenir octaedres per exfoliació.

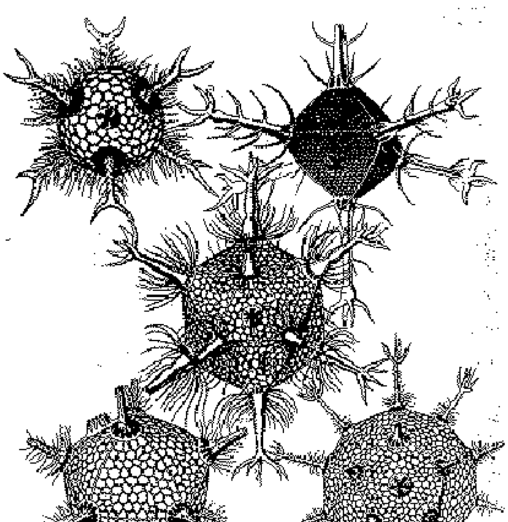
Magnetita:

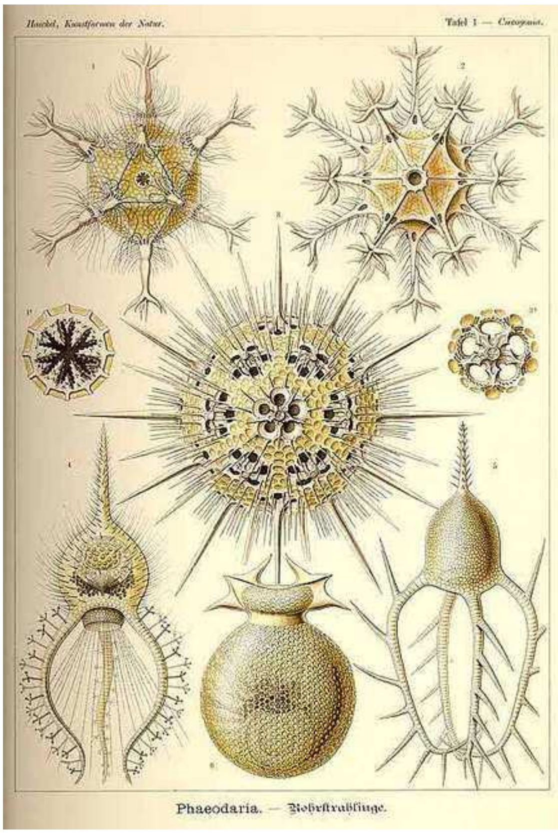


La magnetita és un mineral de ferro que pot presentar-se a la naturalesa en forma de cristalls octaèdrics

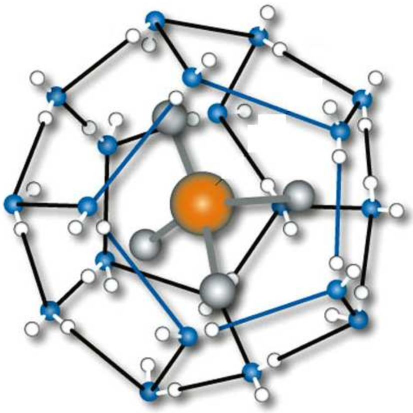
També hi ha éssers vius amb forma de políedre regular, per exemple un tipus de protozous anomenats *radiolaris* tenen forma de cub, octaedre, dodecaedre, icosàedre… i de fet el nom científic que reben incorpora el respectiu políedre del que

reben la forma.





Dodecàedre:

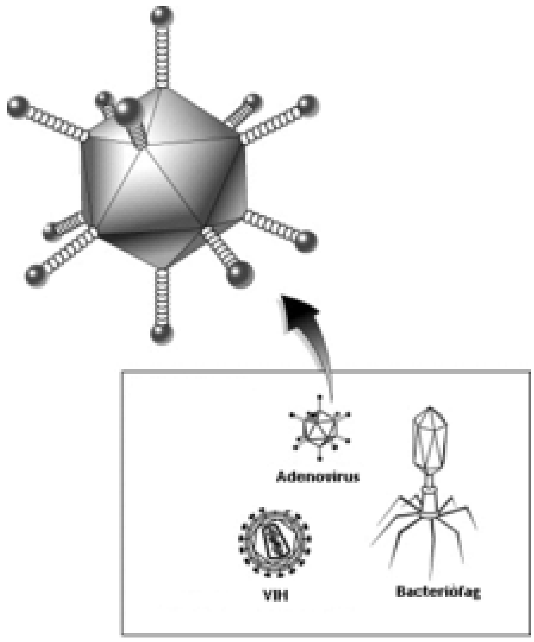


L’estructura que forma l’hidrat de metà te forma dodecaèdrica. Els cercles blaus representen molècules d’aigua i el taronja una molècula de metà. Així, podem veure un tetraedre (molècula de metà) inscrit dins un dodecaedre (format per molècules d’aigua i cristall de gel arestes del dodecaedre).

La pirita, no només es trova formant cristal cúbics i octaèdrics, a vegades també la podem trovar en forma dodecèdrica:

Icosàedre:

També molts virus com el de l'herpes o el de la SIDA tenen forma d'icosàedre. Aquests virus estan compostos por unitats bàsiques de proteïnes, que s'uneixen en forma d'icosàedre per ser una estructura molt eficient.

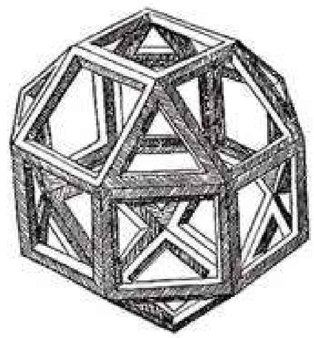


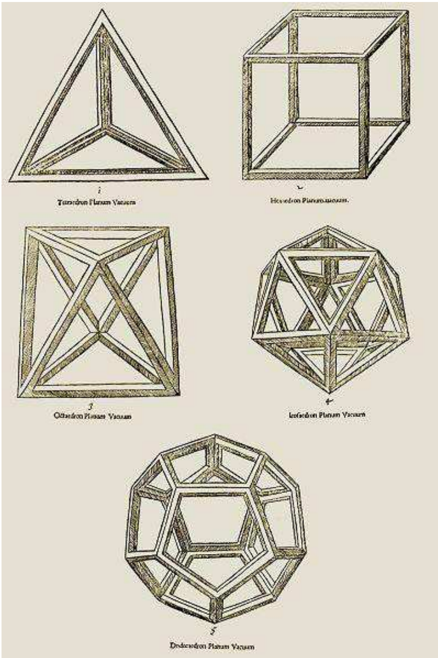
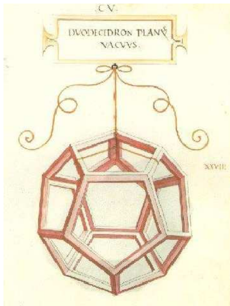
virus del SIDA

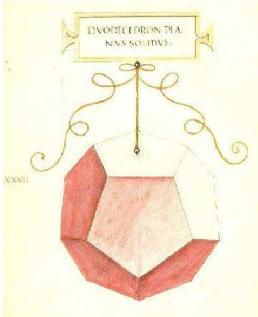
5. ELS SÒLIDS PLATÒNICS EN LA TECNOLOGIA I L'ART

En la tecnologia apareixen cada dia més els sòlids platònics. Un exemple es troba en meteorologia. En detriment de la usual malla de latitud i longitud utilitzada per les prediccions, hi ha en els models meteorològics un creixent interès per malles amb forma d'icosàedre. Aquests políedres es fan servir també en l'oci. Serveix per fer daus, el més comú és el cúbic, però totes les altres formes s'utilitzen per a jocs de rol.

Els sòlids platònics, sens dubte, han aparegut en gran quantitat de quadres de molts artistes diferents. Quan hi va haver la major vinculació entre els sòlids i l'art va ser probablement al Renaixement. Amb l'interès per estudiar els sabers antics, reneixen les matemàtiques, i una de les primeres obres va ser la de els *Elements* d'Euclides. Els artistes van començar a utilitzar políedres regulars com a eina per desenvolupar determinats aspecte de la perspectiva. Aquest és el cas d'alguns pintors com Paolo Uccello (1397- 1475), o Piero della Francesca (1410-1492). Fray Luca Bartolomeo Pacioli (1445-1514), matemàtic italià precursor de la probabilitat i comptabilitat, va fer varies publicacions entre les quals destacava *De divina proportione* de 1509. El principal tema del llibre és la proporció Àurea i la seva aplicació a la arquitectura. El tercer volum és una traducció dels escrits en llatí de Piero della Francesca sobre els *"cinc sòlids regulars"* en el que no mencionava al vertader autor, motiu pel qual no es van atribuir aquests treballs al seu vertader autor. Una altra de les coses més importants d'aquesta obra és la incorporació de dibuixos sobre sòlids platònics de Leonardo da Vinci, que rebia classes de matemàtiques de Pacioli. Per a cada figura donava una versió sòlida i una altra de buida, basada en figures de fusta. A part de sòlids platònics, Leonardo dibuixa la primera imatge d'un rombicuboctaedre (figura de la dreta).



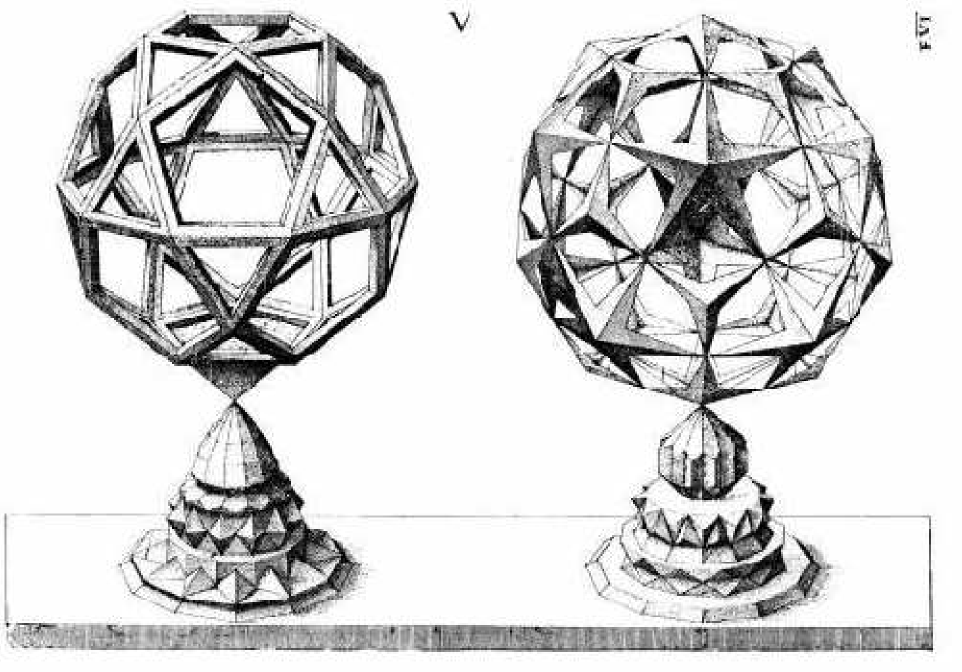


El 1495 Jacopo de Barbari pinta a Luca Pacioli. Apareix de nou un rombicuboctaedre, en aquest cristal·lí i omplert fins a la meitat amb aigua. En el quadre, Pacioli apareix resolent el problema de geometria d'Euclides i a la seva dreta es mostra un petit dodecaedre.

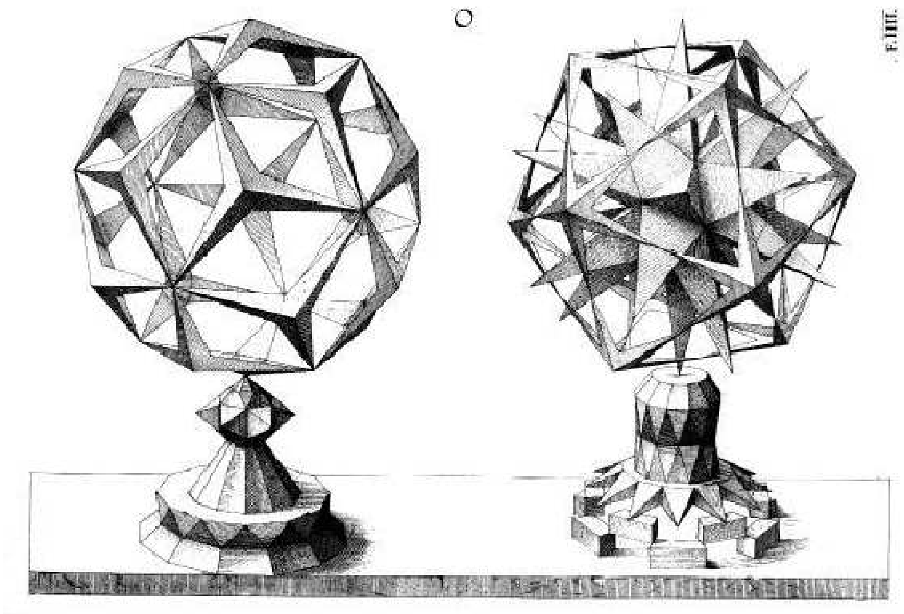
Pràcticament contemporanis, del 1520, són els mosaics de Fray Giovanni, en els que inclou políedres molt variats en fustes de diferents tons. A sota, en el dibuix de l'esquerre, apareix un políedre creat a base de triangles. No és cap dels sòlids però és un icosidodecaedre, al qual se li han substituït les seves cares pentagonals per triangles que formen un altre nou vèrtex. En el quadro central apareix de nou el políedre, dibuixat ja per Da Vinci, que tracta d'assemblar-se a una esfera, acompanyat d'un icosàedre i un icosàedre truncat. En el de la dreta apareix de nou l'icosidodecaedre modificat, junt amb un cub modificat pel mateix procediment, i un cubooctàedre.



No només artistes italians van dibuixar aquestes figures, l'escola alemanya va tenir artistes que van utilitzar estructures polièdriques. Dürer inclou estranys sòlids com elements secundaris en alguns dels seus quadres.. Però qui vertaderament destaca en l'escola alemanya és l'orfebre Wentzel Jamnitzer (1508-1585), considerat un dels millors i més creatius artistes de políedres de la història. El seu llibre *Perspectiva Corporum Regularium* està carregat de dissenys geomètrics. En les imatges de sota s'aprecia que l'icosidodecaedre de l'esquerra segueix l'estètica dels políedres ja dibuixat per da Vinci, però la figura de la dreta és totalment nova, representa un icosàedre (les arestes que uneixen els vèrtexs amb forma d'estrella de tres puntes) i un dodecaedre (les arestes de les estrelles de 5 puntes) units.



En les figures següents veiem l’estil característic de Jamnitzer amb els seus vèrtexs en forma d’estrella. A l’esquerra tenim un triacontaedre ròmbic. El dibuix de sota és la figura de l’icosàedre, de nou amb els vèrtexs estrellats. Les puntes de cadascuna de les estrelles són els vèrtexs d’un dodecaedre, que no està dibuixat explícitament, però que l’autor insinua. Per últim, a l’interior de l’icosàedre es troba el gran dodecaedre estrellat.

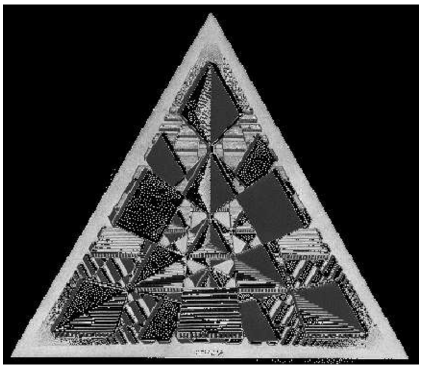


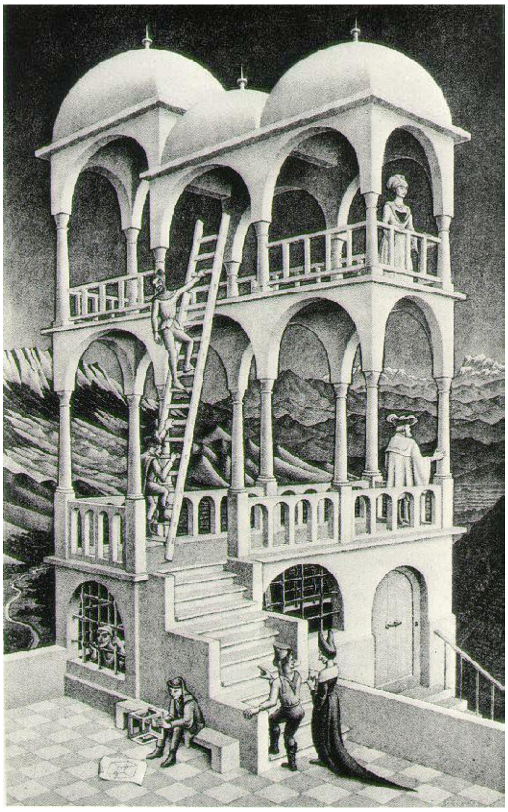
A poc a poc els quadres amb figures de sòlids van anar perdent importància a quedar pràcticament oblidats en el món de l’art. Va ser Escher qui amb la seva imaginació i originalitat va salvar els sòlids platònics per incorporar-los un en innovadors quadres.

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) va ser un conegut artista gràfic alemany que s’inspirava en les matemàtiques per fer molts dels seus treballs. L’apassionaven sobretot les tessel·lacions en el pla, les successions infinites o creat objectes impossibles basats en sòlids platònics o d’algun altre tipus. El seu primer treball en el que va incloure un sòlid platònic probablement va ser la seva litografia *Rèptils* (1943):

El dodecaedre, al que s'associava en la antiguitat l'univers, serveix en el quadre al rèptil com un graó més alt en la seva evolució pel quadre. Quan arriba a dalt l'animal rebufa victoriós, al trobar-se a sobre d'una de les figures més perfectes de les matemàtiques.

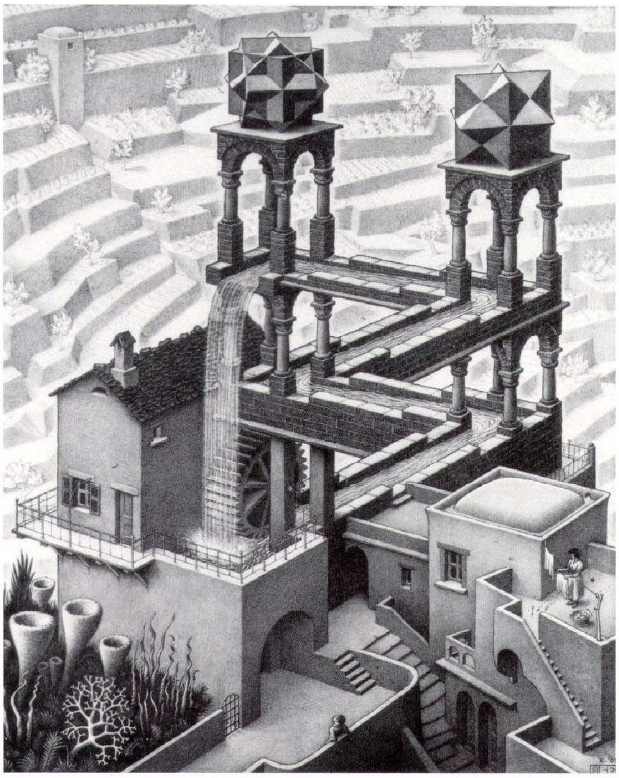
També entre els seus treballs amb successions que es fan infinitament petites, o que presentaven forçades perspectives que ens mostren punts de fuga, trobem quadres relacionats amb els sòlids platònics. En *Tres plans que s'intersequen* els vèrtexs de la intersecció formen un tetraedre regular. A més en el centre, on es tallen els tres plans, es distingeix perfectament un octaedre.



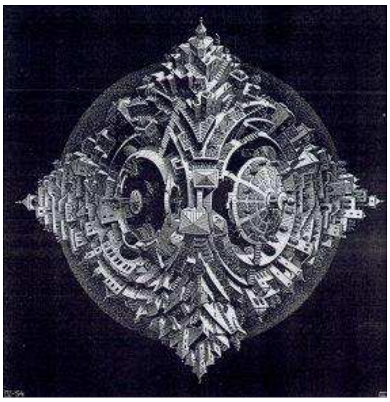


Entre les obres de la seva etapa de creació d'objectes impossibles apareixen molts políedres. La major part dels cops es tracta de cubs impossibles, com en el quadre *Belvedere* (1958), en el que construeix un edifici impossible. Aquest edifici consta de dues plantes rectangulars, situades en direccions perpendiculars, i la manera d'aconseguir aquest efecte és canviar les arestes que haurien d'unir cadascuna de les parts separades per columnes, que són cubs. A més a més, a sota apareix un home assentat en un banc amb un petit cub impossible.

Tot i que el que és més comú sigui utilitzar cubs falsos, també utilitza el triangle de Penrose. En la litografia *Cascada* de 1961, Escher basa l'edifici en aquest impossible triangle donant la sensació d'estar davant un edifici la relació dels pisos del qual recorda a un tetraedre, però que definitivament no és res més que una cosa impossible. A més a més a la part superior de la torre Esquerra apareix un sòlid com element decoratiu. Es tracta de tres cubs intersecats. A la dreta passa el mateix, només que aquesta vegades es tracta d'octaedres.



Tot i això, la seva etapa més centrada en els políedres, és entre 1948 i 1954, quan dibuixa varis quadrats centrats totalment en aquest tema, on els políedres apareixen com a element principal i no com alguna cosa només decorativa. A *Planetoide doble i Planetoide tetraèdric*, utilitza tetraedres que creen estranys planetes, en el primer són dos que s'intersequen pels centres de les arestes i en el segon només un que dóna lloc a dos mons distorsionats.

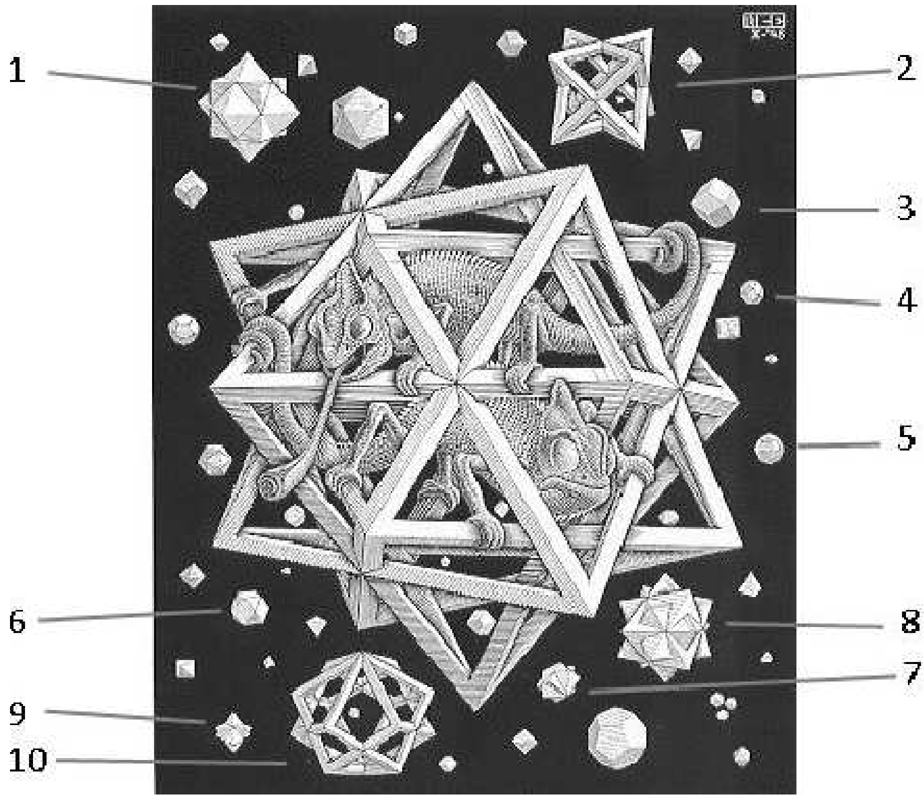



En altres litografies fetes entre 1950 i 1952, inclou la figura del dodecaedre estrellat. A *Gravetat* (a sota a l'esquerra) surten del dodecaedre estrellat rèptils d'una forma bastant caòtica. A *Ordre i caos* el dodecaedre estrellat està parcialment dins d'una esfera, i representen l'ordre, per oposició als cristalls trencats del voltant.

Però potser el treball més complet d'Escher, pel que fa a políedres, sigui la xilografia *Estrelles* (1948). La figura principal és una gran estrella, composta per 3 octaedres buits units, a l'interior dels quals s'agafen camaleons. A part d'aquesta figura veiem que totes les estrelles del fons són políedres. Hi ha varis tetraedre, octaedres, icosàedres, cubs, però entre elles hi ha un seguit de figures encara més significatives:

1. Cub interseccionat amb octaedre
2. Dos tetraedres buits intersecats
3. Rombedodecaedre
4. Rombicuboctedre
5. Icositetraedre deltoïdal
6. Cuboctaedre
7. Dos cubs intersecats
8. Tres octaedres units com l'estrella principal
9. Dos tetraedres
10. Dos cubs buits units per un vèrtex


1
2
3
4
5
6
8
7
9
10

5. CONCLUSIONS

Aquí acaba el nostre treball. La veritat és que ens sentim prou satisfets i sincerament una mica alleujats d'haver-lo acabat. Ens a portat molta feina i no hem sabut repartir-la bé, i com sol passar, se'ns ha caigut el temps a sobre i hem hagut de córrer a l'últim moment. Però bé, aquest ha sigut el resultat.

No podem treure conclusions deductives del nostre treball, però el que sí que podem dir és que els sòlids platònics són Increibles. Ni quan vam començar el treball, que ja havíem realitzat l'estada amb el Programa Argó, no ens imaginàvem que se'n poguessin dir tantes coses d'aquests cossos, i les que no hem citat ja que sinó el nostre treball no acabaria mai.

Aquesta, ha sigut una experiència que creiem que ens serà molt útil de cara al futur. El treball de recerca és una cosa molt diferent al Crèdit de Síntesi. Aquí no ens han donat cap informació, ni hem seguit cap mena de pauta donada. Podem dir realment que és el "nostre" treball. Ha sigut més difícil del que ens pensàvem organitzar i trobar tota la informació necessària. Hem fet molt ús d'Internet, ja que no hem trobat ni un llibre que s'especialitzés únicament ens els Sòlids Platònics. Hem extret també força informació d'un parell de llibres de la biblioteca de la UAB que, la veritat, ens han servit de gran ajut.

Ens agradaria haver-nos pogut organitzar millor el temps per poder completar una mica més el treball, però tot i així creiem que ens n'hem sortit prou bé.

El que recordarem, i suposem que durant forces anys, és que els Sòlids Platònics són un cossos increïbles, especials i sobretot molt bonics.

Volem agrair a diverses persones el seu ajut i col·laboració. En primer lloc a l'Agustí Reventós i a en Joan Francesc Piniella perquè si no fos per ells el tema d'aquest treball no se'ns hauria ni passat pel cap, també els volem agrair les classes i el temps que van dedicar-nos a la UAB i el seu bon tracte. En segon lloc volem agrair a en Martí Prats la seva paciència i el temps que ens ha dedicat a nosaltres. I per últim volem citar als nostres pares i amics que ens han encoratjat a seguir endavant fins a l'últim moment i ens han donat la confiança i el recolzament en moments de nerviosisme i estrés.

Aquest treball és el resultat i el fruit d'aquest mig any, i que hem intentat fer el millor que hem pogut tot i no estar gaire organitzats.

Esperem que hagis entès el que són els Sòlids platònics i les seves propietats, i que t'hagi interessat el món del la geometria i les matemàtiques que hem enfocat en el treball amb molt d'esforç. Gràcies per dedicar aquest temps als *nostres* Sòlids Platònics.

6. BIBLIOGRAFIA

www.wikiedia.org

www.infovis.net

www.astrocosmo.cl

www.dma.fi.upm.es

www.uam.es

www.xtec.es/iesperebarnils

“El Mundo de los poliedros” de Gregoria Guillén Solera

“Les Polyèdres : réguliers, semi-réguliers et composés “ de Louis Joly

Bona part de la informació en la van donar a l’estada a la UAB durant el Programa Argó.