C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I, p. 667-670, 1999
Théorie des groupes/*Group Theory*
(Topologie/*Topology*)

Un calcul élémentaire de $\mathrm{H}_2(\mathcal{M}_{g,1}, \mathbf{Z})$ pour $g \geq 4$

Wolfgang PITSCH

Équipe de théories géométriques, UFR de mathématiques, Université Paris VII, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France
Courriel : pitsch@math.jussieu.fr

(Reçu le 2 août 1999, accepté le 17 août 1999)

Résumé. De la présentation de Wajnryb du mapping class group $\mathcal{M}_{g,1}$, nous déduisons que $\mathrm{H}_2(\mathcal{M}_{g,1})$ est monogène dès que $g \geq 4$. © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

An elementary computation of $H_2(\mathcal{M}_{g,1}, \mathbf{Z})$ ***for*** $g \geq 4$

Abstract. *From Wajnryb's presentation of the mapping class group we deduce that* $\mathrm{H}_2(\mathcal{M}_{g,1})$ *is monogenic for* $g \geq 4$. © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Nous désignerons par $\Sigma_{g,r}$ la surface compacte orientée de genre g, avec r composantes de bord et par $\mathcal{M}_{g,r}$ le « mapping class group » constitué des classes d'isotopie des difféomorphismes qui préservent l'orientation de $\Sigma_{g,r}$ et qui se restreignent à l'identité sur $\partial\Sigma_{g,r}$. Dans tout le texte les groupes d'homologie sont à coefficients dans $\mathbf{Z}$; par ailleurs, les courbes ne sont pas supposées orientées. L'objet de cette Note est de donner une démonstration très élémentaire du résultat suivant dû à Harer pour $g \geq 5$ [2].

THÉORÈME 1

$$\mathrm{H}_2(\mathcal{M}_{g,1}) \simeq \mathbf{Z} \textit{ pour } g \geq 4.$$

Soit $i \in \mathrm{H}_2(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ un générateur. La donnée de deux éléments g et h d'un groupe G qui commutent, équivaut à la donnée d'un morphisme $\rho_{g,h} : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to G$. Posons $\{g,h\} = \rho_{g,h*}(i)$. Si on se donne trois éléments g, h, k, où g commute avec h et k, on a $\{g,hk\} = \{g,h\} + \{g,k\}$.

Le lemme suivant constitue la clef de notre calcul :

LEMME 1. – *Si s et t sont deux twists de $\mathcal{M}_{g,r}$ portés par des courbes non séparantes disjointes S, T, alors ces twists commutent et $\{s,t\} = 0$ dans $\mathrm{H}_2(\mathcal{M}_{g,r})$ dès que $g \geq 4$.*

Note présentée par Étienne GHYS.

Pour la démonstration nous avons besoin de la relation de la lanterne due à Johnson [3] (*cf.* figure 1) et du lemme 2. Soit S_0 une sphère privée de quatre disques et $\mathcal{M}_{0,4}$ son « mapping class group ». Désignons les composantes de bord par $C_0, \dots, C_3$, le twist le long d'une courbe parallèle au bord C_i par τ_i et par τ_{ij} le twist le long d'une courbe C_{ij} qui entoure C_i et C_j (*cf.* figure 1). On a alors la relation suivante, dite relation de la lanterne :

$$\tau_0\,\tau_1\,\tau_2\,\tau_3 = \tau_{12}\,\tau_{13}\,\tau_{23}.$$

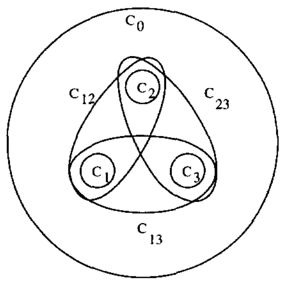

Figure 1. – Configuration de la lanterne.

LEMME 2 (voir [2]). – *Pour $g \geq 3$ et r quelconque, le groupe $\mathcal{M}_{g,r}$ est parfait.*

Démonstration du lemme 2. – Rappelons brièvement la démonstration de Harer [2]. Dehn a montré que le groupe $\mathcal{M}_{g,r}$ est engendré par les twists de Dehn le long des courbes closes simples. En utilisant la relation de la lanterne (*cf.* figure 2), on montre que pour $g \geq 2$ les courbes qui sont de plus non séparantes suffisent. Or, $\mathcal{M}_{g,r}$ agit transitivement sur les courbes closes simples non séparantes et, si C et D sont deux telles courbes et h un difféomorphisme tel que $C = h(D)$ alors les twists c et d portés par ces courbes sont conjugués par h. Il s'ensuit que $\mathrm{H}_1(\mathcal{M}_{g,r})$ est engendré par la classe du twist le long d'une seule courbe non-séparante. Désignons par ℓ la classe d'un tel twist. Pour $g \geq 3$ on peut trouver sept courbes non séparantes dans la configuration de la lanterne, la relation de la lanterne impose $\ell^4 = \ell^3$ et donc $\mathrm{H}_1(\mathcal{M}_{g,r}) = 0$. □

Démonstration du lemme 1. – Coupons la surface le long de la courbe non séparante S pour obtenir une surface $\Sigma_{g-1,3}$. Comme $g - 1 \geq 3$, le twist t, qui peut être vu comme un difféomorphisme de $\Sigma_{g-1,3}$, est un produit de commutateurs $t = \prod_j [f_j, g_j]$. Par construction on a un plongement canonique $\Sigma_{g-1,3} \hookrightarrow \Sigma_{g,1}$ qui induit un morphisme $\mathcal{M}_{g-1,3} \to \mathcal{M}_{g,1}$. Les f_j et les g_j s'écrivent comme un produit de twists portés par des courbes, toutes non séparantes, tracées sur $\Sigma_{g-1,3}$, en particulier ces courbes sont disjointes de S et ces twists commutent donc avec s, par conséquent les f_j et les g_j commutent avec s. Il en résulte :

$$\begin{aligned}\{s,t\} &= \Big\{s, \prod_j [f_j, g_j]\Big\}\\ &= \sum_j \{s, [f_j, g_j]\}\\ &= \sum_j \{s, f_j\} + \{s, g_j\} - \{s, f_j\} - \{s, g_j\}\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Si on se donne une présentation $1 \to R \to F \to G \to 1$ d'un groupe G, avec F libre, la formule de Hopf nous dit que $\mathrm{H}_2(G) \simeq R \cap [F,F]/[R,F]$. Comme $R \cap [F,F]/[R,F]$ est un sous-groupe du groupe abélien $R/[R,F]$, si R est normalement engendré par un nombre fini d'éléments r_i, toute classe de $\mathrm{H}_2(G)$ est représentée dans F par un mot de la forme $\prod_i r_i^{n_i}$. Plus précisément, si F est un groupe libre sur un ensemble E, un mot w écrit au moyen des r_i représente une classe d'homologie si et seulement si pour tout élément $e \in E$ la somme des exposants de e dans w est nulle. Dans [5], Wajnryb donne une présentation finie de $\mathcal{M}_{g,1}$:

THÉORÈME 2. – *Le mapping class group $\mathcal{M}_{g,1}$ est engendré par les $2g+1$ twists de Dehn le long des courbes de la figure 2.*

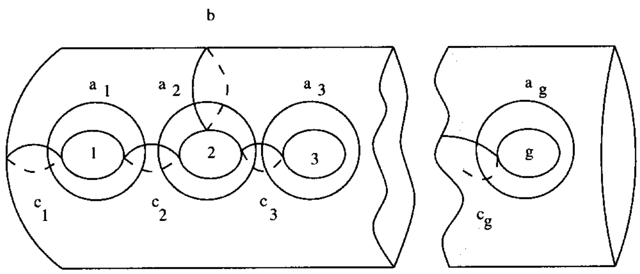

Figure 2. – Générateurs.

Les relations sont de trois types :

1. *les tresses : si deux courbes sont disjointes, les générateurs correspondants commutent, si elles se coupent en un point, on a la relation $\gamma\eta\gamma = \eta\gamma\eta$, que nous désignerons par $T_{\gamma,\eta}$;*
2. *une relation C de chaîne :*

$$(c_2\, a_1\, c_1)^4 = b(\theta b),$$

où $\theta b = (a_2\, c_2\, a_1\, c_1^2\, a_1\, c_2\, a_2)^{-1} b (a_2\, c_2\, a_1\, c_1^2\, a_1\, c_2\, a_2)$ *;*

3. *une relation de lanterne :*

$$(u\, a_1\, c_2\, a_2\, c_3\, a_3)^{-1} v (u\, a_1\, c_2\, a_2\, c_3\, a_3) c_1\, c_2\, c_3 = b\, t_2\, b\, t_2^{-1} (t_1\, t_2) b (t_1\, t_2)^{-1},$$

où

$$t_1 = a_1\, c_1\, c_2\, a_1, \quad t_2 = a_2\, c_2\, c_3\, a_2$$

et

$$u = (c_3\, a_3\, t_2) b (c_3\, a_3\, t_2)^{-1}, \quad v = (c_1\, a_1\, c_2\, a_2) b (c_1\, a_1\, c_2\, a_2)^{-1}.$$

□

Dans ce qui suit, L désignera l'élément

$$(u\, a_1\, c_2\, a_2\, c_3\, a_3)^{-1} v (u\, a_1\, c_2\, a_2\, c_3\, a_3) c_1\, c_2\, c_3 (b\, t_2\, b\, t_2^{-1} (t_1\, t_2) b (t_1\, t_2)^{-1})^{-1},$$

C l'élément $(c_2\, a_1\, c_1)^4 (\theta b)^{-1} b^{-1}$, et $T_{x,y}$ la relation de tresse $xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}$. Le sous-groupe normal engendré par ces éléments et par les relations de commutation est le groupe des relations de $\mathcal{M}_{g,1}$ attaché à cette présentation.

Toute classe d'homologie est donc représentée par un mot de la forme :

$$L^{n_L}\, C^{n_C}\, T^{n_S}_{b,a_2} \prod_{1\le i\le g-1} T^{n_i}_{c_i,a_i} T^{m_i}_{a_i,c_{i+1}} T^{n_g}_{c_g,a_g}\, \tilde{x},$$

où $\tilde{x}$ est un mot écrit au moyen des relations de commutation.

PROPOSITION 1. – *Tout élément de* $\mathrm{H}_2(\mathcal{M}_{g,1})$, *pour* $g \geq 4$, *est représenté dans* $R \cap [F,F]$ *par un mot de la forme* M^n, *où* n *est un entier et*

$$M = L^{-10}\, C\, T^{-18}_{b,a_2}\, T^{6}_{c_1,a_1}\, T^{2}_{a_1,c_2}\, T^{8}_{c_2,a_2}\, T^{-10}_{a_2,c_3}.$$

Démonstration. – Pour chacun des éléments e de la partie génératrice décrite dans le théorème 2 nous désignerons par $e^* : F \to \mathbf{Z}$ le morphisme qui vaut 1 sur e et 0 sur les autres éléments. Par le lemme 1 toutes les classes d'homologie induites par les relations de commutation sont nulles et donc les classes de $\mathrm{H}_2(\mathcal{M}_{g,1})$ sont représentées par des mots $\widetilde{M}$ de la forme :

$$L^{n_L}\, C^{n_C}\, T^{n_S}_{b,a_2} \prod_{1\le i\le g-1} T^{n_i}_{c_i,a_i}\, T^{m_i}_{a_i,c_{i+1}}\, T^{n_g}_{c_g,a_g},$$

tels que, de plus, pour tout e on ait $e^*(\widetilde{M}) = 0$. Comme a_g n'apparaît que dans la relation T_{c_g,a_g}, la condition $a_g^*(x) = 0$ impose $n_g = 0$, le même argument s'applique alors à c_g puis a_{g-1}... et s'arrête pour c_3 qui, lui, apparaît également dans C et L.

Le représentant est réduit à $L^{n_L}\, C^{n_C}\, T^{n_S}_{b,a_2} \prod_{1\le i\le 2} T^{n_i}_{c_i,a_i}\, T^{m_i}_{a_i,c_{i+1}}$. Les conditions sur les 6 générateurs restants a_1, a_2, c_1, c_2, c_3, b se traduisent par un système matriciel de rang 6 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_L \\ n_C \\ n_1 \\ m_1 \\ n_2 \\ m_2 \\ n_S \end{pmatrix} = 0.$$

Le noyau de l'application $\mathbf{Z}^7 \to \mathbf{Z}^6$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$, engendré par l'élément $[-10, 1, 6, 2, 8, -10, -18]$. $\square$

Il en résulte que $\mathrm{H}_2(\mathcal{M}_{g,1})$ est un groupe monogène engendré par M. D'après [4] le groupe $\mathrm{H}^2(\mathcal{M}_{g,1})$ n'est pas nul et la suite exacte des coefficients universels montre que $\mathrm{H}_2(\mathcal{M}_{g,1})$ est non nul et sans torsion, il est donc isomorphe à $\mathbf{Z}$. $\square$

Remerciements. Je tiens ici à remercier Jean Barge pour de multiples discussions.

Références bibliographiques

[1] Dehn M., Die Gruppe der Abbildungclassen, Acta Math. 69 (1938) 135–206.
[2] Harer J., The second homology group of the mapping class group of an orientable surface, Invent. Math. 72 (1983) 221–239.
[3] Johnson D., Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology, Proc. Amer. Math. Soc. 75 (1979) 119–125.
[4] Meyer W., Die Signatur von Flächenbündeln, Math. Ann. 201 (1983) 239–264.
[5] Wajnryb B., A simple presentation of the mapping class group of an orientable surface, Israel J. Math. 45 (1983) 157–174.