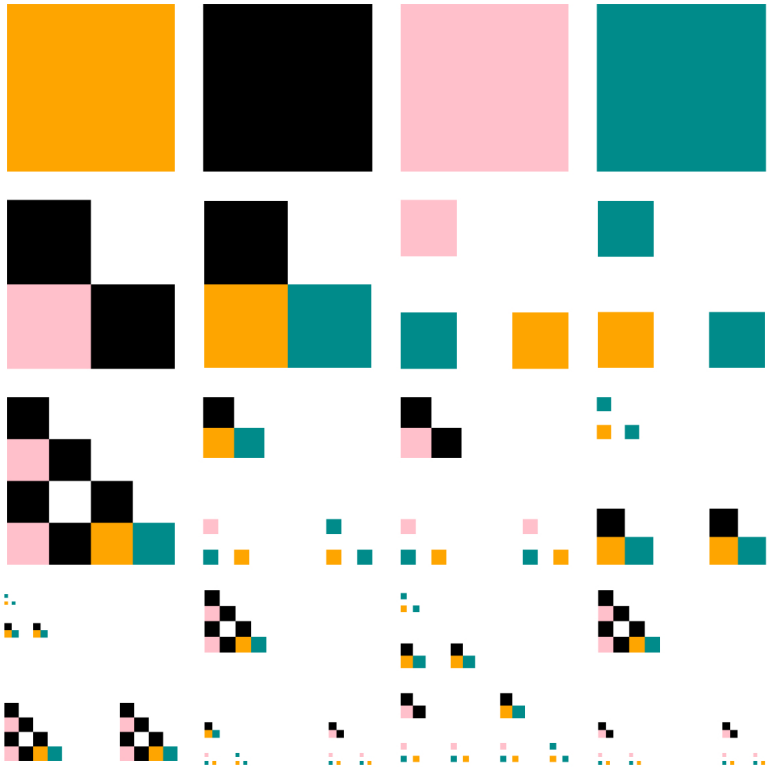
Universitat Autònoma de Barcelona

Treball Final de Grau

Grau en Matemàtiques

Fractals i Superfractals



Maria Conde Pellisa

Tutoritzat per: Roberto Rubio Núñez

Juliol 2022

Resum

En primer lloc presentem els fractals com a atractors de sistemes de funcions iterades (IFS). Aquests IFS estan formats per transformacions contractives definides en l'espai de subconjunts compactes d'un espai mètric complet al qual dotem de la mètrica de Hausdorff i el denotem per $(\mathcal{H}(X), h)$. L'existència d'un fractal, com a atractor, està assegurada pel Teorema del Punt Fix de Banach i per la completesa de l'espai $(\mathcal{H}(X), h)$, la qual demostrem amb detall. A continuació estudiem i comparem diferents enfocaments de la dimensió fractal, la qual pot ser no entera. Finalment, introduïm els superfractals, atractors de superIFS, construïts a partir de col·leccions de IFS amb probabilitats associades a cada un. Aquests resulten, en alguns casos, més útils que els propis fractals, gràcies al control de la seva variabilitat i a l'existència d'un algorisme més ràpid. Tanquem el treball definint la dimensió dels superfractals i donant exemples.

Abstract

To start with, we present fractals as attractors of Iterated Function Systems (IFS). These IFS are composed by contractive transformations defined on the space of compact subsets of a complete metric space which we endow with the Hausdorff metric, and denote by $(\mathcal{H}(X), h)$. The existence of a fractal, as an attractor, is guaranteed by Banach's Fixed Point Theorem and by the completeness of the space $(\mathcal{H}(X), h)$, which we prove in detail. Then, we study and compare differents approaches to the fractal dimension, which can be a non-integer. Finally, we introduce superfractals, superIFS attractors, constructed from collections of IFS with probabilities associated. These are, in some cases, more useful than the fractals themselves, thanks to the control of their variability and the existence of a faster algorithm. We conclude this article defining the dimension of superfractals and giving examples.

Agraïments

Aquest treball ha estat fruit d'una feina constant i de moltes hores de dedicació, algunes molt profitoses i d'altres davant l'ordinador sense escriure ni una sola paraula.

D'entrada voldria agrair al meu tutor, Roberto Rubio Núñez, per totes les ajudes facilitades, l'acompanyament i la guia d'aquest treball així com tot l'interès i propostes que m'ha proporcionat a cada reunió. Sense ell aquest treball no hagués estat possible. Gràcies.

Seguidament, vull aprofitar per agrair als meus pares tot l'esforç que han fet i segueixen fent dia rere dia. Per comptar amb ells sempre que ho he necessitat i facilitar-me tota la formació que he rebut. Gràcies a ells soc la persona d'avui dia.

I finalment a Fredo, per fer canviar la meva perspectiva de cara les matemàtiques.

Índex

1 Introducció **1**

2 La mètrica de Hausdorff **3**
2.1 L'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$ 3
2.2 Completesa de l'espai $(\mathcal{H}(X), h)$ 6

3 Sistemes de funcions iterades i construcció dels fractals **12**
3.1 Transformacios contractives 12
3.2 Transformacions contractives en $(\mathcal{H}(X), h)$ 14
3.3 Algorisme per generar fractals i exemples 16
3.4 Teorema del Collage 20

4 Dimensió fractal **24**
4.1 Dimensió de Minkowski 25
4.2 Dimensió de Hausdorff 27

5 Superfractals **32**
5.1 Fractals V-variables 33
5.2 Algorisme per generar superfractals i exemples 35
5.3 Dimensió dels fractals V-variables 37

A Els Espais Mètrics **39**
A.1 Convergència dels espais mètrics 39
A.2 Topologia en espais mètrics 40
A.3 Compacitat en espais mètrics 41

B Demostracions addicionals **43**

C Exemples de codi SageMath **46**

Capítol 1

Introducció

Què és un fractal? Per desgràcia no existeix cap definició estable que puguem donar. Un dels matemàtics en estudiar i formalitzar aquest concepte va ser Benoit Mandelbrot (1924-2010). Va adonar-se que la geometria tradicional no permetia donar una descripció precisa de molts fenòmens naturals, com per exemple, l'estructura d'un núvol, d'un arbre, d'un floc de neu o inclús no permetia calcular el perímetre d'una costa. L'any 1975 va designar aquests conjunts amb el nom de fractals, i els defineix en el seu llibre *The fractal geometry of nature (1982)* com un "objecte geomètric el qual la seva dimensió topològica és estrictament més petita que la seva dimensió fractal", caracteritzant així un fractal com un objecte de dimensió no entera. Aquesta definició però és insuficient ja que deixa fora alguns conjunts que haurien de considerar-se fractals per les seves propietats, com és el cas de la corba de Peano, la qual té dimensió fractal igual a 2.

Tot i que Mandelbrot va anomenar i definir els fractals entre els anys 1975 i 1985, molts objectes que avui dia considerem fractals van ser definits molt abans, sobre principis del segle XX. En són exemples el conjunt de Cantor, definit el 1886 per George Cantor, la corba de Koch, descrita el 1904 pel matemàtic Helge Von Koch o el triangle de Sierpinski, formulat el 1915 pel matemàtic Waclaw Sierpinski. Tots aquests conjunts es caracteritzen per tenir una estructura fragmentada on cada part és una transformació del total, és a dir, la seva estructura es repeteix en ell mateix a diferents escales. Aquesta propietat es coneix com autosimilitud.

A falta de definició clara pel concepte de fractal, el que fem és enunciar les propietats que majoritàriament compleix un conjunt A el qual considerem fractal [Fal90, p. xx]:

(i) A té una estructura fina, és a dir, amb detalls a escala petita.

(ii) A és massa irregular com per definir-se a través de la geometria clàssica.

(iii) Sovint A presenta autosimilitud, exacta o estadísticament.

(iv) Generalment, la dimensió fractal de A és més gran que la seva dimensió topològica.

(v) En la majoria de casos A està definit de manera recursiva.

En aquest treball ens centrarem només en l'estudi dels fractals autosimilars construïts a partir de processos iteratius de funcions.

Comencem el treball definint un espai mètric format per subconjunts compactes no buits d'un espai mètric complet juntament amb una mètrica anomenada Hausdorff. Denotem aquest espai per $(\mathcal{H}(X), h)$. Aquest espai mètric és també complet tal com veiem en el Teorema 2.15. La prova d'aquest resultat, amb tres pàgines, és una de les més laborioses d'aquest treball.

Seguidament, en el Capítol 3 es defineixen les transformacions contractives, tant en un espai mètric base (X, d) com en l'espai $(\mathcal{H}(X), h)$. Aquestes últimes són les que formen els Sistemes de Funcions Iterades (IFS). El Teorema del Punt Fix de Banach (Teorema 3.11) actuant en l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$ ens assegura l'existència d'un atractor per un IFS contractiu. Aquesta és la definició que considerarem per a un fractal. Alguns exemples que introduïm són el Drac de Heighway, el triangle de Sierpinski i el fractal de Vicsek. Per acabar, introduïm el Teorema del Collage (Teorema 3.19), que ens permet caracteritzar un conjunt o imatge donada a partir d'un IFS.

En el Capítol 4 estudiarem la dimensió fractal de dues maneres diferents, mitjançant la dimensió de Minkowski (o del recompte de caixes) i la de Hausdorff, sent aquesta última més teòrica. Establim també la relació que hi ha entre elles i presentem un exemple de com calcular-les.

Per concloure, el Capítol 5 aborda els fractals V-variables i els superfractals. Uns conjunts estudiats majoritàriament pels matemàtics Michael Barnsley, Josh Hutchinson i Örjan Stenflo. Aquests conjunts, en alguns casos, com en la medicina o la física, són més eficients que els fractals gràcies al control en la seva variabilitat. Els fractals V-variables es construeixen a partir d'un IFS compost per una col·lecció de IFS i una distribució de probabilitat. Aquest IFS s'anomena un superIFS i el seu atractor és el que definim com superfractal. També donarem unes pinzellades sobre la dimensió fractal (o superfractal en aquest cas) d'aquests fractals V-variables. Al ser un tema poc recurrent i estudiat, aquesta part ha estat la més complexa i costosa de treballar. Tot i així, hem construït exemples propis, tot i que estan basats en els proposats en les referències.

Finalment en els Apèndixs podem trobar un capítol dedicat als conceptes previs relacionats en els espais mètrics, concretament la seva topologia i la seva compacitat. Seguidament trobem un capítol on apareixen algunes de les demostracions de teoremes, proposicions o corol·laris que no s'han inclòs en el treball.

Hem intentat, en la mesura del possible, fer algunes aportacions originals. Per aquest motiu la majoria de figures que apareixen en aquest treball han estat creades a partir de codi en SageMath, exemples del qual es poden trobar al final de l'apèndix. A més, hem treballat de manera independent en produir alguns exemples, com l'Exemple 3.20 del Teorema del Collage (Teorema 3.19) o el càlcul de la dimensió fractal de la corba de Koch (Exemple 4.6), les quals són també aportacions pròpies.

Capítol 2

La mètrica de Hausdorff

En aquest primer capítol introduirem un espai mètric construït a partir del conjunt de subconjunts compactes no buits d'un espai mètric (X, d), denotat per $\mathcal{H}(X)$, juntament amb una mètrica anomenada mètrica de Hausdorff. Un cop construït, veurem algunes de les seves propietats, entre elles trobem un dels resultats més importants que el caracteritza: la seva completesa. Aquest espai mètric serà l'espai on viuran els fractals.

Observació 2.1. En aquest capítol es fa ús dels conceptes i resultats bàsics que es troben definits i demostrats en l'Apèndix A.

2.1 L'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$

Aquesta secció esta basada en el Capítol 2 de les notes [Fra20]. Comencem definint formalment el conjunt $\mathcal{H}(X)$.

Definició 2.2. Donat un espai mètric complet (X, d), definim el conjunt format per tots els subconjunts compactes no buits de X com:

$$\mathcal{H}(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ és compacte}, A \neq \emptyset\}.$$

Per poder parlar d'espai mètric necessitem una mètrica que ens permeti mesurar la distància entre els elements d'aquest conjunt $\mathcal{H}(X)$. Abans de definir la distància entre 2 conjunts, hem de saber com es mesura la distancia d'un punt qualsevol a un conjunt.

Definició 2.3. Siguin (X, d) un espai mètric, $x \in X$ i $B \in \mathcal{H}(X)$. Definim la distància del punt x al conjunt B com

$$l(x, B) = \min\{d(x, b) \mid b \in B\}.$$

Observació 2.4. No ens hem de preocupar per l'existència del mínim del conjunt $\{d(x, b) \mid b \in B\}$, ja que aquesta està garantida per ser B compacte.

A continuació, ja podem establir la distancia entre dos conjunts de $\mathcal{H}(X)$.

Definició 2.5. Sigui (X, d) un espai mètric. Definim la distància entre dos conjunts $A, B \in \mathcal{H}(X)$ com

$$l(A, B) = \max\{l(a, B) \mid a \in A\}.$$

Observació 2.6. De la mateixa manera que en la definició anterior, utilitzant la compacitat tant de A com de B, l'existència d'aquest màxim també està garantida.

Observació 2.7. Amb aquesta definició, ja es poden mesurar distàncies. Tot i així, aquesta no és una mètrica, ja que en general no és simètrica (veure (3) en Definició A.1).

Ho podem veure a través del següent exemple, extret de [BMPS03]. Prenem A el cercle de radi 3 centrat en l'origen i B el disc de radi 1 centrat també en l'origen. En aquest cas, $l(A, B) \neq l(B, A)$, ja que com es pot veure en la Figura 2.1, $l(A, B) = 2$, corresponent a la línia vermella, mentre que $l(B, A) = 3$, corresponent a la línia verda.

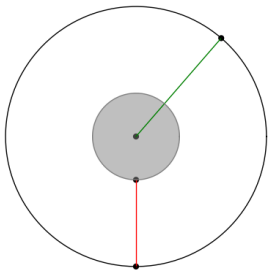


Figura 2.1: $l(A, B) \neq l(B, A)$.

Per tal de solucionar el problema de l'Observació 2.7 considerem el màxim entre les distancies $l(A, B)$ i $l(B, A)$, construint així la mètrica de Hausdorff.

Definició 2.8. Sigui (X, d) un espai mètric. Donats $A, B \in \mathcal{H}(X)$, definim la mètrica de Hausdorff entre A i B com

$$h(A, B) = \max\{l(A, B), l(B, A)\}.$$

Aquesta mètrica rep el nom de Hausdorff, en honor al matemàtic que la va definir, Felix Hausdorff.

Proposició 2.9. *$(\mathcal{H}(X), h)$ és un espai mètric, és a dir, h és una mètrica pel conjunt $\mathcal{H}(X)$.*

Demostració. Per fer aquesta demostració s'ha de comprovar que h satisfà les quatre propietats per ser una mètrica (veure Definició A.1).
Siguin $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$;

(1) $h(A, B) \geq 0$.

Com que $l(A, B)$ i $l(B, A)$ són expressions no negatives, aleshores $h(A, B)$ també és no negativa, per tant, $h(A, B) \geq 0$.

(2) $h(A, B) = 0$ si i només si $A = B$.

$\Longleftarrow$ Suposem $A = B$ i volem veure que $h(A, B) = 0$.

Sigui $a \in A$ qualsevol. Com que $A = B$, $a \in B$ i per tant $l(a, B) = 0$. Aleshores, $l(A, B) = \max\{l(a, B) \mid a \in A\} = 0$.

Anàlogament, prenent $b \in B$ es demostra que $l(B, A) = 0$.

Així doncs, $h(A, B) = \max\{l(A, B), l(B, A)\} = \max\{0, 0\} = 0$.

$\Longrightarrow$ Suposem ara que $h(A, B) = 0$ i volem veure que $A = B$.

Si $h(A, B) = 0$ aleshores $l(A, B) = l(B, A) = 0$.

Com $l(A, B) = 0$, per definició tenim que, el $\max\{l(a, B) \mid a \in A\} = 0$ d'on es dedueix que $l(a, B) = \min\{d(a, b) \mid b \in B\} = 0$ per tot $a \in A$.
Com que B és un conjunt compacte, i en particular és finit, es pot trobar un valor $b \in B$ tal que $b = a$. Així, tot element de A es troba a B, i.e $A \subseteq B$.

Anàlogament per $l(B, A) = 0$ es demostra que $B \subseteq A$.

Si $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, clarament $A = B$.

(3) $h(A, B) = h(B, A)$.

$h(A, B) = \max\{l(A, B), l(B, A)\} = \max\{l(B, A), l(A, B)\} = h(B, A)$.

(4) $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$.

Per provar aquesta desigualtat, és interessant primer provar aquesta altra:

$$l(A, B) \leq l(A, C) + l(C, B).$$

Sigui $a \in A$ qualsevol, aleshores

$$l(a, B) = \min\{d(a, b) \mid b \in B\} \leq \min\{d(a, c) + d(c, b) \mid b \in B\} \ \forall c \in C$$

$$= d(a, c) + \min\{d(c, b) \mid b \in B\} \ \forall c \in C,$$

consegüentment,

$$l(a, B) \leq \min\{d(a, c) \mid c \in C\} + \max\{\min\{d(c, b) \mid b \in B\} c \in C\} = l(a, C) + l(C, B),$$

i com que s'ha fet per qualsevol $a \in A$, $l(A, B) \leq l(A, C) + l(C, B)$.

Anàlogament es veu que $l(B, A) \leq l(B, C) + l(C, A)$. Aleshores,

$$h(A, B) = \max\{l(A, B), l(B, A)\} \leq \max\{l(A, C), l(C, A)\} + \max\{l(C, B), l(B, C)\}$$

$$= h(A, C) + h(C, B),$$

com es volia provar.

Així doncs, $(\mathcal{H}(X), h)$ és un espai mètric. $\square$

Un cop definit aquest espai mètric, enunciem algunes de les seves propietats, que ens seran útils en resultats futurs.

Proposició 2.10. *Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$. Aleshores es compleix que*

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{h(A, C), h(B, D)\}.$$

Demostració. Siguin $A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$ i sigui $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, aleshores

$$\begin{aligned} l(x, C \cup D) &= \min\{d(x,y) \mid y \in C \cup D\} = \min\{\min\{d(x,y) \mid y \in C\}, \min\{d(x,y) \mid y \in D\}\} \\ &= \min\{l(x,C), l(x,D)\}. \end{aligned}$$

Tenim doncs, que $l(x, C \cup D) = \min\{l(x,C), l(x,D)\}$. A partir d'aquesta igualtat, es pot deduir que

$$l(x, C \cup D) \leq l(x,C) \leq \max\{l(x,C) \mid x \in A\} = l(A,C) \leq h(A,C).$$

Per tant, si $x \in A$, es compleix $l(x, C \cup D) \leq h(A,C)$.

Anàlogament es té que, si $x \in B$, aleshores $l(x, C \cup D) \leq h(B,D)$.

Agrupant les dues desigualtats anteriors, obtenim

$$l(x, C \cup D) \leq \max\{h(A,C), h(B,D)\}, \text{ i com que } x \in A \cup B,$$

$$l(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{h(A,C), h(B,D)\}.$$

De manera anàloga, es prova que $l(C \cup D, A \cup B) \leq \max\{h(A,C), h(B,D)\}$, i per tant

$$h(A \cup B, C \cup D) = \max\{l(A \cup B), l(C \cup D)\} \leq \max\{h(A,C), h(B,D)\}.$$

□

Aquest resultat es pot estendre per qualsevol unió finita d'elements de $\mathcal{H}(X)$.

Corol·lari 2.11. *Sigui (X,d) un espai mètric i siguin $A_i, B_i \in \mathcal{H}(X)$. Aleshores,*

$$h(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i) \leq \max_{i \in I}\{h(A_i, B_i)\}.$$

Aquest corol·lari es pot demostrar de dues maneres diferents; o fent inducció sobre el nombre d'elements de la unió o amb la que està inclosa en l'Apèndix B.

Posteriorment, en el Capítol següent, farem un exemple més elaborat on calcularem la distància de Hausdorff entre dos conjunts, (Exemple 3.20).

2.2 Completesa de l'espai $(\mathcal{H}(X), h)$

La finalitat d'aquesta secció és provar que aquest espai és un espai mètric complet. Per tal d'enunciar i demostrar aquesta propietat, necessitem abans alguns conceptes i resultats previs que podem trobar en el Capítol 2 de [Bar88] i que enunciem a continuació.

Definició 2.12. Siguin (X,d) un espai mètric, A un subconjunt compacte de X i $\varepsilon > 0$. L'entorn de mida ε de A és un subconjunt de X, denotat per A_ε, que conté tots els punts de X que estan a una distància màxima ε d'algun element d'A.

$$A_\varepsilon = \{x \in X \mid d(x,a) \leq \varepsilon \text{ per algun } a \in A\}.$$

Lema 2.13. *Siguin (X, d) un espai mètric i $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Sigui $\varepsilon > 0$. Aleshores,*

$$h(A, B) \leq \varepsilon \Longleftrightarrow A \subset B_\varepsilon \text{ i } B \subset A_\varepsilon.$$

En particular,

$$h(A, B) = \min\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon \text{ i } B \subset A_\varepsilon\}.$$

Demostració. Provem primer la doble implicació d'aquest lema.

Començarem provant que $l(A, B) \leq \varepsilon \Longleftrightarrow A \subset B_\varepsilon$.

$\Longrightarrow$ Suposem $l(A, B) \leq \varepsilon$. Aleshores, $\max\{l(a, B) \mid a \in A\} \leq \varepsilon$. Això implica que per tot $a \in A$ es compleix $l(a, B) = \min\{d(a, b) \mid b \in B\} \leq \varepsilon$. Per tant, per tot $a \in A$, tenim $a \in B_\varepsilon$, i en conseqüència, $A \subset B_\varepsilon$.

$\Longleftarrow$ Suposem que $A \subset B_\varepsilon$. Prenem $a \in A$ qualsevol. Aleshores, existeix un $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq \varepsilon$. Com que $l(a, B) = \min\{d(a, b) \mid b \in B\}$ deduïm que $l(a, B) \leq \varepsilon$. Això es cert per tot $a \in A$, per tant $l(A, B) \leq \varepsilon$.

De manera similar es prova que $l(B, A) \leq \varepsilon \Longleftrightarrow B \subset A_\varepsilon$.

Aleshores, per definició de h, tenim que

$$h(A, B) = \max\{l(A, B), l(B, A)\} \leq \varepsilon \Longleftrightarrow A \subset B_\varepsilon \text{ i } B \subset A_\varepsilon.$$

La demostració del cas particular es troba en l'Apèndix B. □

Per poder introduir els resultats següents és necessari estar familiaritzat amb el concepte de successió de Cauchy (veure Definició A.8) i el d'espai mètric complet (veure Definició A.10).

Lema 2.14. ***(Lema d'extensió)***. *Siguin (X, d) un espai mètric complet i $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de Cauchy en $(\mathcal{H}(X), h)$. Sigui $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ una successió infinita de $\mathbb{N}$, de manera que $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.*

Suposem que la successió $\{x_{n_j} \in A_{n_j} \mid j = 1, 2, 3, \cdots\}$ és de Cauchy en l'espai mètric (X, d). Aleshores, existeix una successió de Cauchy $\{y_n \in A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tal que $y_{n_j} = x_{n_j}$ per tot $j = 1, 2, 3, \cdots$.

Demostració. En primer lloc, construïm la successió $\{y_n \in A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de la següent manera:
Per cada $n \in \{1, 2, \cdots, n_1\}$ escollim $y_n \in A_n$ tal que $d(y_n, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_n)$. És a dir, escollim y_n com el punt de A_n més proper a x_{n_1}. L'existència d'aquest punt està assegurada per la compacitat de A_n.

Similarment, per cada $j \in \{2, 3, \cdots\}$ i cada $n \in \{n_j + 1, \cdots, n_{j+1}\}$ escollim $y_n \in A_n$ tal que $d(y_n, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_n)$.

Observem que la successió $\{y_n\}$ és una extensió de $\{x_{n_j}\}$ en $\{A_n\}$ i per construcció es compleix que $y_{n_j} = x_{n_j}$ i $x_n \in A_n$.

Per acabar, hem de veure que la successió $\{y_n\}$ és de Cauchy. Prenem $\varepsilon > 0$. Per una banda tenim que la successió $\{x_{n_j}\}$ és de Cauchy, i per tant, existeix $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $n_k, n_l \geq N_1$,

$$d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Per l'altra, sabem que la successió $\{A_n\}$ també és de Cauchy, i per tant, existeix $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $p, q \geq N_2$,

$$h(A_p, A_q) < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \text{i en particular,} \quad l(A_p, A_q) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Prenem $N = \max\{N_1, N_2\}$, aleshores per a cada $m, n > N$ es compleix,

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_l}) + d(x_{n_l}, y_n),$$

on $m \in \{n_{k-1}+1, n_{k-1}+2, \cdots, n_k\}$ i $n \in \{n_{l-1}+1, n_{l-1}+2, \cdots, n_l\}$.

Per com hem escollit els punts y_m i y_n, es compleix:

$$d(y_m, x_{n_k}) = d(x_{n_k}, A_m) \leq \max\{d(x, A_m) \mid x \in A_{n_k}\} = l(A_{n_k}, A_m) \leq h(A_{n_k}, A_m) < \varepsilon/3.$$

Anàlogament, es veu que $d(x_{n_l}, y_n) < \varepsilon/3$. Així doncs, ajuntant totes les desigualtats, tenim

$$d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

i per tant, la successió $\{y_n\}$ és de Cauchy. □

Un cop vist aquests resultats, podem enunciar i demostrar el teorema principal d'aquesta secció, extret també de [Bar88]. Aquest teorema, a més de proporcionarnos la condició per la qual l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$ és complet, també ens dona una caracterització del límit de les successions de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$.

Teorema 2.15. *Sigui (X, d) un espai mètric complet. Aleshores $(\mathcal{H}(X), h)$ és un espai mètric complet. A més, si*
$\{A_n \in \mathcal{H}(X)\}_{n=1}^{\infty}$ és una successió de Cauchy llavors

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{H}(X),$$

i es pot caracteritzar com

$$A = \{x \in X \mid \textit{existeix una successió de Cauchy } \{x_n \in A_n\} \textit{ que convergeix a } x\}.$$

Demostració. Per provar que $(\mathcal{H}(X), h)$ és un espai mètric complet, hem de veure que tota successió de Cauchy de $\mathcal{H}(X)$ té limit en $\mathcal{H}(X)$.

Sigui $\{A_n\} \in \mathcal{H}(X)$ una successió de Cauchy i sigui A el conjunt definit en l'enunciat del teorema. Dividim la prova en 5 parts:

(1) $A \neq \emptyset$:

Hem de veure que existeix una successió de Cauchy $\{a_i \in A_i\}$ en X que convergeix a un punt $a \in X$.

Partim d'una successió de Cauchy, $\{A_n \in \mathcal{H}(X)\}$. Aleshores existeix un enter $N_1 > 0$ tal que per a tot $m, n \geq N_1$, $h(A_m, A_n) \leq \frac{1}{2}$, i en general, existeix una successió creixent de nombres enters positius $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_n < \cdots$ tals que

$$h(A_m, A_n) \leq \frac{1}{2^i}, \text{ per tot } m, n \geq N_i.$$

Escollim $x_{N_1} \in A_{N_1}$ arbitrari. Com que $h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$, existeix un $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) < \frac{1}{2}$. Repetim aquest argument k vegades: suposem que existeixen $x_{N_i} \in A_{N_i}$, amb $i = 1, 2, \cdots, k$ tals que $d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) < \frac{1}{2^{i-1}}$.

Com que $h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$ i $x_{N_k} \in A_{N_k}$, existeix un $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$ tal que $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$.
Per inducció, es construeix la successió $\{x_{N_i} \in A_{N_i}\}$, on $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) < \frac{1}{2^k}$.

Ens cal provar que aquesta successió és una successió de Cauchy en X.
Sigui $\varepsilon > 0$ i M un enter tal que $\sum_{i=M}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$. Aleshores per valors $m > n \geq M$ tenim

$$d(x_{N_m}, x_{N_n}) \leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \cdots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) < \sum_{i=M}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

Aplicant el lema d'extensió, existeix una successió parcial convergent $\{a_i \in A_i\}$ tal que $a_{N_i} = x_{N_i}$, i com que (X, d) és un espai mètric complet, aquesta successió serà convergent, i per definició, el seu límit estarà en A.

(2) A és tancat:

Sigui $\{a_i \in A\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successió convergent a un punt $a \in X$. Per veure que A és tancat, provarem que $a \in A$.

Per construcció, tenim que $a_i \in A$. Aleshores, per definició del conjunt A existeix una successió $\{x_{i,n} \in A_n\}$ de manera que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_{i,n} = a_i$ per cada enter positiu i. Com que la successió $\{a_i\}$ convergeix al punt a, consegüentment existeix una successió creixent de nombres enters positius $\{N_i\}$ tal que

$$d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}.$$

Com que la successió $\{x_{i,n}\}$ convergeix a a_i per a tot i, hi ha una successió d'enters $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) < \frac{1}{i}.$$

Utilitzant la desigualtat triangular, tenim que per cada i es compleix:

$$d(x_{N_i, m_i}, a) \leq d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) + d(a_{N_i}, a) = \frac{1}{i} + \frac{1}{i} = \frac{2}{i}.$$

Considerem $\tilde{x}_{m_i} = x_{N_i, m_i}$, d'on obtenim la successió $\{\tilde{x}_{m_i} \in A_{m_i}\}$, que és una successió de Cauchy convergent a a.
Pel Lema 2.14, aquesta successió $\{\tilde{x}_{m_i}\}$ es pot estendre a una successió convergent $\{y_i \in A_i\}$ amb límit a. Així doncs, $a \in A$ i en conseqüència obtenim que A és tancat.

(3) Donat $\varepsilon > 0$, existeix un N tal que per tot $n \geq N$, $A \subset (A_n)_\varepsilon$:

Sigui $\varepsilon > 0$. Com que $\{A_n \in \mathcal{H}(X)\}$ és una successió de Cauchy, existeix un enter $N > 0$ tal que per tot $m, n \geq N$ es compleix

$$h(A_m, A_n) \leq \varepsilon.$$

Juntament amb aquesta desigualtat i el resultat vist en el Lema 2.13, obtenim que $A_m \subset (A_n)_\varepsilon$.

Ens interessa veure aquest resultat pel conjunt A, és a dir, $A \subset (A_n)_\varepsilon$. Per provar-ho, prenem $a \in A$ qualsevol i sigui $\{a_i \in A_i\}$ una successió convergent al punt a. Suposarem que N és suficientment gran com per a complir també

$$d(a_m, a) \leq \varepsilon, \text{ per tot } m \geq N.$$

Aleshores, $a_m \in (A_n)_\varepsilon$, pel fet que $a_m \in A_m$ i que $A_m \subset (A_n)_\varepsilon$. Com que A_n és compacte, en particular és tancat (Teorema A.25) i per tant, $(A_n)_\varepsilon$ també.

Com que $a_m \in (A_n)_\varepsilon$ per tot $m \geq N$, i $\lim a_i = a$, aleshores $a \in (A_n)_\varepsilon$. Considerant que hem escollit $a \in A$ de manera arbitraria, aquest resultat es compleix per tot punt d'A. Així doncs, $A \subset (A_n)_\varepsilon$, tal com es volia veure.

(4) A és totalment fitat:

Ho demostrarem per reducció a l'absurd. Suposem que A no és totalment fitat. Aleshores, per algun $\varepsilon > 0$ podem trobar una successió $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en A, tal que $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, amb $i \neq j$.

Per l'apartat (3) d'aquesta demostració, sabem que existeix un n suficientment gran pel qual $A \subset (A_n)_{\frac{\varepsilon}{3}}$, per tant, per cada x_i existeix un $y_i \in A_n$ de manera que $d(x_i, y_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Com que A_n és compacte, podem trobar una successió parcial de y_i convergent, posem per cas $\{y_{n_k}\}$. En aquesta successió, podem trobar punts y_{n_1}, y_{n_2} tals que $d(y_{n_1}, y_{n_2}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Per la desigualtat triangular tenim,

$$d(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq d(x_{n_1}, y_{n_1}) + d(y_{n_1}, y_{n_2}) + d(y_{n_2}, x_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Però això entra en contradicció amb la manera en la que hem construït la successió $\{x_i\}$.

Per tant, A és totalment fitat. A més, com hem vist en l'apartat (2), A és tancat i per tant, és compacte (Teorema A.25).

(5) $\lim A_n = A$:

Per construcció, el conjunt A és un subconjunt de X, i tal com hem vist en l'apartat anterior, A és un conjunt compacte. Consegüentment, A és un subconjunt compacte de X, i.e. $A \in \mathcal{H}(X)$.

Sigui $\varepsilon > 0$. Per veure que $\lim A_n = A$ hem de provar que $h(A_n, A) \leq \varepsilon$. Pel Lema 2.13 tenim que això es compleix si i només si $A_n \subset A_\varepsilon$ i $A \subset (A_n)_\varepsilon$. En l'apartat (3) d'aquesta demostració, ja hem vist que es compleix la inclusió $A \subset (A_n)_\varepsilon$, per tant ens resta provar l'altra inclusió: $A_n \subset A_\varepsilon$.

Considerem $\varepsilon > 0$ qualsevol. Com que la successió $\{A_n \in \mathcal{H}(X)\}$ és de Cauchy, existeix un $N > 0$ tal que per tot $m, n \geq N$, $h(A_m, A_n) \leq \varepsilon/2$. Aleshores, per tot $m, n \geq N$, $A_m \subset (A_n)_{\varepsilon/2}$.

Sigui $n \geq N$. Existeix una successió creixent $\{N_i\}$ de nombres enters: $n < N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$ de manera que, $A_m \subset (A_k)_{\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}}$, per tot $m, k \geq N_j$. En particular, $A_n \subset (A_{N_1})_{\varepsilon/2}$.

Sigui $y \in A_n$, existeix un $x_{N_1} \in A_{N_1}$ tal que $d(y, x_{N_1}) \leq \varepsilon/2$. Com que $x_{N_1} \in A_{N_1}$, existeix un $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \varepsilon/2^2$. Per inducció, seguint el mateix procediment, trobem una successió $\{x_{N_j} \in A_{N_j}\}$ amb $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) < \varepsilon/2^{j+1}$. Usant la desigualtat triangular,

$$d(y, x_{N_j}) \leq d(y, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x_{N_2}) + \cdots + d(x_{N_{j-1}}, x_{N_j}) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} < \varepsilon, \text{ per tot } j > 0.$$

Així doncs, la successió $\{x_{N_j}\}$ és de Cauchy, i convergeix a un punt $x \in A$. Com que $d(y, x_{N_1}) < \varepsilon$, aleshores $d(y, x) < \varepsilon$, per tant, $A_n \subset A_\varepsilon$.

Amb això completem la prova que $\lim A_n = A$.

Amb tots aquests passos hem vist que tota successió de Cauchy de l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$ és convergent i el seu límit es troba en $\mathcal{H}(X)$. Per tant, $(\mathcal{H}(X), h)$ és un espai mètric complet.

$\square$

Capítol 3

Sistemes de funcions iterades i construcció dels fractals

El proper objectiu és construir les successions del capítol anterior. Ens interessen les successions d'elements en l'espai $(\mathcal{H}(X), h)$. Aquestes successions les aconseguirem a través d'unes funcions que anomenem transformacions. Per tal de ser coherents, primer definirem les transformacions en l'espai mètric (X, d) i seguidament ampliarem aquests conceptes a l'espai $(\mathcal{H}(X), h)$. Principalment hem consultat i extret els resultats següents de [Bar88] i [YJ01].

Definició 3.1. Sigui (X, d) un espai mètric. Anomenem transformació, o aplicació, a qualsevol funció de X a X, $w : X \longrightarrow X$, que assigna un punt $w(x) \in X$ per cada $x \in X$.

Definició 3.2. Sigui $w : X \longrightarrow X$ una transformació en un espai mètric (X, d). Les iteracions de w són també transformacions de la forma $w^{(n)} : X \longrightarrow X$ definides com $w^{(0)}(x) = x, w^{(1)} = w(x), w^{(2)} = w(w(x)), \cdots, w^{(n+1)}(x) = w(w^{(n)}(x))$, per a $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3.1 Transformacios contractives

En un espai mètric arbitrari tenim un gran ventall de transformacions que es poden dur a terme. En la geometria fractal però, s'utilitza un determinat tipus d'aplicacions: les que per cada iteració que realitzem, els punts resultants estan cada vegada a una distància menor. Aquest tipus reben el nom de transformacions contractives.

Definició 3.3. Donat un espai mètric (X, d), diem que $w : X \longrightarrow X$ és una transformació contractiva, o una contracció, si existeix una constant $c \in [0, 1)$ tal que

$$d(w(x), w(y)) \leq c \cdot d(x, y), \text{ per tot } x, y \in X.$$

Aquesta constant c, la qual no és única, s'anomena factor de contracció per w.

Definició 3.4. Sigui $w : X \longrightarrow X$ una transformació sobre un espai mètric (X, d). Diem que un punt $x \in X$ és un punt fix de w si satisfà $w(x) = x$.

Teorema 3.5. *(**Teorema del punt fix de Banach.**) Siguin (X, d) un espai mètric complet i $w : X \longrightarrow X$ una transformació contractiva. Aleshores w té*

exactament un únic punt fix $y \in X$, i a més, per a qualsevol punt $x \in X$, la successió $\{w^n(x) : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ convergeix al punt y. És a dir,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} w^{(n)}(x) = y, \text{ per tot } x \in X.$$

Aquest teorema també es coneix com el teorema de l'aplicació contractiva.

Demostració. Per provar aquest teorema, dividim la demostració en dues parts. Per una banda hem de veure l'existència d'aquest punt fix i per l'altra, la seva unicitat.

1. **Existència.**

   Sigui $x \in X$ i definim la successió $\{x_n := w^{(n)}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Hem de provar que aquesta successió és de Cauchy. Atès que (X, d) és un espai mètric complet, aleshores $\{x_n\}$ convergirà a un punt $y \in X$:

   $$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = y \in X$$

   En primer lloc, per veure que $\{x_n\}$ és una successió de Cauchy, hem de tenir en compte les següents desigualtats, fruit de la contractivitat de w aplicada reiteradament:

   $$\begin{aligned} d(x_n, x_{n-1}) &= d(w^{(n)}(x), w^{(n-1)}(x)) \leq c \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq c^2 \cdot d(x_{n-2}, x_{n-3}) \leq \cdots \leq c^{n-1} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

   Siguin $p, q \in \mathbb{N}$ tals que $p > q$, aleshores:

   $$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \cdots + d(x_{p-k}, x_q) \\ &\leq c^{p-1} d(x_1, x_0) + c^{p-2} d(x_1, x_0) + \cdots + c^q d(x_1, x_0) \\ &= c^q d(x_1, x_0)(c^{p-q-1} + \cdots + c + 1) \\ &= c^q d(x_1, x_0) \frac{1 - c^{p-q-1}}{1 - c} < \frac{c^q}{1 - c} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

   Prenent límits en q, l'últim terme tendeix a 0, i per tant donat un $\varepsilon > 0$, existeix un $N > 0$ tal que podem trobar valors $p, q > N$ els quals fan que la distància $d(x_p, x_q)$ sigui menor que ε. És a dir, la successió $\{x_n\}$ és una successió de Cauchy amb límit $y \in X$, ja que recordem (X, d) és complet.

   Pel fet que w és una transformació contractiva, w és continua. Aleshores,

   $$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n+1} &= \lim_{n \longrightarrow \infty} w^{(n+1)}(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} w(w^{(n)}(x)) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} w(x_n) = w(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n) = w(y). \end{aligned}$$

   Però,

   $$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = y.$$

   Així doncs, $y \in X$ és un punt fix de w ja que $w(y) = y$.

2. **Unicitat.**

Suposem que existeixen dos punts fixos de w diferents, $y_1, y_2 \in X$. Es compleix doncs, $w(y_1) = y_1$ i $w(y_2) = y_2$. Com que T és una transformació contractiva, tenim

$$d(y_1, y_2) = d(w(y_1), w(y_2)) \leq c \cdot d(y_1, y_2),$$

i com $0 \leq c < 1$, aquesta desigualtat només es possible si $d(y_1, y_2) = 0$, és a dir, si $y_1 = y_2$.

□

3.2 Transformacions contractives en $(\mathcal{H}(X), h)$

En la secció anterior hem definit i provat resultats pel que fa a les aplicacions contractives en un espai mètric base (X, d). Ara, el nostre objectiu és ampliar aquests resultats a l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$.
Abans però, hem de descriure com són les aplicacions contractives en l'espai $(\mathcal{H}(X), h)$.

Lema 3.6. *Siguin (X, d) un espai mètric i $w : X \longrightarrow X$ una transformació contractiva en aquest espai. Aleshores w és continua.*

Demostració. Sigui $w : X \longrightarrow X$ una transformació contractiva amb factor de contracció c. Per veure que w és continua hem de provar que donat $\varepsilon > 0$ qualsevol, existeix un $\delta > 0$ tal que, si $d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(w(x), w(y)) < \varepsilon$, per tot $x, y \in X$.

Sigui $\varepsilon > 0$, com que w és contractiva, es compleix:

$$d(w(x), w(y)) \leq c \cdot d(x, y) < \varepsilon,$$

prenent $\delta = \varepsilon/c$. Per tant, w és continua. □

Lema 3.7. *Siguin (X, d) un espai mètric i $w : X \longrightarrow X$ una aplicació contractiva en aquest espai. Aleshores, w envia el conjunt $\mathcal{H}(X)$ a ell mateix.*

Demostració. Siguin S un subconjunt compacte de X, $(S \in \mathcal{H}(X))$, i $w : X \longrightarrow X$ una aplicació contractiva. Hem de veure que $w(S) = \{w(x) \mid x \in S\}$ és compacte. Usant la Definició $A.24$, hem de veure que tota successió infinita de $w(S)$ conté una successió parcial convergent en algun punt de $w(S)$.

Sigui $\{y_n = w(x_n)\}$ una successió infinita de punts de $w(S)$. Aleshores, $\{x_n\}$ és una successió infinita de punts de S, i com que S és compacte, existeix una successió parcial $\{x_{n_k}\}$ que convergeix a un punt $\tilde{x} \in S$. Pel lema anterior, w és continua, i per tant $\{y_{n_k} = w(x_{n_k})\}$ és una successió parcial de $\{y_n\}$ que convergeix a $\tilde{y} = w(\tilde{x}) \in w(S)$.
Per tant $w(S)$ és un subconjunt compacte de X, així $w(S) \in \mathcal{H}(X)$. □

Lema 3.8. *Siguin (X, d) un espai mètric i $w : X \longrightarrow X$ una aplicació contractiva amb factor de contracció c. Aleshores, $w : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ definida com*

$$w(S) = \{w(x) \mid x \in S\}, \text{ per tot } S \in \mathcal{H}(X)$$

és també una aplicació contractiva en l'espai $(\mathcal{H}(X), h)$ amb factor de contracció c.

Demostració. En primer lloc, gràcies al Lema 3.6, sabem que $w : X \longrightarrow X$ és continua. Seguidament, pel Lema 3.7, w envia el conjunt $\mathcal{H}(X)$ a ell mateix. A més, com que $w : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ li assigna un únic punt, $w(S) \in \mathcal{H}(X)$ a cada $S \in \mathcal{H}(X)$, aleshores w és també una transformació en l'espai $(\mathcal{H}(X), h)$.

Ens queda veure que en aquest espai, w és una aplicació contractiva amb factor de contracció c. Siguin $B, C \in \mathcal{H}(X)$, llavors

$$l(w(B), w(C)) = \max\{\min\{d(w(x), w(y)) \mid y \in C\} \mid x \in B\} \leq$$

$$\leq \max\{\min\{c \cdot d(x, y) \mid y \in C\} \mid x \in B\} = c \cdot l(B, C).$$

De manera anàloga, es prova que $l(w(C), w(B)) \leq c \cdot d(C, B)$. Per tant,

$$\begin{aligned} h(w(B), w(C)) &= \max\{l(w(B), w(C)), l(w(C), w(B))\} \\ &\leq c \cdot \max\{l(B, C), l(C, B)\} \leq c \cdot h(B, C). \end{aligned}$$

□

Lema 3.9. *Sigui (X, d) un espai mètric. Siguin $w_i : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ aplicacions contractives en $(\mathcal{H}(X), h)$ amb factor de contracció $c_i \in [0, 1)$ per cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Aleshores, $W : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ definida com*

$$W(S) = w_1(S) \cup w_2(S) \cup \cdots \cup w_n(S) = \bigcup_{i=1}^{n} w_i(S), \text{ per tot } S \in \mathcal{H}(X),$$

és una aplicació contractiva amb factor de contracció $c = \max\{c_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$.

Demostració. Provarem aquest resultat per $n = 2$, i per inducció, serà cert per qualsevol valor de n.

Atès que W està definida a partir de les transformacions w_n, aleshores W també és una transformació. Ens queda provar que W és una aplicació contractiva en $(\mathcal{H}(X), h)$. Siguin $B, C \in \mathcal{H}(X)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) \\ &\leq \max\{h(w_1(B), w_1(C)), h(w_2(B), w_2(C))\} \\ &\leq \max\{c_1 \cdot h(B, C), c_2 \cdot h(B, C)\} \leq c \cdot h(B, C), \end{aligned}$$

on la primera desigualtat és certa per la Proposició 2.10.

Per tant, W és una aplicació contractiva amb factor de contracció c, i amb això acabem la prova. □

Definició 3.10. Un sistema de funcions iterades és un conjunt d'aplicacions contractives $w_i : X \longrightarrow X$, amb factor de contracció c_i, per cada $i = 1, 2, \cdots, n$ sobre un espai mètric complet (X, d). El denotem com

$$\{X; w_1, w_2, \cdots, w_n\} = \{X; w_i, \ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

i el seu factor de contracció és $c = \max\{c_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$.

D'ara en endavant, per referir-nos a un sistema de funcions iterades utilitzarem l'abreviatura IFS, (de l'anglès, *Iterated Function System*).

Teorema 3.11. *(**Teorema d'existència dels fractals.**) Sigui* $\{X; w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ *un IFS amb factor de contracció c. Aleshores, la transformació* $W : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ *definida per*

$$W(S) = \bigcup_{i=1}^{n} w_i(S), \text{ per tot } S \in \mathcal{H}(X)$$

és una contracció en l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$ *amb factor de contracció c. Aleshores,*

(1) Existeix un únic $A \in \mathcal{H}(X)$ *tal que* $W(A) = A$*, i*

(2) per qualsevol $B \in \mathcal{H}(X)$*,*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} W^{(k)}(B) = A.$$

Aquest conjunt A s'anomena l'atractor del IFS.

Demostració. En el Lema 3.9 hem demostrat que la transformació W és una aplicació contractiva en l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$ amb factor de contracció c. També hem provat en el Teorema 2.15 que l'espai $(\mathcal{H}(X), h)$ és un espai mètric complet.

Aleshores, aplicant el teorema del punt fix de Banach (Teorema 3.5), la transformació W conté exactament un únic punt fix, és a dir, existeix un únic $A \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$A = W(A) = \bigcup_{i=1}^{n} w_i(A).$$

Així mateix, també pel teorema del punt fix de Banach, per qualsevol conjunt $B \in \mathcal{H}(X)$, la successió $\{W^k(B)\}$ convergeix al conjunt A. És a dir,

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} W^{(k)}(B) = A, \text{ per tot } B \in \mathcal{H}(X).$$

□

A partir d'aquest resultat, podem definir el que és un fractal.

Definició 3.12. Un fractal és el conjunt atractor A d'un IFS.

3.3 Algorisme per generar fractals i exemples

En aquesta secció mostrem alguns exemples de IFS amb els seus respectius atractors. Aquests estan generats a partir d'un algorisme, anomenat algorisme determinista, i ens permet dibuixar els fractals en un ordinador. Siguin $\{X, w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ un IFS i B_0 un subconjunt compacte de X. La idea d'aquest algorisme es basa en calcular recursivament

$$B_k = W(B_{k-1}) = \bigcup_{i=1}^{n} w_i(B_{k-1}) = W^{(k)}(B_0),$$

obtenint així la successió de subconjunts compactes de X, $\{B_0, B_1, \cdots, B_k, \cdots\}$. Els elements d'aquesta successió pertanyen a l'espai $\mathcal{H}(X)$. Pel Teorema 3.11 aquesta successió convergeix a l'atractor A del IFS.

En els exemples següents considerem l'espai mètric $(\mathbb{R}^2, d)$ on d és la mètrica euclidiana. Un dels tipus de transformacions que podem trobar en aquest espai són les transformacions afins.

Definició 3.13. Una transformació afí en el pla és una funció $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per:

$$w(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = (ax + by + e, cx + dy + f)$$

Usant els resultats de geometria lineal, podem escriure les transformacions afins mitjançant una matriu ampliada, d'aquesta manera, les transformacions afins es representaran exclusivament mitjançant el producte de matrius.

$$w(x,y,1) = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (ax + by + e, cx + dy + f, 1)$$

Introduïm breument alguns tipus de transformacions afins amb la forma de la seva matriu i l'efecte geomètric de cada una.

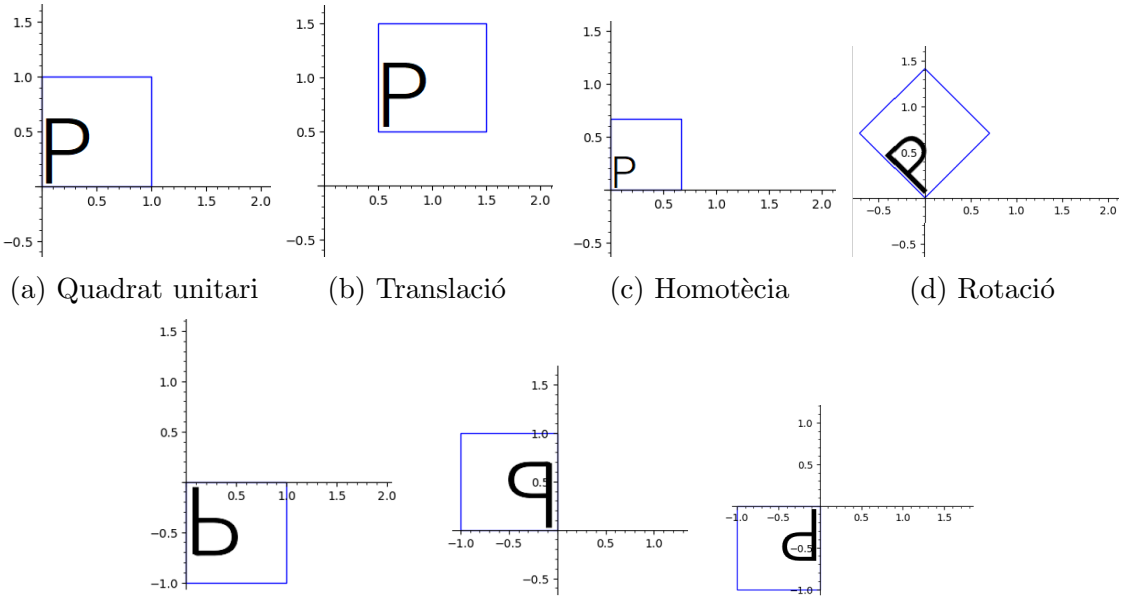
- **Translacions**: L'expressió d'aquest tipus de transformacions ve donada per $w(x,y,1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, on $(e,f) \in \mathbb{R}^2$ determina la translació.
- **Homotècies**: En tenim de dos tipus, les contraccions i les dilatacions. En l'estudi dels fractals ens interessen aquelles transformacions que són contractives, per tant només introduïm les homotècies contractives, que són les de la forma
  $w(x,y,1) = \left(\begin{smallmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, amb $0 < r < 1$ anomenat factor escalar.
- **Rotacions**: Les rotacions es produeixen al voltant del origen i són de la forma $w(x,y,1) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, on θ és l'angle de rotació.
- **Reflexions**: Existeixen tres tipus de reflexions
  - Respecte l'eix horitzontal. $w(x,y,1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
  - Respecte l'eix vertical. $w(x,y,1) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
  - Respecte l'origen de coordenades. $w(x,y,1) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Considerem ara el quadrat unitari, format pels vèrtexs $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$, (Figura 3.1a) i veurem com actuen les transformacions anteriors sobre aquest conjunt.

Definició 3.14. Una similitud és una transformació afí $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfà la igualtat, $d(w(P), w(Q)) = rd(P,Q)$, per tota parella de punts $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Les similituds són el resultat de la composició de les transformacions anteriors. Aquestes tenen alguna de les formes següents

$$w(x,y,1) = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta & e \\ r\sin\theta & r\cos\theta & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w(x,y,1) = \begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta & e \\ r\sin\theta & -r\cos\theta & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$



(a) Quadrat unitari (b) Translació (c) Homotècia (d) Rotació

(e) Reflexió eix X (f) Reflexió eix Y (g) Reflexió origen

Figura 3.1: Efecte geomètric dels diferents tipus de transformacions afins

Ara que ja tenim definides les transformacions afins, les similituds i l'algorisme iteratiu per poder crear fractals a partir d'un IFS, fem-ne uns quants exemples.

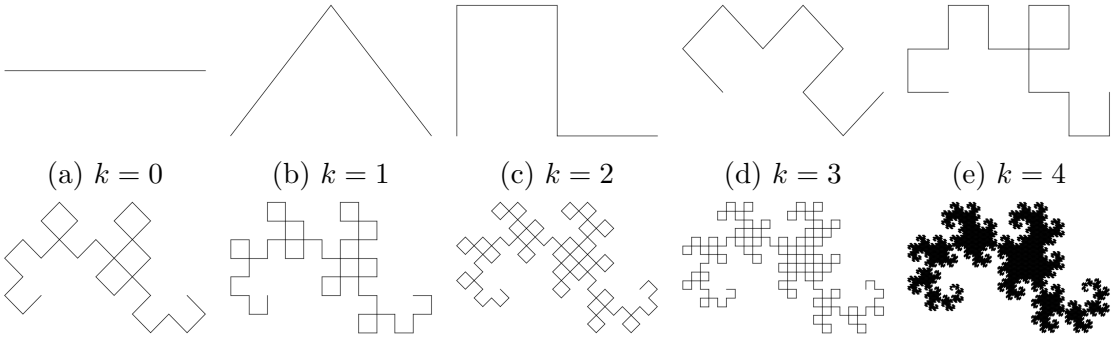
Exemple 3.15. Drac de Heighway. L'IFS que té per atractor el drac de Heighway està composat per 2 transformacions, w_1 i w_2 descrites seguidament i recollides en la Taula 3.1.

- w_1 és una similitud amb factor escalar $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ juntament amb una rotació en sentit antihorari d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ radiants.
- w_2 és també una similitud amb factor escalar $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ juntament amb una rotació en sentit antihorari d'angle $\theta = \frac{3\pi}{4}$ radiants i seguida d'una translació d'una unitat cap a la dreta.

w	a	b	c	d	e	f
1	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	0	0
2	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	1	0

Taula 3.1: IFS del Drac de Heighway

Veiem com actuen aquestes transformacions prenent com a conjunt inicial el segment $B_0 = [0,1]$. En la Figura 3.2 estan recollides les primeres 8 iteracions, corresponents a la successió $\{B_0, B_1, \cdots, B_8\}$. La imatge 3.2j correspon al seu atractor, que s'anomena Drac de Heighway.



(a) $k = 0$ (b) $k = 1$ (c) $k = 2$ (d) $k = 3$ (e) $k = 4$

(f) $k = 5$ (g) $k = 6$ (h) $k = 7$ (i) $k = 8$ (j) Atractor

Figura 3.2: Drac de Heighway

Exemple 3.16. Triangle de Sierpinski. L'IFS que té per atractor el triangle de Sierpinski està composat per 3 transformacions, w_1, w_2 i w_3 descrites seguidament i recollides en la Taula 3.2.

- w_1 és una homotècia contractiva amb factor escalar $r = \frac{1}{2}$.
- w_2 és també una homotècia contractiva ($r = \frac{1}{2}$) seguida d'una translació de 0.5 cap a la dreta.
- w_3 és una altra homotècia contractiva amb $r = \frac{1}{2}$ seguida d'una translació de 0.25 cap a la dreta i de $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cap a dalt.

w	a	b	c	d	e	f
1	1/2	0	0	1/2	0	0
2	1/2	0	0	1/2	1/2	0
3	1/2	0	0	1/2	1/4	$\sqrt{3}/4$

Taula 3.2: IFS del Triangle de Sierpinski

Veiem com actuen aquestes transformacions prenent com a conjunt inicial el segment $B_0 = [0, 1]$. En la Figura 3.3 estan recollides les primeres 4 iteracions, corresponents a la successió $\{B_0, B_1, \cdots, B_4\}$. La imatge 3.3f correspon al seu atractor, anomenat Triangle de Sierpinski.

(a) $k = 0$ (b) $k = 1$ (c) $k = 2$ (d) $k = 3$ (e) $k = 4$ (f) Atractor

Figura 3.3: Triangle de Sierpinski

Exemple 3.17. Fractal de Vicsek. L'IFS que té per atractor el drac de Heighway està composat per 5 transformacions, w_1, w_2, w_3, w_4 i w_5 descrites seguidament i recollides en la Taula 3.3.

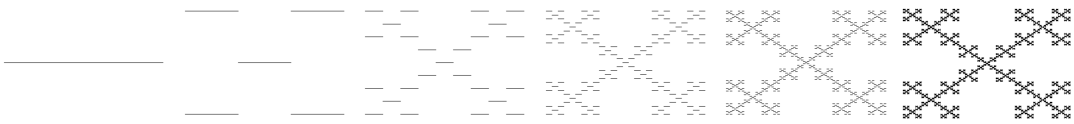
- w_1 és una homotècia contractiva amb factor escalar $r = \frac{1}{3}$.

- w_2 és també una homotècia contractiva ($r = \frac{1}{3}$) seguida d'una translació de $\frac{2}{3}$ cap a la dreta.
- w_3 és una altra homotècia contractiva amb $r = \frac{1}{2}$ juntament amb una translació de $\frac{2}{3}$ cap a dalt.
- w_4 torna a ser una altra homotècia contractiva amb el mateix factor escalar que abans seguida d'una translació de $\frac{1}{3}$ cap a la dreta i $\frac{1}{3}$ cap a dalt.
- w_5 és una altra homotècia contractiva amb el mateix factor escalar que la resta juntament amb una translació de $\frac{2}{3}$ cap a la dreta i $\frac{2}{3}$ cap a dalt.

w	a	b	c	d	e	f
1	1/3	0	0	1/3	0	0
2	1/3	0	0	1/3	2/3	0
3	1/3	0	0	1/3	0	2/3
4	1/3	0	0	1/3	1/3	1/3
5	1/3	0	0	1/3	2/3	2/3

Taula 3.3: IFS del Fractal de Vicsek

Veiem com actuen aquestes transformacions prenent com a conjunt inicial el segment $B_0 = [0, 1]$. En la Figura 3.4 estan recollides les primeres 4 iteracions, corresponents a la successió $\{B_0, B_1, \cdots, B_4\}$. La imatge 3.4f correspon al seu atractor, anomenat Fractal de Vicsek.



(a) $k = 0$ (b) $k = 1$ (c) $k = 2$ (d) $k = 3$ (e) $k = 4$ (f) Atractor

Figura 3.4: Fractal de Vicsek

Els exemples anteriors han estat generats amb el codi que podeu trobar en l'Apèndix C, programat amb el llenguatge SageMath. En els 3 casos el conjunt d'aplicacions de cada IFS són transformacions afins. A cada IFS li apliquem l'algorisme que hem detallat anteriorment, començant en els 3 casos amb el mateix conjunt inicial B_0, l'interval $[0, 1]$. A partir d'aquí, es va construint i dibuixant la successió $\{B_0, B_1, \cdots, B_k, \cdots\} \subset \mathcal{H}(X)$ en cada cas. Finalment, fent $k \longrightarrow \infty$ arribem al atractor de cada IFS.

3.4 Teorema del Collage

En aquest capítol hem estudiat com obtenir el conjunt atractor d'un IFS donat. Ara ens preguntem el problema invers: donat un fractal, podem trobar les transformacions que el generen? La resposta ens la dona el Teorema del Collage, teorema que s'atribueix a Michael F. Barnsley, i que inclou en el seu llibre *Fractals Everywhere* [Bar88]. Abans d'introduir aquest teorema, hem d'enunciar i provar un lema que ens serà útil per a la seva demostració.

Lema 3.18. *Siguin (X, d) un espai mètric complet i $w : X \longrightarrow X$ una transformació contractiva amb factor de contracció $0 \leq c < 1$. Considerem $y \in X$ el punt fix de w. Aleshores,*

$$d(x, y) \leq (1 - c)^{-1} d(x, w(x)), \text{ per tot } x \in X.$$

Demostració. La funció distància $d(a, b)$ per $a \in X$ fixada és continua en $b \in X$. Aleshores, utilitzant el Teorema del punt fix de Banach, obtenim:

$$d(x, y) = d(x, \lim_{n \longrightarrow \infty} w^{(n)}(x)) = \lim_{n \longrightarrow \infty} d(x, w^{(n)}(x)) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{m=1}^{n} d(w^{(m-1)}(x), w^{(m)}(x))$$

$$\leq \lim_{n \longrightarrow \infty} d(x, w(x))(1 + c + \cdots + c^{n-1} \leq (1 - c)^{-1} d(x, w(x)).$$

□

Teorema 3.19. ***(Teorema del Collage)*** *Sigui (X, d) un espai mètric complet. Siguin $L \in \mathcal{H}(X)$ i $\varepsilon \geq 0$ donats. Escollim un IFS contractiu $\{X; w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ amb factor de contracció $0 \leq c < 1$ de manera que*

$$h\left(L, \bigcup_{i=1}^{n} w_i(L)\right) \leq \varepsilon.$$

Considerem A l'actractor del IFS, aleshores

$$h(L, A) \leq \frac{\varepsilon}{1 - c}.$$

Equivalentment,

$$h(L, A) \leq (1 - c)^{-1} h\left(L, \bigcup_{i=1}^{n} w_i(L)\right), \text{ per tot } L \in \mathcal{H}(X).$$

Demostració. Sabem que l'espai $(\mathcal{H}(X), h)$ és un espai mètric complet i que el IFS és contractiu amb factor de contracció c. Aleshores aplicant el Lema 3.18, obtenim que per a tot $L \in \mathcal{H}(X)$ es compleix:

$$h(L, A) \leq (1 - c)^{-1} h\left(L, W(L)\right) = (1 - c)^{-1} h\left(L, \bigcup_{i=1}^{n} w_i(L)\right).$$

□

El teorema no ens diu com podem obtenir un IFS per al qual la distancia entre L i $W(L)$ sigui petita, sinó que s'ha d'anar experimentant i jugant per trobar un conjunt de transformacions contractives de manera que $W(L)$ sigui pròxima a L. Per mesurar aquesta distància s'utilitza la mètrica de Hausdorff. Tenim llibertat en tot moment per escollir el nombre de transformacions, els seus factors de contracció, etc. Per tal que quedi ben clar i il·lustrar el que acabem de provar fem-ne un exemple.

Exemple 3.20. Considerem el conjunt compacte L com el conjunt de Cantor en l'espai mètric $(\mathbb{R}^2, d)$ (Figura 3.5). Per tal que quedi clar el que ens diu aquest teorema farem un exemple, bastant intuïtiu però aclaridor.

El teorema ens diu que si trobem un IFS contractiu amb factor de contracció $0 < c < 1$ tal que la distancia entre el conjunt donat, que anomenem L, i la imatge de L sota les transformacions d'aquest IFS és menor o igual que ε, aleshores, la distancia que hi ha entre el conjunt L i l'atractor del IFS és menor que $(1-c)^{-1}\varepsilon$.

Figura 3.5: Representació del Conjunt de Cantor (Tercera Iteració)

Sigui $(\mathbb{R}^2, d)$ l'espai mètric on d és la mètrica euclidiana i considerem l'IFS format per les següents transformacions

$$w_1 = \left(\frac{1}{4}x, \frac{1}{4}y\right) \qquad w_2 = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}y\right)$$

És a dir, considerem l'IFS $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2\}$ amb factor de contracció $c = \frac{1}{4}$.
Un cop ja tenim l'IFS definit, calculem l'imatge de L sota aquestes transformacions. Anomenem B a aquest conjunt. En la Figura 3.6 tenim representat el conjunt L, de color negre, juntament amb el conjunt B, de color vermell. Hem de calcular la distància de Hausdorff que hi ha entre aquests dos conjunts. Recordem que aquesta es calcula com $h(L, B) = \max\{l(L, B), l(B, L)\}$.

Figura 3.6: Conjunt L + Conjunt B

- En lloc de calcular el valor exacte de $l(L, B)$ estimarem el seu resultat mitjançant una fita superior. Considerem els conjunts B', L' tals que $B' \subseteq B$ i $L \subseteq L'$. D'aquesta manera es compleix $l(L, B) \leq l(L', B')$.

  Siguin B' el conjunt de punts format pels extrems dels segments del conjunt B i $L' = L$. Clarament els dos conjunts B' i L' compleixen les inclusions que hem descrit abans. Podem veure en la Figura 3.7a el gràfic d'aquests dos conjunts, on el conjunt negre és L' i el conjunt marró és B. Calculem la distància de Hausdorff d'aquests 2 conjunts:

  $$l(L', B') = \max\{l(x, B') \mid x \in L'\} = \frac{5}{12}.$$

  Aquesta distància s'obté pels punts $x = 1 \in L'$ i $y = \frac{7}{12} \in B'$.

- En el cas de $l(B, L)$ fem el mateix que abans. Donarem una estimació del seu valor mitjançant una fita superior. considerem els conjunts B'', L'' tals que $L'' \subseteq L$ i $B \subseteq B''$. Així, se satisfà $l(B, L) \leq l(B'', L'')$.

Siguin L'' el conjunt de punts format pels extrems dels segments del conjunt L i $B'' = B$. Aquests dos conjunts també compleixen les inclusions que hem descrit anteriorment. Podem veure en la Figura 3.7b el gràfic d'aquests dos conjunts, on el conjunt vermell és B'' i el conjunt gris és L''. Calculem la distància de Hausdorff d'aquests 2 conjunts:

$$l(B'', L'') = \max\{l(y, L'') \mid y \in B''\} = \frac{1}{6}.$$

Aquesta distància s'obté pels punts $x = \frac{1}{2} \in B''$ i $y = \frac{1}{3} \in B''$.

(a) $l(L', B')$

(b) $l(B'', L'')$

Figura 3.7

Per tant,

$$h(L, B) = \max\{l(L, B), l(B, L)\} \leq \max\{l(L', B'), l(B'', L'')\} = \frac{5}{12} = \varepsilon$$

Així doncs,

$$h(L, A) \leq \frac{\varepsilon}{1 - c} = \frac{5}{12}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{5}{9}$$

és a dir, la distància entre l'atractor de l'IFS i el conjunt de Cantor és menor que $\frac{3}{5}$.

Aquest ha estat un exemple innocent ja que clarament les transformacions que generen el conjunt de Cantor no són aquestes i són ben conegudes. Tot i així, amb exemples com aquest és quan s'entenen els conceptes. Com ja hem comentat abans, el Teorema del Collage no ens diu com obtenir exactament l'IFS que genera el conjunt L, sinó que per qualsevol IFS, la distància que hi ha entre el conjunt L i l'atractor A d'aquest IFS ve determinada per la distància que hi ha entre L i $W(L)$. Si aquesta última és petita, aleshores l'altra també ho serà. És el que hem vist en el nostre exemple. No hem trobat exactament l'IFS que genera el conjunt de Cantor, però n'hem trobat un que el seu atractor i el conjunt de Cantor estan a una distancia menor que $\frac{5}{9}$.

Capítol 4

Dimensió fractal

Donada una col·lecció de conjunts fractals ens preguntem si hi ha alguna manera de comparar-los entre ells, ja sigui calculant la seva àrea, la seva longitud etc.
Introduïm un dels fractals més coneguts i estudiats, la corba de Koch, descrita l'any 1904 pel matemàtic Helge Von Koch. El procés per generar la corba de Koch és un procés iteratiu que es pot definir mitjançant un IFS format per 4 transformacions contractives de factor de contracció $\frac{1}{3}$. La primera d'aquestes transformacions és una homotècia de radi $\frac{1}{3}$. La segona, a més d'aquesta homotècia de radi $r = \frac{1}{3}$ tenim també una rotació d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ i una translació de $\frac{1}{3}$ cap a la dreta. Pel que fa a la tercera transformació és una homotècia de radi $\frac{1}{3}$ seguida d'una rotació d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$ i una translació de $\frac{2}{3}$ cap a la dreta. Per acabar, l'última transformació és una homotècia de radi $\frac{1}{3}$ i una translació de $\frac{2}{3}$ cap a la dreta. En l'Exemple 4.22 hi trobem la taula numèrica d'aquestes transformacions. En la Figura 4.1 hi tenim representades les 4 primeres iteracions i finalment el conjunt atractor.

(a) K_0 (b) K_1 (c) K_2 (d) K_3 (e) K_4 (f) Atractor

Figura 4.1: Corba de Koch

Quina longitud té aquesta corba?
El conjunt inicial K_0 té longitud 1 per construcció. K_1 està format per 4 segments de longitud 1/3. Per tant, $\text{long}(K_1) = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. El conjunt K_2 està format per 4 còpies de K_1 escalades per 1/3 cada una. Cada copia esta formada per 4 segments, per tant K_2 està formada per 16 segments de longitud $\frac{1}{9}$. Així, $\text{long}(K_2) = \frac{16}{9}$. Continuant iterant arribem a que en la iteració j, K_j estarà format per 4^j segments de longitud $\frac{1}{3^j}$ cada un i fent $j \to \infty$ trobem la longitud de la Corba de Koch:

$$\text{long}(K) = \lim_{j\to\infty} \text{long}(K_j) = \lim_{j\to\infty} 4^j \frac{1}{3^j} = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^j = \infty.$$

Amb aquest resultat podem considerar que no estem mesurant la mida d'aquesta corba correctament. No ens aporta cap informació.
Si considerem L un quadrat unitari, és evident que $K \subset L$. Per tant, com que el quadrat unitari té àrea finita i la corba de Koch té longitud infinita, podem pensar

que hauria estat millor calcular la seva àrea en lloc de la seva longitud, però aquesta és clarament 0.

Per tant, hem obtingut que la corba de Koch té longitud infinita i àrea nul·la. Aquest resultat ens diu que K és més que una corba però menys que una superfície. Hem obtingut uns valors que no són propis de la geometria Euclidiana, per tant, aquesta no ens ajuda a l'hora de comparar fractals entre ells. Per aquesta raó s'introdueix el concepte de dimensió fractal i ara sí que podrem comparar fractals entre ells. Existeixen moltes varietats a l'hora de definir la dimensió fractal i moltes vegades no coincideixen entre elles, sinó que es compleixen una sèrie de desigualtats. En aquest capítol ens centrarem en dues d'elles, que són les més conegudes i utilitzades. D'un costat, tenim la dimensió de Minskowski. Una dimensió molt pràctica i fàcil de calcular, però que no sempre existeix. De l'altre, està la dimensio de Hausdorff la qual sí està definida per qualsevol conjunt d'un espai mètric. No obstant, en la majoria de casos resulta bastant difícil de calcular o d'estimar computacionalment. Les referències per aquest capítol han estat majoritàriament [Fal90] i [Bar88].

4.1 Dimensió de Minkowski

Començarem introduint la dimensió de Minkowski, també coneguda com a *Dimensió del recompte de caixes*. De les dues definicions que donarem per la dimensió fractal, aquesta és la més clara i fàcil de calcular.

Definició 4.1. Siguin (X, d) un espai mètric complet i $C \in \mathcal{H}(X)$ un subconjunt compacte no buit de X. Donat $\varepsilon > 0$ denotem per $\overline{B(x, \varepsilon)}$ la bola tancada de radi ε i el punt $x \in X$ com a centre.
Definim l'enter $\mathcal{N}(C, \varepsilon)$ com el nombre mínim de boles tancades de radi ε que es necessiten per cobrir tot C. És a dir,

$$\mathcal{N}(C, \varepsilon) = \min\{N \in \mathbb{N} \mid C \subset \bigcup_{n=1}^{N} \overline{B(x_n, \varepsilon)}\},$$

per algun conjunt de punts diferents $\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots, N\} \subset X$.

Observació 4.2. El fet que $\mathcal{N}(C, \varepsilon)$ existeixi i sigui finit per qualsevol $C \in \mathcal{H}(X)$ és conseqüència de la compacitat de C. (Veure Definició A.23).

Definició 4.3. Siguin (X, d) un espai mètric complet i $C \in \mathcal{H}(X)$. Donat $\varepsilon > 0$ definim la dimensió de Minkowski (o del recompte de caixes) com el límit

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{ln(\mathcal{N}(C, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon))} \right),$$

sempre que aquest existeixi. Usualment utilitzarem la notació $\dim_B(C)$ per referir-nos a aquest límit.
Si pel contrari no existeix aquest límit, podem aproximar la dimensió de Minkowski, $\dim_B(C)$, mitjançant els límits superior i inferior:

$$\overline{\dim_B}(C) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{ln(\mathcal{N}(C, \varepsilon))}{ln(1/\varepsilon)} = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{ln(\mathcal{N}(C, \varepsilon))}{ln(1/\varepsilon)},$$

$$\underline{\dim_B}(C) = \underline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{ln(\mathcal{N}(C, \varepsilon))}{ln(1/\varepsilon)} = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{ln(\mathcal{N}(C, \varepsilon))}{ln(1/\varepsilon)}.$$

Teorema 4.4. *Siguin (X, d) un espai mètric complet i $C \in \mathcal{H}(X)$. Considerem $\varepsilon_n = Kr^n$ per a $K > 0$, $0 < r < 1$ i $n = 1, 2, 3, \ldots$ Si*

$$D = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{ln(\mathcal{N}(C, \varepsilon_n))}{ln(1/\varepsilon_n)} \right)$$

existeix, aleshores $\dim_B(C) = D$.

Enunciem ara algunes de les propietats que té la dimensió de Minkowski.

Proposició 4.5. *[Arc09, Secció 2.2] Considerem (X, d) un espai mètric complet i $C_1, C_2 \subset X$. Si la dimensió de Minkowski existeix, compleix les següents propietats:*

(i) Si $C_1 \subseteq C_2$, aleshores $\dim_B(C_1) \leq \dim_B(C_2)$.

(ii) $\dim_B(C_1 \cup C_2) = \max\{\dim_B(C_1), \dim_B(C_2)\}$.

(iii) Si w és una aplicació contractiva, aleshores, $\dim_B(w(C_1)) \leq \dim_B(C_1)$.

(iv) $\dim_B(C_1 \times C_2) \leq \dim_B(C_1) + \dim_B(C_2)$.

Exemple 4.6. Calculem la dimensió de Minkowski de la corba de Koch, descrita en l'inici d'aquest capítol. Considerarem l'espai mètric $(\mathbb{R}^2, d)$, on d és la mètrica Euclidiana.

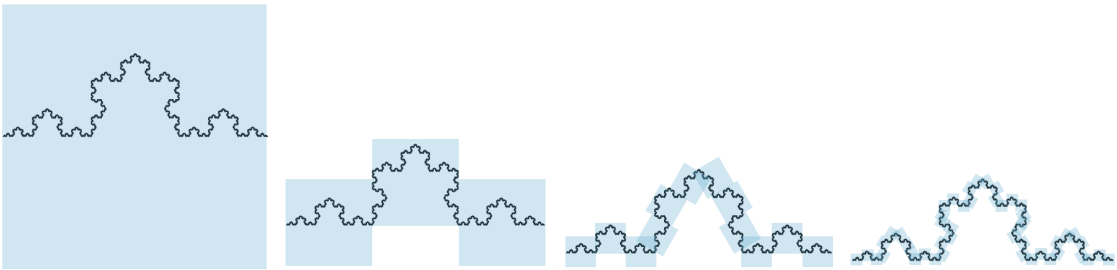
(1) Comencem recobrint la corba de Koch en caixes de costat $\varepsilon_1 = 1$. Amb aquest tipus de caixes només en necessitem 1.

(2) Seguidament considerem caixes de costat $\varepsilon_2 = \frac{1}{3}$, que en necessitarem 3 per cobrir tota la corba.

(3) Pel que fa a les caixes de costat $\varepsilon_3 = \frac{1}{9}$, per poder cobrir la corba de Koch en necessitem 12 en total.

(4) Si considerem caixes de costat $\varepsilon_4 = \frac{1}{27}$ per poder cobrir tota la corba en necessitem 48.

Així doncs, $\mathcal{N}(K, 1) = 1$, $\mathcal{N}(K, 1/3) = 3$, $\mathcal{N}(K, 1/9) = \mathcal{N}(K, 1/3^2) = 12 = 3 \cdot 4$ i $\mathcal{N}(K, 1/27) = \mathcal{N}(K, 1/3^3) = 48 = 3 \cdot 4^2$. Podem veure a la Figura 4.2 tot el que acabem de dir.



(a) $\mathcal{N}(K, \varepsilon_1)$ (b) $\mathcal{N}(K, \varepsilon_2)$ (c) $\mathcal{N}(K, \varepsilon_3)$ (d) $\mathcal{N}(K, \varepsilon_4)$

Figura 4.2: Càlcul de la dimensió Minkowski de la Corba de Koch

Aplicant aquest raonament j vegades arribem a la conclusió que per cobrir la corba de Koch amb caixes de costat $\varepsilon_j = \frac{1}{3^j}$ en total necessitarem $3 \cdot 4^{j-1}$. És a dir,

$\mathcal{N}(K, \varepsilon_j) = 3 \cdot 4^{j-1}$. Per tant, aplicant el Teorema 4.4 trobem la dimensió de Minkoswki de la Corba de Koch:

$$\begin{aligned}\dim_B(K) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(\mathcal{N}(K,\varepsilon_n))}{\ln(1/\varepsilon_n)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(3\cdot 4^{n-1})}{\ln(3^n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\ln(4)+ln(3)}{n\ln(3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(4)}{n\ln(3)}\\ &= \frac{\ln(4)}{\ln(3).}\end{aligned}$$

Així doncs, la dimensió del recompte de caixes de la corba de Koch és

$$\frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.26185\ldots$$

Observem que a diferència de la dimensió topològica, aquesta no ha de ser entera.

4.2 Dimensió de Hausdorff

Passem ara a estudiar la dimensió de Hausdorff. Per poder definir aquesta dimensió necessitem abans una sèrie de definicions i resultats.

Definició 4.7. Siguin (X, d) un espai mètric i F un subconjunt no buit de X. Definim el diàmetre de F com la distància més gran entre qualsevol parell de punts $x, y \in F$. És a dir,

$$\operatorname{diam}(F) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in F\}, \text{ amb } \operatorname{diam}(\emptyset) = 0.$$

Definició 4.8. Siguin $\delta > 0$ un nombre real i $\{U_i\}$ una successió de conjunts el diàmetre dels quals no supera δ. Si $\{U_i\}$ recobreix F, és a dir $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, aleshores direm que la successió $\{U_i\}$ és un δ-recobriment de F.

Definició 4.9. Sigui F un subconjunt no buit de X. Donats dos valors reals $s > 0$ i $\delta > 0$ definim:

$$\mathscr{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam}(U_i))^s \mid \{U_i\} \text{ és un } \delta\text{-recobriment de } F\right\}.$$

Definició 4.10. Anomenem mesura $s-$dimensional de Hausdorff del conjunt F, o simplement mesura de Hausdorff, al valor

$$\mathscr{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0}\mathscr{H}^s_\delta(F) = \sup_{\delta>0}\mathscr{H}^s_\delta(F).$$

Observem que si δ decreix, disminueixen els possibles recobriments de F i per tant, l'ínfim $\mathscr{H}^s_\delta$ serà major. Per conseqüent, existeix el límit $\lim_{\delta\to 0}\mathscr{H}^s_\delta(F)$, tot i que pot ser infinit.

Tot seguit, enunciem algunes de les propietats que satisfà la mesura de Hausdorff.

Proposició 4.11. *$\mathscr{H}^s$ és una funció decreixent respecte el paràmetre s.*

Proposició 4.12. *Siguin (X, d) un espai mètric i $F \subset X$. Si $w : F \longrightarrow X$ és una aplicació tal que $d(w(x), w(y)) \leq cd(x, y)^\alpha$, per tot $x, y \in F$ i per algunes constants $c > 0$ i $\alpha > 0$, aleshores per cada s es compleix*

$$\mathscr{H}^{s/\alpha}(w(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathscr{H}^s(F).$$

Es diu que w satisfà la condició de Hölder.

Les demostracions d'aquestes dues proposicions es poden trobar en l'apèndix B d'aquest treball.

Corol·lari 4.13. *Siguin (X, d) un espai mètric i $w : X \longrightarrow X$ una aplicació contractiva amb factor de contracció c. Aleshores, per tot $F \subset X$ tenim*

$$\mathscr{H}^s(w(F)) \leq c^s\mathscr{H}^s(F).$$

Observem que aquest corol·lari és el cas particular $\alpha = 1$ de la proposició anterior.

Un cop ja hem definit la mesura de Hausdorff i hem enunciat algunes de les seves propietats, podem introduir la dimensió de Hausdorff. Abans però, hem de tenir en compte el següent resultat.

Teorema 4.14. *[WWZ77, Teorema 11.13]. Per a un subconjunt $F \subset X$ qualsevol, es compleix:*

(i) Si $\mathscr{H}^s(F) < \infty$ aleshores $\mathscr{H}^r = 0$ per a $r > s$.

(ii) Si $\mathscr{H}^s(F) > 0$ aleshores $\mathscr{H}^r(F) = \infty$ per a $r < s$.

Definició 4.15. La dimensió de Hausdorff es defineix com

$$\dim_H(F) := \inf\{s \geq 0 \mid \mathscr{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathscr{H}^s(F) = \infty\}.$$

És a dir, $\dim_H(F) = s_0$ on s_0 és l'únic valor pel qual es compleix $0 < \mathscr{H}^{s_0}(A) < \infty$. Per conveni, si el conjunt $\{s \geq 0 \mid \mathscr{H}^s(F) = 0\} = \emptyset$, aleshores $\dim_H(F) = \infty$.

Observació 4.16. Hem de tenir en compte que si $\dim_H(F) = s$, aleshores el valor de $\mathscr{H}^s(F)$, pot ser 0, ∞ o un nombre finit $0 < \mathscr{H}^s(F) < \infty$ tal i com mostra la Figura 4.3:

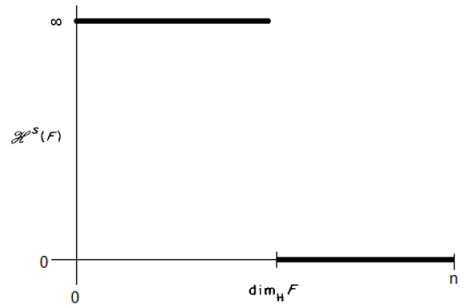


Figura 4.3: Dimensió de Hausdorff. [Fal90]

De la mateixa manera que hem fet amb la mesura de Hausdorff, veiem algunes de les propietats també de la dimensió de Hausdorff.

Proposició 4.17. *[Fal90, Capítol 2] Sigui (X, d) un espai mètric.*

(i) Siguin $E, F \subset X$ amb $E \subseteq F$. Aleshores $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$.

(ii) Sigui $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ una successió numerable de conjunts de X. Aleshores, $\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sup_i\{\dim_H(F_i)\}$.

(iii) Siguin $F \subset X$ i $w : F \longrightarrow X$ una aplicació que compleix la condició Hölder per a α. Aleshores, $\dim_H(w(F)) \leq \frac{1}{\alpha}\dim_H(F)$.

(iv) Sigui $X = \mathbb{R}^d$ i considerem $F \subset X$, aleshores $\dim_H(F) = d$.

Exemple 4.18. Considerem el conjunt K com la corba de Koch descrita anteriorment i en calcularem la seva dimensió de Hausdorff. K és un conjunt autosimilar ja que conté còpies d'ell mateix a escala $\frac{1}{3}$. Per tant podem escriure $K = K_a \cup K_b \cup K_c \cup K_d$ i aquestes 4 components seran geomètricament semblants a K. En la Figura 4.4 s'indiquen quines són aquestes components.

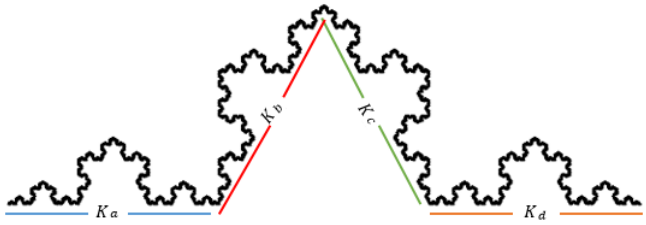


Figura 4.4: Autosimilitud de la corba de Koch

Aplicant les propietats que hem vist de la mesura de Hausdorff, en particular el Corol·lari 4.13, a la unió $K = K_a \cup K_b \cup K_c \cup K_d$, que és una unió disjunta, obtenim

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^s(K) &= \mathscr{H}^s(K_a) + \mathscr{H}^s(K_b) + \mathscr{H}^s(K_c) + \mathscr{H}^s(K_d) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathscr{H}^s(K) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathscr{H}^s(K) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathscr{H}^s(K) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathscr{H}^s(K) \\
&= 4\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathscr{H}^s(K).
\end{aligned}$$

Si suposem que $\dim_H(K) = s$, aleshores $0 < \mathscr{H}^s(K) < \infty$ i podem dividir la expressió anterior per $\mathscr{H}^s(K)$ obtenim

$$1 = 4\left(\frac{1}{3}\right)^s \Longrightarrow s = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.26185\ldots$$

Així doncs la dimensió de Hausdorff de la corba de Koch és $\dim_H(K) \approx 1.26185$, valor que coincideix amb la dimensió de Minkowski calculada en la secció anterior.

Un cop vistes aquestes dues definicions de la dimensió fractal ens preguntem: són equivalents aquestes definicions? Si no, hi ha alguna relació entre elles?

Teorema 4.19. *Sigui (X, d) un espai mètric complet i sigui $F \in \mathcal{H}(X)$ un subconjunt compacte no buit de X. Aleshores es satisfan les següents desigualtats:*

$$dim_H(F) \leq \underline{dim_B}(F) \leq \overline{dim_B}(F).$$

En particular, si $\underline{dim_B}(F) = \overline{dim_B}(F)$, aleshores

$$dim_H(F) \leq dim_B(F).$$

Demostració. Només ens cal provar la primera desigualtat ja que la segona és directa per les pròpies definicions de dimensió inferior i superor de Minkowski.
Si recobrim el conjunt F per $\mathcal{N}(F, \varepsilon)$ subconjunts de X de diàmetre ε aleshores per la Definició 4.9 tenim $\mathcal{H}^s_\varepsilon(F) \leq \mathcal{N}(F, \varepsilon)\varepsilon^s$. Prenent límits en $\varepsilon \to 0$ obtenim $\mathcal{H}^s(F) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{N}(F, \varepsilon)\varepsilon^s$. Si considerem $1 < \mathcal{H}^s(F)$ aleshores per un cert ε suficientment petit tenim $1 < \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{N}(F, \varepsilon)\varepsilon^s(F)$. Prenent logaritmes a cada costat de la desigualtat obtenim

$$\ln(\mathcal{N}(F, \varepsilon)\varepsilon^s) > \ln(1) = 0 \Longrightarrow \ln(\mathcal{N}(F, \varepsilon)) + s\ln(\varepsilon) > 0.$$

Aïllant la s d'aquesta equació s'obté

$$s < \frac{\ln(\mathcal{N}(F, \varepsilon))}{-\ln(\varepsilon)} \text{ , pel que, } s \leq \underline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\ln(\mathcal{N}(F, \varepsilon))}{-\ln(\varepsilon)},$$

i com a conseqüència $\dim_H(F) \leq \underline{\dim_B(F)}$. □

Definició 4.20. Siguin $\{X; w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un IFS i A el seu atractor. Diem que l'IFS és totalment disconnex si $w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset$, pet tot $i \neq j$, amb $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Diem que l'IFS compleix la condició del conjunt obert si existeix un conjunt obert O tal que

(1) $w_i(O) \cap w_j(O) = \emptyset$ per tot $i \neq j$ amb $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(2) $W(O) \subset O$.

Si l'IFS no és totalment disconnex i tampoc compleix la condició del conjunt obert es diu que és un IFS amb solapament.

Teorema 4.21. *[Hut81] Sigui (X, d) un espai mètric complet i $\{\mathbb{R}^n; w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un IFS amb $c_1, c_2, \ldots, c_n$ els factors de contracció de $w_1, w_2, \ldots, w_n$ respectivament i sigui A el seu atractor. Si l'IFS és totalment disconnex o compleix la condició del conjunt obert, aleshores la dimensió de Hausdorff i la de Minkoswki coincideixen. És a dir, $dim_H(A) = dim_B(A) = d$, on d és la solució única de la següent equació*

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^d = 1.$$

Exemple 4.22. En les dos seccions anteriors hem calculat la dimensió de la corba de Koch fent servir la dimensió de Minkowski i la de Hausdorff. En els dos casos hem obtingut el mateix resultat. Com ja hem definit en el principi del capítol, la corba de Koch es defineix a partir d'un IFS $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4\}$, on les $w_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

són transformacions contractives afins. Per tant, podem calcular la seva dimensió a partir del resultat del teorema anterior, i aquesta ha de ser igual a $\dim_B(K)$ i $\dim_H(K)$. En la taula 4.1 tenim les transformacions que formen l'IFS de la corba de Koch, on hem seguir la mateixa notació que en la Secció 3.3.

w	a	b	c	d	e	f
1	$1/3$	0	0	$1/3$	0	0
2	$1/6$	$-\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/6$	$1/6$	$1/3$	0
3	$-1/6$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/6$	$1/6$	$2/3$	0
4	$1/3$	0	0	$1/3$	$2/3$	0

Taula 4.1: IFS de la corba de Koch

Cada una d'aquestes funcions té factor de contracció $\frac{1}{3}$, aleshores,

$$\sum_{i=1}^{4} |c_i|^d = \left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 4\left(\frac{1}{3}\right)^d = 1.$$

Aïllant d d'aquesta equació trobem que la dimensió de la corba de Koch és

$$d = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.26185\ldots$$

coincidint amb les dues que hem calculat anteriorment.

Capítol 5

Superfractals

En aquest treball ens hem centrat en desenvolupar la teoria sobre els fractals deterministes. Tot i així, existeix un altre tipus de fractals, anomenats fractals aleatoris i en farem una breu explicació d'ells a continuació.

Tots dos tipus de fractals s'utilitzen per modelar i descriure molts fenòmens de diferents àrees científiques i tecnològiques. Per exemple, en la medicina s'utilitzen en tractaments de càncer controlant l'arquitectura patològica dels tumors. També podem trobar molts patrons fractals en la naturalesa, com en els núvols, les trajectòries dels rius o les plantes, ja siguin arbres o arbustos.
En alguns casos però, ni els fractals deterministes ni els aleatoris són eficients. Per un costat, els deterministes són massa similars en diferents punts. Per l'altre, en els aleatoris ens passa just el contrari, hi ha poca correlació entre diferents punts. A més, de vegades calcular aquests fractals és un procés llarg i costós. Per solucionar aquests dos problemes tenim els fractals V-variables i els superfractals, que ens proporcionen un pas entremig entre els dos tipus de fractals.

Abans d'introduir el concepte de fractals V-variables i els superfractals, hem de definir alguns conceptes bàsics propis dels fractals aleatoris que usarem en les properes seccions.

Definició 5.1. Un IFS amb probabilitats és un IFS $\{X; w_1, w_2, \cdots, w_n\}$, juntament amb un conjunt probabilitats, nombres reals positius $p_1, p_2, \cdots, p_n$, tals que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. La probabilitat p_i està associada a la transformació w_i per $i = 1, 2, \cdots, n$. Denotem un IFS amb probabilitats com $\{X; w_1, \cdots, w_n; p_1, \cdots, p_n\}$.

En el Capítol 3 hem descrit l'algorisme determinista per generar fractals deterministes. Ara, definim l'algorisme aleatori per poder generar fractals aleatoris a partir d'un IFS amb probabilitats.

Definició 5.2. Considerem l'IFS amb probabilitats $\{X; w_1, w_2, \cdots, w_n; p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ on cada w_i és una aplicació contractiva. L'algorisme, conegut també com joc del caos, consisteix en el procés iteratiu següent:

(i) Escollim un punt $x_0 \in X$.

(ii) Aleatòriament escollim una de les aplicacions w_i segons la probabilitat p_i.

(iii) Calculem $x_{n+1} = w_i(x_n)$.

(iv) Tornem al pas (ii) i repetim el procés, canviant x_n per x_{n+1}.

D'aquesta manera obtenim una successió de punts $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ que representant-los gràficament obtenim el fractal buscat.

Ara, ja podem passar a descriure els fractals V-variables i els superfractals, així com l'algorisme per generar-los. Principalment, les referències d'aquest capítol han estat el llibre [Bar06] i els articles [BHS03], [BHS05] i [Kui07].

5.1 Fractals V-variables

Els fractals V-variables es construeixen a partir del conjunt F

$$F = \{X; F_1, F_2, \ldots, F_M; P_1, P_2, \ldots, P_M\},$$

on (X, d) és un espai mètric i $M > 1$ un enter i P_m són probabilitats complint $P_m \geq 0$ i $P_1 + \cdots + P_M = 1$. Cada component F^m és un IFS amb probabilitats definit com

$$F_m = \{X; f_1^m, f_2^m, \ldots, f_{N_m}^m; p_1^m, p_2^m, \ldots, p_{N_m}^m\}.$$

Les transformacions f_n^m són aplicacions contractives en X amb factor de contracció $0 \leq c < 1$, i els nombres positius p_n^m són probabilitats associades a cada f_n^m tals que $p_1^m + \cdots + p_{N_m}^m = 1$.

Utilitzarem aquest conjunt F per definir un IFS que actuarà sobre l'espai mètric, $(\mathcal{H}(X)^V, h^V)$.

Definició 5.3. Sigui $V \geq 1$ un enter positiu. L'espai $\mathcal{H}(X)^V = \mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \cdots \times \mathcal{H}$ (V vegades) és l'espai format per seqüències de V subconjunts compactes no buits de X. Per simplificar la notació escriurem simplement $\mathcal{H}^V$. Aquest espai el dotem d'una mètrica, que denotem per h^V i està induïda a partir de la mètrica Hausdorff h, prenent el màxim per components. És a dir, donat l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$ definim l'espai $(\mathcal{H}^V, h^V)$ per

$$h^V(K, L) = \max_{v=1,\ldots,V} h(K_v, L_v),$$

per tot $K = (K_1, \ldots, K_V), L = (L_1, \ldots, L_V) \in \mathcal{H}^V$.

Amb aquesta mètrica ja podem parlar de convergència en aquest espai de seqüències de V elements, així com de transformacions contractives. L'espai (H^V, h^V) és un espai mètric complet.

Considerem F una col·lecció de IFS juntament amb un espai mètric com el que hem descrit anteriorment i sigui V un nombre enter positiu. Definim el conjunt indexat $\mathcal{A}_V$ com el conjunt de totes les matrius a de la forma:

$$a = \begin{bmatrix} I^a(1) & J^a(1,1) & \ldots & J^a(1,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^a(V) & J^a(V,1) & \cdots & J^a(V,N) \end{bmatrix}$$

on $I^a(V) \in M$, $N = \max_{m \in M} N_m$, $J^a(v,m) \in \{1, \ldots, V\}$ si $1 \leq m \leq N_{I^a(v)}$ i $J^a(v,m) = 0$ si $N_{I^a(v)} < m < N$.

Per cada $a \in \mathcal{A}_V$, definim $f^a : \mathcal{H}^V \longrightarrow \mathcal{H}^V$ com

$$\begin{aligned} & f^a(K_1, K_2, \ldots, K_v) \\ & = \left(\bigcup_{m=1}^{N_{I^a(1)}} f_m^{I^a(1)}(K_{J^a(1,m)}), \ldots, \bigcup_{m=1}^{N_{I^a(V)}} f_m^{I^a(V)}(K_{J^a(V,m)}) \right), \end{aligned}$$

per tot $(K_1, K_2, \ldots, K_V) \in \mathcal{H}^V$.

En general, cada $a = (I^a, J^a) \in \mathcal{A}_V$ és escollida segons una distribució de probabilitat $\mathcal{P}^a$. Aquesta distribució de probabilitat s'obté seleccionant tots els elements de a de manera independent. Els elements de la primera columna, $I^a(v)$, s'escullen segons les probabilitats associades de cada IFS, $P_1, \ldots, P_M$. Els elements $J^a(v, m)$, per $1 \leq m \leq N_{I^a(v)}$, s'escullen seguint la distribució uniforme de $\{1, \ldots, V\}$. Per tant, podem escriure $\mathcal{P}^a$ com

$$\mathcal{P}^a = \frac{P_{I^a(1)} P_{I^a(2)} \cdots P_{I^a(V)}}{V^{N_{I^a(1)} + N_{I^a(2)} + \cdots + N_{I^a(V)}}}.$$

Definició 5.4. Les transformacions f^a juntament amb la distribució de probabilitat $\mathcal{P}^a$ s'utilitzen per definir el conjunt $\mathcal{F}^V$, anomenat superIFS:

$$\mathcal{F}^V = \{H^V; f^a, \mathcal{P}^a, a \in \mathcal{A}\}.$$

Principalment, la construcció d'un fractal V-variable es basa en l'algorisme aleatori d'aquest superIFS $\mathcal{F}^V$.

Teorema 5.5. *$\mathcal{F}^V$ és un IFS amb factor de contracció $c \in [0, 1)$.*

Demostració. Només hem de provar que la transformació $f^a : \mathcal{H}^V \longrightarrow \mathcal{H}^V$ és contractiva amb factor de contracció $c \in [0, 1)$, per tot $a \in \mathcal{A}_V$. Observem que per $v = 1, 2, \ldots, V$ i per tot $K = (K_1, K_2, \ldots, K_{N_{I^a(v)}}), L = (L_1, L_2, \ldots, L_{N_{I^a(v)}}) \in \mathcal{H}^{N_{I^a(v)}}$, tenim

$$\begin{aligned} h(f^a(K) f^a(L)) &= h\left(\bigcup_{m=1}^{N_{I^a(v)}} f_m^{I^a(v)}(K_m), \bigcup_{m=1}^{N_{I^a(v)}} f_m^{I^a(v)}(L_m) \right) \\ &\leq \max_m \{h(f_m^{I^a(v)}(K_m), h(f_m^{I^a(v)}(L_m)\} \leq \max_m \{c \cdot h(K_m, L_m)\} \\ &= c \cdot h^{N_{I^a(v)}}(K, L). \end{aligned}$$

Aleshores, per tot $\tilde{K} = (K_1, K_2, \ldots, K_V)$ i $\tilde{L} = (L_1, L_2, \ldots, L_V) \in \mathcal{H}^V$ es compleix

$$\begin{aligned} & h^V(f^a(\tilde{K}), f^a(\tilde{L})) = h^V\left(f^a(K_1, \ldots, K_V), f^a(L_1, \ldots, L_V)\right) \\ & = \max_v \left\{ h\left(\bigcup_{m=1}^{N_{I^a(v)}} f_m^{I^a(v)}(K_{J^a(v,m)}), \bigcup_{m=1}^{N_{I^a(v)}} f_m^{I^a(v)}(L_{J^a(v,m)}) \right) \right\} \\ & \leq \max_v \left\{ c \cdot h^{N_{I^a(v)}} \left((K_{J^a(v,1)}, \ldots, K_{J^a(v,N_{I^a(v)})}), (L_{J^a(v,1)}, \ldots, L_{J^a(v,N_{I^a(v)})}) \right) \right\} \\ & \leq c \cdot h^V\left((K_1, K_2, \ldots, K_V), (L_1, L_2, \ldots, L_V)\right) = c \cdot h^V\left(\tilde{K}, \tilde{L}\right). \end{aligned}$$

□

Els resultats que s'han vist i provat en el Capítol 3 sobre els IFS, també s'apliquen per aquest. Definim doncs, què és un superfractal.

Definició 5.6. Un superfractal és el conjunt atractor $\mathbf{A} \in \mathcal{H}(\mathcal{H}^V)$ d'un IFS com el descrit en la Definició 5.4.

5.2 Algorisme per generar superfractals i exemples

En aquesta secció detallarem l'algorisme que es fa servir per generar fractals V-variables, i en conseqüència, els superfractals. Per fer-ho suposarem que tenim 2 IFS amb 2 transformacions cada un, $F_1 = \{f_1^1, f_2^1\}$ i $F_2 = \{f_1^2, f_2^2\}$ així com $V = 2$. Aquestes suposicions es fan perquè en l'explicació del algorisme no hi hagi tantes notacions, d'aquesta manera no es farà tant pesada i serà molt més fàcil d'entendre. Evidentment es pot generalitzar i fer-se per dimensions majors o menors.
Per començar l'algorisme necessitem dos parells de buffers[1], (P, Q) i (P', Q') que anomenarem pantalles d'entrada i pantalles de sortida respectivament. En les d'entrada col·locarem els conjunts inicials, que poden ser iguals o diferents, mentre que les pantalles d'entrada estaran buides. Per generar la seqüència d'imatges seguim el següent procés iteratiu:

(i) Escollim aleatòriament un dels IFS F_1 o F_2. Posem per cas F_{n_1}. Aleshores escollim aleatòriament la imatge de P o la de Q i apliquem la transformació $f_1^{n_1}$ a aquesta imatge. El resultat el posem en P'. Seguidament apliquem la transformació $f_2^{n_1}$ a una de les imatges de P o Q, també escollida aleatòriament i sobreposem la imatge resultant a la que ja tenim a P'.

(ii) Tornem a escollir de manera aleatòria un IFS. Diguem-ne F_{n_2}. Apliquem la transformació $f_1^{n_2}$ a la imatge de P o Q, escollida per atzar, i la posem en Q'. Apliquem també $f_2^{n_2}$ a la imatge de P o Q escollida també aleatòriament i sobreposem la imatge resultant a la que ja tenim a Q'.

(iii) Intercanviem les pantalles d'entrada i de sortida, netegem les de sortida i repetim els passos (i) i (ii).

(iv) Repetim el pas (iii) tantes vegades com faci falta.

Observació 5.7. Si reproduïm aquest algorisme per un nombre elevat d'iteracions, per qualsevol combinació que fem, la distribució obtinguda empíricament serà la mateixa amb probabilitat 1. Això és conseqüència de la teoria ergòdica[2] i del fet que el procés de construcció correspon al joc del caos per a un IFS (operant en parelles d'imatges i no en punts individuals). Aquesta distribució obtinguda correspon a la distribució d'estat estacionari, que és estable i no canvia en el transcurs de les etapes. A més, les imatges resultants són independents dels conjunts inicials.

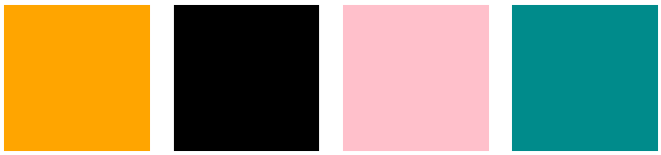
En el següent exemple construïm un fractal V-variable, prenent dos IFS amb tres transformacions cada un i considerem $V = 4$.

[1] En anglès, memòria utilitzada per emmagatzemar temporalment l'entrada o sortida de dades.
[2] Branca de les matemàtiques que centra el seu estudi en el comportament mitjà a llarg plaç dels sistemes dinàmics.

Exemple 5.8. Siguini $F = \{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ i $G = \{\mathbb{R}^2, g_1, g_2, g_3\}$, on cada una de les funcions té una probabilitat d'un terç d'ocórrer. Les funcions f_i, g_i són les següents:

$$f_1 = \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) \qquad f_2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right) \qquad f_3 = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right)$$
$$g_1 = \left(\frac{x}{4}, \frac{y}{4}\right) \qquad g_2 = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}, \frac{y}{4}\right) \qquad g_3 = \left(\frac{x}{4}, \frac{y}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

Considerem les pantalles inicials (T_1, T_2, T_3, T_4) on a cada una hi posem com a conjunt inicial un quadrat unitari, de diferent color en cada cas.



(a) T_1 (b) T_2 (c) T_3 (d) T_4

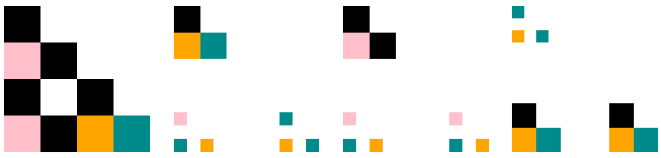
Figura 5.1: Conjunts Inicials

Comencem construint el resultat de la primera iteració seguint l'algorisme detallat anteriorment. És a dir, escollim a l'atzar els IFS que aplicarem en cada cas i els conjunts procedent de les pantalles d'entrada. El resultat per cada IFS el posem en cada una de les pantalles de sortida (T_1', T_2', T_3', T_4').

(a) $F(T_3, T_2, T_2)$ (b) $F(T_1, T_4, T_3)$ (c) $G(T_4, T_1, T_3)$ (d) $G(T_1, T_4, T_4)$

Figura 5.2: Nivell 1

Un cop hem obtingut aquestes imatges intercanviem papers. Ara les imatges de la Figura 5.2 seran les pantalles d'entrada i les pantalles de sortida les buidem per poder posar noves imatges. Tornem a aplicar els passos (ii) i (iii) de l'algorisme. Sortegem els IFS i les imatges d'aquest nivell per tal de construir el següent.



(a) $F(T_1, T_2, T_1)$ (b) $G(T_3, T_4, T_2)$ (c) $G(T_3, T_3, T_1)$ (d) $G(T_2, T_2, T_4)$

Figura 5.3: Nivell 2

Tornem a intercanviar les pantalles i seguim amb la iteració com en els nivells anteriors i obtenim les imatges de la Figura 5.4.

(a) $G(T_1, T_1, T_4)$ (b) $G(T_2, T_3, T_1)$ (c) $F(T_3, T_2, T_4)$ (d) $G(T_3, T_3, T_1)$

Figura 5.4: Nivell 3

I així successivament. En cada pas els IFS F i G són escollits amb una probabilitat de $\frac{1}{2}$ cada un. En aquest exemple hem realitzat un fractal 4-variables.

5.3 Dimensió dels fractals V-variables

Fixem una sèrie de supòsits que tindrem en compte durant el transcurs de tota la secció. En primer lloc, considerarem que totes les transformacions que componen cada un dels IFS són aplicacions contractives amb factor de contracció $r_n^m < 1$. Seguidament suposarem que F satisfà la condició del conjunt obert, explicada anteriorment en 4.20.

Definició 5.9. Donat $a \in \mathcal{A}_V$, definim la matriu $M^a(\alpha)$ de dimensió $V \times V$ com

$$M^a(\alpha)_{v,w} = \sum_{m:J^a(v,m)=w} \left(r_m^{I^a(v)}\right)^\alpha, \quad 1 \leq v, w \leq V.$$

Vegem quines son les matrius $M^a(\alpha)$ de l'Exemple 5.8.

$$a_0 = \begin{bmatrix} F & 3 & 2 & 2 \\ F & 1 & 4 & 2 \\ G & 4 & 1 & 3 \\ G & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to M^{a_0}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 2\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha & \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha & \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \\ \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha \\ \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & 0 & 0 & 2\left(\frac{1}{4}\right) \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} F & 1 & 2 & 1 \\ G & 3 & 4 & 2 \\ G & 3 & 3 & 1 \\ G & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to M^{a_1}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha & \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha \\ \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & 0 & 2\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & 0 \\ 02 & \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & 0 & \left(\frac{1}{4}\right) \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} G & 1 & 1 & 4 \\ G & 2 & 3 & 1 \\ F & 3 & 2 & 4 \\ G & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to M^{a_2}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha \\ \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha & \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \\ \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & 0 & 2\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Definició 5.10. Donada A una matriu definim la seva norma com $||A|| = \max_i \sum_j |A_{i,j}|$. Aquesta norma compleix $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.

Un cop vistos aquests conceptes, passem a enunciar el teorema principal d'aquesta secció que ens proporciona una manera de calcular la dimensió de Hausdorff per als fractals V-variables.

Teorema 5.11. *[BHS12, Secció 5]. Siguin $F = \{F^m : m \in M\}$ una col·lecció de IFS i P una distribució de probabilitats. Considerem $V \geq 1$ un nombre enter i $\alpha > 0$ un nombre real. Sota les hipòtesis anteriors,*

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha) &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\frac{1}{k}\log||M^{a_0}(\alpha)\cdot\cdots\cdot M^{a_{k-1}}(\alpha)|| \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log||M^{a_0}(\alpha)\cdot\cdots\cdot M^{a_{k-1}}(\alpha)|| \ a.s.^3\end{aligned}$$

En particular el segon límit és independent de $a_0, \ldots, a_{k-1}, \ldots$. La funció $\gamma(\alpha)$ és monòtona decreixent respecte al paràmetre α, i existeix un únic d tal que $\gamma(d) = 0$. Aquesta d es defineix com la dimensió del fractal V-variable, donat per F, P i V.

Observació 5.12. El fet que aquest límit existeixi i sigui independent de $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, \ldots$ és conseqüència del Teorema de Furstenberg-Kesten (veure [Coh88]). El teorema diu que donada $||\cdot||$ una norma com la de la Definició 5.10 i una successió estacionària[4] de matrius aleatòries $\{A_t\}$, definim $P_{st} = A_{s+1}A_{s+2}\cdots A_{t-1}A_t$. Si $\mathbb{E}\{\max(0, \log||A_t||)\} < \infty$, aleshores $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\log(||P_{0t}||) = \xi$ existeix amb probabilitat 1. Si a més $\{A_t\}$ són i.i.d.[5], aleshores $\mathbb{E}(\xi) = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\mathbb{E}\log(||P_{0t}||) = \xi$. Podem trobar aquest teorema i la seva demostració en [Coh88].

Corol·lari 5.13. *Sota les hipòtesis anteriors i suposant que les transformacions f_n^m són similituds, aleshores la dimensió d'un fractal 1-variable és l'únic nombre real α que compleix*

$$\mathbb{E}_{N_{I^a(1)}} \log \sum_{m=1}^{N_{I^a(1)}} \left(r_m^{N_{I^a(1)}}\right)^\alpha = 0.$$

Corol·lari 5.14. *Amb les mateixes hipòtesis que el Corol·lari anterior, la dimensió d'un fractal V-variable quan $V \longrightarrow \infty$ és l'únic nombre real α que compleix*

$$\mathbb{E}_{N_{I^a(1)}} \sum_{m=1}^{N_{I^a(1)}} \left(r_m^{N_{I^a(1)}}\right)^\alpha = 1.$$

Les referències d'aquest capítol han estat [BHS12] i [BHS03]. Per tal d'acabar aquest capítol calculem quina es la dimensió superfractal del Exemple 5.8. Aquest és un fractal 4-variable, per tant hem d'aplicar la formula del Teorema 5.11. Tot i així, calculem amb les formules dels Corol·laris 5.13, 5.14 les dimensions per $V = 1$ i $V \to \infty$ respectivament.

$$\mathbb{E}_{N_{I^a(1)}} \log \sum_{m=1}^{N_{I^a(1)}} \left(r_m^{N_{I^a(1)}}\right)^\alpha = \log\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\right) + \log\left(3\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha\right) = 0 \Rightarrow \alpha \approx 1.0566$$

$$\mathbb{E}_{N_{I^a(1)}} \sum_{m=1}^{N_{I^a(1)}} \left(r_m^{N_{I^a(1)}}\right)^\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha 3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha 3 = 1 \Rightarrow \alpha \approx 1.1283$$

Amb aquests valors, tenim que la dimensió d del nostre fractal 4-variable ha d'estar entre $1.0566 < d < 1.1283$. I en efecte, $d \approx 1.1172$. Tant aquest valor com els dos anteriors han estat calculats computacionalment.

[3] De l'anglès, almost surely. Que succeeix amb probabilitat 1.

[4] Successió on la seva distribució de probabilitat es manté constant en tot moment.

[5] Independents i idènticament distribuïdes.

Apèndix A

Els Espais Mètrics

La majoria de les definicions i resultats que s'introdueixen a continuació formen part del temari d'algunes assignatures cursades durant el grau de Matemàtiques, com Topologia (3r curs) o Funcions de Variable Real (1r curs). És per això que aquest capítol s'ha inclòs en un apèndix i no en el cos del treball. Les proves i resultats d'aquest capítol es poden trobar en [Edg08] i [SV06], així com en els apunts de les classes teòriques de les assignatures esmentades anteriorment.

Definició A.1. Donat un conjunt X, definim una mètrica en X com una funció $d: \ X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les següents propietats:

(1) $d(x,y) \geq 0$ per tot $x, y \in X$ *(No negativitat),*

(2) $d(x,y) = 0$ si i només si $x = y$ *(Axioma de coincidència),*

(3) $d(x,y) = d(y,x)$ per tot $x, y \in X$ *(Simetria),*

(4) $d(x,y) \geq d(x,z) + d(z,y)$ per tot $x, y, z \in X$ *(Desigualtat triangular).*

Definició A.2. Un conjunt X juntament amb una mètrica d associada s'anomena espai mètric (X, d).

Exemple A.3. La mètrica usual en el conjunt dels reals, $\mathbb{R}$, és la mètrica euclidiana, definida per $d_1(x,y) = |x - y|$.
En el pla $\mathbb{R}^2$, donats $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$, la mètrica euclidiana s'expressa com $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Tant $(\mathbb{R}, d_1)$ com $(\mathbb{R}^2, d_2)$ són espais mètrics.

A.1 Convergència dels espais mètrics

Definició A.4. Sigui X un conjunt no buit. Una successió en X és una funció $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ de manera que per cada $n \in \mathbb{N}$ s'assigna un únic valor de X. Normalment, s'utilitza la notació de subíndexs, $f(n) = x_n$ i s'escriu $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (o simplement $\{x_n\}$) per referir-se a la successió f en general.

Definició A.5. Siguin (X, d) un espai mètric, $\{x_n\}$ una successió de X i $x \in X$. Es diu que $\{x_n\}$ convergeix al punt x si, per tot $\varepsilon > 0$, existeix un enter $N > 0$ de

manera que

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \text{per tot } n > N.$$

En aquest cas, la successió es diu que és convergent i el punt $x \in X$ al qual convergeix la successió s'anomena límit de la successió i es denota com

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Proposició A.6. *El límit d'una successió és únic.*

Definició A.7. Siguin (X, d) un espai mètric i $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de X. Diem que la successió $\{y_n\}$ és una successió parcial de $\{x_n\}$ si existeix una aplicació $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictament creixent, de manera que $y_n = x_{\sigma(n)}$, per tot $n \in \mathbb{N}$.

Definició A.8. Una successió $\{x_n\}$ d'un espai mètric (X, d) s'anomena successió de Cauchy si, per tot $\varepsilon > 0$, existeix un enter $N > 0$ de manera que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{per tot } n, m > 0.$$

Teorema A.9. *Si $\{x_n\}$ és una successió d'un espai mètric (X, d) amb límit $x \in X$, aleshores $\{x_n\}$ és una successió de Cauchy.*
Dit d'una altra manera, tota successió convergent en (X, d) és de Cauchy.

Demostració. Sigui $\{x_n\}$ una successió amb límit $x \in X$. Aleshores, per tot $\varepsilon > 0$ existeix un enter $N > 0$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ per tot $n > N$.

Així, a partir de la desigualtat triangular, es compleix que per tot $n, m > N$, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Per tant, la successió $\{x_n\}$ és de Cauchy. □

Definició A.10. Un espai mètric (X, d) es diu complet si tota successió de Cauchy $\{x_n\}$ de X, convergeix a un punt $x \in X$.

A.2 Topologia en espais mètrics

Definició A.11. Siguin (X, d) un espai mètric, $a \in X$ un punt i $r > 0$ un nombre real.

Definim la bola oberta de centre a i radi r com el conjunt

$$B(a, r) = B_r(a) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}.$$

Definim la bola tancada de centre a i radi r com el conjunt

$$\overline{B(a, r)} = \overline{B_r}(a) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Definició A.12. Sigui (X, d) un espai mètric i $A \subset X$. Direm que A és un conjunt obert si per tot $a \in A$, existeix un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B(a, \varepsilon)$ està continguda en A.

Proposició A.13. *En un espai mètric, tota bola oberta és un conjunt obert.*

Definició A.14. Sigui (X, d) un espai mètric i $C \subset X$. Direm que C és un conjunt tancat si el seu complementari $X \setminus C = C^c$ és un obert.

Proposició A.15. *En un espai mètric, tota bola tancada és un conjunt tancat.*

Definició A.16. Donat (X, d) un espai mètric, diem que $A \subset X$ és un subconjunt fitat si existeix $M > 0$ tal que $d(x, y) \leq M$ per tot $x, y \in A$.

Definició A.17. Siguin (X, d) un espai mètric i $A \subset X$. Diem que A és totalment fitat si per tot $\varepsilon > 0$, existeix un conjunt finit de punts $\{a_1, a_2, ...a_n\} \subset S$, de manera que per qualsevol punt $y \in A$, es compleix $d(y, a_i) < \varepsilon$, per algun $a_i \in \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Podem reescriure aquesta definició fent servir el concepte de bola, tal com segueix:

$A \subset X$ es totalment fitat si per tot $\varepsilon > 0$ existeixen punts $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ de manera que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon)$.

Proposició A.18. *Sigui (X, d) un espai mètric. Si $A \subset X$ totalment acotat, aleshores A és fitat.*

Demostració. Siguin (X, d) un espai mètric i $A \subset X$ totalment fitat. És a dir, donat $\varepsilon > 0$, existeix un conjunt finit de punts de A, $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, de manera que per tot $y \in A$ $d(y, a_i) < \varepsilon$, per algun $a_i \in S$. Com que el conjunt S és finit, es defineix $d(S) = \sup\{d(s, r) \mid r, s \in S\} < \infty$. Siguin ara $y_1, y_2 \in A$, de manera que $d(y_1, s) < \varepsilon$ i $d(y_2, r) < \varepsilon$. Usant la desigualtat triangular: $d(y_1, y_2) \leq d(y_1, s) + d(s, r) + d(r, y_2) \leq d(S) + 2\varepsilon < \infty$. Per tant $A \subset X$ és un subconjunt fitat. □

A.3 Compacitat en espais mètrics

Definició A.19. Siguin (X, d) un espai mètric i $A \subset X$. Una família $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$, amb $U_i \subset X$, s'anomena recobriment de A si la seva unió cobreix tot A, i.e. $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Definició A.20. Si $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ és un recobriment d'$A \subset X$ i cada U_i és un subconjunt obert de X, aleshores $\mathcal{U}$ s'anomena recobriment per oberts d'A.

Definició A.21. Seguint amb les notacions de la Definició A.19, un subrecobriment d'un recobriment $\{U_i \mid i \in I\}$ d'A és una subfamília $\{U_j \mid j \in J\}$ per algun subconjunt $J \subset I$, de manera que $\{U_j \mid j \in J\}$ sigui també un recobriment d'A.
Es diu que aquest subrecobriment és finit si J és finit.

Definició A.22. Sigui $\mathcal{U}$ un recobriment d'un conjunt en un espai mètric. Definim un refinament de $\mathcal{U}$ com un altre recobriment $\mathcal{V}$ del mateix conjunt tal que si $B \in \mathcal{V}$, aleshores existeix un $A \in \mathcal{U}$ amb $B \subset A$.

Un cop definits aquests conceptes, podem definir un conjunt compacte.

Definició A.23. Siguin (X, d) un espai mètric i $A \subset X$. Diem que A és compacte si tot recobriment per oberts d'A admet un subrecobriment finit.

Una altra manera de definir un conjunt compacte és la següent:

Definició A.24. Siguin (X, d) un espai mètric i $A \subset X$. Diem que A és compacte si tota successió infinita $\{a_n\}$ d'A, conté una successió parcial amb límit en A.

Teorema A.25. *Sigui (X, d) un espai mètric complet. Sigui $A \subset X$. Aleshores A és compacte si i nomes si A és tancat i totalment fitat.*

Demostració. $\Longleftarrow$ Sigui A un subconjunt de X tancat i totalment fitat. Sigui $\{x_n\}$ una successió infinita de punts d'A.
Com que A és totalment fitat es pot trobar una col·lecció finita de boles tancades de radi $\varepsilon_1 = 1$ de manera que A estigui contingut a la unió d'aquestes boles.
Pel principi de Dirichlet[1], una de les boles, diem-ne B_1, conté infinits punts de $\{x_n\}$. Considerem $A \cap B_1$. Aquest conjunt és també totalment fitat, ja que està contingut en A, i per tant podem repetir l'argument anterior amb boles de radi $\varepsilon_2 = 1/2$. Aplicant una altra vegada el principi de Dirichlet, una de les boles, posem per cas B_2, conté infinits punts de $\{x_n\}$. Així successivament, es construeix la següent successió de boles:

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset B_4 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots, \qquad \text{on cada } B_n \text{ té radi } \tfrac{1}{2^{n-1}}.$$

A partir d'aquesta successió de boles tancades, podem construir una successió parcial de $\{x_n\}$ i de Cauchy:

Sigui $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{N_1} \in B_1$. Com que en B_2 hi ha infinits termes de $\{x_n\}$, existeix $N_2 > N_1$ tal que $\{x_{N_2}\} \in B_2$. Seguint aquest procés es construeix la successió parcial $\{x_{N_k}\}_k$ amb $x_{N_k} \in B_k$.

Siguin p, q dos nombres naturals de manera que $p < q$. Com que $B_p \cap B_q \neq \emptyset$, si $y \in B_p \cap B_q$, es compleix:

$$d(x_{N_p}, x_{N_q}) \leq d(x_{N_p}, y) + d(y, x_{N_q}) < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

És a dir, la successió $\{x_{N_k}\}$, que és una successió parcial de la successió original $\{x_n\}$, és una successió de Cauchy en A, i com que estem en un espai complet, aquesta és convergent.
Com que A és tancat per construcció, el límit de $\{x_{N_k}\}$ pertany a A.
Així doncs, com que tota successió infinita d'A conté una successió parcial convergent en A, tenim que aquest subconjunt A és compacte.

$\Longrightarrow$ Sigui A un subconjunt de X compacte i sigui $\varepsilon > 0$. Es demostrarà aquesta implicació per reducció a l'absurd.
Es suposa que A no és ni tancat ni totalment fitat. És a dir, A conté una seqüència finita de punts $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset A$ de manera que $d(a_i, a_j) \geq \varepsilon$ per tot $i \neq j$. Com que A és compacte per hipòtesi, aleshores la successió $\{a_n\}$ ha de tenir una successió parcial convergent $\{a_{N_i}\}$. Pel Teorema A.9 aquesta successió parcial $\{a_{N_i}\}$ és una successió de Cauchy i per tant es poden trobar dos enters N_j, N_k, amb $N_j \neq N_k$, tals que $d(a_{N_j}, a_{N_k}) < \varepsilon$. Però $d(a_{N_j}, a_{N_k}) \geq \varepsilon$, per tant, es troba una contradicció.
Això ens diu que A sí que és totalment fitat i tancat.

$\square$

[1] El principi de Dirichlet diu que si repartim n objectes en k caselles, i $n > k$, aleshores, necessàriament alguna de les caselles ha de rebre més d'un objecte

Apèndix B

Demostracions addicionals

En el transcurs d'aquest treball han anat sorgint resultats en forma de proposició, teoremes o corol·laris on la seva demostració no estava enfocada en el principal objectiu d'aquest document.
És per això que aquestes estan incloses en aquest apèndix.

Corol·lari 2.11. Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $A_i, B_i \in \mathcal{H}(X)$. Aleshores,

$$h(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} B_i) \leq \max_{i\in I}\{h(A_i, B_i)\}.$$

Demostració. Abans de provar aquesta desigualtat, demostrarem aquesta altra primer:

$$l(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} B_i) \leq \max_{i\in I}\{l(A_i, B_i)\},$$

ja que recordem que $h(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} B_i) = \max\{l(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} B_i), l(\bigcup_{i\in I} B_i, \bigcup_{i\in I} A_i)\}$.

Considerem $a \in \bigcup_{i\in I}$ qualsevol. Aleshores, existeix un $k \in I$ de manera que $a \in A_k$. Així,

$$l(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i_i nI} B_i) = \max\{l(a, \bigcup_{i\in I}) \mid a \in U\} \leq \max\{l(a, B_k) \mid a \in A_k\}.$$

Aquesta última desigualtat és conseqüència de les següents inclusions: $A_k \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ i $B_k \subset \bigcup_{i\in I} B_i$.

Recordem que $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ és un punt arbitrari, i per tant, l'anterior desigualtat es compleix per tot valor d'a:

$$l(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} B_i) \leq l(A_k, B_k) \leq \max_{i\in I}\{l(A_i, B_i)\}.$$

De manera similar es demostra que $l(\bigcup_{i\in I} B_i, \bigcup_{i\in I} A_i) \leq \max_{i\in I}\{l(B_i, A_i)\}$.
Amb això tenim que

$$h(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} B_i) \leq \max\{\max_{i\in I}\{l(A_i, B_i)\}, \max_{i\in I}\{l(B_i, A_i)\}\}.$$

Ara, hem d'estudiar dos possibles casos:

- $\max_{i\in I}\{l(A_i,B_i)\} < \max_{i\in I}\{l(B_i,A_i)\}$:

  Com que $\max\{l(A_i,B_i)\} \leq \max\{h(A_i,B_i)\}$, aleshores en aquest cas, es compleix la següent desigualtat:

$$\begin{aligned} h(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} B_i) &\leq \max\{\max_{i\in I}\{l(A_i,B_i)\}, \max_{i\in I}\{l(B_i,A_i)\}\} \\ &= \max_{i\in I}\{l(A_i,B_i)\} \leq \max_{i\in I}\{h(A_i,B_i)\}\}. \end{aligned}$$

- $\max_{i\in I}\{l(A_i,B_i)\} > \max_{i\in I}\{l(B_i,A_i)\}$: Amb una prova anàloga al cas anterior arribem a la mateixa conclusió.

Com que en els dos casos obtenim $h(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} B_i) \leq \max_{i\in I}\{h(A_i,B_i)\}$, ja hem demostrat el que voliem. □

Teorema 2.13. Siguin (X,d) un espai mètric i $A,B \in \mathcal{H}(X)$. Aleshores es compleix la següent igualtat:

$$h(A,B) = \min\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon \text{ i } B \subset A_\varepsilon\}.$$

Demostració. Siguin (X,d) un espai mètric i $A,B \in \mathcal{H}(X)$. Per veure la igualtat anterior, provarem primer que $h(A,B) \leq \min\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon \text{ i } B \subset A_\varepsilon\}$ i després el contrari.

➢ $h(A,B) \leq \min\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon \text{ i } B \subset A_\varepsilon\}$:

Siguin $a \in A$, $b \in B$ i $\delta \in \{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon \text{ i } B \subset A_\varepsilon\}$. Aleshores, tenim que $A \subset B_\delta$ i $B \subset A_\delta$. Com que $A \in B_\delta$ aleshores

$$l(b,A) = \min\{d(b,a) \mid a \in A\} \leq \delta, \quad \text{per tot } b \in B.$$

Prenent màxims en $b \in B$:

$$\max\{\min\{d(b,a) \mid a \in A\}\} \leq \delta \implies l(B,A) \leq \delta.$$

Anàlogament, amb $B \in A_\delta$ trobem que $l(A,B) \leq \delta$.

Consegüentment, $h(A,B) = \max\{l(A,B), l(B,A)\} \implies h(A,B) \leq \delta$.
Com que δ és un valor arbritari, tenim que aquesta desigualtat es compleix per tot $\delta \in \{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon \text{ i } B \subset A_\varepsilon\}$, i en particular, pel valor mínim. Així doncs,

$$h(A,B) \leq \min\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon \text{ i } B \subset A_\varepsilon\}.$$

➢ $h(A,B) \geq \min\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon \text{ i } B \subset A_\varepsilon\}$:

Siguin $\alpha = l(A,B)$ i $\beta = l(B,A)$. Aleshores, per tot $a \in A$ tenim que $l(a,B) \leq \alpha$ i que per tot $b \in B$, $d(b,A) \leq \beta$.

Utilitzant la Definció 2.12 es compleix que per tot $a \in A$, $a \in B_\alpha$ i per tot $b \in B$, $b \in A_\beta$. Per tant, $A \subset B_\alpha$ i $B \subset A_\beta$.

Considerem $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$. Aleshores, $A_\beta \subseteq A_\gamma$ i $B_\alpha \subseteq B_\gamma$. A partir d'aquí tenim les següents inclusions:
Per una banda, $A \subset B_\alpha \subseteq B_\gamma \Longrightarrow A \subset B_\gamma$.

Per l'altra, $B \subset A_\beta \subseteq A_\gamma \Longrightarrow B \subset A_\gamma$.

Per tant, $\gamma \in \{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon \text{ i } B \subset A_\varepsilon\}$. Al mateix temps però, tenim que $\gamma = \max\{\alpha, \beta\} = \max\{l(A, B), l(B, A)\} = h(A, B)$. Així doncs,

$$h(A, B) \geq \min\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon \text{ i } B \subset A_\varepsilon\}.$$

□

Proposició 4.11. $\mathscr{H}^s$ és una funció decreixent respecte el paràmetre s.

Demostració. Considerem $F \subset X$ i $r, t \in \mathbb{R}$ dos nombres reals positius tals que $r < t$. Per provar que $\mathscr{H}^s$ és decreixent hem de veure que $\mathscr{H}^r(F) > \mathscr{H}^t(F)$. Fixem $0 < \delta < 1$ arbitrari, aleshores,

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^r_\delta(F) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam}(U_i))^r \mid \{U_i\} \text{ és un } \delta\text{-recobriment de } F\right\}\\ &\geq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam}(U_i))^t \mid \{U_i\} \text{ és un } \delta\text{-recobriment de } F\right\} = \mathscr{H}^t(F).\end{aligned}$$

Recordem que δ és arbitrari, així que

$$\mathscr{H}^r(F) = \lim_{\delta\to 0}\mathscr{H}^r_\delta \geq \lim_{\delta\to 0}\mathscr{H}^t_\delta = \mathscr{H}^t(F),$$

per tant, $\mathscr{H}^s$ és una funció decreixent respecte el paràmetre s. □

Proposició 4.12. Siguin (X, d) un espai mètric i $F \subset X$. Si $w : F \longrightarrow X$ és una aplicació tal que $d(w(x), w(y)) \leq cd(x, y)^\alpha$, per tot $x, y \in F$ i per algunes constants $c > 0$ i $\alpha > 0$, aleshores per cada s es compleix

$$\mathscr{H}^{s/\alpha}(w(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathscr{H}^s(F).$$

Es diu que w satisfà la condició de Hölder.

Demostració. Sigui $\delta > 0$ un nombre real i considerem $\{U_i\}$ un δ-recobriment de F. Aleshores,

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(w(F \cap U_i)) &= \sup\{d(x, y) \mid x, y \in w(F \cap U_i)\}\\ &= \sup\{d(w(x), w(y)) \mid x, y \in F \cap U_i\}\\ &\leq \sup\{c \cdot d(x, y)^\alpha \mid x, y \in U_i\} = c \cdot \operatorname{diam}(U_i)^\alpha.\end{aligned}$$

Per tant, $\{w(F \cap U_I)\}$ és un μ-recobriment de $w(F)$, amb $\mu = c\delta^\alpha$. En conseqüència,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\{(\operatorname{diam}(w(F \cap U_i)))^{s/\alpha}\right\} \leq c^{s/\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{(\operatorname{diam}(U_i))^s\right\}.$$

Prenent ínfims tenim que $\mathscr{H}^{s/\alpha}_\mu(w(F)) \leq c^{s/\alpha}_\delta(F)$ i ara fent $\delta \to 0$ i $\mu \to 0$ obtenim el que buscàvem,

$$\mathscr{H}^{s/\alpha}(w(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathscr{H}^s(F).$$

□

Apèndix C

Exemples de codi SageMath

```
#CODI PER DIBUIXAR FRACTALS A BASE DE ITERACIONS

#Definim les funcions que ens permetran iterar:
def Transformacio(conjunt,IFS):
    y=[None]*0
    for x in conjunt:
        for T in IFS:
            y+=[T*x]
    return y

def Iteracio(n,conjunt,IFS):
    for i in [1..n]:
        conjunt=Transformacio(conjunt,IFS)
    return conjunt

#Definim el conjunt inicial, comú per a tots els fractals, el segment [0,1].
Inicial=column_matrix([[0,0,1],[1,0,1],[0,0,1]])

#DRAC DE HEIGHWAY
# Definim les transformacions i l'IFS corresponents
D1=matrix([[1/2,-1/2,0],[1/2,1/2,0],[0,0,1]])
D2=matrix([[-1/2,-1/2,1],[1/2,-1/2,0],[0,0,1]])
D=[D1,D2]

#Dibuixem-lo
@interact
def Grafica(n=(0..15)):
    Fractal=[None]*0
    punts=Iteracio(n,[Inicial],D)
    for p in punts:
        X=p.columns()
        Fractal+=[line([[X[i][0],X[i][1]],[X[i+1][0],X[i+1][1]]],
        color='black') for i in [0..len(X)-2]]
    show(sum(Fractal),frame=False, axes=False)
```

```
#Pels propers fractals només escriurem les transformacions que componen l'IFS
#Per dibuixar-lo només cal substituir la lletra 'D' (que correspon al IFS del
#drac de Heighway) per la lletra del IFS que vulguem dibuixar.

#TRIANGLE DE SIERPINSKI
S1=matrix([[1/2,0,0],[0,1/2,0],[0,0,1]])
S2=matrix([[1/2,0,1/4],[0,1/2,sqrt(3)/4],[0,0,1]])
S3=matrix([[1/2,0,1/2],[0,1/2,0],[0,0,1]])
S=[S1,S2,S3]

#FRACTAL DE VICSEK
V1=matrix([[1/3,0,0],[0,1/3,0],[0,0,1]])
V2=matrix([[1/3,0,2/3],[0,1/3,0],[0,0,1]])
V3=matrix([[1/3,0,0],[0,1/3,2/3],[0,0,1]])
V4=matrix([[1/3,0,1/3],[0,1/3,1/3],[0,0,1]])
V5=matrix([[1/3,0,2/3],[0,1/3,2/3],[0,0,1]])
V=[V1,V2,V3,V4,V5]

#CORBA DE KOCH
K1=matrix([[1/3,0,0],[0,1/3,0],[0,0,1]])
K2=matrix([[1/6,-sqrt(3)/6,1/3],[sqrt(3)/6,1/6,0],[0,0,1]])
K3=matrix([[-1/6,sqrt(3)/6,2/3],[sqrt(3)/6,1/6,0],[0,0,1]])
K4=matrix([[1/3,0,2/3],[0,1/3,0],[0,0,1]])
K=[K1,K2,K3,K4]
```

Bibliografia

[Arc09] K. Archer. Box-counting dimension and beyond. 2009.

[Bar88] M.F. Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[Bar06] M.F. Barnsley. *Superfractals*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[BHS03] M.F. Barnsley, J.E. Hutchinson, and Ö Stenflo. V-variable fractals and superfractals. 2003.

[BHS05] M.F. Barnsley, J.E. Hutchinson, and Ö Stenflo. A fractal valued random iteration algorithm and fractal hierarchy. *Fractals*, 13(2):111–146, 2005.

[BHS12] M.F Barnsley, J.E. Hutchinson, and Ö. Stenflo. V-variable fractals: dimension results. *Forum Math.*, 24(3):445–470, 2012.

[BMPS03] D. Braun, J. Mayberry, A. Powers, and S. Schlicker. *The geometry of the hausdorff metric*. 2003.

[Coh88] J.E. Cohen. Subadditivity, generalized products of random matrices and operations research. *SIAM review*, 30(1):69–86, 1988.

[Edg08] G. Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2008.

[Fal90] K. Falconer. *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1990.

[Fra20] N.P. Frank. *Lecture notes in fractal geometry*. 2020.

[Hut81] J.E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981.

[Kui07] B. Kuijvenhoven. V-variable fractals: theory and implementation, 2007.

[SV06] S. Shirali and H.L. Vasudeva. *Metric spaces*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2006.

[WWZ77] R. Wheeden, R.L. Wheeden, and A. Zygmund. *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*. Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. Taylor & Francis, 1977.

[YJ01] J. F. Yazlle and C. A. Jadur. Fractales geométricos: Una introducción a los sistemas de funciones iteradas. *CUBO*, vol 3:102–117, 2001.