Cancel·lació i Automillora

Artur Nicolau

UAB

10 d’octubre de 2007

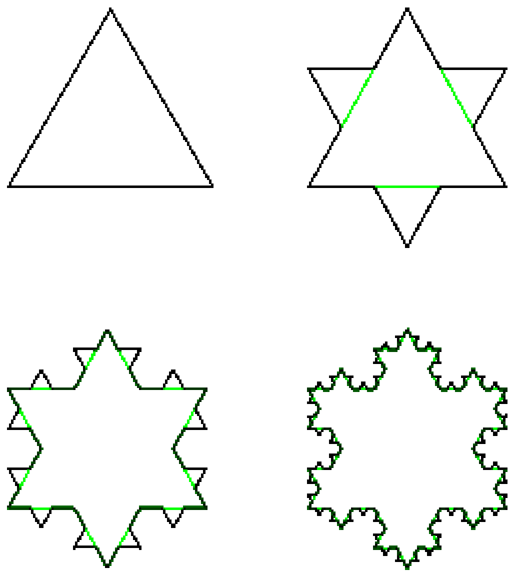
Exemples

- Dimensió d’un punt és 0
- Dimensió d’una corba regular és 1
- Dimensió d’un disc és 2

Conjunt de Cantor

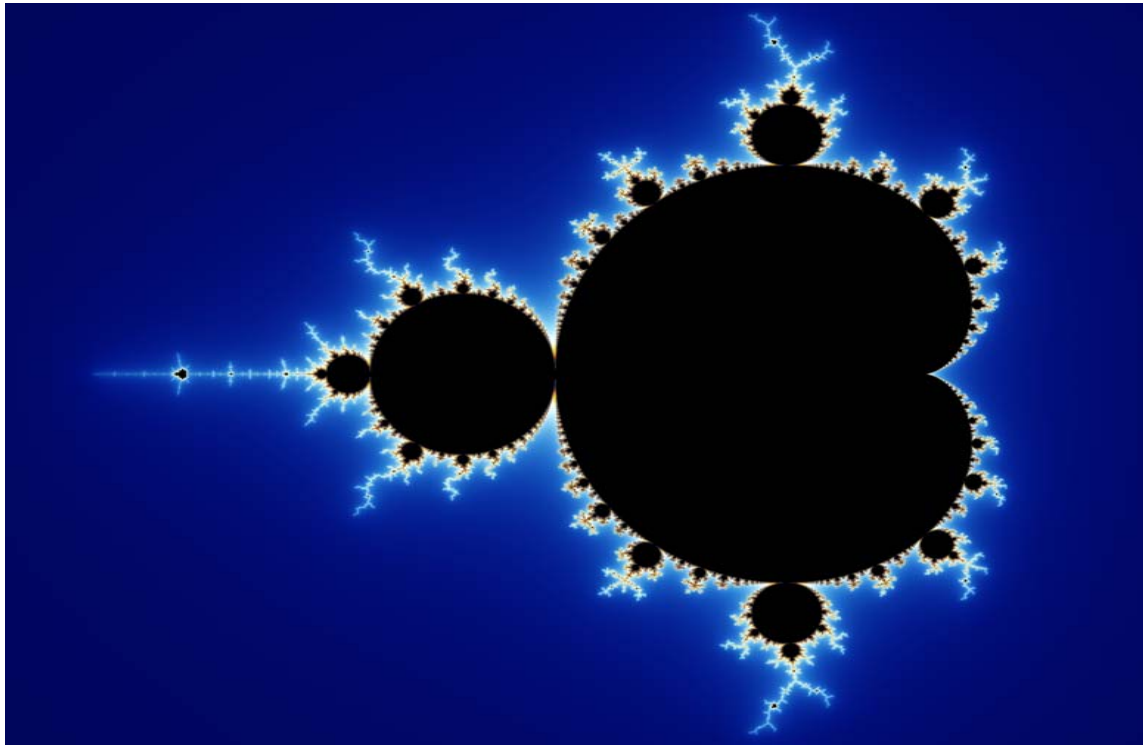
La dimensió és log2/log3

Corba de Von Koch (Snowflake)



La dimensió és log4/log3

Conjunt de Mandelbrot



La dimensió de la vora és 2

Funcions contínues no derivables

Funcions de Weierstrass (1872)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \cos(\mu^n x)\,, \quad 0 < \lambda < 1, \lambda\mu \geq 1$$

En els darrers anys hem estat observant una massa de funcions estranyes, creades per assemblar-se el mínim possible a les funcions honestes que serveixen per alguna cosa… Abans les funcions s’inventaven amb algun propòsit. Avui en dia, les funcions s’inventen per mostrar els errors en els raonaments dels nostres pares…

(H. Poincaré, L’enseignement Mathématique, 1899)

.

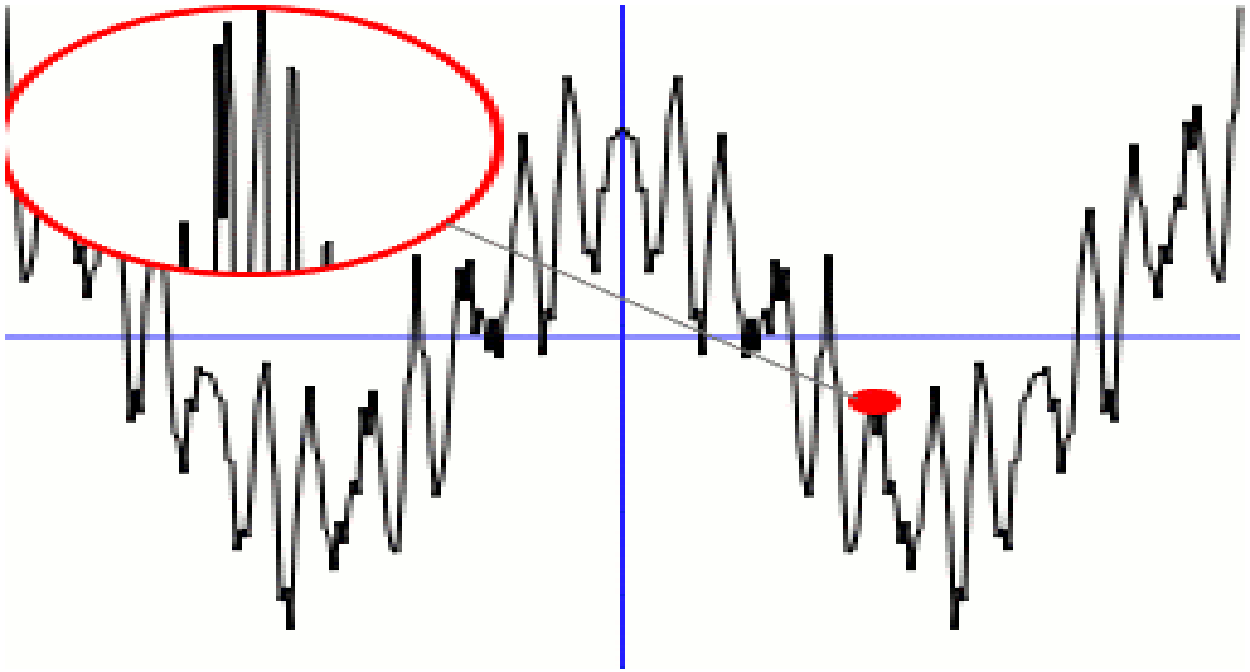
Em giro amb espant i horror davant aquesta plaga lamentable de funcions contínues que no tenen derivada. (C. Hermite)

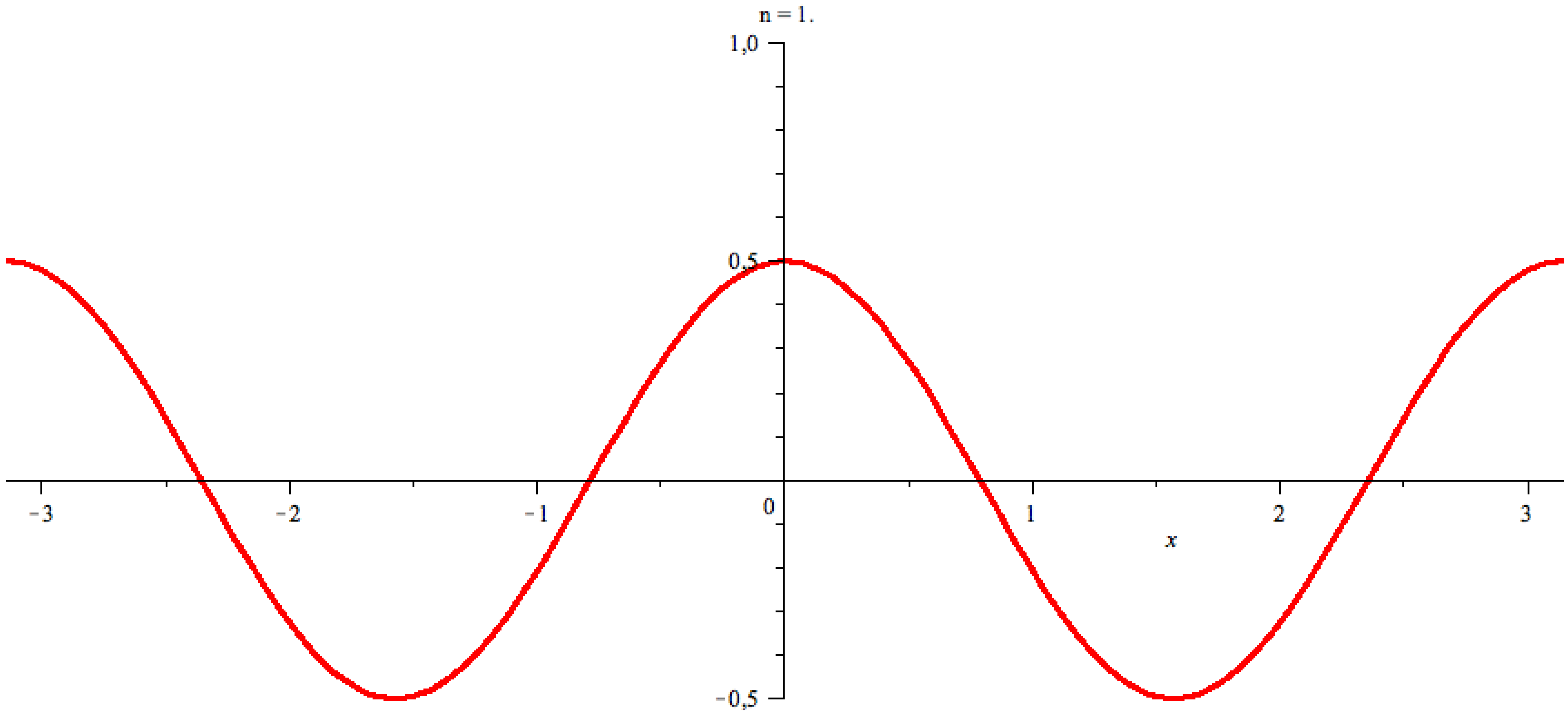
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \cos(\mu^n x), \quad 0 < \lambda < 1, \lambda\mu \geq 1$$

K. Weierstrass (1815-1897)

G. Hardy (1877-1947)

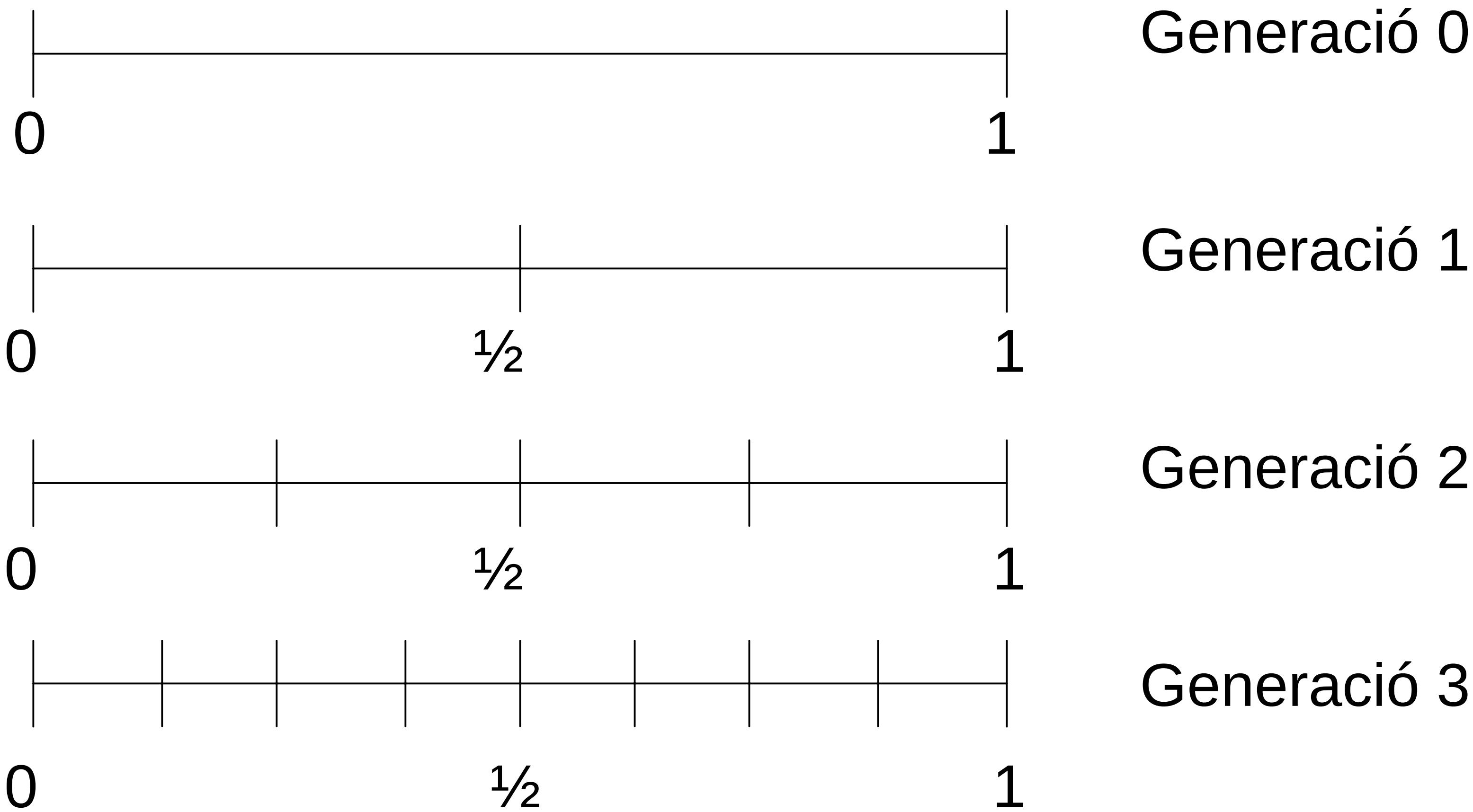
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \cos(\lambda^{-n} x)\,, \quad 0 < \lambda < 1$$





n = 1.
1,0
0,5
0
−0,5
−3
−2
−1
1
2
3
x

Intervals Diàdics



$I_n(x)$ interval diàdic de generació n que conté a x

Teorema de Besicovicht

$$\frac{1}{n}\sharp\{k \in [1,n] : x_k = 0\} \to 1/2\,, \quad g.p.t.x$$

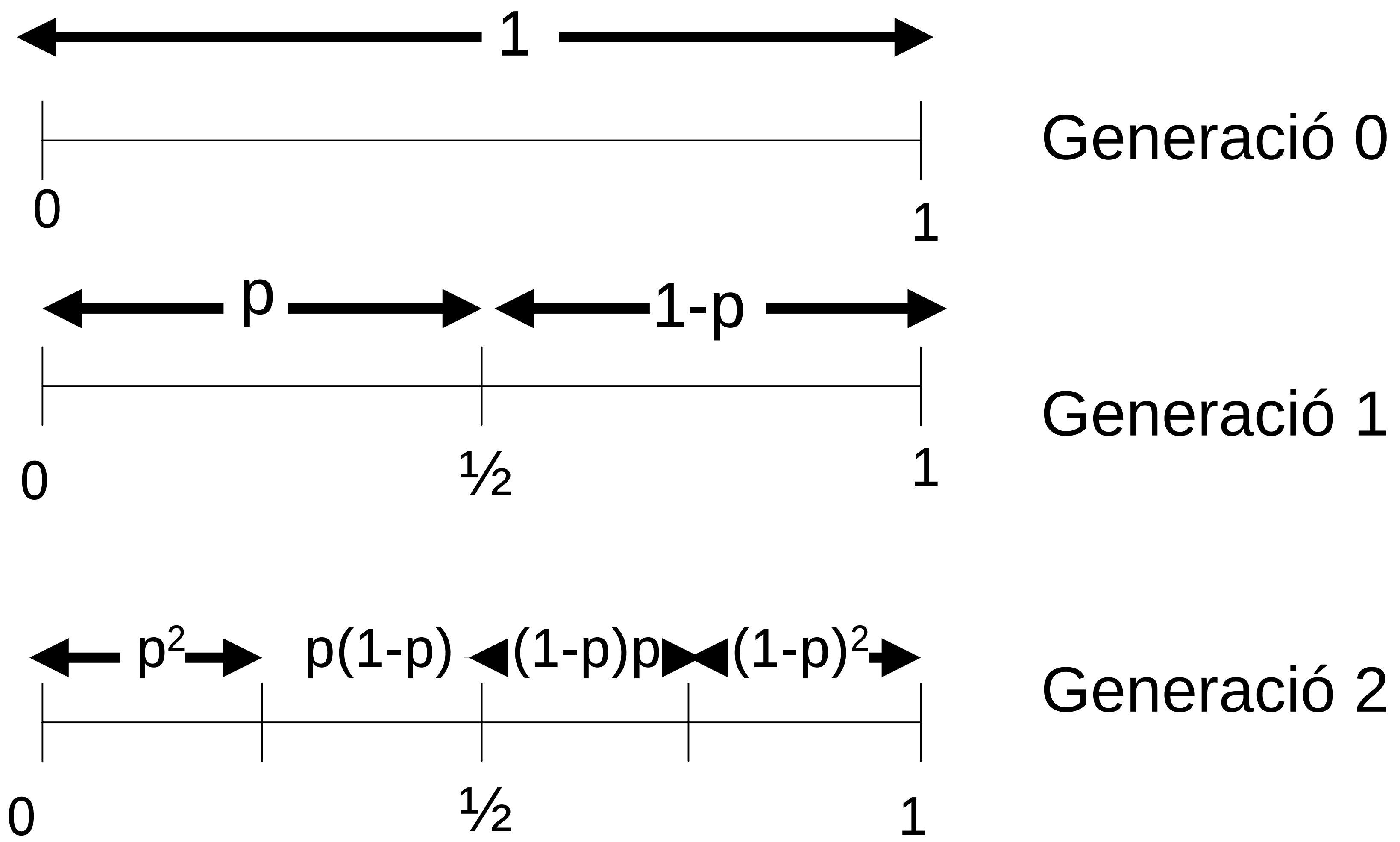
$$E(p) = \{x \in [0,1] : \frac{1}{n}\sharp\{k \in [1,n] : x_k = 0\} \to p\}$$

Teorema (Besicovitch, 39).

$$DimE(p) = p\log 1/p + (1-p)\log 1/(1-p) = h(p)$$

A. Besicovicht (1891-1970)

La mesura


1
Generació 0
0
1
p
1-p
Generació 1
0
½
1
p²
p(1-p)
(1-p)p
(1-p)²
Generació 2
0
½
1

Estimació de la mesura

- Estimació trivial $\mu(I_n(x)) \leq p^n$
- Estimació bona:

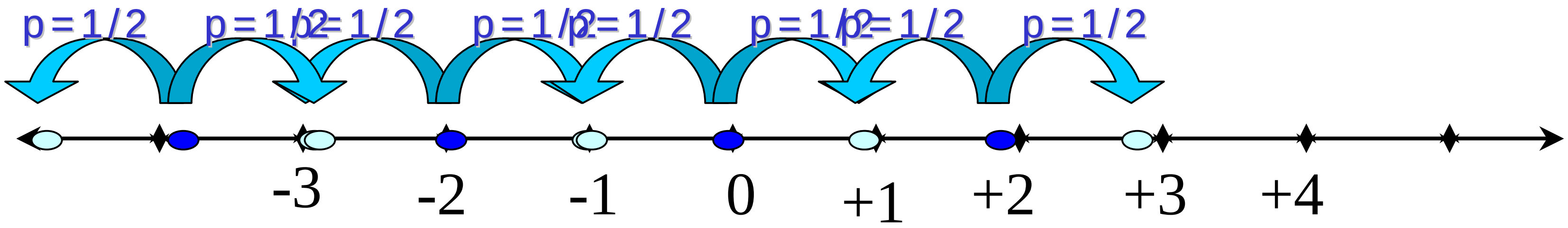
$$\mu(I_n(x)) \approx |I_n(x)|^{h(p)(1+o(1))} \quad (\mu) - g.p.t.x$$

- Encara millor:

$$\mu(I_n(x)) \approx |I_n(x)|^{h(p)(1+0(1)\sqrt{\log\log n/n})} \quad (\mu) - g.p.t.x$$

Passeig Aleatori

Joc $\begin{cases} \text{Cara: Guanya 1€} \\ \text{Creu: Perd 1€} \end{cases}$



S_n = Posició a temps *n* =

Guany acumulat a la partida n

http://webphysics.davidson.edu/WebTalks/clark/onedimensionalwalk.html

Creixement

Estimació Obvia: $|S_n| \leq n$

LLI (Khintchine, 1923):

A. Khintchine (1894-1959)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log \log n}} = \sqrt{2}, \quad g.p.t.$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log \log n}} = -\sqrt{2}, \quad g.p.t.$$

Recurrència

$$\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

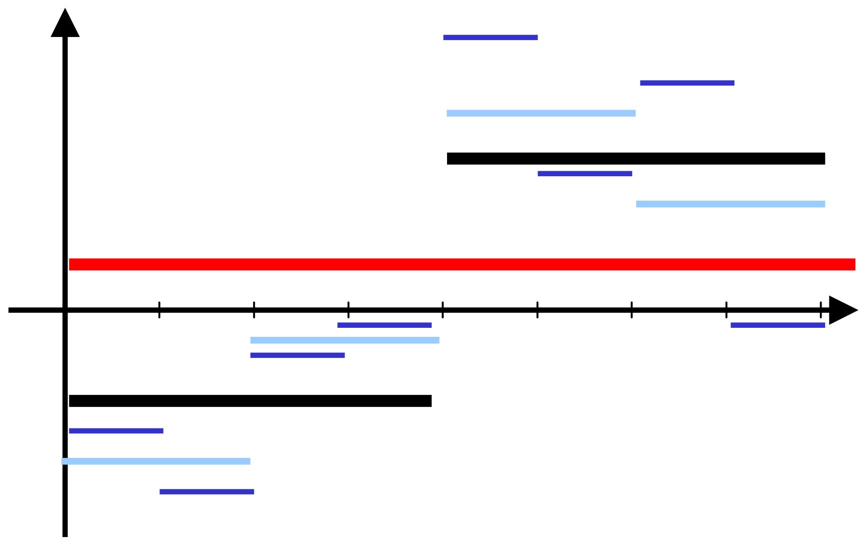
$$\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty \quad g.p.t.$$

Martingales Diàdiques

$$\mathcal{D}_n = \{[0, 1/2^n), ..., [(2^n - 1)/2^n, 1)\}$$

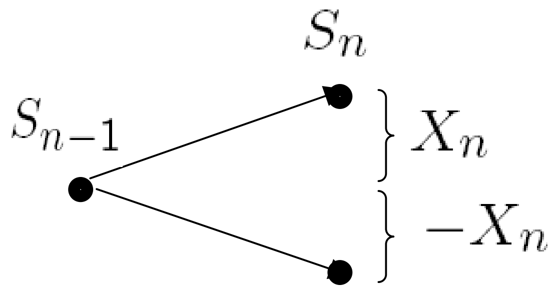
$S_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ és una martingala diàdica si:

1. S_n és constant a cada $I \in \mathcal{D}_n$
2. $J \in \mathcal{D}_{n-1} \Rightarrow S_{n-1}(J) =$ Mitja de S_n a J (Cancel.lació)



Els increments de la martingala (S_n) són les diferències $X_k = S_k - S_{k-1}$

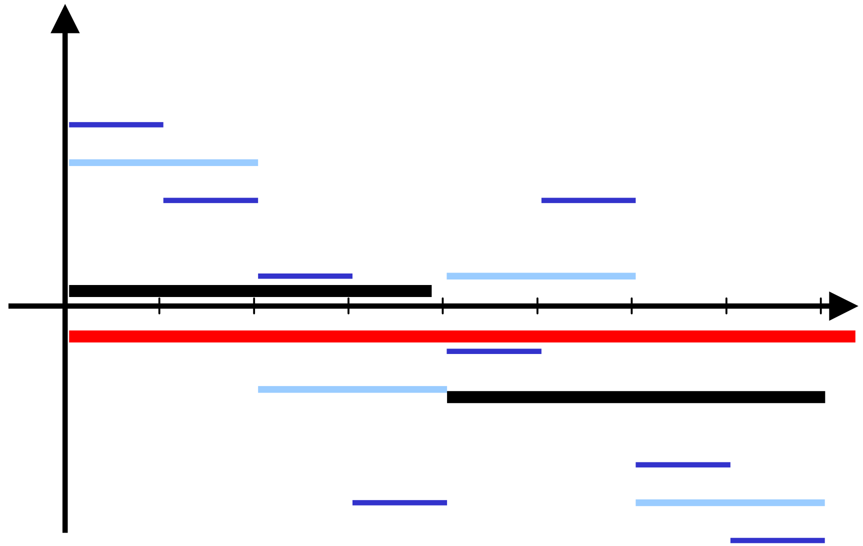
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$



Martingala: aposta el doble de la pèrdua

*La meva amiga em va prometre que apostariem junts a la ruleta. Vam pendre tot l'or que vam trobar a casa seva i vam jugar doblant les apostes amb el sistema conegut com **Martingala**… (*Casanova*, Historia de la meva vida, 1754).*

Variació Quadràtica



$$\langle S \rangle_n^2(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(S_k(x) - S_{k-1}(x) \right)^2$$

Llei del Logaritme Iterat

- Passeig Aleatori :
  - Hausdorff (1913): $S_n = O(n^{1/2+\epsilon})$
  - Hardy-Littlewood (1914): $S_n = O(\sqrt{n \log n})$
  - Khintchine (1923): $S_n = O(\sqrt{n \log \log n})$
- V.A.I. : Kolmogorov (1929), Hartman- Wintner(1941)
- Martingales: Levy (1954), Stout (1970)
- Moviment Brownià: Khintchine (1933)
- Sèries Lacunars: Salem-Zygmund (1954), M. Weiss(1959
- Funcions harmòniques: Bañuelos-Klemes-Moore(1989)

Martingales i Funcions

Martingales ⟺ Teoria de Funcions

El concepte clau és Cancel·lació !!

Un principi general:

Cancel·lació ⟹ Automillora

Diccionari: Martingales-Funcions

n	$h=2^{-n}$
$S_n(I) = (f(b) - f(a))/(b - a)$	f(x)
$\langle S \rangle$	<f>

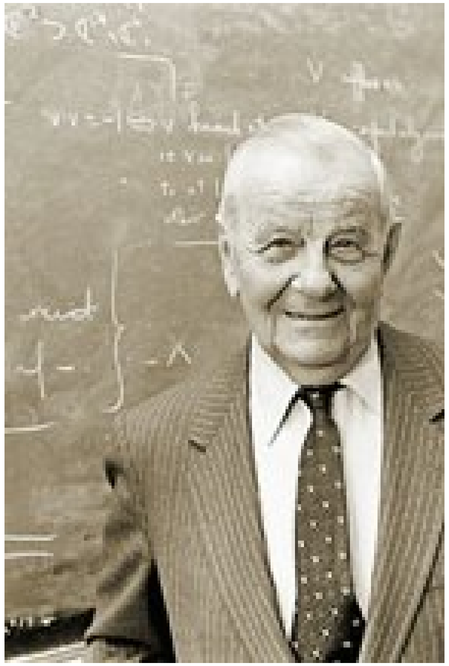
Classe de Zygmund

Una funció f(x) és de la classe de Zygmund si

$$|(f(x+h)-f(x))-(f(x)-f(x-h))| \leq C|h|$$

Exemple: Funció de Weierstrass

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \cos(\lambda^{-n}x)\,, \quad 0<\lambda<1$$



Derivabilitat

Teorema (Makarov, 89). Sigui f(x) una funció de la classe de Zygmund. Aleshores:

$$\mathrm{Dim}\ \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} : \limsup_{h\to 0} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} < \infty\} = 1$$

I en dimensions superiors?

Dimensions Superiors

Sigui f(x) una funció de la classe de Zygmund al pla.

Problema: Quina és la mida de

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \limsup_{|h| \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} < \infty\} \text{ ?}$$

MOLT DIFÍCIL

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \limsup_{t \to 0} \frac{|f(x+(t,0)) - f(x)|}{|t|} < \infty \right\} \cap$$

$$\cap \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \limsup_{t \to 0} \frac{|f(x+(0,t)) - f(x)|}{|t|} < \infty \right\}$$

FALS

Exemple de David Preiss

Teorema (2007). Sigui f(x) una funció de la classe de Zygmund al pla. Aleshores

$$\mathrm{Dim}\ \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} : \limsup_{h \to 0} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} < \infty\} \geq 1$$