Treballs de Fi de Grau
Titulació de Matemàtiques
Curs 2010-11, Termini Setembre 2010

1. Tipus A. Propostes del professorat.

	Tutor	Títol
1	Aris Daniilidis i Gonzalo Seco (Departament de Telecomunicació i Enginyeria de Sistemes. EE.)	Aplicacions de l'optimització a comunicacions sense fils
2	Frederic Utzet i José López Salcedo (Departament de Telecomunicació i Enginyeria de Sistemes Àrea de Teoria del Senyal i Comunicacions)	Estudi d'una nova tècnica de detecció de senyal per a receptors de comunicacions a partir de la teoria de valors extrems (EVT)
3	Joaquim Roé	Corbes algebraiques
4	Armengol Gasull	La funció de període per a sistemes integrables
5	Aris Daniilidis	Introducción al análisis convexo y no diferenciable
6	Aris Daniilidis	Estudio asintótico de sistemas dinámicos de tipo gradiente.
7	Wolfgang Pitsch	El espacio de los grupos cerrados de R^4 es una esfera
8	Wolfgang Pitsch	Invariante de Dehn de poliedros en dimension 3
9	Jaume Llibre	El Teorema de Poincaré-Hopf
10	Jaume Llibre	El Teorema de Pick i les seves generalitzacions a dimensió més gran que 2
11	Francesc Bars	Atacant el teorema de Fermat, idees de Kummer
12	Francesc Bars	La correspondència bijectiva de teoria de Galois no finita
13	Francesc Bars	El teorema de les unitats de Dirichlet

2. Tipus B. Línies temàtiques dels tutors

Recomanem als interessats que parlin amb els tutors abans de apuntar-s'hi

	Tutor	Títol
1	Cristina Martínez	• Geometria algebraica (incluye temas como por ejemplo: Teoría de Superficies de Riemann, Geometría enumerativa algebraica, Categorías derivadas)
2	Jaume Aguadé	• Topologia algebraica • Teoria d'homotopia • Geometria axiomàtica • Àlgebra homològica • Cohomologia de grups (S'inclouen temes diversos com ara: teoria de nusos, grups de simetria, políedres en dimensió arbitrària, varietats diferenciables i varietats topològiques, plans projectius empaquetaments d'esferes en dimensió arbitrària, camps vectorials, multiplicacions en espais topològics, etc. etc.)
3	Wolfgang Pitsch	• Topologia algebraica • Àlgebra homològica • Varietats • Teoria de Nusos
4	Jaume Llibre	• Com s'arriba a la llei de gravitació universal a partir de les lleis empíriques de Kepler sobre el moviment planetari i viceversa. • L'esfera celeste i el temps • Introducció als Sistemes Hamiltonians
5	David Marín	• geometria diferencial • equacions diferencials

3. Resums

1. Aplicacions de l'optimització a comunicacions sense fils

Molts problemes de disseny a sistemes de comunicacions sense fils es poden formular com problemes d'optimització. Alguns exemples són la detecció del símbols d'informació a comunicacions digitals, el disseny d'antenes adaptatives per sistemes multiusuari, la derivació de filtres temporals o espacials robustos a errors dels models, o l'obtenció de formes d'ona per aconseguir determinades prestacions. Fins fa pocs anys, molts d'aquests problemes es resolien de manera ad hoc. I ha estat recentment, arrel dels treballs de Stephen Boyd, quan l'optimització s'ha "redescobert" al món de les comunicacions sense fils i del processament del senyal. Això ha permès resoldre de forma més eficient els problemes de disseny plantejats però també, el que és més important, ha fet possible entendre les propietats que han de satisfer els dissenys òptims i com varien aquests en funció dels condicionants reals del sistema. Avui dia l'aplicació de tècniques d'optimització al camp del processament de senyal per comunicacions constitueix un àrea amb molta activitat. L'objectiu d'aquest TFG és fer en primer lloc una revisió de diferents problemes a comunicacions sense fils on l'ús de l'optimització

ha proporcionat noves solucions mitjançant el mètode de la relaxació semidefinida positiva o mitjançant tècniques d'optimització mixta sencera/real. En segon lloc, es seleccionarà un d'aquestes problemes, possiblement relacionat amb optimització mixta (és a dir, amb variables senceres i reals) o amb optimització quadràtica, i s'analitzarà en detall, corroborant l'estudi amb simulacions amb Matlab.

↑

2. Estudi d'una nova tècnica de detecció de senyal per a receptors de comunicacions a partir de la teoria de valors extrems (EVT)

La detecció de senyal és una de les principals tasques que ha de dur a terme qualsevol receptor de comunicacions. L'objectiu és decidir si el receptor ha de continuar en mode d'espera (en cas que no hi hagi senyal a l'entrada) o si el receptor ha d'iniciar el procés per a recuperar la informació transmesa o estimar algun paràmetre d'interès del senyal rebut (en cas que efectivament hi hagi senyal a l'entrada). Hi ha sistemes de comunicacions on el procés de detecció de senyal implica avaluar múltiples hipòtesis, cadascuna de les quals dóna com a resultat un valor numèric indicatiu de la versemblança de la presència del senyal. La decisió final es pren doncs en base al valor màxim de tot el conjunt de valors de versemblança, resultant en una mètrica que pot analitzar-se en termes estadístics, mitjançant la teoria de valors extrems (EVT-Extreme Value Theory).

L'objectiu d'aquest TFG és analitzar noves tècniques de detecció de senyal i el seu impacte en termes de valors extrems. Per a això, com a primer pas es farà una revisió dels mètodes clàssics de detecció i els fonaments d'EVT; posteriorment, s'avaluaran (analíticament i mitjançant simulacions en Matlab) les prestacions d'una nova tècnica de detecció de senyal basada en moments absoluts, a partir de la probabilitat de detecció i falsa alarma sobre els valors extrems resultants.

↑

3. Joaquim Roé. Corbes algebraiques.

Es fa una introducció a la teoria de les corbes algebraiques planes i les superfícies de Riemann, en què conflueixen mètodes de diverses àrees de les matemàtiques, com l'àlgebra, l'anàlisi i la topologia. L'objectiu últim i més ambiciós és comprendre el teorema de Riemann-Roch i la seva demostració.

Bibliografia:

* Fulton "Algebraic Curves"

* Kirwan "Complex Algebraic Curves"

* Casas-Alvero "Singularities of Plane Curves"

↑

4. Amengol Gasull. La funció de període per a sistemes integrables

Hi ha dos exemples paradigmàtics de equacions diferencial integrables on es pot veure que el període de les òrbites periòdiques varia monòtonament amb la energia, el pendol sense fregament i el sistema de Lotka-Volterra. S'estudiaran aquestes dues demostracions i es consideraran altres equacions diferencials on la funció de període es o bé constant (cas que correspon a la anomenada isocronia i ha tingut una gran rellevància històrica) o bé no és monòtona.

↑

5. Aris Danilidis, Introducción al análisis convexo y no diferenciable

La teoría del análisis no diferenciable es una parte moderna del análisis aplicado. El objetivo de este trabajo es la comprensión de los principios y las herramientas básicas de dicha teoría (cono tangente, subdiferencial, operadores multi-valuados) así como sus primeras aplicaciones en la teoría de la optimización con restricciones. La parte prepotente de este trabajo será el estudio de las funciones convexas desde un punto de vista a la vez analítico y geométrico.

Perfil: Conocimiento del análisis real y funcional (calculo diferencial, espacios de Hilbert), interés a aplicaciones.

↑

6. Aris Danilidis, Estudio asintótico de sistemas dinámicos de tipo gradiente

En varias situaciones, tanto en la matemática pura (teoría de Morse-Smale) como en la matemática aplicada (EDPs, teoría de control, optimización) es importante comprender las propiedades del flujo de gradiente de un potencial. Este trabajo propone un estudio de propiedades asintóticas (convergencia de las orbitas, longitud) para el caso de un potencial analítico o convexo. En el segundo caso se estudiaran vínculos con algoritmos de optimización.

Perfil: Conocimiento de calculo diferencial, madurez matemática y cierto interés a aplicaciones.

↑

7. Wolfgang Pitsch. El espacio de los grupos cerrados de R^4 es una esfera

Este trabajo se centrará en entender y explicar este enunciado. Mezcla topología, álgebra y una pizca de análisis.

↑

8. Wolfgang Pitsch. Invariante de Dehn de poliedros en dimension 3.

Se trata de entender la refutación del tercer problema de Hilbert por su alumno Max Dehn: Dados dos poliedros de dimensión 3 de mismo volumen, ¿es posible cortar uno en trozos poliedrales y recomponer con estos el segundo? El caso de dimensión 2 era ya conocido (afirmativamente) por los griegos.

↑

9. Jaume Llibre. El Teorema de Poincaré-Hopf.

Es tracta de començar provant aquest teorema en dimensió dos. És a dir que tot camp de vectors continu sobre una superfície compacte sense frontera orientable o no amb un nombre finit de punts singulars verifica que la suma dels índexs dels punts singulars és igual a la característica d'Euler de la superfície.

La característica d'Euler de la superfície és un concepte purament topològic i global, mentre que l'index d'un camp de vectors continu és un concepte essencialment analític i local. Per tant aquest teorema estableix una connexió molt profunda entre dos nocions aparentment llunyanes i de naturalesa molt diferent, local i global. Estudiarem probablement la prova més senzilla que hi ha d'aquest teorema.

Després estendrem aquest teorema a totes les superfícies amb frontera amb camps continus verificant certes condicions sobre la frontera.

Finalment estudiarem l'extensió d'aquest teorema a qualsevol varietat compacta sense frontera.

[1] J.W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, Va. 1965.

[2] F. Dumortier, J. Llibre i J.C. Artés, Qualitative theory of planar differential systems, UniversiText 5, Springer-Verlag, New York, 2006.

[3] J. Llibre i J. Villadelprat, A Poincaré index formula for surfaces with boundary, Differential and Integral Equations 11 (1998), 191-199.

↑

10. Jaume Llibre. El Teorema de Pick i les seves generalitzacions a dimensió més gran que 2.

La fórmula de Pick ens dona l'area d'un polígon (homeomorfa a un disc tancat) que té els seus vèrtexs en punts d'un reticle, més exactament l'àrea d'aquest polígon és igual a $I - B/2 - 1$, on I és el nombre de punts del reticle que estan a l'interior del polígon i B és el nombre de punts del reticle que estan a la frontera del polígon.

Estudiarem les extensions d'aquest resultat a polígons que no siguin homeomorfes a un disc tancat, i la seva extensió a políedres en dimensió més gran que 2.

[1] B. Grünbaum i G.C. Shephard, Pick's theorem, The American Mathematial Monthly 100 (1993), 150–161.

[2] J. Llibre i P. Mumbrú, On sizes and shapes of lattice figures, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 22 (1991), 365–386.

[3] I.G. MacDonald, The volume of a lattice polyedron, Proc. Cambridge Phil. Soc. 59 (1963), 719–726.

↑

11. Francesc Bars. Atacant el teorema de Fermat, idees de Kummer.

Un dels resultats matemàtics més importants en els últims anys és la demostració de Andrew Wiles de l'últim teorema de Fermat, és a dir que l'equació $X^n + Y^n = Z^n$ amb $n \geq 3$ no té cap solució amb $XYZ \neq 0$ amb $X, Y, Z \in \mathbb{Z}$.
Fixeu-vos que podem escriure l'equació en l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ mitjançant:

$$\prod_{j=1}^{n} (X + e^{2\pi i j/n} Y) = Z^n$$

i per tant una primera idea per atacar l'últim Teorema de Fermat és estudiar factoritzacions d'elements en l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$.

Lammé en l'any 1847 va presentar una demostració en l'Acadèmia de les Ciències de Paris. Kummer ja sabia que era errònea la demostració. Perquè? Doncs la demostració de Lammé suposava que l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ era un DFU (domini de factorització única) i Kummer ja havia demostrat en l'any 1844 que per tan sols un nombre finit de n l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ és un DFU.

El treball consisteix en treballar propietats dels anells $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ o més en general del que es coneixen actualment dels anells anomenats dominis de Dedekind. Demostrar eu en el treball que aquests anells tenen factorització única amb ideals. Si l'alumne té més interés i vol aprofundir més, podrà donar unes traces de la prova del teorema de Fermat per a primers regulars obtinguda per Kummer.

Algunes referencies:
Dino Lorenzini: "An invitation to Arithmetic Geometry". Chapter I and III§$1-4$. SGM volum 9, American Mathematical Society.
M.F.Atiyah-I.G.Macdonald: "Introducción al Álgebra conmutativa". Ed. Reverté. Capítol 9.
Z.I.Borevich-I.R.Shafarevich: "Number Theory", Academic Press. Chapter III.
K.Kato-N.Kurokawa-T.Saito: "Number theory 1: Fermat's dream". Iwasawa series, AMS. Chapter 4.

↑

12. Francesc Bars. La correspondència bijectiva de teoria de Galois no finita.

En el vostre curs de teoria de Galois heu demostrat: donada una extensió finita L/K Galois llavors hi ha una bijecció entre cossos intermedis de L/K i subgrups del grup de Galois $Aut_K(L) = Gal(L/K)$.

No obstant heu vist també a moltes extensions no finites, per exemple l'extensió $\overline{Q}$ (el cos d'introduir-hi totes les arrels de polinomis en $\mathbb{Q}[x]$) sobre $\mathbb{Q}$ és no finita com vam demostrar, aquesta extensió és separable i normal amb la definició donada al curs de grau de l'any 2008-09. El grup més important per aritmètica és $Aut_{\mathbb{Q}}(\overline{Q})$ que permeteu-me escriure per $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) =: G_{\mathbb{Q}}$. Una primera pregunta és: hi ha una correspondència bijectiva entre subcossos de $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ i subgrups de $G_{\mathbb{Q}}$?

Definim L/K una extensió de cossos (finita o no) Galois si L/K és una extensió normal i separable. El treball vol estudiar la correspondència bijectiva de Galois per a extensions L/K Galois no necessàreament finites.

El treball consisteix en demostrar certa correspondència bijectiva de Galois per a extensions no finites Galois i aportar algun exemple explícit. Si queda ganes d'ampliar i treballar més es pot complementar amb el resultat de Waterhouse que afirma que tot grup profinit (cert limit de grups finits) es pot pensar com un grup de Galois per a certa extensió de cossos.

Referencies:

J.Milne: "Fields and Galois Theory". http://www.jmilne.org/math.
G.Karpilovsky:"Field Theory".
S.S.Shatz:"Profinite groups Arithmetic and Geometry". Chap.I.
J.Ribes:"Grupos profinitos". Primer capítulo.
D.N.Dikranjan-I.R.Prodanov-L.N.Stoyanov: "Topological groups".

↑

13. Francesc Bars. El teorema de les unitats de Dirichlet.

En el treball anterior "atacant l'equació de Fermat $x^p + y^p = z^p$" apareix l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ dins el cos $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$. Una propietat d'aquest anell és que tot $\alpha \in \mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ compleix que el polinomi irreductible de α sobre $\mathbb{Q}$ té coeficients enters (amb la notació del curs de Teoria de Galois escriurem $Irr(\alpha, \mathbb{Q})[x] \in \mathbb{Z}[x]$ (usualment tan sols ha de tenir coeficients a Q!!). Realment és comprova que $\{\beta \in \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}) | Irr(\beta, \mathbb{Q})[x] \in \mathbb{Z}[x]\} = \mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$. Sigui K un cos amb $[K : \mathbb{Q}] < \infty$, el conjunt $\mathcal{O}_K := \{\beta \in K | Irr(\beta, \mathbb{Q})[x] \in \mathbb{Z}[x]\}$ és un anell del cos K que s'anomena l'anell d'enters del cos K. Aquests anells $\mathcal{O}_K$ tenen molt bones propietats (són dominis de Dedekind!, veieu el primer treball) i tenen molta importància en aritmètica.

El treball consisteix en estudiar el grup d'unitats de $\mathcal{O}_K - \{0\}$ amb el producte. Fixeu-vos que si $K = \mathbb{Q}$ tenim que $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$ i les unitats amb el producte de $\mathbb{Z} - \{0\}$ és el grup finit $\{1, -1\}$ que és el grup de les arrels de la unitat en $\mathbb{Q}$.

El treball consisteix a demostrar el següent teorema de Dirichlet: el grup de les unitats de $\mathcal{O}_K - 0$ és un grup abelià que és el producte del grup de les arrels de la unitat en el cos K (grup finit) per un grup abelià lliure de rang $r := r_1 + r_2 - 1$ on r_1, r_2 són el nombre dels diferents morfismes no equivalents que podem inmersionar el cos K dins els nombres reals i complexos, respectivament.

Referencies:

Z.I.Borevich-I.R.Shafarevich:"Number Theory", Academic Press. Chapter II.
J. Neukirch:"Algebraische Zahlentheroie", Springer. També traduït a l'anglès. Kapitel I-§4-§7.