Breu introducció a la geometria analítica rígida

Xavier Xarles

Gener del 1999

Introducció

Objectiu

L'objectiu de la geometria rígida analítica és desenvolupar una "geometria" sobre un cos complet respecte un valor absolut no arquimedià de tal manera que:

1. Tota varietat algebraica V (o, més en general, tot esquema localment de tipus finit) tingui una única varietat analítica V^{an} associada. A més, si V és connexa (regular, reduïda, separada, etc.), la seva varietat analítica associada V^{an} també és connexa (regular, reduïda, separada, etc.).

2. Donada la varietat analítica $(\mathbb{A}^n)^{an}$, les funcions "regulars" siguin les series de potencies amb n variables i coeficients a K, convergents a tot $\bar{K}^n$. A més, els "polidiscs" siguin oberts de $(\mathbb{A}^n)^{an}$.

3. Donada una varietat projectiva V, les subvarietats analítiques de V^{an} siguin algebraiques (teorema de Chow), o, més en general, tinguem un teorema GAGA (el mateix amb morfismes finits).

Motivació

La motivació inicial (de J. Tate a **4**) per a construir aquesta geometria era la de donar un sentit **geomètric** a l'afirmació: donat $q \in K^*$ amb $|q| < 1$, el grup $K^*/q^{\mathbb{Z}}$ és el grup de K-racionals d'una corba el·líptica (amb reducció multiplicativa split si el valor absolut de K és discret). El resultat que un arriba és que la corba analítica rígida $\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$ (que sols té sentit en la geometria analítica) és isomorfa (analíticament) a una corba el·líptica.

La nostra motivació serà: poder aplicar tècniques de la geometria analítica per a construir recobriments de Galois algebraics de $\mathbb{P}^1$.

Problema

Posem-nos per comoditat al cas en que $K = \bar{K}$. Aleshores $\mathbb{A}^1$ hauria de ser com a conjunt igual a K i podem considerar la topologia donada per el valor absolut. Aleshores:

Problema 1 *K és totalment disconnex. De fet dues boles obertes $B(a,r) = \{x \in K \mid |x-a| < r\}$ o bé estan una dins de l'altre o bé són disjuntes.*

Problema 2 *Una funció f de K hauria de ser analítica si i només si ho és en cada obert d'un recobriment de K. Però tant les boles "obertes" $B(a,r)$ com les boles "tancades" $\bar{B}(a,r)$ són obertes a K! Podem per tant prendre el recobriment per oberts $K = B(0,1) \bigsqcup (K \setminus B(0,1))$ i considerar la funció*

$$f(x) := \begin{cases} 0 & si\ |x| \leq 1 \\ 1 & si\ |x| > 1 \end{cases}$$

que és localment analítica però no globalment analítica (segons la nostra definició anterior).

Idea naïf

Seguim en el cas $K = \bar{K}$. Direm *obert admissible* tant sols a l'unió disjunta de policilindres, o sigui d'oberts de la forma

$$\bar{B}(a,r) \setminus (\bigsqcup_{i=1}^{n} B(a_i, r_i))$$

(dits també oberts estàndard), observant que l'unió (no necessàriament disjunta) d'oberts admissibles no és (en general) admissible, però l'intersecció finita si que ho és. Definim ara *recobriment admissible* com un recobriment <u>finit</u> per oberts admissibles. Amb aquesta definició és pot provar que una funció de K a K és analítica (i.e. donada per una serie de potencies) si i només si és analítica localment en cada obert d'un recobriment admissible.

Compte! Els oberts estàndard són base de la topologia de K. Així que el que volem és construir una mena de topologia on l'unió d'oberts no sigui necessàriament un obert, però on haguem de dir que vol dir recobrir per oberts. Això és exactament el que fa el concepte de *topologia de Grothendieck*.

El mètode per a construir els espais analítics rígids és similar al de la teoria d'esquemes: primer estudiarem les àlgebres de funcions (anomenades afinoides), després els hi assignarem un conjunt (varietats afinoides), després definirem obert (admissible) en aquest conjunt i un feix d'anells estructural. Finalment els espais analítics rígids seran els *G-espais localment anellats* tals que localment siguin afinoides. Seguirem el mètode explicat en el llibre **1**.

1 Àlgebres afinoides

Comencem recordant la definició de cos complet per un valor absolut no arquimedià (o valor absolut ultramètric).

Definició 1 *Direm que un cos K té un valor absolut no arquimedià si existeix una aplicació $|\ |: K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que*

(a) $|x| = 0 \iff x = 0$.

(b) $|xy| = |x|\,|y|$ *per a tot* $x, y \in K$.

(c) $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ *per a tot* $x, y \in K$.

Direm que és complet respecte a $|\ |$ si tota sèrie de Cauchy a K és convergent.

Exemples 2 *Exemples de cossos complets respecte a un valor absolut són $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}_p := \hat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ (la completació de la clausura algebraica de $\mathbb{Q}_p$),*

$$k((t)) := \{\sum_{i \geq N}^{\infty} a_i t^i \ ; \ N \in \mathbb{Z} \ , \ a_i \in k\}$$

(el cos de sèries de Laurent amb coeficients a un cos k qualsevol), i en general qualsevol cos de fraccions d'un anell de valoració discreta complet, les seves extensions finites i la completació de la seva clausura algebraica.

Per a la resta d'aquestes notes K sempre denotarà un cos complet respecte a un valor absolut no arquimedià.

Definició 3 *L'anell de sèries estrictament convergents sobre K amb n indeterminades (o àlgebra de Tate) és per definició*

$$\mathbb{T}_n = \mathbb{T}_n(K) = K\langle X_1, \ldots, X_n \rangle := \{\sum_{|\nu| \geq 0} a_\nu X^\nu \ ; \ a_\nu \in K \ i \lim_{|\nu| \to \infty} |a_\nu| = 0\}.$$

on hem fet servir la notació $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$, $|\nu| := \nu_1 + \cdots + \nu_n$ i $X^\nu := X_1^{\nu_1} \ldots X_n^{\nu_n}$.

Observem que $\mathbb{T}_n$ és el subanell de l'anell de sèries formals amb coeficients a K format per les sèries convergents a tota la bola unitat $B^n := \{x \in K^n \; ; \; \|x\| \leq 1\}$, on $\|(x_1, \ldots, x_n)\| := \max_i \{x_i\}$.

Definim, per a tot element $f = \sum a_\nu X^\nu \in \mathbb{T}_n$, la seva norma com a $\|f\| := \max_\nu \{a_\nu\}$. És una comprovació immediata que ens dóna una norma no arquimediana a $\mathbb{T}_n$ estenent el valor absolut de K.

Propietats 4 *(i) $\mathbb{T}_n$ és una àlgebra de Banach (i.e. és completa).*

(ii) $\mathbb{T}_n$ és noetherià, factorial i Jacobson.

(iii) Tots els ideals de $\mathbb{T}_n$ són tancats i tot homomorfisme de K-àlgebres de $\mathbb{T}_n$ a $\mathbb{T}_m$ és continu.

Definirem ara el que seran els anells de funcions de les varietats afinoides.

Definició 5 *Una K-àlgebra de Banach s'anomena afinoide si existeix un $n \in \mathbb{N}$ i un epimorfisme de K-àlgebres (continu) $f : \mathbb{T}_n \longrightarrow A$. En altres paraules, les K-àlgebres afinoides són els quocients de $\mathbb{T}_n$ respecte a un ideal (tancat).*

Propietats 6 *(i) Tota K-àlgebra afinoide és noetheriana i Jacobson.*

(ii) Tot ideal d'una K-àlgebra afinoide és tancat i el seu quocient és una K-àlgebra afinoide.

(iii) La suma directa de K-àlgebres afinoides és una K-àlgebra afinoide.

(iv) Si A i B són K-àlgebres afinoides, aleshores el completat del producte tensorial, $A \widehat{\otimes}_K B$, també ho és.

Exemples 7 *Sigui A una K-àlgebra afinoide.*

(1) $A\langle X \rangle$ i $A\langle X, X^{-1} \rangle$ són K-àlgebres afinoides per a X una indeterminada.

(2) Si denotem per $f = (f_1, \ldots, f_m)$ i $g = (g_1, \ldots, g_n)$ on f_i i g_j són elements de K, aleshores

$$A\langle f, g^{-1} \rangle := A\langle X, Y \rangle / (X - f, gY - 1)$$

és una K-àlgebra afinoide.

(3) Si tenim que $f_1, \ldots, f_m$ i g generen l'ideal total de A (i.e. no tenen zeros en comú), aleshores

$$A\langle \frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_m}{g} \rangle := A\langle X_1, \ldots, X_n \rangle / (gX_1 - f_1, \ldots, gX_n - f_n)$$

és una K-àlgebra afinoide.

2 Varietats afinoides

De la mateixa manera que les varietats afins (clàssiques) són, com a conjunts, els espectres primers de les K-àlgebres de tipus finit, les varietats afinoides són com a conjunts els espectres maximals de les K-àlgebres afinoides.

Podem començar observant que si el cos K és algebraicament tancat aleshores el espectre maximal de $\mathbb{T}_n$ està en correspondència bijectiva de manera natural amb els punts de la bola unitat B^n, i per tant podem considerar $\mathbb{T}_n$ com a funcions de B^n. Aquest resultat és degut a un "teorema dels zeros de Hilbert" que en el nostre context es dedueix del fet que $\mathbb{T}_n$ és Jacobson.

En general podem considerar $\mathbb{T}_n$ com a funcions sobre $\mathrm{Max}(\mathbb{T}_n)$ (que és isomorfa al quocient de $B^n(\bar{K})$ respecte a l'acció del grup de Galois absolut de K) amb valors a $\bar{K}$, definint, per a tot ideal maximal $\mathfrak{m}$ i tota $f \in \mathbb{T}_n$, $f(\mathfrak{m})$ com la imatge de f en $\mathbb{T}_n/\mathfrak{m}$, que és una extensió algebraica finita de K.

Donada una àlgebra afinoide A denotarem per $\mathrm{Sp}(A)$ el seu espectre maximal. Entendrem que un morfisme entre $\mathrm{Sp}(A)$ i $\mathrm{Sp}(A')$ és sempre el morfisme induït per un morfisme de K-àlgebres de A' a A (està ben definit doncs A i A' són Jacobson!).

El següent pas és definir que entendrem per obert a $\mathrm{Sp}(A)$. Una opció que podem prendre és definir obert com a *obert Zariski*; però és clar que aquesta opció no és la que ens interessa, doncs per a la bola unitat de dimensió 1 sols obtindríem els complementaris dels conjunts finits. La segona opció és definir-los via una certa propietat universal.

Definició 8 *Un* subdomini (o subconjunt) afinoide *de* $\mathrm{Sp}(A)$ *és el subconjunt imatge d'un morfisme injectiu* $\phi : \mathrm{Sp}(A') \hookrightarrow \mathrm{Sp}(A)$ *tal que verifica: per a tota àlgebra afinoide i tot morfisme* $\psi : \mathrm{Sp}(B) \to \mathrm{Sp}(A)$ *amb imatge dins de l'imatge de* ϕ*, existeix un únic morfisme* $\psi' : \mathrm{Sp}(B) \to \mathrm{Sp}(A')$ *tal que* $\psi = \phi \circ \psi'$*,*

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \\ \mathrm{Sp}(A') & \hookrightarrow & \mathrm{Sp}(A) \\ & \nwarrow & \uparrow \psi \\ & \exists! & \mathrm{Sp}(B) \end{array}$$

Exercici 9 *Comproveu que l'anàleg en la teoria d'esquemes afins de la propietat universal de la definició anterior ens caracteritza els oberts afins d'un esquema afí.*

Exemple 10 *Sigui $X = \mathrm{Sp}(A)$ una varietat afinoide, i considerem funcions $g, f_1, \ldots, f_n \in A$ sense zeros comuns, i.e. generant l'ideal total. Anomenarem*

$$X(\frac{f}{g}) := X(\frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g}) := \{x \in X \ ; \ |f_i(x)| \leq |g(x)| \ , \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Els subconjunts de X d'aquesta forma els anomenarem dominis racionals. *Aleshores $X(\frac{f}{g})$ és la imatge del morfisme natural $\mathrm{Sp}(A\langle\frac{f}{g}\rangle) \to \mathrm{Sp}(A)$.*

Exercici 11 *Definiu el* dominis de Laurent *$X(f, g^{-1})$ d'una manera anàloga als dominis racionals i comproveu que són la imatge del morfisme natural de $\mathrm{Sp}A\langle f, g^{-1}\rangle$ a $\mathrm{Sp}A$, i que verifiquen la propietat universal. Finalment proveu que els dominis de Laurent són dominis racionals.*

Propietats 12 *(i) La intersecció de dos subdominis afinoides (racionals) és un subdomini afinoide (racional), donat per $\mathrm{Sp}(B_1) \cap \mathrm{Sp}(B_2) = \mathrm{Sp}(B_1 \widehat{\otimes}_A B_2)$ si*

$$\mathrm{Sp}(B_1) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(A) \hookleftarrow \mathrm{Sp}(B_1).$$

(ii) La unió disjunta de dos subdominis afinoides (racionals) és un subdomini afinoide (racional), donat per $\mathrm{Sp}(B_1) \sqcup \mathrm{Sp}(B_2) = \mathrm{Sp}(B_1 \oplus B_2)$.

(iii) Si $\mathrm{Sp}(A'') \hookrightarrow \mathrm{Sp}(A')$ i $\mathrm{Sp}(A') \hookrightarrow \mathrm{Sp}(A)$ són subdominis afinoides (racionals), aleshores $\mathrm{Sp}(A'') \hookrightarrow \mathrm{Sp}(A)$ donat per la composició també ho és.

(iv) L'antiimatge d'un subdomini afinoide (racional) per un morfisme de varietats afinoides és un subdomini afinoide (racional).

De fet els subdominis racionals són a la pràctica els subconjunts afinoides que hem de considerar: tots els dominis afinoides són unió finita de dominis racionals (compte que no és cert que la unió finita de racionals sigui sempre afinoide!).

Per acabar podem veure com a exemple el cas de la bola unitat:

Exemple 13 *Tot subconjunt afinoide de $\mathbb{B}^1$ és unió disjunta de subconjunts de la forma*

$$\overline{B}(a, r) \setminus (\bigsqcup_{i=1}^{n} B(a_i, r_i)) = \mathbb{B}^1 \left(\frac{X - a}{r}, \left(\frac{X - a_1}{r_1}\right)^{-1}, \ldots, \left(\frac{X - a_n}{r_n}\right)^{-1} \right).$$

Com ja hem vist no és cert en general que la unió de subconjunts afinoides (ni tant sols si és finita) és afinoide. El nostre objectiu és definir una "topologia" on aquests siguin els oberts. Per això necessitem el concepte de topologia de Grothendieck.

3 G-espais topològics

Definició 14 *Una* topologia de Grothendieck *(o G-topologia) en un conjunt X consisteix a donar*

(a) Un família S de subconjunts de X, anomenats oberts admissibles.

(b) Per a cada $U \in S$, un conjunt de recobriments $Cov(U)$ de U per elements de S anomenats recobriments admissibles (i.e. $\mathcal{U} = (U_i) \in Cov(U)$ ha de satisfer que tots els U_i són de S i que $\bigcup U_i = U$).

Aquestes dades han de satisfer que

(i) $U, V \in S \Longrightarrow U \cap V \in S$.

(ii) $U \in S \Longrightarrow \{U\} \in Cov(U)$.

(iii) Si $\mathcal{U} \in Cov(U)$ i $U, V \in S$ amb $V \subset U$, aleshores $\mathcal{U} \cap V \in Cov(V)$.

(iv) Si $\mathcal{U}_i \in Cov(U_i)$ i $(U_i) \in Cov(U)$, aleshores $\bigcup \mathcal{U}_i \in Cov(U)$.

He posat aquí sols la definició de topologia de Grothendieck on els oberts són subconjunts de X. Existeix una definició molt més general que no usarem però que la majoria ja en coneixeu exemples (la topologia étale, la topologia fpqc, etc.. sobre un esquema).

El concepte de topologia de Grothendieck està perfectament ajustat a poder definir que és un feix $\mathcal{F}$; un functor que assigna a cada obert admissible un grup (anell, etc...) i que verifica una certa propietat respecte els recobriments: Per a tot obert admissible U i tot recobriment admissible $\{U_i\}$ de U el diagrama

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

és exacte, on les fletxes són les induïdes per les restriccions.

Direm ara que una parella $(X, \mathcal{O}_X)$, on X es un conjunt amb una topologia de Grothendieck i $\mathcal{O}_X$ és un feix d'anells sobre X, és un G-espai localment anellat si, per a tot $x \in X$, l'anell

$$\mathcal{O}_{X,x} := \varinjlim_{U} \mathcal{O}(X),$$

on U recorre els oberts admissibles que contenen a x, és un anell local. Definim la categoria de G-espais localment anellats com la categoria per al qual els morfismes són parelles $(\phi, \psi) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, O_Y)$, on $\phi : X \to Y$ és un morfisme continu de G-espais topològics i $\psi : \mathcal{O}_Y \to \phi_* \mathcal{O}_X$ és un morfisme de feixos d'anells sobre Y tal que el morfisme induït

$$\psi_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

és un morfisme local (i.e. envia l'ideal maximal a l'ideal maximal) per a tot $x \in X$. Recordem que el feix $\phi_* \mathcal{O}_X$ és el que envia a tot V obert admissible de Y l'anell $\mathcal{O}_X(\phi^{-1}(V))$.

Donada una àlgebra afinoide A, definim ara la següent G-topologia a $X = \mathrm{Sp}(A)$: el oberts admissibles són els subconjunts afinoides; els recobriments admissibles són els recobriments **finits** formats per subconjunts afinoides. Aquesta topologia l'anomenarem topologia dèbil de X. Una altre opció, que és la seguida en el llibre **2**, és definir la topologia dèbil amb dominis racionals enlloc de dominis afinoides; les topologies obtingudes són però equivalents.

Finalment, definim el pre-feix $\mathcal{O}_X$ com el que assigna a cada obert afinoide $\mathrm{Sp}(A') \hookrightarrow \mathrm{Sp}(A)$ la àlgebra A'.

Teorema 15 (d'aciclicitat de Tate) *$\mathcal{O}_X$ és un feix.*

Tenim aleshores

Proposició 16 *Donada una k-àlgebra afinoide A, la parella $(X = \mathrm{Sp}(A), \mathcal{O}_X)$ és un G-espai localment anellat. El functor que assigna a cada k-àlgebra afinoide aquest G-espai localment anellat és plenament fidel.*

De fet la topologia dèbil que em introduït no és "prou bona" doncs no es comporta bé respecte recobriments: sabent la G-topologia de cada obert d'un recobriment admissible no determinem la G-topologia del espai total. Per a obtenir la G-topologia forta que és a la pràctica la que utilitzarem necessitem engrandir lleugerament la nostra G-topologia.

Direm que un G-topologia es comporta bé respecte els recobriments si verifica:

(G0) $\emptyset$ i X són oberts admissibles de X.

(G1) Si V és un subconjunt d'un obert admissible U tal que existeix un recobriment per oberts admissibles $\{U_i\}$ de U que verifiquen que $V \cap U_i$ es admissible per a tot i, aleshores V és admissible.

(G2) Si $\{U_i\}$ és un recobriment d'un obert admissible U tal que tots els U_i són admissibles i hi ha un refinament admissible de $\{U_i\}$, aleshores $\{U_i\}$ és admissible.

Aquestes condicions són necessàries per assegurar que la G-topologia en X ve determinada per la G-topologia d'un recobriment admissible de X. Per aconseguir que la G-topologia de les varietats afinoides verifiqui les condicions (G1) i (G2) utilitzem un procediment per "engrandir" G-topologies que ens dóna una G-topologia determinada per la dèbil i que anomenarem la G-topologia forta (o G-topologia) de les varietats afinoides. Aquesta G-topologia és més fina que la topologia dèbil, té com a base d'oberts els subdominis afinoides i tots els seus recobriments admeten un refinament per recobriments finits de subdominis afinoides. A més el feix $\mathcal{O}_X$ per a la topologia dèbil exten de manera única a un feix per a la topologia forta, que denotarem igualment per $\mathcal{O}_X$. A més verifica:

Lema 17 *(i) Sigui X una varietat afinoide. Aleshores tota unió finita de subdominis afinoides és un obert admissible (per a la G-topologia forta), i tot recobriment finit per a subdominis afinoides d'un subconjunt d'aquest tipus és admissible.*

(ii) Per a tot element $f \in A$, és admissible tota unió finita d'oberts del tipus $\{x \in X \; ; \; |f(x)| < 1\}$, $\{x \in X \; ; \; |f(x)| > 1\}$, $\{x \in X \; ; \; |f(x)| > 0\}$.

Com a conseqüència podem veure que tot obert Zariski és un obert admissible per a la G-topologia, i que tot recobriment per oberts Zariski és un recobriment admissible (recordem que les àlgebres afinoides són noetherianes).

Ara, amb aquesta G-topologia s'ha d'anar molt en compte: per exemple, si $X = \mathbb{B}^1$, les boles obertes i tancades i els seus complementaris són oberts admissibles, però no és cert que el recobriment format per una bola oberta i el seu complementari sigui admissible.

Observem que amb aquesta topologia ja hem solucionat els dos problemes mencionats al principi: els nostres espais ja no són totalment disconexos: de fet tenim que una varietat afinoide és connexa (respecte a la G-topologia) si ho és respecte a la topologia de Zariski. I el teorema d'aciclicitat de Tate ens resol el problema 2.

4 Varietats analítiques rígides

Podem ara imitar el que es fa amb la teoria d'esquemes definint una varietat analítica rígida com un espai topològic (de Grothendieck) localment anellat tal que localment és unió de varietats afinoides.

Definició 18 *Una* varietat analítica rígida *sobre K és un G-espai localment anellat $(X, \mathcal{O}_X)$ sobre K tal que:*

(i) La G-topologia de X verifica (G0), (G1) i (G2).

(ii) X admet un recobriment admissible $\{U_i\}$ tal que $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ és una varietat afinoide per a tota i.

Usant aquesta definició tenim per exemple que podem construir K-varietats analítiques enganxant varietats afinoides mitjançant interseccions prescrites (com en el cas dels esquemes), i podem definir els morfismes analítics localment.

Proposició 19 *Donades X_i varietats analítiques juntament amb subvarietats obertes $X_{ij} \subseteq X_i$ i isomorfismes $\varphi_{ij} : X_{ij} \simeq X_{ji}$, verificant que*

(i) $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ji} = id$, $X_{ii} = X_i$ i $\varphi_{ii} = id$.

(ii) El morfisme φ_{ij} indueix morfismes $\varphi_{ijl} : X_{ij} \cap X_{il} \to X_{ji} \cap X_{jl}$ tal que $\varphi_{ijl} = \varphi_{lji} \circ \varphi_{ilj}$.

existeix una única varietat analítica (fora d'isomorfisme) construïda enganxant les varietats X_i via la identificació de X_{ij} amb X_{ji}.

Observem que la unicitat és deguda al fet que les nostres varietats verifiquen (G0), (G1) i (G2) (aquest és el motiu principal pel qual hem hagut d'"engrandir" la nostra topologia dèbil).

També tenim productes fibrats, feixos coherents, immersions tancades, morfismes finits, morfismes separats, morfismes propis, etc.

Exemple 20 L'espai afí $\mathbb{A}^n$. *La idea per "construir" l'espai afí com a varietat afinoide és recobrir-lo per boles tancades centrades en el zero amb radi creixent. Prenem $\pi \in K$ amb valor absolut $c := |\pi| > 1$ i considerem A_i la k-àlgebra de les sèries convergents en la bola de radi c^i i centre 0 a $\bar{K}^n$, i.e.*

$$A_i := K\langle \pi^{-i} X_1, \dots, \pi^{-i} X_n \rangle$$

Tenim una inclusió natural de A_{i+1} dins A_i que ens identifica $\mathrm{Sp}(A_i)$ *com a subdomini afinoide de* $\mathrm{Sp}(A_{i+1})$. *Fem servir aquestes inclusions per "enganxar" les varietats afinoides* $\mathrm{Sp}(A_i)$ *i l'espai analític obtingut l'anomenarem $(\mathbb{A}^n)^{an}$, o $\mathbb{A}^n$ quan quedi clar que ens estem referint a l'espai afí com a espai analític.*

Exemple 21 L'espai projectiu $\mathbb{P}^n$. *La idea és recobrir-lo per $n+1$ còpies de la bola unitat $\mathbb{B}^n$. Prenem*

$$X_i := \mathrm{Sp}\left(k\left\langle \frac{\zeta_0}{\zeta_i}, \ldots, \frac{\zeta_n}{\zeta_i}\right\rangle\right),$$

considerant ζ_j/ζ_i com a indeterminades si $j \neq i$ i com a 1 si $j = i$. Ara, per a tota i i j definim X_{ij} com el subdomini racional de X_i que "inverteix" ζ_j/ζ_i, o sigui

$$X_{ij} := X\left(\left(\frac{\zeta_j}{\zeta_i}\right)^{-1}\right).$$

Identifiquem X_{ij} amb X_{ji} a través de l'isomorfisme natural, i enganxem les varietats X_i mitjançant aquestes identificacions.

Exemple 22 Els tors analítics. *Sigui $q \in K^*$, $0 < |q| < 1$, i considerem el G-espai topològic quocient $\mathbb{G}_m^{an}/q^{\mathbb{Z}}$, on $\mathbb{G}_m^{an}$ el prenem com la subvarietat oberta Zariski de $\mathbb{A}^1$ obtinguda traient-ne l'origen, i on $q^{\mathbb{Z}}$ denota el subgrup de K^* generat per q i actuant a $\mathbb{G}_m$ per "multiplicació". Si considerem els subdominis racionals de $\mathbb{B}^1$ donats per*

$$X_1 := \left\{x \in \mathbb{B}^1 \mid |q| \leq |x| \leq |q|^{\frac{1}{2}}\right\} \ , \quad X_2 := \left\{x \in \mathbb{B}^1 \mid |q|^{\frac{1}{2}} \leq |x| \leq 1\right\}.$$

podem veure fàcilment que el morfisme quocient ens els identifica amb un recobriment per oberts admissibles de $\mathbb{G}_m^{an}/q^{\mathbb{Z}}$ que són varietats afinoides, i per tant ens el doten d'una estructura de varietat analítica. Aquesta varietat és de fet l'analificació d'una corba el·líptica, la corba de Tate. Nota històrica: l'article original de Tate on es desenvolupà l'anàlisi rígida tenia com a objectiu donar un sentit "geomètric" a $\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$.

Utilitzant la mateixa idea que en el primer exemple podem definir una estructura de varietat analítica a qualsevol varietat afí (o en general tot K-esquema afí de tipus finit, i.e. l'espectre d'una K-àlgebra finitament generada). Utilitzant després que els oberts Zariski són oberts admissibles per la G-topologia analítica podem construir tota varietat algebraica (o en general tot K-esquema localment de tipus finit) com a varietat analítica recobrint-la per varietats afins. Es pot veure fàcilment reduint-nos al cas de l'espai afí que tot morfisme com a esquemes ens dóna un morfisme com a varietats analítiques. Així tenim que

Teorema 23 *La correspondència $X \rightsquigarrow X^{an}$ descrita a dalt ens dóna un functor*

$$\{K\text{-esquemes localment de tipus finit}\} \rightsquigarrow \{K\text{-varietats analítiques rígides}\}.$$

A més és verifica que si un esquema localment de tipus finit és connex (regular, reduït, separat, etc.), la seva analificació és també connexa (regular, reduïda, separada, etc.).

Finalment, tenim també un teorema GAGA com en el cas de la relació entre varietats analítiques sobre $\mathbb{C}$ i varietats algebraiques.

Teorema 24 *(i) Sigui X una varietat projectiva i sigui $f : Z \to X^{an}$ un morfisme* finit *entre dues varietats analítiques. Aleshores existeix una varietat projectiva Y i un morfisme finit $g : Y \to X$ de manera que $Y^{an} \cong Z$ i $g^{an} \cong f$.*

(ii) Siguin X i Y dues varietats projectives i sigui $f : X^{an} \to Y^{an}$ un morfisme com a varietats analítiques. Aleshores existeix un morfisme d'esquemes $g : X \to Y$ tal que $g^{an} = f$.

La demostració d'aquest teorema (vegeu **3**) és anàloga a la demostració del teorema GAGA donada per Serre. De fet també es certa la versió de Grothendieck utilitzant esquemes propis enlloc d'esquemes projectius.

Com a conseqüència tenim el teorema de Chow.

Corol·lari 25 *Sigui X una varietat projectiva i sigui V un subconjunt analític de X^{an}, i.e. el subconjunt format localment pels zeros d'un ideal. Aleshores V és l'analificació d'un subesquema tancat de X.*

Finalment mencionarem que hi ha una relació molt estreta (observada per primer cop per Raynaud) entre la geometria rígida analítica i la geometria formal sobre l'anell de valoració del cos K.

Bibliografia

1. S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, Springer-Verlag, 1984.

2. J. Fresnel, M. van der Put, *Géométrie Analytique Rigide et applications*, Prog. in Math. **18**, Birkhäuser, 1981.

3. U. Köpf, Über eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räumen, Schriftenreihe des Math. Inst. Univ. Münster, serie 2, Heft **7**, (1974).

4. J. Tate, Rigid analytic spaces, Invent. Math. **12**, (1971), pag 257–289.